Le problème 1 du numéro 558

d'Au fil des maths

Daniel PERRIN

1 La question

On a classiquement $\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} = \operatorname{Arctan} 1$. *Pour quels triplets de nombres premiers* p, q, r *a-t-on* $\operatorname{Arctan}\frac{1}{p} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{q} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{r}$ *?*

2 La solution

Proposition. *Les seules solutions en nombres premiers de l'équation ci-dessus sont* $(p, q, r) = (3, 7, 2)$ *et* $(p, q, r) = (7, 3, 2)$.

On traduit la condition en posant $\alpha = \operatorname{Arctan}\frac{1}{p}$, $\beta = \operatorname{Arctan}\frac{1}{q}$ et $\gamma = \operatorname{Arctan}\frac{1}{r}\cdot$ La condition donne $\gamma = \alpha + \beta$ donc $\tan(\alpha+\beta) = \frac{1}{r} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$ soit $r = \frac{pq-1}{p+q}\cdot$

On est donc ramené à résoudre, en nombres premiers, l'équation $r(p+q) = pq-1$. On peut supposer $p \leq q$ et voit aussitôt que le cas $p = q$ est impossible. En effet p diviserait $p^2 - 1$ ce qui est absurde. Le cas $p = 2$ est impossible lui aussi. En effet, on aurait $r(q + 2) = 2q - 1$ et, comme r est premier, $r(q + 2)$ est $\geq 2q + 4$ et c'est absurde.

Les nombres p et q sont donc des nombres premiers impairs. De plus, leurs congruences modulo 4 sont égales. Sinon, on aurait $pq \equiv -1 \pmod 4$ donc $pq - 1 \equiv 2$ et $p + q \equiv 0 \pmod 4$, de sorte que $p + q$ ne pourrait pas diviser $pq - 1$.

Mais alors, si $p \equiv q \equiv \pm 1 \pmod 4$, $pq - 1$ est multiple de 4, tandis que $p + q$ est congru à 2 modulo 4. Il en résulte que r est pair. Comme il est premier, la seule solution est $r = 2$. L'équation devient $2p+2q+1 = pq$, avec $p < q$ qui donne $pq < 4q + 1$ donc $pq \leq 4q$ et $p \leq 4$. La seule solution est $p = 3$, qui donne $q = 7$.

Remarque. Le chemin par lequel j'ai prouvé ce résultat me semble intéressant car c'est une illustration de l'utilisation d'une approche expérimentale comme méthode de recherche d'un problème mathématique. Je le livre donc au lecteur. J'ai utilisé – sans vergogne – le logiciel SAGE pour explorer le problème et quelques lignes de programme m'ont conduit à conjecturer que les solutions $(3,7,2)$ et $(7,3,2)$ étaient les seules. J'ai donc essayé de le prouver, mais je me suis rapidement aperçu qu'il y avait des couples $p \leq q$ autres que $3,7$ tels que le quotient $(pq-1)/(p+q)$ soit entier, par exemple $p=7$, $q=43$ qui donne $r=6$, qui est bien entier mais non premier. J'ai écrit un deuxième programme pour trouver tous les couples $p \leq q \leq 1000$ qui donnent r entier et j'ai constaté que le r en question était toujours pair (sauf dans le cas $p=2$, $q=3$, $r=1$ évoqué dans l'énoncé). Le prouver n'était plus alors qu'une affaire de routine en raisonnant modulo 4 et le résultat était démontré.