Le problème 4 du numéro 557

d'Au fil des maths

Daniel PERRIN

1 La question

Dans un triangle rectangle la distance entre l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit est la moitié de l'hypoténuse. Pour quels autres triangles la distance entre l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit vaut-elle la moitié d'un des côtés ?

2 Des réponses

Dans un triangle ABC on note O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et G le centre de gravité. On sait depuis Euler qu'on a l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ donc $OH = 3OG$. On dira que le triangle ABC est **pseudo-rectangle** relativement à $[BC]$ si l'on a $OH = \frac{1}{2}BC$. Deux formulations équivalentes de cette propriété, qui seront parfois plus commodes, sont $OG = \frac{1}{6}BC$ et $GH = \frac{1}{3}BC$.

2.1 Construire une figure

On se donne un segment $[BC]$ (qui vérifiera $a := BC = 2\,OH = 6\,OG$) et son milieu A'. On trace sa médiatrice Δ, sur laquelle on prend un point O arbitraire et on construit le cercle Ω de centre O passant par B et C ainsi que le cercle γ de centre O et de rayon $a/6$. On trace ensuite le cercle Γ, homothétique de Ω dans l'homothétie de centre A' et de rapport $1/3$. On appelle G l'intersection de γ et Γ située dans le demi-plan limité par Δ qui contient B (l'autre s'obtient par symétrie par rapport à Δ). La demi-droite $[A'G)$ coupe Ω en A. Alors, le triangle ABC convient. En effet, O est le centre de son cercle circonscrit Ω et G, qui vérifie $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{A'A}$, est son centre de gravité. Comme G est sur γ, on a bien $OG = \frac{1}{6}BC$ comme promis, voir Figure 1.

2.2 Approche analytique

On reprend la méthode précédente en choisissant un repère orthonormé d'origine $A' = (0,0)$, avec $B = (-\alpha, 0)$ et $C = (\alpha, 0)$ où l'on a posé $\alpha = a/2$

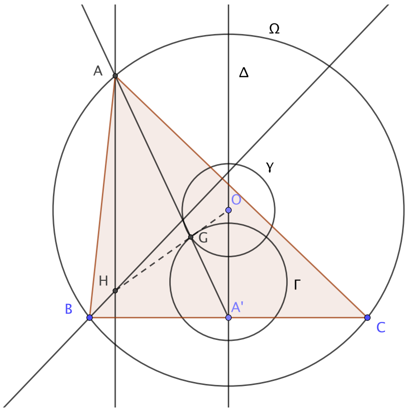
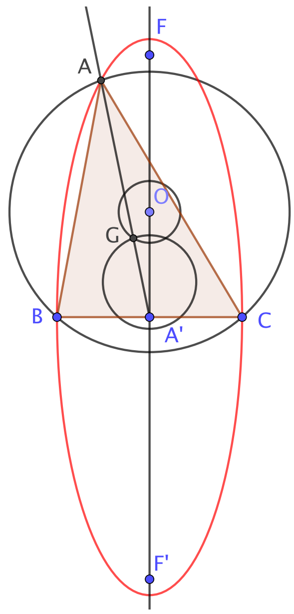


FIGURE 1 – Le triangle ABC est pseudo-rectangle relativement à $[BC]$

et $A = (x, y)$ avec $y > 0$.



On calcule le centre du cercle circonscrit O en écrivant qu'on a $OA = OC$, ce qui donne $O = (0, t)$ avec $t = \dfrac{x^2 + y^2 - \alpha^2}{2y}\cdot$ Le centre de gravité G est égal à $(x/3, y/3)$ et on obtient le lieu des points A convenables en écrivant $OG = (1/6)\, BC = \alpha/3$. On trouve l'équation $(x^2+y^2-\alpha^2)(9x^2+y^2-9\alpha^2) = 0$ réunion du cercle de diamètre $[BC]$ (qui correspond au cas banal où ABC est rectangle en A) et d'une ellipse de petit axe $[BC]$. L'équation de cette ellipse peut encore s'écrire $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{(3\alpha)^2} = 1$ ce qui montre que son grand axe est de longueur 6α et que ses foyers sont les points $(0, \pm 2\alpha\sqrt{2})$, voir Figure ci-contre. On a donc montré :

2.1 Proposition. *Le triangle ABC dont les sommets sont les points $A = (x, y)$, $B = (-\alpha, 0)$, $C = (\alpha, 0)$ est pseudo-rectangle relativement à $[BC]$ si et seulement si A est sur l'ellipse d'équation $9x^2 + y^2 - 9\alpha^2 = 0$.*

2.3 Une relation entre a, b, c

On a une caractérisation des triangles pseudo-rectangles uniquement en termes de longueurs :

2.2 Proposition. *Le triangle ABC, de côtés a, b, c, est pseudo-rectangle relativement à $BC = a$ si et seulement si l'on a :*

$$a^2(b^2 + c^2) = 5a^4 - 4(b^2 - c^2)^2.$$

Démonstration. On reprend le repère introduit au paragraphe précédent, dans lequel on a $A = (x, y)$, $B = (-\alpha, 0)$ et $C = (\alpha, 0)$ avec $\alpha = a/2$. On calcule $c^2 = AB^2 = (x + \alpha)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2\alpha x + \alpha^2$ puis $b^2 = AC^2 = (x - \alpha)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x + \alpha^2$. On en déduit $b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + \alpha^2)$ et $c^2 - b^2 = 4\alpha x$.

Si le triangle est pseudo-rectangle relativement à $[BC]$, on sait que A est sur l'ellipse d'équation $y^2 = 9\alpha^2 - 9x^2$. On en déduit $b^2 + c^2 = 20\alpha^2 - 16x^2$. En remplaçant $4\alpha^2$ par a^2 et x par $(c^2 - b^2)/4\alpha$ on obtient la relation annoncée.

Inversement, si l'on a la relation, en remplaçant $b^2 + c^2$ et $c^2 - b^2$ par les valeurs calculées ci-dessus, on voit que A est sur l'ellipse d'équation $9x^2 + y^2 - 9\alpha^2 = 0$ donc que le triangle est pseudo-rectangle.

2.4 Une caractérisation géométrique par affinité

2.4.1 Énoncé et preuve analytique

2.3 Théorème. *Un triangle ABC est pseudo-rectangle relativement à $[BC]$ si et seulement si il est image d'un triangle rectangle $A_0B_0C_0$ rectangle en A_0 par l'affinité orthogonale d'axe la médiatrice de $[B_0C_0]$ et de rapport $1/3$.*

Démonstration. On prend comme origine d'un repère orthonormé le milieu A' de $[B_0C_0]$ et on pose $B_0 = (-3\alpha, 0)$, $C_0 = (3\alpha, 0)$ de sorte qu'on a $B_0C_0 = 6\alpha$. On pose aussi $A_0 = (3x, y)$. Soit Δ la médiatrice de $[B_0C_0]$ qui n'est autre que l'axe des y. On considère l'affinité orthogonale d'axe Δ et de rapport $1/3$. Elle envoie B_0 et C_0 sur $B = (-\alpha, 0)$ et $C = (\alpha, 0)$ et A_0 sur $A = (x, y)$. Dire que le triangle $A_0B_0C_0$ est rectangle signifie qu'on a $B_0C_0^2 = A_0C_0^2 + A_0B_0^2$ et cela s'écrit $9x^2 + y^2 = 9\alpha^2$ ce qui est bien équivalent à dire que ABC est pseudo-rectangle.

2.4.2 Construction

On déduit de cette caractérisation une autre construction de triangles pseudo-rectangles. On part d'un triangle $A_0B_0C_0$ rectangle en A_0, on trace la médiatrice Δ de $[B_0C_0]$ qui passe par le milieu A' de ce segment, ainsi que la médiane $[A_0A']$ et le centre de gravité G_0 de $A_0B_0C_0$. Le point A est à l'intersection de la perpendiculaire à Δ passant par A_0 et de la perpendiculaire à $[B_0C_0]$ passant par G_0 et les points B, C sont les intersections de

$[B_0C_0]$ respectivement avec les parallèles à (A_0B_0) et (A_0C_0) passant par G_0, car BG_0C est l'image de $B_0A_0C_0$ par l'homothétie de centre A' et de rapport $1/3$.voir Figure 2.

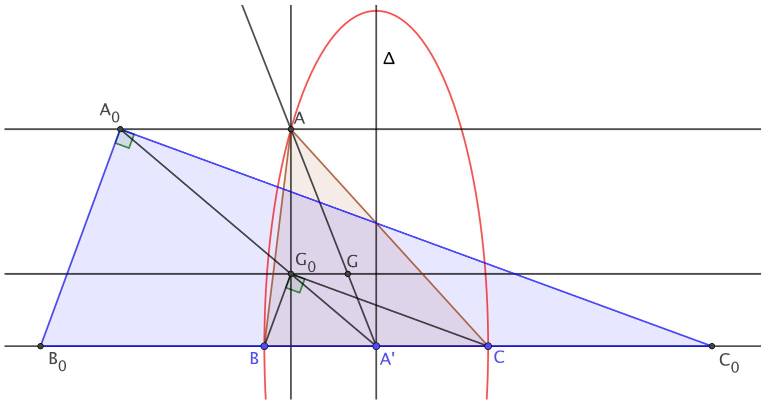


FIGURE 2 – Construction par affinité

2.4.3 Une autre preuve de 2.3

On prend un repère avec $A' = (0,0)$, $B = (-\alpha, 0)$, $C = (\alpha, 0)$, $B_0 = (-3\alpha, 0)$, $C_0 = (3\alpha, 0)$, $A = (x, y)$, $A_0 = (3x, y)$, $G = (x/3, y/3)$, $G_0 = (x, y/3)$. La condition de triangle rectangle peut s'écrire $A'A_0 = A'C_0$, ce qui donne $9x^2 + y^2 = 9\alpha^2$.

On calcule l'orthocentre H de ABC. Il est sur la perpendiculaire à l'axe des x passant par A, de sorte qu'on a $H = (x, \gamma)$ et $\overrightarrow{BH} = (x + \alpha, \gamma)$ et on écrit que ce vecteur est orthogonal à $\overrightarrow{AC} = (x - \alpha, y)$, ce qui donne, en tenant compte de l'équation de l'ellipse, $\gamma = \dfrac{y}{9}\cdot$ On en déduit $GH = 2\alpha/3$.

Je n'ai pas de preuve géométrique de 2.3. Il suffirait de prouver le lemme suivant (ce que je ne sais pas faire autrement qu'analytiquement) :

2.4 Lemme. *L'image de H par l'homothétie f de centre A' est de rapport* 3 *est le point J situé à l'intersection de la hauteur de $A_0B_0C_0$ issue de A_0 et de la perpendiculaire à Δ passant par G_0.*