

Le problème 2 du numéro 558

d'Au fil des maths

Daniel PERRIN

1 La question

Dans le Sangaku ci-dessous, les cercles sont tangents et tangents à la droite. Si les grands cercles sont de rayon R et le petit de rayon r , que vaut R/r ?

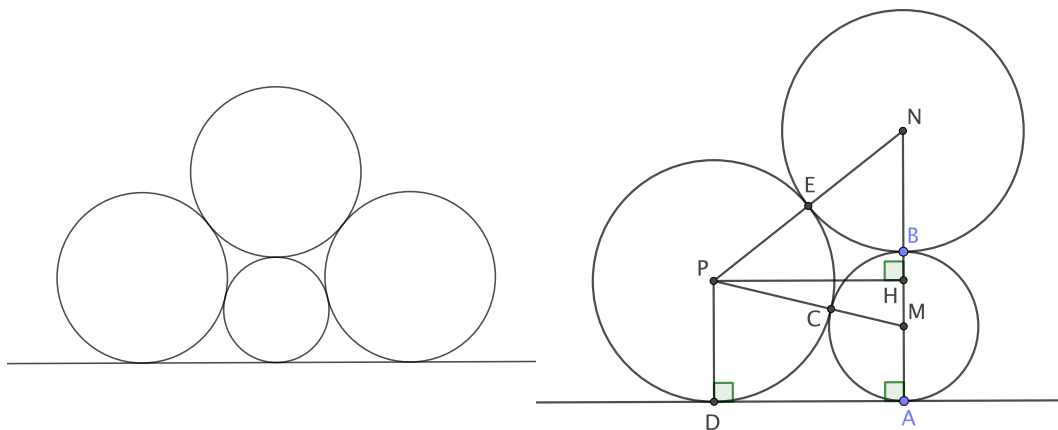


FIGURE 1 –

FIGURE 2 –

2 La réponse

Le cercle de droite est inutile car il s'obtient par symétrie. On appelle M, N, P les centres des cercles et A, B, C, D, E les contacts, voir Figure 2. On considère le projeté orthogonal H de P sur (AB) . Le quadrilatère $ADPH$ est un rectangle donc on a $AH = PD = R$ et $HM = AH - AM = R - r$. Comme on a $PM = PC + CM = R + r$, Pythagore appliqué dans PHM donne $PH^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$. Par ailleurs, on a $HN = AN - AH = R + 2r - R = 2r$. Pythagore appliqué cette fois dans PHN donne $(2R)^2 = 4Rr + 4r^2$ donc $R^2 - Rr - r^2 = 0$ et le rapport $\varphi = R/r$ vérifie l'équation $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. C'est le nombre d'or $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.