

Sur la classification des courbes gauches

Daniel PERRIN

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Mes objectifs	3
1.2	Pourquoi les courbes ?	4
1.3	Pourquoi les courbes gauches ?	4
2	Quelles courbes ?	6
2.1	Quelques exemples	6
2.2	Des points ou des équations ?	7
2.3	Les points, comme l'intendance, doivent suivre	10
2.4	Le cadre de l'étude	11
3	Qu'est-ce que classifier ?	14
3.1	Introduction	14
3.2	Les invariants des courbes : le degré et le genre	15
3.3	Degré et genre arithmétique	16
3.4	Le problème A séparément pour degré et genre	20
3.5	Le problème A pour le degré et le genre	24
3.6	Le problème B : le schéma de Hilbert	25
4	La liaison, le module de Rao et la doctrine du petit livre bleu	28
4.1	Intersections complètes, liaison, courbes ACM	28
4.2	La doctrine du petit livre bleu	32
4.3	L'étape du bas	35
5	L'étape du haut et la connexité du schéma de Hilbert	37
5.1	Un exemple : $H_{4,0}$	37
5.2	La connexité du schéma de Hilbert, le cas des courbes avec des composantes ponctuelles :	38
5.3	La connexité du schéma de Hilbert, pour les courbes sans composantes ponctuelles	38

6	Questions ouvertes et conjectures	40
6.1	L'étape du bas	40
6.2	L'étape du haut	42
7	Annexe : la connexité de $H_{4,0}$	42
7.1	Le schéma $H_{4,0}$	42
7.2	Le lemme de la réunion	43
7.3	Connexité avec des points isolés ou immergés	44
7.4	La connexité sans les points	45

Ce texte est la rédaction de deux conférences faites en novembre 2023 au château de Goutelas, pour les normaliens de l'ENS de Lyon. Je remercie les organisateurs de m'avoir invité à faire ces conférences qui m'ont donné l'occasion de me replonger dans les travaux que j'ai effectués sur le sujet (pour la plupart avec Mireille Martin-Deschamps et pour une partie avec Robin Hartshorne) il y a bien longtemps déjà. Je remercie aussi les élèves qui assistaient à ces exposés pour la qualité de leur attention et la pertinence de leurs questions.

Les exposés en question devaient être rédigés par des élèves de l'ENS, mais ne voyant rien venir, j'ai décidé (en octobre 2026) de mettre cette rédaction sur ma page web.

1 Introduction

1.1 Mes objectifs

Il est clair qu'on ne peut expliquer toute la géométrie algébrique en deux heures de conférence, même aux normaliens. Je vais donc me contenter de survoler quelques notions, sur un thème précis, en renvoyant le lecteur curieux à la bibliographie. Sur ce point, le problème est que, depuis le passage de la tornade Grothendieck, la bibliographie concernant la géométrie algébrique est devenue monstrueuse. Dans un premier temps, je propose trois références¹ pas trop difficiles pour aborder le sujet :

[WF] William Fulton, *Algebraic Curves*, Benjamin, 1969.

[RH] Robin Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, 1977.

[DP] Daniel Perrin, *Géométrie algébrique, une introduction*, Interéditions, 1995.

Voir aussi les références plus précises sur la partie courbes gauches et notamment le “petit livre bleu” [15].

Mon objectif est ici de donner un aperçu des problèmes qui se posent dans le domaine de la classification des courbes gauches, d'évoquer certains éléments de solution et les méthodes qui y conduisent, et de proposer quelques questions ouvertes et/ou conjectures. Plus que la technique, de toutes façons inabordable en un temps si bref, je voudrait mettre en avant quelques questions presque philosophiques :

- La nécessité de perspectives, en un mot d'une vision globale des choses, qui seule permet de guider le chercheur. Par exemple, le fait qu'on s'intéresse à deux types de familles aux antipodes l'une de l'autre : la famille de toutes

1. Dans ce qui suit, ces références seront citées [WF], [RH] et [DP], contrairement aux autres qui seront données par un nombre.

les courbes et au contraire des familles paramétrées par le plus petit espace qui soit (deux points, un gros, un petit, c'est-à-dire le spectre d'un anneau de valuation discrète).

- À l'exact opposé du point précédent, la nécessité de disposer de multiples exemples, y compris numériques, à titre de garde-fou.

- Même si cela peut paraître difficile, l'importance de disposer d'une vraie intuition (appuyée sur des exemples, mais aussi des principes généraux) sur le lien entre algèbre et géométrie. L'une des difficultés essentielles pour un chercheur débutant en géométrie algébrique est le caractère souvent trop abstrait des bases d'algèbre commutative qu'il faut ingurgiter avant d'aborder de vrais problèmes². Pourtant, on peut développer une intuition de notions abstraites comme la platitude, les résolutions, l'importance des matrices et de leurs mineurs, etc. Une règle pour cela est de ne pas avoir peur de faire des calculs³.

1.2 Pourquoi les courbes ?

Le cadre général de ce texte est celui de la géométrie algébrique, étude des objets définis par des équations polynomiales. Précisément, notre objectif est d'étudier les courbes algébriques et surtout les **familles** de ces courbes. Pourquoi les courbes ? Simplement parce qu'après les points, les courbes sont les objets les plus simples de la géométrie algébrique et que, cependant, leurs familles sont déjà très compliquées. Comme le disent Harris et Morrison :

Il n'y a pas de possibilité géométrique, si horrible soit-elle, qu'on ne peut trouver génériquement sur une certaine composante d'un schéma de Hilbert⁴ de courbes.

Cela justifie que l'on s'attaque d'abord aux problèmes des courbes, avant d'aborder celui de variétés de plus grandes dimensions.

1.3 Pourquoi les courbes gauches ?

On appelle **courbes gauches** (par opposition à courbes planes), les courbes de l'espace à trois dimensions⁵.

Il n'est pas évident de comprendre ce choix. Déjà, on pourrait s'intéresser aux courbes indépendamment d'un plongement et il y a effectivement une montagne de travaux sur ce thème, notamment toute la théorie des diviseurs.

2. L'auteur parle d'expérience ici.

3. Il y a aujourd'hui des logiciels qui sont d'une grande aide pour cela.

4. Ce vocable désigne une famille universelle de courbes.

5. On verra que le cadre adéquat est celui de l'espace projectif $\mathbf{P}_k^3$ de dimension 3 sur un corps k algébriquement clos.

Même si cette approche n'est pas disjointe de la nôtre, elle est assez différente, et l'accent mis sur le schéma de Hilbert indique que l'on s'intéresse à la classification des courbes **plongées**.

Une autre question est de comprendre pourquoi les courbes de l'espace de dimension 3 plutôt que celles du plan ou d'un espace de dimension plus grande. Là, il y a une raison décisive : les courbes gauches représentent toutes les courbes algébriques, ce qui n'est pas le cas des courbes planes⁶. Il est facile de s'en convaincre⁷. En effet, si C est une courbe de l'espace de dimension r , on peut la projeter sur un hyperplan H , à partir d'un centre de projection $o \notin C$. Cela signifie qu'on associe à $m \in C$ l'intersection $m' = p(m)$ de la droite (om) avec H . On obtient ainsi une courbe C' de H et si l'on veut qu'elle soit isomorphe à C il faut (au minimum) que p soit injectif sur C ce qui impose que (om) ne coupe pas C en un autre point n , autrement dit que (om) ne soit pas une sécante de C . Mais la variété S des sécantes de C est de dimension 2 (une sécante est donnée par deux points de la courbe) et la réunion V des sécantes (qui se projette sur S avec des fibres de dimension 1) est donc de dimension 3. Si l'on est en dimension ≥ 4 , on peut trouver un point o à l'extérieur de V , c'est-à-dire un bon centre de projection. On se ramène ainsi de proche en proche aux courbes de l'espace de dimension 3. En revanche, on ne peut pas appliquer cette méthode pour passer de l'espace au plan car la réunion des sécantes peut remplir l'espace⁸. On verra d'ailleurs que les courbes planes sont très particulières.

Une autre raison pour privilégier l'étude des courbes gauches c'est qu'elles sont un exemple de codimension 2, et il y a de bonnes raisons de penser que c'est la situation la plus intéressante, le cas de la codimension 1 étant un peu trop simple et celui des plus grandes codimensions bien plus embrouillé.

Enfin, il s'agit d'un problème historique, qui remonte à la fin du XIX-ième siècle. Ainsi, le prix Steiner offert par l'Académie de Berlin sur ce thème a été partagé en 1882 entre Georges Halphen et Max Noether. Cependant, en dépit de leur importance, les travaux de ces auteurs sont loin d'épuiser le sujet (des esprits forts⁹ pensent même qu'il y faudra mille ans ...)

6. Cela signifie que toute courbe d'un espace de dimension > 3 est isomorphe à une courbe de $\mathbf{P}^3$, mais pas nécessairement à une courbe de $\mathbf{P}^2$.

7. Je donne seulement ici un argument intuitif, voir [RH] Ch.IV §3 pour des détails.

8. Exercice : montrer que tout point de $\mathbf{P}^3$ est sur une sécante à la cubique gauche paramétrée par (u^3, u^2v, uv^2, v^3) .

9. Par exemple André Hirschowitz.

2 Quelles courbes ?

2.1 Quelques exemples

On étudie donc les courbes d'un espace de dimension 3, mais il reste nombre de points à préciser. Pour les comprendre, commençons par donner quelques exemples de courbes et de familles.

2.1.1 Des courbes planes

Même si elles ne sont pas notre principal centre d'intérêt, ce sont tout de même des courbes intéressantes¹⁰. Après les droites il y a l'exemple des coniques. Ainsi la famille des courbes d'équations $y^2 - ax^2 - bx = 0$ dans le plan affine des x, y (disons sur $\mathbf{R}$), qui dépend des paramètres a et b , représente à peu près tous les cas possibles. Fixons par exemple $b = 2$. Pour $a > 0$ on a une hyperbole, pour $a = 0$ une parabole, pour $a < 0$ une ellipse (un cercle pour $a = -1$). Si l'on impose $b = 0$, on a deux droites pour $a > 0$, une droite double pour $a = 0$ et pour $a < 0$ un unique point. Ce dernier cas nous indique déjà que le cadre dans lequel nous nous sommes placés n'est pas vraiment satisfaisant : un point c'est tout de même une drôle de courbe.

Un autre exemple est la famille de cubiques d'équations $y^2 = x^3 + ax^2 + b$. Si l'on fixe $b = 2$ et qu'on fait varier a on voit qu'il peut y avoir une ou deux composantes connexes. Si l'on impose $b = 0$, la courbe est singulière au point $(0, 0)$ qui est un point double ordinaire pour $a > 0$, un rebroussement pour $a = 0$, un point isolé pour $a < 0$.

Le lecteur étudiera aussi la famille des cubiques d'équations $xy(x + y - 1) + a = 0$. Pour $a = 0.01$ il y a quatre branches dont une bornée, qui disparaît quand a croît ou quand il est < 0 . Avec $a = 0$ on a une cubique décomposée en la réunion de trois droites¹¹.

Pour le plaisir, les figures ci-dessous montrent deux quartiques célèbres, celle de Klein, d'équation $49(2X + 1)(-X + \sqrt{3}Y + 1)(-X - \sqrt{3}Y + 1) - 3(7(X^2 + Y^2) - 4)^2 = 0$, aux propriétés mirifiques¹² et celle de Salmon avec ses 28 droites bitangentes en évidence : $(X^2 - a^2)^2 + (Y^2 - a^2)^2 - b^4 = 0$.

10. L'utilisation de *GeoGebra* permet de visualiser ces courbes.

11. Ce qu'on appelle une courbe en bâtons, on en verra beaucoup, voir §3.4.3 pour une discussion sur ce thème.

12. Elle a une équation projective bien plus belle : $X^3Y + Y^3T + T^3X = 0$.

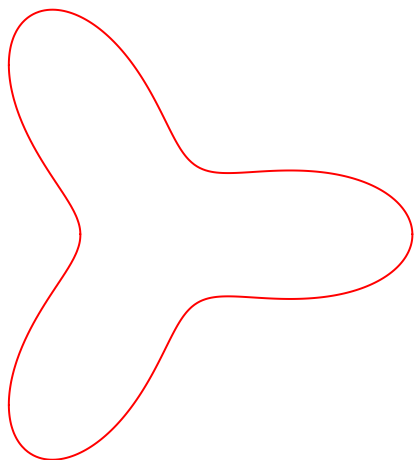


FIGURE 1 – La quartique de Klein

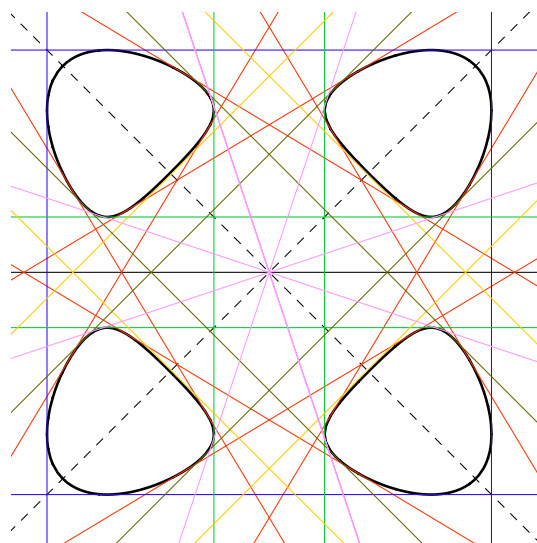


FIGURE 2 – Celle de Salmon

2.1.2 Des courbes gauches

Il s'agit, par exemple, de courbes de l'espace affine (provisoirement), réel (provisoirement). Elles sont définies par deux équations au moins en X, Y, Z . Par exemple la cubique gauche $x = u, y = u^2, z = u^3$, a pour équations $Y = X^2, Z = X^3$ (ou $Z = XY$). La fenêtre de Viviani¹³ est l'intersection d'une sphère et d'un cylindre : $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ et $X^2 + Y^2 - X = 0$. Nous en verrons beaucoup d'autres dans ce qui suit.

2.2 Des points ou des équations ?

2.2.1 Le choix

Dans les exemples précédents on a vu intervenir à la fois les points et les équations, mais il va falloir faire un choix. En effet, il y a deux points de vue antagonistes en géométrie algébrique :

- Celui des points. Ce choix prédomine en géométrie réelle où l'on peut, par exemple, chercher à préciser le nombre de composantes connexes (on parle d'ovales) des courbes. Ainsi, un théorème de Harnack affirme que le nombre n d'ovales d'une courbe plane de degré d vérifie $n \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$.

13. Attention, pas d'erreur, il ne s'agit pas de l'homme politique René Viviani, président du conseil pendant la guerre de 1914 – 1918, qui n'était pas mathématicien, contrairement à son collègue Paul Painlevé, mais du mathématicien italien Vincenzo Viviani, 1622-1703.

C'est le cas aussi en arithmétique, où l'on cherche le nombre de points d'une courbe sur $\mathbf{Q}$ ou $\mathbf{Z}$ ou un corps fini.

- Celui, dual, des équations (c'est-à-dire, ici, des surfaces contenant une courbe donnée). C'est ce point de vue que nous adopterons.

2.2.2 Pourquoi les équations ?

Il y a plusieurs (bonnes ?) raisons générales de privilégier les équations.

1) D'abord, on fait de la géométrie algébrique, et les objets d'étude sont caractérisés par la nature de leurs équations, qui sont polynomiales, contrairement aux objets qui interviennent en géométrie différentielle, par exemple.

2) Une autre idée qui s'est peu à peu imposée en mathématiques, c'est qu'on s'intéresse autant, sinon plus, aux morphismes qu'aux objets (avec le même objet, par exemple une sphère, si l'on ne se préoccupe que de continuité on est en topologie, si l'on impose des hypothèses de différentiabilité, on est en géométrie différentielle, etc.) Or les morphismes ici sont directement liés aux équations.

3) Les équations permettent de donner un sens à la notion de structure multiple, liée à la présence d'éléments nilpotents dans les anneaux de fonctions, qui interviennent notamment pour faire du calcul différentiel dans un cadre algébrique.

4) Ensuite, l'outil algébrique, qui est utilisé en permanence dans le domaine (idéal, algèbre associée, résolutions libres, etc.) est défini avec les équations : les équations engendrent un idéal I dans l'anneau des polynômes R , dont le quotient peut être vu comme une algèbre de fonctions R/I . Cet idéal vient avec sa résolution, c'est-à-dire une suite de R -modules libres (gradués si l'on travaille en projectif). Le premier de ces modules a pour base des éléments qui relèvent les équations, le second, des éléments qui relèvent les relations entre ces équations, et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite de matrices, en nombre fini comme Hilbert l'a montré. Toute l'information sur les objets est dans cette résolution : dimension, degré, genre, cohomologie ... et même les déformations, *via* les triades. Donnons juste un exemple, celui de deux droites d'équations (X, Y) et (Z, T) , l'idéal associé est $I_C = (X, Y) \cap (Z, T) = (XZ, YZ, XT, YT)$ et sa résolution se calcule aisément (surtout avec les logiciels d'algèbre commutative comme Macaulay) :

$$0 \rightarrow R(-4) \xrightarrow{w} R(-3)^4 \xrightarrow{v} R(-2)^4 \xrightarrow{u} I_C \rightarrow 0,$$

y compris avec les matrices explicites entre les termes :

$$u = (XZ, YZ, XT, YT), v = \begin{pmatrix} -Y & 0 & -T & 0 \\ X & 0 & 0 & -T \\ 0 & -Y & Z & 0 \\ 0 & X & 0 & Z \end{pmatrix}, {}^t w = (T, -Z, -Y, X).$$

5) Enfin, le point de vue fonctoriel inauguré par Grothendieck, et qui a révolutionné le domaine, est entièrement fondé sur les équations. Le principe est simple, si l'on a des équations $F_1, \dots, F_r$ qui sont des polynômes de $k[X_1, \dots, X_n]$ (avec pour k un corps, voire un anneau), au lieu de chercher seulement les solutions des F_i dans k , on les cherche dans toutes les k -algèbres B . Alors, avec $k = \mathbf{Z}$, si l'on prend pour B le corps des complexes $\mathbf{C}$ on fait de la géométrie algébrique complexe, si l'on prend $B = \mathbf{Q}, \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{F}_p$ on fait de l'arithmétique, si l'on prend un anneau muni de nilpotents on fait du calcul différentiel.

Ce point de vue fonctoriel est essentiel pour énoncer certaines propriétés (lissité, etc.), et pour formuler les théorèmes d'existence (la notion de foncteur représentable, notamment, qui permet de définir le schéma de Hilbert).

2.2.3 Équations et familles

Outre ces raisons générales, dans le cas de l'étude des familles, on ne comprend bien les phénomènes qu'avec les équations. Donnons quelques exemples de bonnes ou mauvaises familles.

Tout d'abord, un exemple d'une mauvaise famille : il s'agit de la sous-variété du plan définie par les équations $(X, \lambda Y)$ et dépendant du paramètre λ . Le défaut de cette famille c'est que pour $\lambda \neq 0$ elle est définie par $X = Y = 0$: la variété est réduite à l'origine, mais que, pour $\lambda = 0$, l'équation $\lambda Y = 0$ s'évanouit, il ne reste que $X = 0$, donc une droite. Autrement dit, il y a un saut de dimension pour la valeur 0 du paramètre : on dit que la famille n'est pas **plate**, voir §2.4.3 ci-dessous. Algébriquement, si l'anneau des paramètres est ce qu'on appelle un anneau de valuation discrète (avd en abrégé) d'uniformisante¹⁴ λ (par exemple l'anneau des séries formelles $k[[\lambda]]$), cela signifie simplement que dans le quotient $k[[\lambda]][X, Y]/(X, \lambda Y)$, λ est diviseur de zéro (on dit aussi "de torsion"). On écartera ce type de famille.

Donnons un deuxième exemple d'une famille plate, mais qui dégénère : la réunion d'une droite et d'un point, précisément, dans le plan, la réunion de l'axe des y et du point $(\lambda, 0)$. Regardons d'abord cette famille pour $\lambda \neq 0$. Elle est définie par l'intersection des idéaux : $(X) \cap (X - \lambda, Y)$ de $k[X, Y]$.

14. Un anneau de valuation discrète est un anneau local (c'est-à-dire qui n'a qu'un idéal maximal) et principal. L'uniformisante est un générateur de l'idéal maximal.

2.1 Lemme. On a $(X) \cap (X - \lambda, Y) = (X(X - \lambda), XY)$.

Démonstration. On prend $A(X - \lambda) + BY = CX$ dans l'intersection. On écrit $C = C'Y + C''$, avec $C'' \in k[X]$ et en faisant $Y = 0$ on voit que C'' est multiple de $X - \lambda$, d'où le résultat.

On regarde alors la famille définie par l'idéal $(XY, X(X - \lambda))$ et sa limite en 0 qui est donnée par l'idéal (XY, X^2) . D'un point de vue ensembliste, si l'on ne regarde que les points sans se soucier des équations, c'est l'axe des y , mais en réalité, ce n'est pas le cas, puisque l'équation de l'axe des y est seulement $X = 0$ et non $XY = X^2 = 0$. Ici, l'origine est ce qu'on appelle un **point immergé**¹⁵, voir [DP] Ch. X §3.e.

En tous cas, dans ces deux exemples, on voit bien que ce sont les équations qui décrivent les phénomènes et pas seulement les points.

2.3 Les points, comme l'intendance, doivent suivre

Si l'on est convaincu de la prééminence des équations, encore faut-il se donner les moyens que la théorie fonctionne en obligeant les points à se comporter convenablement. L'exemple type de ce principe est le théorème de Bézout : *L'intersection de deux courbes planes C, C' de degrés d et d' (c'est-à-dire définies par des équations polynomiales de degrés d, d') est formée de dd' points.*

Regardons l'exemple d'une conique (définie par cinq points dont A et B) et d'une cubique en utilisant le logiciel GeoGebra pour mouvoir les courbes, voir la figure initiale ci-dessous.

Dans la figure de départ on a 6 points d'intersection comme le théorème l'affirme. Si l'on déplace A vers la droite, entraînant la conique on n'en a plus que 5 (mais avec un contact, donc un point double), puis plus que 4 (deux sont devenus imaginaires). On remet A en place et on bouge B pour faire passer la conique par le point double (5 points), puis pour avoir 4 points¹⁶, et en bougeant A on trouve successivement 3, 2, 1, 0 points d'intersection.

Enfin, si l'on déplace le point A vers le haut, la conique devient une hyperbole et n'a plus que 5 points d'intersection avec la cubique, lorsqu'elles ont même direction asymptotique. Dans ce cas, le sixième point est à l'infini.

Tout cela conduit à prendre trois types de précautions, pour que le théorème reste toujours vrai (voir [WF] ou [DP]) :

- Ne pas oublier les points imaginaires, donc travailler sur les complexes.

15. L'idéal $X(X, Y)$ produit des idéaux (X) et (X, Y) correspond à une sorte de réunion schématique de l'axe des y et de l'origine.

16. Mettre B à l'intérieur de la boucle, sous l'axe des x .

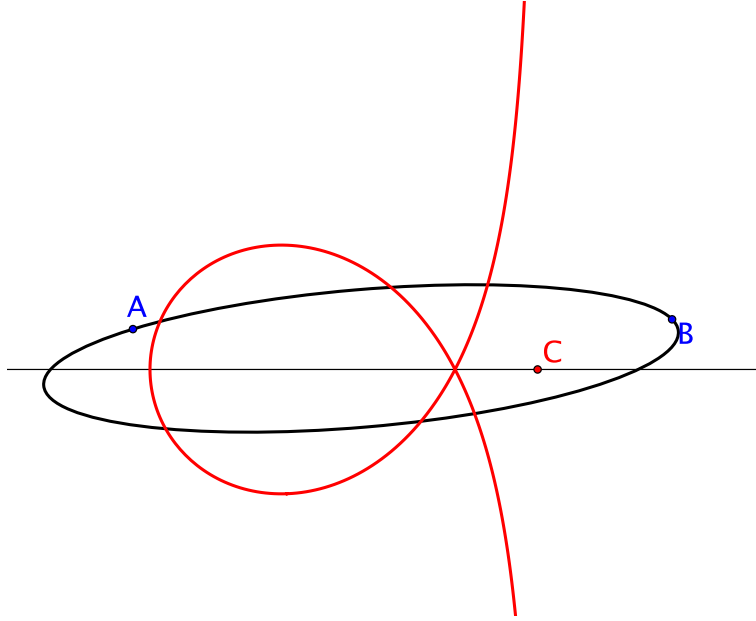


FIGURE 3 – Le théorème de Bézout

- Ne pas oublier les points multiples (points singuliers, courbes tangentes).
- Ne pas oublier les points à l'infini, donc travailler en projectif.

2.4 Le cadre de l'étude

2.4.1 L'espace et ses sous-variétés

L'exemple de Bézout montre qu'il est raisonnable de travailler dans l'espace projectif¹⁷ $\mathbf{P}_{\mathbf{C}}^3$ de dimension 3, sur $\mathbf{C}$ (ou un corps algébriquement clos), avec des coordonnées homogènes (x, y, z, t) . Les sous-variétés¹⁸ de $\mathbf{P}^3$ sont définies par des idéaux $I = (P_1, \dots, P_r)$ où les P_i sont des polynômes **homogènes** en x, y, z, t . La nécessité de polynômes homogènes est évidente si l'on se souvient que les points (x, y, z, t) et $(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t)$ sont égaux dans le projectif.

Deux difficultés doivent être signalées au géomètre débutant :

Attention : Deux courbes projectives planes complexes se coupent toujours, mais pas deux courbes gauches, penser au cas le plus simple de deux droites non coplanaires de l'espace.

17. Sur ce sujet on renvoie à [DP], [WF], [RH], voire à [25].

18. C'est un gros mot, mais il faudrait dire les sous-schémas car on ne s'interdira pas de considérer des structures multiples, donc des anneaux de fonctions qui comportent des éléments nilpotents.

Attention : Une courbe gauche **projective** n'est pas en général une **intersection complète** (c'est-à-dire définie par deux équations).

Par exemple, la cubique gauche, qui a deux équations en affine ($Y - X^2$, $Z - XY$) en a trois en projectif : $YT - X^2$, $ZT - XY$ et $Y^2 - XZ$ (si l'on se limite aux deux premières on a aussi la droite à l'infini $X = T = 0$, avec les deux dernières on a $Y = Z = 0$). Nous reviendrons abondamment sur ce point. Ce qui compte, c'est la donnée de l'idéal¹⁹ I_C qui définit la courbe.

2.4.2 Quelles courbes ?

Il reste à préciser ce qu'on entend par courbes. Bien sûr, les courbes les plus intéressantes sont les courbes lisses (sans points singuliers) et connexes, et ce sont les seules que considéreraient les anciens (par exemple Halphen et Noether). Cependant, il y a au moins deux bonnes raisons de ne pas se limiter à ces courbes. La première est l'importance des déformations. En effet, on a vu que dans les familles peuvent apparaître des courbes réductibles, par exemple des réunions de droites, et c'est un moyen d'investigation que nous utiliserons largement. Il y a une deuxième raison, plus cachée, qui tient à l'opération de liaison dont nous parlerons plus loin et qui joue un rôle crucial dans la théorie. En effet, dans cette opération, même les plus belles courbes peuvent être liées à des courbes réductibles, non connexes, singulières, voire non réduites²⁰. Ainsi, par exemple, la courbe définie par les équations $(X^2, XY, Y^2, XZ^n + YT^n)$ est une structure double sur une droite, mais elle contient dans sa classe de liaison des courbes lisses et connexes, parfaitement honorables, qu'on ne comprend bien qu'en revenant à cette courbe initiale.

Nous donnerons donc droit de cité à ces courbes là. Une seule restriction sera faite : nous supposerons toujours que les courbes ne contiennent pas de points, ni isolés, ni immergés (voir §2.2.3. ci-dessus). La raison tient encore à la liaison et le lecteur pourra s'en convaincre à titre d'exercice : si par exemple C est l'union de $X = Z = 0$ (l'axe des y) et du point $Y = Z = X - \lambda T = 0$, les équations de C sont $XY, X^2 - \lambda XT, Z$ et si on lie C à Γ par XY, Z , on obtient $Y = Z = 0$: l'axe des x , exactement comme si le point n'avait pas été présent.

19. Il y a une petite subtilité ici. En géométrie projective il y a plusieurs idéaux qui définissent la même variété (même au sens des schémas). Par exemple, le plan $Z = 0$ est aussi défini par l'idéal (XZ, YZ, Z^2, ZT) car l'espace est réunion des ouverts $X \neq 0, \dots, T \neq 0$. Quand on parlera de l'idéal d'une courbe il s'agira toujours de l'idéal **saturé** I , c'est-à-dire tel que s'il existe n tel que $X^n f, Y^n f, Z^n f, T^n f \in I$, alors f est dans I .

20. C'est-à-dire présentant des structures multiples.

2.4.3 Quelles familles ?

Une famille de courbes est un morphisme (de variétés, ou plutôt de schémas) $p : \mathcal{C} \rightarrow S$ (où S est l'espace des paramètres), dont les fibres $p^{-1}(s)$ sont des courbes²¹ et qui est supposé **plat**.

Le cas le plus simple est celui, déjà rencontré, des familles dépendant d'un paramètre, c'est-à-dire définies sur un avd Λ , d'uniformisante λ , par exemple $k[[\lambda]]$. Dans ce cas la base S est le spectre de $\Lambda : \text{Spec } \Lambda$. Il s'agit de ce qu'on appelle un schéma, mais dans un cas très simple : S est l'ensemble des idéaux premiers de Λ et il n'y en a que deux : l'idéal maximal $m = (\lambda)$ qui donne le point s et l'idéal nul qui donne le point ξ . Cet espace est muni d'une topologie très simple elle aussi : le point s est fermé et le point ξ ouvert (on l'appelle le point générique). En fait, s est le point qui dans une droite correspond à l'origine et ξ à tous les autres points. À cet espace sont associés deux corps, au point s le corps résiduel $k = \Lambda/m$ ($\lambda = 0$) et au point ξ le corps des fractions K de Λ (λ inversible).

Une famille est alors une sous-variété de l'espace projectif $\mathbf{P}_\Lambda^3$. Elle est définie par un idéal gradué I_Λ de $R_\Lambda = \Lambda[X, Y, Z, T]$, donc engendré par des polynômes homogènes en X, Y, Z, T , à coefficients dans Λ , comme les exemples vus ci-dessus et on suppose que les deux variétés obtenues sur k (en réduisant modulo m donc en faisant $\lambda = 0$) et sur K (en inversant λ) sont des courbes.

Dans ce cas d'un avd, l'hypothèse que la famille est **plate** sur Λ , signifie simplement que λ n'est pas diviseur de zéro dans R_Λ/I_Λ (voir [3] Ch. I, §4, Prop. 3). Géométriquement, cela signifie que $\mathcal{C}$ n'a pas de composante irréductible²² "verticale" c'est-à-dire entièrement située au-dessus de s . Un théorème de Hilbert assure qu'on a une résolution libre²³ de R_Λ/I_Λ c'est-à-dire une suite exacte : $0 \rightarrow L_r \rightarrow L_{r-1} \rightarrow \dots \rightarrow L_1 \rightarrow R_\Lambda \rightarrow R_\Lambda/I_\Lambda \rightarrow 0$ où les L_i sont des R_Λ -modules libres gradués (donc de la forme $\bigoplus_{j=1}^n R_\Lambda(-n_j)$, les nombres $-n_j$ indiquant les degrés des flèches qui sont données par des matrices à coefficients dans R_Λ). La propriété fondamentale de la platitude est alors donnée par la proposition suivante :

2.2 Proposition. *Si la famille est plate, la résolution ci-dessus reste à la fois exacte au point générique ξ et au point fermé s .*

Démonstration. Le fait que la résolution soit exacte en ξ est banal car il s'agit

21. Encore faudrait-il préciser exactement la structure de variété, voire de schéma, de ces fibres.

22. Éventuellement immergée comme le montre l'exemple de la famille non plate $(\lambda X, XY, X^2)$.

23. Ce qui est important c'est que cette résolution n'a qu'un nombre fini de termes.

d'une localisation (voir [3] Ch. II §4, th. 1). Au point fermé, cela résulte du lemme suivant, appliqué aux noyaux successifs de la résolution :

2.3 Lemme. *Soit $0 \rightarrow M' \xrightarrow{j} M \xrightarrow{p} M'' \rightarrow 0$ une suite exacte de Λ -modules. On suppose M'' plat (au sens où λ n'est pas diviseur de 0 dans M''). Alors, la suite obtenue par réduction modulo $m = (\lambda)$ est encore exacte.*

Démonstration. Le seul point est de montrer que j reste injective modulo m . Cela signifie que, si $x \in M'$ donne 0 dans M modulo m il est dans mM' . Mais dire que, dans M , x est nul modulo m , s'écrit $x = \lambda y$ avec $y \in M$ et on a $p(x) = 0 = \lambda p(y)$ dans M'' . Comme λ n'est pas diviseur de 0 dans M'' , on a $p(y) = 0$, donc $y \in M'$ et on a gagné.

3 Qu'est-ce que classifier ?

3.1 Introduction

D'une manière générale, classifier c'est partager un ensemble d'objets en classes (d'équivalence pour une relation $\mathcal{R}$), donc associer à un ensemble X un quotient $X/\mathcal{R}$. Pour cela, on repère des invariants qui sont constants sur les classes. Cela revient à définir une application $\Phi : X \rightarrow Y$ qui à un objet x associe ses invariants $\Phi(x)$, telle que $x\mathcal{R}x' \implies \Phi(x) = \Phi(x')$. Cette application passe au quotient, donc définit $\bar{\Phi} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$.

Se posent alors plusieurs questions :

- $\bar{\Phi}$ est-elle surjective, ou sinon, quelle est son image ? (**Problème A**)
- $\bar{\Phi}$ est-elle injective, ou sinon, quelles sont ses fibres ? (**Problème B**)

Donnons un double exemple très simple : en théorie des groupes finis ou des corps finis, $\mathcal{R}$ étant la relation d'isomorphisme, un invariant naturel est le cardinal du groupe ou du corps.

Le problème A est de déterminer tous les invariants, donc tous les cardinaux, possibles. Dans le cas des groupes finis, c'est facile, ce sont tous les entiers²⁴. En revanche, pour les corps, ce sont seulement les p^n , p premier.

Le problème B est alors de décrire tous les objets admettant des invariants donnés. Cette fois, c'est facile pour les corps finis car il y a un seul corps de cardinal p^n à isomorphisme près. Pour les groupes finis en revanche, la question est à peu près inabordable²⁵.

24. Mais la question serait plus délicate si l'on se limitait aux groupes non cycliques, ou non abéliens.

25. La classification des groupes simples finis requiert déjà 10000 pages de démonstration et pour les p -groupes elle est hors de portée : on se souviendra que pour $n = 16$, il y a déjà 14 groupes distincts, pour $n = 32$ il y en a 51, pour $n = 64$ il y en a 267!.

Pour mesurer les progrès accomplis sur le thème de la classification des courbes gauches depuis quarante ans on pourra aller lire l'article d'Hartshorne de 1979 *On the classification of algebraic curves* dans [21].

3.2 Les invariants des courbes : le degré et le genre

Pour deux courbes, une relation d'équivalence²⁶ importante est d'être dans une même famille plate à base irréductible ou au moins connexe (donc de se déformer l'une en l'autre). C'est pour cette relation qu'on cherche des invariants, en commençant par énumérer des invariants traditionnels des courbes.

Un premier invariant, qui remonte sans doute à Descartes, est le **degré**, nombre de points d'intersection (convenablement comptés) de la courbe avec un plan général. Par exemple la quartique de Klein vue ci-dessus est clairement de degré 4. Plus généralement, le théorème de Bézout assure qu'une courbe plane définie par une équation de degré d est aussi de degré d . Dans l'espace, la fenêtre de Viviani est de degré 4. En effet, comme elle est définie par deux équations de degré 2, si l'on coupe par un plan on a, dans ce plan, deux courbes planes de degré 2 qui ont donc quatre points d'intersection, toujours par Bézout. Plus généralement, une intersection complète de deux surfaces de degrés s et t est de degré st . En revanche, un petit calcul avec le paramétrage montre que la cubique gauche est de degré 3 (ce qui prouve que ce n'est pas une intersection complète, sinon elle serait intersection de deux surfaces de degré 1 et 3, donc plane, et ce n'est pas le cas).

Pour le **genre**, les choses sont moins simples. Pour une courbe **lisse et connexe** une façon de comprendre le genre consiste à penser une courbe projective complexe comme une surface compacte réelle orientée. Le théorème de classification des surfaces (voir par exemple [8]) montre qu'une telle surface est homéomorphe à un tore à g trous : le genre c'est ce nombre g . Ainsi, la droite affine sur $\mathbf{C}$ est un plan affine réel. Pour passer à la droite projective on ajoute un point à l'infini. Une projection stéréographique montre qu'on obtient une sphère : genre 0.

Attention, cet exemple n'est là que pour la culture, nous n'utiliserons **jamais** ce point de vue, préférant les définitions par les équations²⁷.

26. Dite équivalence algébrique.

27. Lors de mon exposé, une question a été soulevée par certains collègues : il existe une autre notion, celle de genre géométrique, défini pour une courbe irréductible, qui est le genre de sa désingularisée, voir par exemple [DP] Ch. IX. Dans ce qui suit, ce n'est pas cette notion qui est en cause.

3.3 Degré et genre arithmétique

3.3.1 Une définition

Soit R l'anneau des polynômes en X, Y, Z, T à coefficients dans k et R_n l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n . On a $\dim_k R_n = \binom{n+3}{3}$.

Soit C une courbe de $\mathbf{P}_k^3$, définie par un idéal homogène I_C (saturé) de $R = k[X, Y, Z, T]$ et R/I_C le quotient, que l'on peut voir comme les restrictions à C des fonctions polynomiales. On a une résolution libre graduée $0 \rightarrow L_4 \rightarrow L_3 \rightarrow F \rightarrow R \rightarrow R/I_C \rightarrow 0$ et on en déduit que, **si n est assez grand**, $\dim_k(R/I_C)_n = \dim R_n - \dim F_n + \dim L_{3,n} - \dim L_{4,n}$ est un polynôme en n . En effet, les dimensions des $L_{i,n}$ sont des coefficients binomiaux, qui, pour n grand, sont des polynômes en n . De plus, on montre que ce polynôme est du premier degré²⁸ en n et on pose $\dim_k(R/I_C)_n = nd + 1 - g$, les nombres d et g étant, par définition, le degré d et le genre arithmétique²⁹ g de cette courbe. On en déduit $\dim I_{C,n} = \binom{n+3}{3} - (nd + 1 - g)$, toujours pour $n \gg 0$.

Cet énoncé mérite quelques commentaires. En fait, il s'agit de la variante la plus faible du théorème de Riemann-Roch qui porte plutôt sur les faisceaux. Précisément, on considère le faisceau (voir [DP] Ch. III) des fonctions régulières sur C (noté $\mathcal{O}_C$) i.e. les fonctions rationnelles définies sur des ouverts (au sens de la topologie de Zariski) de C et ses variantes tordues $\mathcal{O}_C(n)$ (les fonctions de degré n). L'espace des sections globales (i.e. définies partout) est noté $H^0 \mathcal{O}_C(n)$. On montre que, pour n grand, sa dimension $h^0 \mathcal{O}_C(n)$ est un polynôme de degré 1 en n noté $nd + 1 - g$. Toujours pour n grand, cet espace est formé des restrictions à C des fonctions polynomiales homogènes de degré n en x, y, z, t et c'est exactement $(R/I_C)_n$.

L'espace $H^0 \mathcal{O}_C(n)$ est intimement lié à $I_{C,n} = H^0 \mathcal{I}_C(n)$, espace des polynômes homogènes de degré n en X, Y, Z, T nuls sur C (c'est-à-dire des surfaces de degré n contenant C). En termes de faisceaux on a la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I}_C(n) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \rightarrow \mathcal{O}_C(n) \rightarrow 0$ (*) qui, pour n grand, donne la suite exacte sur les sections globales³⁰ :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{I}_C(n) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_C(n) \rightarrow 0$$

28. C'est parce que C est une courbe et cela résulte de relations sur les rangs des modules et sur leurs degrés, voir [DP] Ch. X 2.4 pour un cas particulier et ci-dessous l'exercice 3.1.

29. On dira seulement genre. On le note quelquefois p_a .

30. L'hypothèse n grand est essentielle. Pour n petit, la dernière flèche n'est pas nécessairement surjective. C'est ici qu'apparaissent les groupes de cohomologie, voir plus loin.

et on retrouve la formule³¹

$$h^0 \mathcal{I}_C(n) := \dim H^0 \mathcal{I}_C(n) = \binom{n+3}{3} - (nd + 1 - g).$$

3.3.2 Parenthèse : la cohomologie

Attention, la suite exacte $(*)$ ci-dessus est une suite exacte **de faisceaux** i.e. locale. Sur les sections globales la flèche $H^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_C(n)$ n'est pas toujours surjective. Par exemple, si l'on prend pour C la réunion disjointe de deux droites on a $h^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}} = 1$ mais $h^0 \mathcal{O}_C = 2$.

Les groupes de cohomologie permettent de quantifier ce défaut de surjectivité, ainsi l'on a :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{I}_C(n) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_C(n) \rightarrow H^1 \mathcal{I}_C(n) \rightarrow 0.$$

Plus généralement, quand on a un faisceau $\mathcal{F}$ sur une variété X , on définit, à côté de ses sections globales $H^0(X, \mathcal{F})$, des groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$ dont la propriété essentielle, lorsqu'on a une suite exacte de faisceaux $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$, est de fournir une suite exacte longue :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{F} \rightarrow H^0 \mathcal{G} \rightarrow H^0 \mathcal{H} \rightarrow H^1 \mathcal{F} \rightarrow H^1 \mathcal{G} \rightarrow H^1 \mathcal{H} \rightarrow H^2 \mathcal{F} \rightarrow H^2 \mathcal{G} \dots$$

Sur ce sujet, voir [RH] Part III ou [DP] ch. VII.

3.3.3 Un exercice

3.1 Exercice. On suppose qu'on a un idéal I avec une résolution $0 \rightarrow L_4 \rightarrow L_3 \rightarrow F \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$ où les modules L_4, L_3, F sont libres gradués : $F = \bigoplus_{i=1}^r R(-m_i)$, $L_3 = \bigoplus_{j=1}^s R(-n_j)$ et $L_4 = \bigoplus_{k=1}^t R(-p_k)$.

1) Montrer que, pour n grand, $\chi(n) := \dim_k(R/I)_n$ est un polynôme en n .

2) Montrer que $\chi(n)$ est de degré ≤ 2 si et seulement si on a $s+1 = r+t$.

3) Montrer que $\chi(n)$ est de degré ≤ 1 si et seulement si l'on a, de plus, $\sum_{j=1}^s n_j = \sum_{i=1}^r m_i + \sum_{k=1}^t p_k$.

3.3.4 Deux exemples

1) Sur la droite D d'équations $X = Y = 0$, les fonctions homogènes sont les polynômes en Z, T :

$$a_n Z^n + a_{n-1} Z^{n-1} T + \dots + a_1 Z T^{n-1} + a_0 T^n.$$

31. D'une manière générale, on note avec une minuscule la dimension des espaces vectoriels : $h^i \mathcal{F}$ pour $H^i \mathcal{F}$ ou $\ker f$ pour $\text{Ker } f$ par exemple.

On a $h^0 \mathcal{O}_C(n) = n + 1 = nd + 1 - g$ d'où $d = 1$ et $g = 0$.

2) La conique d'équations $Y^2 - XT = Z = 0$ est paramétrée par $u^2, uv, 0, v^2$.
On a $h^0 \mathcal{O}_C(n) = 2n + 1$ d'où $d = 2$ et $g = 0$.

3.2 Remarque. On se convainc facilement que le degré ainsi défini est bien le même que sa version naïve avec les sections planes, voir [DP] Ch. VIII.

3.3.5 Les invariants sont des invariants !

Dans ce qui précède on a défini deux invariants, le degré et le genre. Encore faut-il prouver que ce sont bien des invariants au sens de la relation qui identifie deux courbes d'une même famille. Nous nous contenterons du cas d'une famille paramétrée par un avd :

3.3 Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une famille (plate) de courbes de $\mathbf{P}^3$ paramétrée par $S = \text{Spec } \Lambda$ où Λ est un anneau de valuation discrète, s le point fermé et ξ le point générique de S . Les degrés et genres des courbes C_s et C_ξ sont égaux.*

Démonstration. On a une résolution libre graduée $0 \rightarrow L_r \rightarrow L_{r-1} \rightarrow \cdots \rightarrow L_0 \rightarrow R/I_C \rightarrow 0$ (avec $L_0 = R$) dont on a vu qu'elle vaut à la fois sur Λ , sur son corps résiduel k (donc en s) et son corps des fractions K (donc en ξ). Dans une telle situation, le lecteur vérifiera qu'on a la formule : $\dim(R/I_C)_n = \sum_{k=0}^r (-1)^k \dim L_{k,n}$. Comme les dimensions des $L_{k,n}$ sont connues avec les degrés figurant dans la résolution (ce sont des coefficients binomiaux), on a le résultat.

3.4 Remarque. Sur un avd, la condition de platitude est équivalente au fait que degré et genre sont les mêmes aux points générique et fermé (voir [RH] Ch. III, 9.9).

3.5 Exemple. Comme l'espace des courbes de $\mathbf{P}^2$ de degré d est un espace projectif de dimension $\binom{d}{2} - 1$, donc irréductible, une courbe plane de degré d se déforme en d droites en position générale. Pour calculer son degré et son genre, il suffit de le faire dans ce cas particulier.

3.6 Exemple. Dans le cas d'une famille non plate, ni le degré ni le genre ne sont conservés. Ainsi, la famille définie par $I_\Lambda = (XT - YZ, Y^2 - XZ, \lambda(Z^2 - YT))$ est égale à la cubique gauche pour $\lambda \neq 0$, donc de degré 3 et genre 0, mais pour $\lambda = 0$ on obtient l'idéal $(XT - YZ, Y^2 - XZ)$ qui définit l'intersection complète de deux quadriques, de degré 4 et genre 1 (elle contient la cubique gauche mais aussi la droite (X, Y)).

3.3.6 Calcul des invariants pour des réunions

Nous utiliserons beaucoup de réunions de courbes comme exemples, ce qui justifie d'établir le lemme suivant.

3.7 Lemme. 1) Une réunion de deux courbes C_1 et C_2 de degrés d_1 et d_2 et de genres g_1 et g_2 avec r points d'intersection (simples) est de degré $d_1 + d_2$ et de genre $g = g_1 + g_2 + r - 1$.

2) Une réunion de d droites avec r points d'intersection³² (simples) est de degré d et de genre $r + 1 - d$.

Démonstration. Le point 2) résulte de 1) par récurrence. Montrons le point 1). Soit $Z = C_1 \cap C_2$, de sorte que $I_Z = I_{C_1} + I_{C_2}$. La recette est une variante³³ du “lemme chinois” :

3.8 Lemme. Soit R un anneau, I, J deux idéaux de R . On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow R/I \cap J \xrightarrow{\bar{\varphi}} R/I \times R/J \xrightarrow{\psi} R/(I + J) \rightarrow 0.$$

Démonstration. La flèche $\bar{\varphi}$ provient par passage au quotient de $\varphi(a) = (\hat{a}, a^\vee)$ de R dans $R/I \times R/J$ dont le noyau est $I \cap J$, de sorte que $\bar{\varphi}$ est injective. La flèche ψ associe³⁴ à $(\hat{a}, b^\vee)$ la classe de $b - a$ modulo $I + J$. Elle est clairement surjective et on a $\text{Im } \bar{\varphi} \subset \text{Ker } \psi$. Reste à voir l'égalité. On se donne $(a, b) \in R^2$ tels que $b - a \in I + J$. On a donc $b - a = c + d$ avec $c \in I$ et $d \in J$, donc $e := a + c = b - d$ et on a bien $\varphi(e) = (\hat{a}, b^\vee)$.

Dans le cas présent, on a $\dim(R/I_Z)_n = r$ pour n grand. En effet, si $Z = \{\overline{m_1}, \dots, \overline{m_r}\}$, on a un homomorphisme $R_n \rightarrow k^r$ qui à f associe $(f(m_1), \dots, f(m_r))$, dont le noyau est $I_{Z,n}$, et qui est surjective pour n grand comme le montre le lemme suivant que le lecteur ne manquera pas de vérifier :

3.9 Lemme. Soient d un entier ≥ 1 , r un entier > 0 , $m_1, \dots, m_r$ des vecteurs de k^{d+1} dont les images dans $\mathbf{P}^d$ sont distinctes et $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des éléments de k . Si n est assez grand, il existe un polynôme F en $X_0, \dots, X_d$, homogène de degré n , tel que l'on ait $F(m_i) = \lambda_i$ pour tout i .

La suite du lemme chinois donne alors, pour $n \gg 0$, $nd + 1 - g = nd_1 + 1 - g_1 + nd_2 + 1 - g_2 - r$, d'où le résultat.

32. D'ailleurs Halphen, dans les années 1880, ne parlait pas de genre mais du nombre de “points doubles apparents” de la courbe (ici r).

33. On n'est pas loin ici du théorème $AF + BG$ de Max Noether, voir [25] Partie III, th. 3.6.4.

34. Il faut vérifier que cette flèche est bien définie. Ce n'est pas difficile, mais, attention, le produit n'est pas un quotient de $R \times R$.

3.10 Remarque. En vérité, ici, l'approche par les faisceaux est plutôt plus simple. En effet, on a la suite exacte de faisceaux : $0 \rightarrow \mathcal{O}_{C_1 \cup C_2} \rightarrow \mathcal{O}_{C_1} \oplus \mathcal{O}_{C_2} \rightarrow \mathcal{O}_{C_1 \cap C_2} \rightarrow 0$ et en écrivant l'additivité des caractéristiques d'Euler-Poincaré on a le résultat.

On en déduit le degré et le genre des courbes planes :

3.11 Corollaire. Une courbe plane, définie par les équations $Z = 0$ et $F(X, Y, T) = 0$ avec F de degré d est de degré d et de genre $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Démonstration. En effet, une courbe plane se déforme en d droites et on applique le lemme précédent, le nombre de points d'intersection des droites étant $(d-1) + (d-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{d(d-1)}{2}$.

3.12 Remarques. 1) On voit que les genres des courbes planes ne sont pas tous les entiers, on obtient seulement 0, 1, 3, 6, 10, etc.

2) Une autre manière de déterminer le genre d'une réunion de droites consiste à compter le nombre de régions bornées³⁵ délimitées par ces droites, comme on le voit sur la figure 4 ci-dessous. (La courbe est de degré 6, avec 15 points d'intersection et 10 régions bornées.)

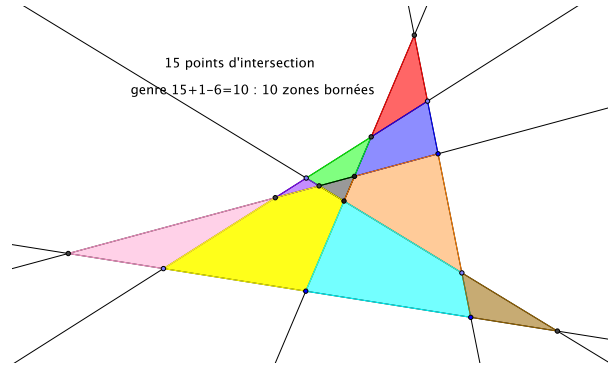


FIGURE 4 –

3.4 Le problème A séparément pour degré et genre

3.4.1 Le degré

Il y a des courbes lisses et connexes de tout degré d entier ≥ 1 . Il suffit de prendre la courbe plane définie par $Z = 0$ et $X^d + Y^d - aT^d = 0$. Son allure

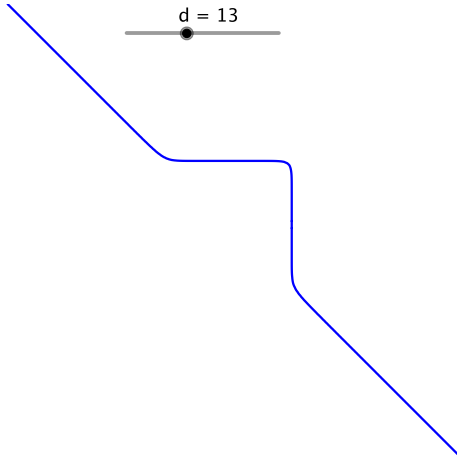


FIGURE 5 – Degré 13

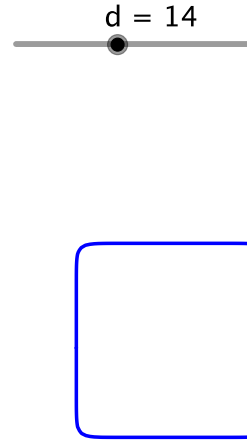


FIGURE 6 – Degré 14

pour $a = 18$ et $d = 13$ ou 14 est donnée dans les figures 5 et 6.

3.4.2 Le genre

Cette fois, on a vu que les courbes planes ne suffisent plus. Par exemple, il n'y a pas de courbe plane (lisse) de genre 2. On va donc essayer d'en construire avec des droites de l'espace et d'abord une courbe de degré 5 avec trois droites disjointes qui rencontrent chacune deux autres droites disjointes, formant ainsi deux régions. On va trouver cette courbe sur la surface la plus simple après le plan, savoir la quadrique Q , d'équation $XY - ZT = 0$. On sait que cette surface contient deux familles de droites, avec des propriétés d'incidence très simples :

- deux droites d'une même famille sont disjointes,
- deux droites de deux familles différentes se coupent en un unique point,
- par tout point de la quadrique passe une droite de chaque famille.

C'est une propriété des sous-espaces totalement isotropes des formes quadratiques, que l'on peut aisément prouver à la main, les deux familles de droites sont données par les équations $\alpha Z = \beta X$, $\alpha Y = \beta T$ et $\gamma Z = \delta Y$, $\gamma X = \delta T$. On a alors le résultat suivant, qui découle de 3.7 :

3.13 Proposition. *La courbe, tracée sur la quadrique Q , formée de a droites d'une famille et b droites de l'autre, est de degré $a+b$ et de genre $ab+1-a-b = (a-1)(b-1)$.*

35. Cela rappelle les trous des tores.

Démonstration. Le nombre de points d'intersection est ab .

3.14 Remarques. 1) Avec $a = 2$ et $b = 3$ on obtient une courbe de degré 5 et de genre 2, voir figure 7.

2) Plus généralement, avec $a = 2$ et $b = g + 1$ on obtient une courbe de genre g pour tout $g \geq 0$. Il existe de telles courbes lisses et connexes.

3) Si l'on ne se limite pas aux courbes lisses et connexes, il y a aussi des courbes de tous les genres $g < 0$. Par exemple la réunion de n droites disjointes est de genre $-(n-1)$ et la droite double d'équations $X^2, XY, Y^2, XZ^n + YT^n$ est de degré 2 et genre $-n$, voir 3.16 ci-dessous.

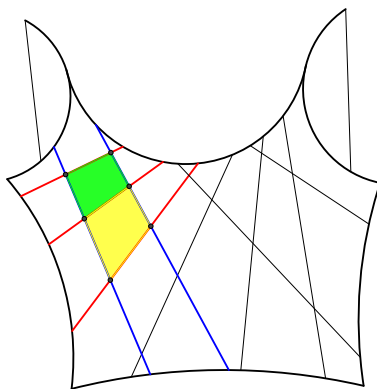


FIGURE 7 – Une courbe de degré 5 et genre 2 sur la quadrique

3.4.3 Une parenthèse : courbes lisses et courbes en bâtons

Dans tout ce qui précède, on a abondamment utilisé ce qu'on appelle les “courbes en bâtons” (*stick figures* en anglais), c'est-à-dire les réunions de droites. Attention toutefois à deux écueils.

- Toutes les courbes en bâtons ne sont pas “lissifiables”. Ainsi, l'union d'un quadrilatère plan et d'une droite le coupant en un point est une courbe de degré 5 et genre 3 non lissifiable. En effet, si une courbe lisse et connexe, de degré 5 et genre 3, existait, on aurait $h^1 \mathcal{O}_C(1) = 0$ (car $d > 2g - 2$), donc $h^0 \mathcal{O}_C(1) = 5 + 1 - 3 = 3 < 4$ et cette courbe serait plane. Mais on a vu que le genre des quintiques planes est égal à 6.

On peut montrer, toutefois, que les courbes de type a, b avec $a, b > 0$ sur les quadriques sont bien lissifiables³⁶, on parle de courbes de **bidegré** a, b .

36. Le lecteur vérifiera par exemple que la courbe d'équations $XY - ZT = X^3 - XT^2 -$

Dans ces questions, si l'on ne sait pas prouver la lissité, on peut toujours invoquer le saint nom de Bertini³⁷.

- Une courbe lisse ne se déforme pas toujours en une réunion de droites. Il s'agit du célèbre problème de Zeuthen (1839-1920), qui motivait l'espoir de Severi (1879-1961) de ramener l'étude des courbes gauches à celle des figures en bâtons. Le plus petit contre-exemple connu est $d = 30$, $g = 113$ (Hartshorne, 1995) et ce n'est pas un résultat facile.

3.4.4 Une autre parenthèse : résolutions et invariants

Un mot sur les calculs. On a vu qu'une courbe est donnée par son idéal et si l'on connaît celui-ci (par ses générateurs) on peut calculer à la fois sa résolution, sa cohomologie et ses invariants. Donnons quelques exemples simples.

3.15 Exemple. Une intersection complète de deux surfaces de degrés a et b est donnée par l'idéal $I_C = (F, G)$ où F, G sont des polynômes homogènes, de degrés respectifs a et b , sans facteur commun. La résolution de I_C est particulièrement simple :

$$0 \rightarrow R(-a-b) \xrightarrow{\varphi} R(-a) \oplus R(-b) \xrightarrow{\theta} I_C \rightarrow 0$$

avec $\theta = (F, G)$ (on envoie les générateurs des modules libres $R(-a)$ et $R(-b)$ sur les polynômes F et G , les chiffres $-a$ et $-b$ correspondent au décalage de la graduation) et ${}^t\varphi = (-G, F)$. Ce dernier point est un petit calcul : on cherche les polynômes A, B tels que $AF + BG = 0$. Mais, comme F et G sont premiers entre eux, F divise B : on a $B = FB'$ et on en déduit $A = -B'G$.

Cette résolution se traduit en faisceaux :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a-b) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-b) \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0.$$

On en déduit³⁸ le calcul de la caractéristique d'Euler de $\mathcal{I}_C$ (pour n grand ce n'est rien d'autre que la dimension de $(I_C)_n$) : $\chi \mathcal{I}_C(n) = \chi \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n-a) + \chi \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n-b) - \chi \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n-a-b) = \binom{n-a+3}{3} + \binom{n-b+3}{3} - \binom{n-a-b+3}{3} = \binom{n+3}{3} - (nd + 1 - g)$ avec $d = ab$ et $g = \frac{1}{2}ab(a+b-4) + 1$.

$\overline{Y^2Z - Z^3 = TX^2 - T^3 - Y^3 - YZ^2 = 0}$ est une courbe lisse de degré 5 et genre 2 tracée sur la quadrique $XY - ZT = 0$.

37. Eugenio Bertini, 1846-1933, est un géomètre italien qui a montré un célèbre théorème sur ce sujet, dont les variantes sont innombrables.

38. Il y a des méthodes pour faire ce type de calculs de manière agréable, voir les chapitres I et II de [15].

3.16 Exemple. La courbe d'idéal $I_C = (X^2, XY, Y^2, XZ^n + YT^n)$.

On calcule facilement ³⁹ la résolution de I_C :

$$0 \rightarrow R(-n-2) \xrightarrow{\psi} R(-3)^2 \oplus R(-n-1)^2 \xrightarrow{\varphi} R(-2)^3 \oplus R(-n) \xrightarrow{\theta} I_C \rightarrow 0$$

$$\text{avec } \theta = (X^2, XY, Y^2, XZ^n + YT^n), \varphi = \begin{pmatrix} -Y & 0 & -Z^n & 0 \\ X & -Y & -T^n & -Z^n \\ 0 & X & 0 & -T^n \\ 0 & 0 & X & Y \end{pmatrix} \text{ et } {}^t\psi =$$

$$(Z^n, T^n, -Y, X).$$

En calculant, pour r grand, la dimension $h^0 \mathcal{O}_C(r) = \dim(R/I_C)_r$, on en déduit $d = 2$ et $g = -n$.

3.5 Le problème A pour le degré **et** le genre

Le problème sérieux est de déterminer les couples (d, g) qui peuvent être les degré et genre d'une courbe gauche. Pour les courbes lisses et connexes, le résultat est difficile. Voici la réponse :

3.17 Théorème. *Les couples (d, g) possibles pour degré et genre des courbes lisses et connexes de $\mathbf{P}^3$ sont les suivants :*

- 1) *Pour les courbes planes, d quelconque et $g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \sim d^2/2$.*
- 2) *Pour les courbes tracées sur les quadriques : $d = a+b$, $g = (a-1)(b-1)$ avec a, b entiers > 0 . On a $g \leq d^2/4$.*
- 3) *Pour les courbes tracées sur des surfaces de degré ≥ 3 : $d \geq 3$ et*

$$0 \leq g \leq 1 + \frac{d(d-3)}{6} \leq \frac{d^2}{6}.$$

Ce théorème a été énoncé par Halphen en 1882 (voir [10]), mais sa démonstration n'était pas complète. Il a finalement été prouvé par Laurent Gruson et Christian Peskine en 1982 (voir [9]). Gruson et Peskine ont d'ailleurs montré que la preuve d'Halphen était incorrecte (celui-ci prétendait qu'on pouvait trouver tous les genres avec des courbes tracées sur des surfaces cubiques et ils ont montré qu'il fallait aussi utiliser des surfaces de degré 4).

3.18 Exemple. Pour $d = 20$, voici les résultats précis.

- Les courbes planes de degré 20 sont de genre $g = 171$.
- Les courbes de degré 20 sur les quadriques sont de genre $g = 81, 80, 77, 72, 65, 56, 45, 32, 17, 0$.

³⁹ Il y a un algorithme explicite pour cela qui utilise ce qu'on appelle les bases de Gröbner qui est implanté sur de nombreux logiciels dont Macaulay2 .

- Avec les courbes sur des surfaces de degré 3 on obtient tous les genres vérifiant $0 \leq g \leq 57$, sauf $g = 1, 2, \dots, 6$ et $g = 10, 11$.
- Avec les courbes sur des surfaces de degré ≥ 3 on obtient tous les genres vérifiant $0 \leq g \leq 57$.

3.19 Remarque. Pour les courbes plus générales (éventuellement singulières, réductibles, non réduites ...) le résultat est beaucoup plus facile. Outre les courbes planes, on obtient tous les couples (d, g) avec $d \geq 2$ et $g \leq \frac{(d-2)(d-3)}{2}$ (y compris les genres < 0). Ainsi la courbe d'équations $(X^2, XY, Y^{l+2}, XT^{a+l} + Y^{l+1}Z^a)$ est de degré $l+2$ et de genre $(d-2)(d-3)/2 - a$, [20] Prop. 0.5.

3.6 Le problème B : le schéma de Hilbert

3.6.1 La définition et les questions principales

Maintenant qu'on a déterminé l'image de l'application qui à C associe son degré et son genre, on s'intéresse à ses fibres, autrement dit à l'ensemble $H_{d,g}$ des courbes de degré d et genre g . Le point essentiel – que les anciens considéraient comme évident, mais qui ne l'est pas⁴⁰ – c'est que $H_{d,g}$ est muni d'une structure de variété algébrique (ou plutôt de schéma⁴¹) (Grothendieck, 1960).

3.6.2 Les questions

Ce sont celles que l'on peut se poser sur n'importe quelle variété (n'importe quel schéma) : est-il connexe ? irréductible⁴² ? est-il lisse ? ou au moins réduit ? quelle est sa dimension ?

Attention, bien entendu, ces questions dépendent du type de courbes que l'on s'autorise.

3.6.3 Quelques réponses

Les lauréats du prix Steiner, Noether et Halphen, ont apporté une première réponse à ces questions. Halphen en résume bien la philosophie :

40. L'idée de la construction est de considérer le schéma des sous-espaces vectoriels $H^0 \mathcal{I}_C(n)$ de $H^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$ pour n assez grand, ce qu'on appelle une grassmanienne.

41. Cela signifie en particulier qu'il n'est pas nécessairement réduit (il peut y avoir des structures multiples).

42. Rappelons qu'une variété est dite réductible si elle est réunion de deux sous-variétés fermées. L'exemple type de variété réductible est constitué de la réunion de deux plans (ou de deux surfaces) de $\mathbf{P}^3$.

Énumérer, définir et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre, plus générale.

En termes modernes, le problème crucial est de décrire les composantes irréductibles de $H_{d,g}$. C'est le problème dont André Hirschowitz estime qu'on ne le résoudra pas avant mille ans !

Parmi les résultats partiels, en voici un qui vaut lorsque le genre est petit :

3.20 Théorème. (Severi 1920, Ein⁴³ 1985) Si on a $g \leq d-3$, $H_{d,g}^0$ (schéma de Hilbert des courbes lisses et connexes) est irréductible et de dimension $4d$. Il est lisse pour $g \leq d/2$.

3.21 Remarques. 1) Rappelons qu'a priori g peut aller jusqu'à une valeur de l'ordre de $d^2/6$. On voit que le théorème de Ein-Severi ne règle donc qu'une petite partie des cas.

2) Attention aussi, il ne vaut que pour les courbes lisses et connexes. Par exemple, nous verrons que $H_{4,0}$ (si l'on tolère des courbes non lisses connexes) possède deux composantes irréductibles⁴⁴.

3.6.4 Un exemple : le schéma de Hilbert $H_{9,10}$

Cet exemple – dû à Halphen – est important car c'est le plus petit (pour les courbes lisses et connexes) où le schéma de Hilbert n'est pas irréductible. Il y a en effet deux composantes que nous pouvons illustrer avec des courbes en bâtons.

Il y a tout d'abord les courbes de bidegré $(6, 3)$ sur les quadriques (qu'on dira de type 1), mais aussi les intersections complètes de deux surfaces de degré 3 (le type 2). Nous donnons ci-dessous des figures représentant ces deux types. Les courbes sont en bâtons, mais elles peuvent être lissifiées (invoquer Bertini!). On peut montrer que ces deux types forment deux composantes irréductibles : aucune n'est spécialisation de l'autre. Un argument pour cela est que toutes deux sont de dimension 36, voir plus loin.

On comprend mieux le phénomène en utilisant la cohomologie, voir ci-dessous §3.3.2, et le théorème de semi-continuité. Examinons la caractéristique

43. La preuve de Severi était incomplète, notamment parce que les diverses notions n'étaient pas bien définies.

44. On pourrait penser qu'il est un peu vain de s'intéresser au cas de courbes réductibles, voire non réduites, jugées trop vilaines. Mais, outre qu'il s'agit d'une discrimination insupportable, c'est négliger le fait que ces courbes ont dans leur descendance par liaison des courbes lisses et connexes et que les singularités du schéma de Hilbert se transmettent à celles-là, comme les anomalies génétiques.

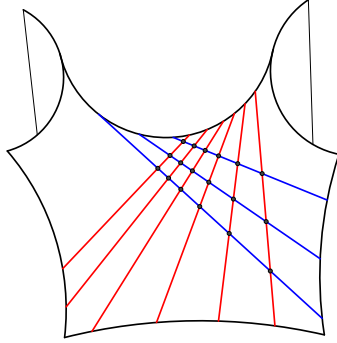


FIGURE 8 – Les courbes (9,10) sur une quadrique

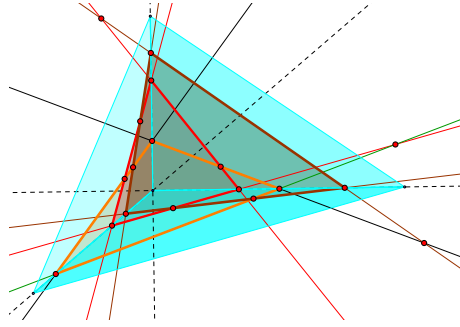


FIGURE 9 – Les (9,10) intersections complètes de deux réunions de trois plans

d'Euler de $\mathcal{I}_C(2)$ pour une courbe de degré 9 et genre 10. En vertu de Riemann-Roch, on a $\chi \mathcal{I}_C(2) = h^0 \mathcal{I}_C(2) - h^1 \mathcal{I}_C(2) + h^2 \mathcal{I}_C(2) = 10 - (2 \times 9 + 1 - 10) = 1$. Le théorème de semi-continuité affirme que, par spécialisation, les dimensions des $h^i \mathcal{I}_C(n)$ ne peuvent qu'augmenter, autrement dit que pour une courbe générique elles sont les plus petites possibles. On peut donc postuler qu'on a $h^1 \mathcal{I}_C(2) = 0$ et il reste $h^0 \mathcal{I}_C(2) + h^2 \mathcal{I}_C(2) = 1$ avec évidemment deux possibilités minimales : soit h^0 égal à 1 et h^2 nul, soit l'inverse. Ces deux possibilités donnent nos deux types. Les courbes sur les quadriques vérifient $h^0 \mathcal{I}_C(2) = 1$, les intersections complètes $h^0 \mathcal{I}_C(2) = 0$. Les courbes de type 1 apparaissent donc plus spéciales car ce qu'on appelle leur **postulation** (le $h^0 \mathcal{I}_C$) est plus grande. Mais, les intersections complètes vérifient $h^2 \mathcal{I}_C(2) = h^1 \mathcal{O}_C(2) = 1$ et les autres $h^1 \mathcal{O}_C(2) = 0$. Les courbes de type 2 apparaissent donc plus spéciales car leur **spécialité** (le $h^1 \mathcal{O}_C$) est plus grande.

3.6.5 La dimension des composantes de $H_{9,10}$

Nous donnons ici quelques arguments permettant de comprendre que les familles de $H_{9,10}$ évoquées ci-dessus sont toutes deux de dimension ⁴⁵ 36.

Pour les intersections complètes, c'est facile. Une intersection complète de deux surfaces de degré 3 correspond à une droite ⁴⁶ de l'espace projectif des surfaces de degré 3 qui est un $\mathbf{P}^{19}$ car $H^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(3) = \binom{6}{3} = 20$. Mais, se donner une droite de $\mathbf{P}^{19}$ c'est se donner deux points, donc un espace de dimension 38, avec une fibre de dimension 2, car pour une droite donnée, les

45. La dimension de $H_{d,g}$ est toujours $\geq 4d$.

46. On parle d'un pinceau de surfaces.

paires de points de cette droite sont de dimension 2. La dimension est donc $38 - 2 = 36$.

Pour les courbes sur les quadriques c'est de la liaison, voir ci-dessous §4.1.2. Une courbe C de type $(6, 3)$ sur une quadrique est liée par deux surfaces de degrés 2 et 6 à 3 droites disjointes donc à une courbe $(3, -2)$. Ces courbes forment une famille de dimension 12. On considère alors le schéma d'incidence $\mathcal{D}$, formé des triplets (Γ, Q, S) avec $\Gamma \in H_{3,-2}$ et Q et S de degrés respectifs 2 et 6 contenant Γ . On calcule la dimension de $\mathcal{D}$ en projetant sur $H_{3,-2}$. La quadrique est unique et les surfaces de degré 6 sont données par Riemann-Roch : on a un espace vectoriel de dimension $84 - (18 + 1 + 2) = 63$. La fibre est donc un projectif de dimension 62. On en déduit $\dim \mathcal{D} = 12 + 62 = 74$. On calcule enfin la dimension de la composante de $H_{9,10}$ par projection. La fibre correspond aux surfaces de degré 6 contenant C , par Riemann-Roch elle est de dimension vectorielle $84 - (54 + 1 - 10) = 39$, donc de dimension projective 38. On en déduit bien que la famille est de dimension $74 - 38 = 36$.

3.6.6 L'état des lieux

Si g est grand, le théorème de Ein-Severi est faux comme le montre l'exemple de $H_{9,10}^0$. Il est même très faux : Ellia, Hirschowitz⁴⁷ et Mezzetti (voir [4]) ou encore Ginouillac (voir [7]) ont montré que le nombre de composantes de $H_{d,g}^0$ croît exponentiellement en d si g est assez grand⁴⁸.

Pour les courbes générales (pas nécessairement lisses et connexes), $H_{d,g}$ n'est presque jamais irréductible ni réduit (Mireille Martin-Deschamps et DP, 1996, voir [20]).

4 La liaison, le module de Rao et la doctrine du petit livre bleu

4.1 Intersections complètes, liaison, courbes ACM

4.1.1 Les intersections complètes

On a vu que les courbes de $\mathbf{P}^3$ ne sont pas toutes intersections complètes de deux surfaces. Attention, ce mot doit avoir un sens précis⁴⁹ : une courbe C

47. D'où la perspective des 1000 ans !

48. La situation n'est pas meilleure pour g petit. Nollet et Schlesinger, voir [22], ont montré, par exemple, que $H_{4,-1000}$ admet 42755 composantes irréductibles.

49. Une courbe peut être intersection complète au sens ensembliste sans l'être algébriquement. Ainsi la cubique gauche est intersection d'une quadrique et d'une cubique, mais

est une intersection complète si son idéal I_C est engendré par deux générateurs. Parmi les courbes gauches, ce cas est considéré comme trivial. Voici ce qu'en dit Mario Fiorentini (1918-2022), plagiant Kronecker : *Dieu nous a donné les intersections complètes et les géomètres ont fait le reste.*

On connaît parfaitement les caractéristiques d'une intersection complète de deux surfaces de degrés s et t : son degré est $d = st$, son genre $g = \frac{1}{2}st(s+t-4) + 1$, on a sa résolution, sa cohomologie, voir l'exemple 3.15. On connaît aussi le schéma de Hilbert correspondant. Ces courbes forment un ouvert lisse de $H_{d,g}$, dont l'adhérence est une composante irréductible. Pour la dimension, voici le résultat :

4.1 Proposition. *La dimension de la composante des intersections complètes $s \times t$ est égale à $2\binom{s+3}{3} - 4$ si les deux équations sont de degré s et à $\binom{t+3}{3} + \binom{s+3}{3} - \binom{t-s+3}{3} - 2$ si elles sont de degrés s, t avec $s < t$.*

Démonstration. Montrons par exemple la formule dans le cas $s = t$. Il s'agit de choisir une droite dans l'espace projectif des surfaces de degré s , qui est de dimension $N = \binom{s+3}{3} - 1$. La conclusion vient du lemme suivant :

4.2 Lemme. *L'ensemble $\mathcal{D}$ des droites de $\mathbf{P}^N$ est une variété de dimension $2N - 2$.*

Démonstration. L'ensemble $\mathcal{D}$ est décrit comme l'image de l'ouvert de $\mathbf{P}^N \times \mathbf{P}^N$ formé des couples de deux points distincts, la projection associant à deux points a, b la droite (ab) . Comme la fibre de $D = (ab)$ dans cette projection est $D \times D$ privé de la diagonale, qui est de dimension 2, on a le résultat.

4.1.2 Une technique fondamentale : la liaison

Comme les intersections complètes peuvent être vues comme essentiellement triviales, donc nulles en un certain sens, l'idée de la liaison c'est que deux courbes dont la "somme" est une intersection complète, vont être voisines⁵⁰.

4.3 Définition. *Deux courbes C et Γ sont dites **liées** par deux surfaces S et T si l'on a $C \cup \Gamma = X = S \cap T$, autrement dit si leur réunion⁵¹ X est une intersection complète (donc une courbe "triviale").*

cette intersection est de degré 6 et la cubique gauche y est double, voir [DP] Ch. 2 Ex. 4.

50. Et plus encore si elles sont obtenues par deux telles relations (la biliaison) car $a+b=0$ et $a'+b=0$ impliquent $a=a'$.

51. Attention, cette réunion est au sens algébrique, autrement dit on doit avoir $I_X = I_C \cap I_\Gamma$.

4.4 Exemple. Considérons la cubique gauche C définie par $I_C = (YT - X^2, XY - ZT, Y^2 - XZ)$ et les deux premières quadriques de cet idéal. Alors, C est liée par ces quadriques à la droite D d'équations X, T comme le montre le lemme suivant :

4.5 Lemme. On a $(YT - X^2, XY - ZT, Y^2 - XZ) \cap (X, T) = (YT - X^2, XY - ZT)$.

Démonstration. Il est clair que le membre de droite est inclus dans celui de gauche. Réciproquement, si l'on prend P dans l'intersection on a $P = A(Y^2 - XZ) = BX + CT$. En réduisant modulo X il reste $\overline{A}Y^2 = \overline{C}T$, ce qui montre que T divise $\overline{A}$ donc qu'on a $A = A'T + A''X$. On conclut avec les deux formules suivantes : $T(Y^2 - XZ) = Y(YT - X^2) + X(XY - ZT)$ et $X(Y^2 - XZ) = Y(XY - ZT) + Z(YT - X^2)$.

Cette opération de liaison est une technique absolument fondamentale pour étudier les courbes gauches. Le principe est simple : si l'on connaît C , on connaît aussi Γ . Par exemple, on a $d_C + d_\Gamma = st$, $g_C - g_\Gamma = (\frac{1}{2}(s + t) - 2)(d_C - d_\Gamma)$, mais on a aussi des formules donnant la cohomologie d'une courbe ou ses résolutions en fonction de celles de l'autre, voir [15] Ch. III, ou encore les dimensions des schémas de Hilbert correspondants, voir [15] Ch. VII.

4.1.3 Parenthèse : liaison des ensembles finis

En quittant pour un instant le cadre des courbes gauches pour celui des points, on a le théorème (voir [25] Partie VI §6.4.2) :

4.6 Théorème. (Davis-Geramita-Orecchia) Soient V, W des ensembles finis de $\mathbf{P}^d$ liés par une intersection complète X de d hypersurfaces de degrés $e_1, \dots, e_d$. On pose $e = \sum_{i=1}^d e_i$. Alors on a la formule :

$$h^0 \mathcal{I}_W(n) - h^0 \mathcal{I}_X(n) = h^1 \mathcal{I}_V(e - d - n - 1).$$

La traduction de ce théorème est simple : si des paquets de points V et W de $\mathbf{P}^d$ sont liés par des hypersurfaces avec un degré total e , W est spécial⁵² en degré n si et seulement si V l'est en degré $e - d - n - 1$. Ce résultat a une myriade de conséquences géométriques : les théorèmes de Pascal, de Pappus, le fait que si une cubique passe par huit points choisis dans l'intersection de deux autres, elle passe par les neuf, le théorème des six cercles de Miquel et bien d'autres.

52. Être spécial en degré n c'est avoir $h^0 \mathcal{I}_C(n)$ ou $h^1 \mathcal{I}_C(n)$ anormalement grand.

Montrons par exemple le théorème de Pascal avec ce résultat. On considère six points $V := \{a, b, c, a', b', c'\}$. Les droites (bc') et $(b'c)$ (resp. (ca') et $(c'a)$, resp. (ab') et $(a'b)$) se coupent respectivement en u, v, w . Alors les six points sont sur une conique si et seulement si u, v, w sont alignés. En effet, les deux paquets de points V et $W = \{u, v, w\}$ sont liés par les deux cubiques décomposées $(bc') \cup (ca') \cup (ab')$ et $(b'c) \cup (c'a) \cup (a'b)$ et on applique le théorème avec $e_1 = e_2 = 3$, donc $e = 6$, $d = 2$, $n = 2$, $e - d - n - 1 = 1$.

4.1.4 Les courbes arithmétiquement de Cohen-Macaulay (ACM)

Il s'agit des courbes qui sont dans la classe de liaison des intersections complètes⁵³ : ce sont les plus simples après celles-ci et leur étude est relativement facile. Exemple : la cubique gauche (liée à une droite).

Le théorème principal est le suivant :

4.7 Théorème. (*Apéry, 1945, Gaeta, 1952, Peskine-Szpiro, 1974*) Soit C une courbe de $\mathbf{P}^3$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) La courbe C est ACM (donc dans la classe de liaison des intersections complètes).

2) On a $H^1 \mathcal{I}_C(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

3) L'idéal I_C admet une résolution à deux termes : $0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I_C \rightarrow 0$ où E, F sont des modules libres gradués.

Démonstration. Voir [26] ou [DP] Ch. X, th. 3.12.

Les courbes ACM sont donc données par des entiers (les nombres figurant dans les modules libres E et F) et par une matrice à coefficients polynomiaux (celle qui correspond à l'homomorphisme de E dans F). On pose $E = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{e(n)}$ et $F = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} R(-n)^{f(n)}$ où e, f sont des fonctions à valeurs entières positives à support fini et on pose $r(n) = f(n) - e(n)$. La fonction r fournit déjà les valeurs de d, g :

4.8 Proposition. Avec les notations précédentes, on a $d = -\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{N}} n^2 r(n)$ et $g = 1 - 2d - \frac{1}{6} \sum_{n \in \mathbf{N}} n^3 r(n)$.

Le schéma de Hilbert de ces courbes est très simple :

4.9 Théorème. (*Ellingsrud, 1975*) Le schéma de Hilbert des courbes ACM de fonction r donnée est un ouvert de $H_{d,g}$, irréductible, lisse et sa dimension est égale à $1 - \sum_{k,l > 0} r(k)r(l) \binom{k-l+3}{3}$.

⁵³. Le lecteur montrera, à titre d'exercice, que deux intersections complètes quelconques sont dans la même classe de liaison, c'est-à-dire qu'elles sont liées, peut-être en plusieurs étapes (commencer par le cas où deux des degrés sont égaux).

Démonstration. Voir [5] ou [15].

Pour ces courbes, la classification est essentiellement terminée. Bien entendu, elles ne représentent qu'une petite partie de l'ensemble des courbes, mais ces résultats ont été le point de départ des travaux sur les courbes gauches effectués dans les années 1980-1990 par Mireille Martin-Deschamps et moi-même.

4.2 La doctrine du petit livre bleu

Il s'agit du livre⁵⁴ [15].

4.2.1 Descartes, Halphen et les illusions perdues

Notre point de départ peut être résumé par la maxime de Descartes : *Diviser chacune des difficultés que j'examinerais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.* La traduction dans notre cas est fondée sur l'analyse de nombreux exemples, notamment $H_{9,10}$. On a vu, en effet, que dans ce cas les deux composantes du schéma de Hilbert correspondent à des valeurs différentes de la cohomologie : $h^0 \mathcal{I}_C(2) = 1$ et $h^2 \mathcal{I}_C(2) = 0$ dans un cas et l'inverse dans l'autre. Notre idée était donc de stratifier le schéma de Hilbert en utilisant les sous-schémas sur lesquels les dimensions⁵⁵ $h^i \mathcal{I}_C(n)$ sont **constantes**. Ces schémas sont notés⁵⁶ $H_{\gamma,\rho}$ et notre premier objectif est d'étudier ces "parcelles".

Au tout début de notre travail, à cause des premiers exemples étudiés, nous caressions l'espoir que les schémas $H_{\gamma,\rho}$ soient irréductibles. Hélas, c'est très faux ... C'est d'ailleurs ce que pressentait Halphen qui, après avoir introduit, à côté du degré, le genre (sous forme de nombre de points doubles apparents) et l'invariant e (sous forme de degré de la variété des cordes), disait : *on chercherait en vain à caractériser toute famille de courbes par quelques nombres, analogues au degré.*

De fait, les invariants numériques vont s'avérer insuffisants pour séparer les composantes du schéma de Hilbert et nous allons utiliser notre invariant algébrique favori : le module de Rao.

54. L'appellation est due à Robin Hartshorne quand il l'étudiait avec ses élèves au début des années 1990.

55. La donnée de toutes ces dimensions ne nécessite qu'un nombre fini d'entiers car on a $h^1 \mathcal{I}_C(n) = h^2 \mathcal{I}_C(n) = 0$ pour n grand.

56. Un mot sur ces notations. D'abord, les nombres h^0 et h^1 déterminent h^2 car on a, pour $n \geq 0$, $h^0 - h^1 + h^2 = \binom{n+3}{3} - (nd + 1 - g)$. Ensuite, on pose $\rho(n) = h^1 \mathcal{I}_C(n)$ et $\gamma(n) = \partial^3 h^0 \mathcal{I}_C(n) - \binom{n}{0}$ ou l'opération ∂ est la différentiation sur les entiers : $\partial f(n) = f(n) - f(n-1)$, voir [15].

4.2.2 Le module de Rao

4.10 Notation. Pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur $\mathbf{P}^3$ et pour $i \geq 0$ entier on pose $H_*^i \mathcal{F} = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^i \mathcal{F}(n)$.

4.11 Définition. Soit C une courbe de $\mathbf{P}^3$. Le module⁵⁷ de Rao de C est le $R = k[X, Y, Z, T]$ -module $M_C = H_*^1 \mathcal{I}_C = \bigoplus_{n \in \mathbf{Z}} H^1 \mathcal{I}_C(n)$. C'est un module de longueur finie (il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls, tous de dimension finie sur k).

Ce module a été introduit par Hartshorne et étudié par Rao qui a notamment montré qu'il s'agit d'un invariant pour la relation de liaison :

4.12 Théorème. (Rao, 1979) Deux courbes liées ont même module de Rao à décalage et dualité près.

(La dualité est l'opération qui associe à M le module $\text{Hom}_k(M, k)$, le décalage concerne les graduations : $M(a)_n = M_{a+n}$).

4.13 Remarque. Le module de Rao M_C est nul si et seulement si C est une courbe ACM.

4.14 Exemple. Voici un exemple de calcul de module de Rao On utilise la suite exacte :

$$0 \rightarrow I_C = H_*^0 \mathcal{I}_C \rightarrow R = H_*^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow H_*^0 \mathcal{O}_C \rightarrow H_*^1 \mathcal{I}_C = M_C \rightarrow 0.$$

On considère la courbe C réunion disjointe de deux coniques⁵⁸ C_1, C_2 d'idéaux (X, Z^2) et (Y, T^2) . Dans ce cas, l'idéal $I_C = I_{C_1} \cap I_{C_2}$ est aussi le produit des idéaux, $I_C = (XY, XT^2, YZ^2, Z^2T^2)$.

On peut calculer les espaces de fonctions sur les C_i et C : on a $H_*^0 \mathcal{O}_{C_1} = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} H^0 \mathcal{O}_{C_1}(n) = R/(X, Z^2)$, $H_*^0 \mathcal{O}_{C_2} = R/(Y, T^2)$ et $H_*^0 \mathcal{O}_C = R/(X, Z^2) \oplus R/(Y, T^2)$. On a donc la suite exacte :

$$0 \rightarrow R/I_C = R/(XY, XT^2, YZ^2, Z^2T^2) \rightarrow R/(X, Z^2) \oplus R/(Y, T^2) \rightarrow M_C \rightarrow 0.$$

On en déduit le lemme suivant :

4.15 Lemme. On a un isomorphisme $M_C \simeq R/(X, Y, Z^2, T^2)$.

57. On voit facilement que l'anneau R opère sur I_C et sur la cohomologie de $\mathcal{I}_C$.

58. Il s'agit de coniques très particulières (des droites doubles), mais comme l'espace des coniques est irréductible, cela n'a pas d'importance. Les courbes dont les équations sont des monômes, comme celles-ci, sont très utilisées. On parle de courbes monomiales.

Démonstration. C'est encore la suite exacte du lemme chinois vue en 3.8 :

$$0 \rightarrow R/(I_1 \cap I_2) \rightarrow R/I_1 \oplus R/I_2 \rightarrow R/(I_1 + I_2) \rightarrow 0.$$

On a $\dim M_0 = 1$, $\dim M_1 = 2$, $\dim M_2 = 1$, et ces espaces ont pour bases $1; z, t; zt$ avec les multiplications évidentes par X, Y, Z, T .

Plus généralement, un module de ce type est donné par trois espaces vectoriels de dimensions $1, 2, 1$ munis de bases $e; f_1, f_2; g$ avec des matrices de multiplications $X_1, \dots, T_1; X_2, \dots, T_2$ entre ces espaces qui vérifient les conditions de commutation du type $X_2 Y_1 = Y_2 X_1$.

4.2.3 La doctrine du petit livre bleu : les trois étapes

Notons E_ρ l'ensemble des modules de longueur finie dont les dimensions sont données par la fonction à support fini ρ ($\dim M_n = \rho(n)$). On peut⁵⁹ munir cet ensemble d'une structure de variété (ou plutôt de schéma). On a alors une application $\Phi : H_{\gamma, \rho} \rightarrow E_\rho$ qui associe à une courbe C son module de Rao M_C et cette application scinde l'étude du schéma de Hilbert $H_{d, g}$ en **trois étapes** :

- L'étape du bas : étude de l'espace E_ρ des modules de dimensions données par la fonction $\rho(n) = \dim M_n$.
- L'étape intermédiaire : étude de Φ et notamment de ses fibres $H_{\gamma, M}$ (courbes à cohomologie et module de Rao constants).
- L'étape du haut : recollement des $H_{\gamma, \rho}$ pour décrire $H_{d, g}$.

4.2.4 Premiers résultats : l'étape intermédiaire, problème A

Rappelons que le problème A consiste à déterminer l'image des invariants, autrement dit à savoir quels sont les modules qui sont modules de Rao d'une courbe. La réponse a encore été apportée par Rao :

4.16 Théorème. (Rao, 1979) *Tout module de longueur finie est, à décalage près, le module de Rao d'une courbe lisse.*

On montre qu'il y a un plus petit décalage pour M_C et les courbes admettant le plus petit décalage sont dites **minimales**. Les autres s'obtiennent par une suite de liaisons paires à partir de celles-là (Lazarsfeld-Rao, 1983). Il restait à décrire les courbes minimales à partir des modules :

59. Mais ce n'est pas tout à fait trivial, voir [15] Ch. VI. C'est facile si l'on se donne des bases de chacun des M_i car les structures de modules sont alors données par les matrices de multiplication par X, Y, Z, T avec des relations de commutation.

4.17 Théorème. (Martin-Deschamps et Perrin, 1990) *On sait calculer explicitement les courbes minimales à partir d'une résolution du module de Rao.*

Voir [15] où l'on donne un algorithme explicite permettant de trouver les résolutions des courbes à partir de celles des modules de Rao.

4.2.5 Premiers résultats : l'étape intermédiaire, problème B

Un autre résultat important de [15] est le suivant :

4.18 Théorème. (Martin-Deschamps et Perrin, 1990) *Le morphisme $\Phi : H_{\gamma,\rho} \rightarrow E_\rho$ est lisse et irréductible, ce qui signifie en particulier que sa fibre $H_{\gamma,M}$ l'est. De plus, on sait calculer sa dimension :*

$$\dim H_{\gamma,M} = \delta_\gamma + \epsilon_{\gamma,\rho} - h_M \quad \text{avec}$$

$$\delta_\gamma = 1 + \sum_{k \in \mathbf{Z}} \gamma(k) \binom{k+3}{2} + \sum_{k,l \in \mathbf{Z}} \gamma(k) \gamma(l) \binom{k-l+2}{1}$$

$$\epsilon_{\gamma,\rho} = \sum_{k > 0} \rho(k-4) \partial \gamma(k), \quad h_M = \text{hom}_R(M, M)^0$$

On peut considérer que ces résultats résolvent essentiellement l'étape intermédiaire. Il reste évidemment les deux autres !

4.3 L'étape du bas

4.3.1 Les résultats

Comme annoncé, il s'agit de l'étude de l'espace⁶⁰ E_ρ des structures de modules de longueur finie.

Si les valeurs prises par ρ sont $n_0, \dots, n_r$ (avec n_0 et n_r non nuls), on note encore $E_{n_0, \dots, n_r}$ le schéma E_ρ et on parle des modules de **largeur** r . La question cruciale est celle de l'irréductibilité de E_ρ , puisqu'elle équivaut à celle des schémas $H_{\gamma,\rho}$ qui était le point de départ espéré de la doctrine. Voici les résultats connus à ce jour :

- En largeur 0 et 1, il est clair que E_ρ est irréductible (c'est un point ou un espace affine).
- En largeur ≥ 3 , E_ρ n'est **jamais** irréductible.

60. Comme on l'a dit, munir cet ensemble d'une structure de schéma n'est pas si facile et on passe sous silence ici quelques-unes des difficultés, voir [15] Ch. VI.

- En largeur 2, une condition nécessaire pour que $E_{p,q,r}$ soit irréductible est $4q \geq \text{Max}(6p + r, 6r + p)$ (voir [16]). On conjecture que cette condition est suffisante (conjecture “presque” démontrée par Stéphane Ginouillac en 1998, voir [6]).

4.19 Remarque. On voit que le rêve d’un espace E_ρ irréductible est bien loin de la réalité. C’est une grande difficulté. Même dans des cas très simples, l’étude des composantes de E_ρ n’est pas facile. Voici deux exemples qui en témoignent.

4.20 Exemples. 1) **Le schéma $E_{1,1,2}$.**

C’est le premier exemple non irréductible. On a $M = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2$, de dimensions 1, 1, 2. La donnée de la structure de module équivaut à celle de quatre matrices 1×1 , X_0, Y_0, Z_0, T_0 , disons $a, b, c, d \in k$, et de quatre matrices 1×2 , X_1, Y_1, Z_1, T_1 , disons (en transposant) $(\alpha, \alpha'), (\beta, \beta'), (\gamma, \gamma')$ et (δ, δ') , avec les conditions de commutation du type $Y_1 X_0 = X_1 Y_0$, etc. Ces relations matricielles se traduisent en 12 relations : $a\beta - b\alpha = 0$, $a\beta' - b\alpha' = 0$, etc.

L’idée qui gouverne la réductibilité de cet espace (comme dans tous les autres cas de plus grandes dimensions) est très simple : si l’on choisit des matrices de multiplication assez génériques “à gauche” (c’est-à-dire pour les petits degrés), elles vont imposer de très fortes conditions de commutation à droite et inversement. Les deux types de modules ainsi obtenus vont donner deux composantes.

Précisément, il suffit d’exhiber un fermé E_1 de E , de dimension 8 et un ouvert E'_2 de E , de dimension 6. Si E était irréductible de dimension d , l’ouvert E'_2 serait de dimension d , d’où $d = 6$, ce qui est contradictoire avec l’existence de E_1 .

Le fermé E_1 est défini par $a = b = c = d = 0$ et les α quelconques. C’est bien un fermé de dimension 8 (il est donné par $\alpha, \alpha', \dots, \delta'$). L’ouvert E'_2 est défini, au contraire, par $a \neq 0$. Les relations permettent alors de calculer $\beta, \beta', \gamma, \gamma', \delta, \delta'$ en fonction de $a, b, c, d, \alpha, \alpha'$, ce qui montre que E'_2 est de dimension 6.

On vérifie que ces composantes sont génériquement lisses. Cependant, E_ρ contient des points singuliers notamment le module à multiplications nulles (appelé encore module de Buchsbaum⁶¹).

2) **Le schéma $E_{2,2,2}$.**

La situation est analogue, mais déjà nettement plus compliquée : on montre qu’il y a six composantes, génériquement lisses, toutes de dimension 16, sauf une qui est de dimension 17, voir [16].

61. Ce module est toujours un point singulier de E_ρ dès que la largeur est ≥ 2 .

Il y a beaucoup de questions ouvertes qui portent sur l'étape du bas, voir ci-dessous 6.1.

5 L'étape du haut et la connexité du schéma de Hilbert

Il s'agit de la dernière étape vers la classification : rassembler les diverses parcelles $H_{\gamma,\rho}$ du schéma de Hilbert $H_{d,g}$ afin de décrire l'espace total. Comme on l'a vu, $H_{d,g}$ peut avoir une profusion de composantes irréductibles, ce qui empêche qu'il soit lisse (à l'intersection des composantes il va y avoir des points singuliers). En fait, dans le cas des courbes générales⁶², il n'est même pas réduit en général, voir [20]. L'abondance de composantes rend aussi problématique le calcul de la dimension de $H_{d,g}$ qui est le maximum des dimensions des composantes. Le problème global le plus intéressant va s'avérer être celui de la connexité du schéma de Hilbert. Commençons par un exemple qui nous servira de fil conducteur.

5.1 Un exemple : $H_{4,0}$

Voir les détails dans l'annexe 7. Considérons l'exemple du schéma de Hilbert $H_{4,0}$ des courbes de degré 4 et genre 0. Il y a deux schémas $H_{\gamma,\rho}$ (deux **composants** de $H_{4,0}$), l'un (dit de type 1) contient les courbes de bidegré $(3,1)$ sur une quadrique, l'autre (de type 2) les réunions disjointes d'une cubique plane et d'une droite. On notera que ce sont bien des $H_{\gamma,\rho}$ différents car le module de Rao du premier est égal à $k(-1)$, tandis que celui du second est un module $1,1,1$ en degrés $0,1,2$. On montre facilement que ces deux composants sont de dimension 16. C'est évident pour le second car les cubiques forment un espace de dimension 12 (3 pour le choix du plan et 9 pour les cubiques du plan) et les droites une variété de dimension 4. Pour le premier, cela peut se voir par exemple en utilisant les formules qui expriment le comportement de la dimension par liaison (les courbes $4,0$ du premier type sont liées à la réunion disjointe de deux droites par 2×3).

La question est de savoir si ces composants sont reliés (par semi-continuité de $H^1 \mathcal{I}_C(0)$, il ne peut y avoir qu'une famille dont le point générique est du type 1 et le point fermé de type 2) : c'est le problème de la connexité du schéma de Hilbert.

62. Et, par liaison, dans de très nombreux cas pour les courbes lisses.

5.2 La connexité du schéma de Hilbert, le cas des courbes avec des composantes ponctuelles :

Lorsqu'on considère toutes les courbes, y compris celles munies de points, il y a un résultat important dû à Hartshorne (1965) :

5.1 Théorème. *Le schéma de Hilbert $\text{Hilb}_{d,g}$ (de toutes les courbes, y compris celles qui admettent des composantes ponctuelles, isolées ou immergées), est connexe.*

La preuve d'Hartshorne utilise de manière essentielle les composantes ponctuelles, de sorte qu'elle ne peut se généraliser aisément à notre cas. Pour une preuve dans le cas de $\text{Hilb}_{4,0}$, voir Annexe 7.3.

5.3 La connexité du schéma de Hilbert, pour les courbes sans composantes ponctuelles

5.3.1 L'histoire

C'est une belle histoire. En 1994, Mireille Martin-Deschamps et moi-même avons écrit un article [19] intitulé *Le schéma de Hilbert des courbes gauches localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais connexe ni réduit* (Rapport de recherche du LMENS 94-14). Cet article était soumis à une excellente revue, accepté, mais heureusement pas encore publié. En parallèle, nous avions commencé à travailler, avec Robin Hartshorne, sur un nouvel objet (les triades) qui permettait de construire des familles et en faisant des calculs avec cet objet encore mal maîtrisé dans le cas de $H_{4,0}$ il m'a semblé que je savais montrer que $H_{4,0}$ était connexe, contrairement à ce qu'affirmait [19]. Je suis donc arrivé un matin à l'IHES où Robin était hébergé en disant : *les copains, il y a une contradiction dans les mathématiques !* Ils n'y ont d'abord pas cru, mais peu à peu, après une semaine de discussions acharnées, la vérité est apparue : $H_{4,0}$ était bel et bien connexe. Une première mesure s'imposait : bloquer la parution de l'article [19]. De fait lorsqu'il est paru, voir [20], le mot connexe avait prudemment été enlevé. Pire, la conjecture qui s'est peu à peu imposée à nous ce n'est pas que le schéma de Hilbert n'est pas presque jamais connexe, mais qu'au contraire il l'est toujours !

Sur ce thème de l'erreur, je ne résiste pas à citer Grothendieck (dans *Récoltes et semailles*) :

Mais il arrive aussi que cette image est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. Le travail, parfois laborieux, qui conduit au dépistage d'une telle idée fausse ... est souvent marqué par une tension croissante, au fur et à mesure qu'on approche du nœud de la contradiction,

qui de vague d'abord se fait de plus en plus criante - jusqu'au moment où enfin elle éclate, avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense. ...

La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte.

Je ne suis pas sûr que le soulagement immense ait été notre sentiment dominant en cette affaire, mais l'écroulement d'une certaine vision des choses, certes !

5.3.2 La conjecture et l'état des lieux

La conjecture est donc la suivante :

5.2 Conjecture. *Le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ des courbes (sans composantes ponctuelles) est connexe.*

Vingt-cinq ans plus tard, cette conjecture n'est toujours pas démontrée, mais tous les résultats vont dans ce sens, par exemple, outre le cas de $H_{4,0}$, décisif, voir [14] ou ci-dessous, Annexe 7.4 :

- *Le schéma $H_{d,g}$ est connexe lorsque le genre est très grand : $g \geq \frac{(d-3)(d-4)}{2}$.*
(Samir Aït-Amrane, 1998, voir [1])

Pour comprendre les autres résultats il faut introduire la notion de courbe extrémale. Pour cela on pose :

$$r_a = \text{Min} \{n \in \mathbf{Z} \mid h^1 \mathcal{I}_C(n) \neq 0\} \text{ et } r_o = \text{Max} \{n \in \mathbf{Z} \mid h^1 \mathcal{I}_C(n) \neq 0\}$$

et on rappelle le résultat suivant (voir [17]) :

5.3 Théorème. *Soit C une courbe (sans composantes ponctuelles) non plane, de degré d et genre g . On a les inégalités suivantes :*

$$1) \text{ Pour tout } n \in \mathbf{Z}, h^1 \mathcal{I}_C(n) \leq \frac{(d-2)(d-3)}{2} - g.$$

$$2) r_a \geq g + 1 - \frac{(d-2)(d-3)}{2} \text{ et } r_o \leq \frac{d(d-3)}{2} - g.$$

*Pour chaque couple d, g pour lequel $H_{d,g}$ est non vide il existe des courbes qui atteignent ces valeurs. Elles sont dites **extrémales**.*

Une voie pour montrer la connexité du schéma de Hilbert consiste alors à prouver que toute courbe est dans la composante connexe des extrémales.

- *Les courbes lisses vérifiant $d \geq g + 3$, ainsi que les courbes ACM, sont dans la composante connexe des courbes extrémales.*

(Hartshorne, 2000, voir [12])

- Pour $d \leq 4$ et g quelconque $H_{d,g}$ est connexe. (Nollet-Schlesinger, 2003, voir [22])

- Les courbes de Koszul sont dans la composante connexe des courbes extrémales.

(DP, 2001, voir [23])

Les courbes de Koszul sont celles dont le module de Rao est “de Koszul” ou encore intersection complète, c’est-à-dire de la forme $R/(f_1, f_2, f_3, f_4)$ où les f_i forment une suite régulière. Elles jouent un rôle crucial, voir [15] Ch. IV.

- Le schéma de Hilbert est “asymptotiquement” connexe.

(DP, 2003, voir [24])

Enfin, le résultat le plus convaincant est sans doute :

- Toutes les courbes lisses de $H_{d,g}$ sont dans la composante des extrémales.

(Hartshorne, Lella, Schlesinger, 2012, voir [13])

6 Questions ouvertes et conjectures

Comme on l’a dit, la classification des courbes gauches est loin d’être achevée. On a regroupé ci-dessous quelques questions ouvertes, très naturelles dans la ligne de ce qui vient d’être dit. Il y en a beaucoup d’autres.

6.1 L’étape du bas

6.1.1 Irréductibilité

Il reste à finir de prouver la conjecture d’irréductibilité de E_ρ (voir 4.3.1) dans le cas de trois termes, dans la ligne du travail de S. Ginouillac, voir [6].

6.1.2 La conjecture de lissité générique

Une question essentielle concernant E_ρ est celle de sa lissité. Les exemples connus semblent conforter la conjecture⁶³ suivante :

63. Attention, quand je dis conjecture, cela ne signifie pas que je suis convaincu que l’assertion est vraie, c’est plutôt une question qu’il est parfois facile d’infirmar. Robin Hartshorne parle volontiers de *conjectures à la Daniel*. Je persiste néanmoins, en me référant à ce que dit Grothendieck sur le sujet dans *Récoltes et semailles* : *Quand je suis curieux d’une chose, mathématique ou autre, je l’interroge. Je l’interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle ... Souvent la question prend la forme d’une affirmation – une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au début d’une recherche, l’affirmation est carrément fausse – encore fallait-il*

6.1 Conjecture. *Soit ρ une fonction à support fini de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$. Les composantes irréductibles de E_ρ sont génériquement lisses.*

La conséquence de cette conjecture est évidemment la lissité générique des schémas $H_{\gamma,\rho}$.

6.1.3 Les conjectures de généralité

Une autre question très importante⁶⁴ dans la ligne de la doctrine du petit livre bleu est la suivante. On a vu que les espaces E_ρ ont souvent plusieurs composantes irréductibles, en un mot, qu'ils sont compliqués. Cependant, la question principale de la classification concerne les composantes de $H_{d,g}$ et celles de E_ρ ne sont essentielles que si elles correspondent à de telles composantes, autrement dit, si la conjecture suivante est vraie :

6.2 Conjecture. *Soit M un module générique de E_ρ . Alors il existe une courbe générique dans un certain $H_{d,g}$ qui admet ce module de Rao (décalé).*

Cette conjecture est vraie dans le cas où E_ρ est irréductible, voir [16]. Dans ce cas, la courbe minimale associée au module générique est effectivement générique dans $H_{d,g}$. Dans le cas général elle semble abordable en utilisant les résultats de liaison de [MDP] Ch. VII Cor. 4.8 notamment, voir 6.1.4. Une conjecture plus forte, mais vraiment fondamentale, est la suivante :

6.3 Conjecture. *Soit ρ une fonction à support fini, $E_1, \dots, E_r$ les composantes irréductibles de E_ρ . Il existe un schéma de Hilbert $H_{\gamma,\rho}$, qui admet des composantes irréductibles $H_1, \dots, H_r$, chacune lisse sur $E_1, \dots, E_r$, et tel que toutes les composantes H_i soient (ensemblément) génériques dans $H_{d,g}$.*

La difficulté de ces questions c'est que les courbes minimales associées à un module générique ne sont pas toujours génériques (voir 6.1.4) et on souhaite donc caractériser les fonctions de Rao telles qu'il existe des modules génériques dont la courbe minimale est générique. Une conjecture à la Daniel sur ce sujet pourrait être :

6.4 Conjecture. *Les fonctions de Rao ρ qui sont telles que les modules génériques de E_ρ soient les modules de courbes **minimales** génériques sont celles qui vérifient la condition suivante :*

La fonction ρ est strictement croissante, puis constante, puis strictement décroissante.

l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque". D'autres mathématiciens sont beaucoup plus circonspects.

64. Et sans doute pas assez abordée dans [15] et la suite.

6.1.4 Un exemple avec $k \oplus k(-2)$

L'exemple qui sous-tend les conjectures précédentes est celui d'un module de Rao non connexe : $k \oplus k(-2)$ dont la fonction de Rao $\rho(0) = 1$, $\rho(1) = 0$, $\rho(2) = 1$ ne vérifie pas du tout la condition de 6.4. Cette situation a été étudiée dans [18]. La courbe minimale associée à ce module est une courbe de degré 12 et genre 17 qui n'est pas générale (le schéma $H_{\gamma,\rho}$ est de dimension 47 alors que $\dim H_{12,17} = 48$). On sait d'ailleurs, grâce à la notion de triade, voir [14], construire une famille de courbes 12, 17 dont la courbe spéciale est la minimale de $k \oplus k(-2)$ et dont la générique est une courbe ACM. Cependant, et c'est une justification de la conjecture 6.2, si l'on effectue une biliaison 4, +1, la courbe correspondant au module $k \oplus k(-2)$ devient une courbe générique de $H_{16,31}$.

6.2 L'étape du haut

Rappelons qu'on appelle **composant** du schéma de Hilbert $H_{d,g}$ une composante irréductible d'un schéma $H_{\gamma,\rho}$ inclus dans $H_{d,g}$.

- Soient $H_0 \subset H_{\gamma_0,\rho_0}$ et $H \subset H_{\gamma,\rho}$ des composants de $H_{d,g}$. On dit que H_0 est **sous-adhérent** à H s'il existe une famille de courbes, paramétrée par un anneau de valuation discrète, dont le point spécial C_0 est dans H_0 et le point générique C dans H .

- Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que l'on ait $(\gamma, \rho) \leq (\gamma_0, \rho_0)$ (i.e. que l'on ait, pour tous n, i , $h^i \mathcal{I}_C(n) \leq h^i \mathcal{I}_{C_0}(n)$) (pas suffisante, voir [2]) et que M_C soit une déformation plate d'un sous-quotient de M_{C_0} (pas encore suffisante, voir [22]). La question est donc :

À quelle condition H_0 est-il sous-adhérent à H ?

- *Comment reconnaître alors si H_0 est adhérent à H ou seulement sous-adhérent ?*

Et enfin, l'ultime conjecture :

- *Le schéma de Hilbert $H_{d,g}$ est-il connexe ?*

7 Annexe : la connexité de $H_{4,0}$

7.1 Le schéma $H_{4,0}$

C'est un exemple très simple où l'on peut comprendre comment la doctrine du petit livre bleu peut s'appliquer. On commence par majorer le module de Rao en utilisant 5.3. Dans le cas présent, on voit que les dimensions du module de Rao sont bornées par 1 en degrés 0, 1, 2. De plus, comme on a

$h^0 \mathcal{O}_C(1) = 5$ par Riemann-Roch, on voit qu'on a $h^1 \mathcal{I}_C(1) = 1$. Les modules de Rao possibles sont donc *a priori*, en degrés $0, 1, 2$: $0, 1, 0$; $1, 1, 0$; $0, 1, 1$ ou $1, 1, 1$. On voit facilement que les modules de type $1, 1$ ne donnent pas de courbes de degrés 4 (la courbe minimale est de degré 3 et par liaison on ne peut atteindre le degré 4). Les seules possibilités sont donc le module $k(-1)$ qui correspond aux courbes de bidegré $(3, 1)$ tracées sur les quadriques qui forment une composante H_1 et le module $1, 1, 1$ du type $R/(X, Y, Z, T^3)$ qui correspond aux réunions disjointes d'une cubique plane et d'une droite qui forment une composante H_2 , voir [17]. Ces deux composantes sont de dimension 16 et il s'agit de montrer qu'on peut trouver une famille paramétrée par un anneau de valuation discrète dont le point générique⁶⁵ est dans H_1 et le point spécial dans H_2 .

On note ici $\text{Hilb}_{d,g}$ le schéma de Hilbert de tous les sous-schémas de dimension 1 de $\mathbf{P}_k^3$ de degré d et genre g , y compris ceux qui ont des composantes ponctuelles isolées ou immergées, et, comme d'habitude, $H_{d,g}$ son sous-schéma ouvert formé des courbes sans points.

7.2 Le lemme de la réunion

Dans tout ce qui suit, on désigne par Λ un anneau de valuation discrète d'uniformisante λ , on note K son corps de fractions et k son corps résiduel, ξ son point générique et s son point fermé.

La méthode, pour construire des courbes $4, 0$ est la suivante :

7.1 Lemme. *Si C_1 et C_2 sont deux courbes de degré 2, la première de genre 0, la seconde de genre -1 et si $C_1 \cap C_2$ est un schéma fini de longueur 2, la réunion est une courbe de degré 4 et genre 0.*

Démonstration. On utilise 3.8 comme dans le calcul du genre de la réunion.

On continue avec une remarque :

7.2 Remarque. Si C_Λ est une famille plate de courbes sur Λ , d'idéal saturé I_Λ et si C_s et C_ξ sont les courbes au point fermé et au point générique, on a $I_{C_s} = I_\Lambda \otimes_\Lambda k$ et $I_{C_\xi} = I_\Lambda \otimes_\Lambda K$. En effet, on a la suite exacte $0 \rightarrow I_\Lambda \rightarrow R_\Lambda \rightarrow R_\Lambda/I_\Lambda \rightarrow 0$ et la platitude du quotient indique qu'elle reste exacte par tensorisation par k (c'est évident dans le cas de K).

La recette des démonstrations qui suivent est le lemme suivant, essentiellement énoncé par Hartshorne, voir [12] :

65. Le théorème de semi-continuité oblige la famille à être dans ce sens.

7.3 Lemme. Soient C_Λ et D_Λ deux familles plates de courbes de $\text{Hilb}_{d,g}$ paramétrées par Λ . On suppose que l'intersection $C_\Lambda \cap D_\Lambda$ est un schéma fini qui a même longueur au point générique et au point fermé. Alors il existe une famille plate paramétrée par Λ dont le point générique est $C_\xi \cup D_\xi$ et dont le point fermé est $C_0 \cup D_0$.

Démonstration. On note $I_\Lambda := I_{C,\Lambda}$ et $J_\Lambda := I_{D,\Lambda}$ les idéaux saturés des courbes en question et on considère l'intersection de ces idéaux qui est l'idéal de $C_\Lambda \cup D_\Lambda$. On a la suite exacte vue en 3.8 :

$$0 \rightarrow R_\Lambda / (I_\Lambda \cap J_\Lambda) \xrightarrow{\varphi} R_\Lambda / I_\Lambda \times R_\Lambda / J_\Lambda \xrightarrow{\psi} R_\Lambda / (I_\Lambda + J_\Lambda) \rightarrow 0.$$

Comme R_Λ / I_Λ et R_Λ / J_Λ sont plats (c'est-à-dire sans torsion) il en est de même de $R_\Lambda / (I_\Lambda \cap J_\Lambda)$. De plus, l'hypothèse sur l'intersection des courbes montre que $R_\Lambda / (I_\Lambda + J_\Lambda)$ est plat lui aussi (voir [RH] III 9.9). Il en résulte que la suite reste exacte à la fois au point générique et au point fermé et on conclut par la remarque ci-dessus.

7.3 Connexité avec des points isolés ou immergés

Le principe de la preuve de Hartshorne de la connexité du schéma de Hilbert “total” (c'est-à-dire en admettant des courbes avec des composantes ponctuelles⁶⁶), voir [11], est facilement traduit dans le cas de $\text{Hilb}_{4,0}$. Il s'agit de joindre les deux composantes de ce schéma par des déformations. La première opération consiste à transformer (par une famille plate) deux droites disjointes en deux droites sécantes, avec un point immergé à leur intersection :

7.4 Lemme. Il existe une famille plate, paramétrée par un avd, dont le point générique est une réunion disjointe de deux droites et le point spécial la réunion de deux droites sécantes avec un point immergé à leur intersection.

Démonstration. Il suffit de considérer la famille réunion des deux droites, disjointes pour $\lambda \neq 0$, (X, Y) et $(Z, Y - \lambda T)$. Son idéal est l'intersection des idéaux, donc $I_\lambda = (XZ, YZ, XY - \lambda XT, Y^2 - \lambda YT)$. Le point spécial est défini par l'idéal (XZ, YZ, XY, Y^2) . Il s'agit de la réunion des droites (Y, X) et (Y, Z) , mais avec le point $(0, 0, 0, 1)$ immergé. En effet, son idéal (X, Y, Z) est annulé par Y . La famille est plate car degré et genre sont constants (voir [RH] III 9.9).

66. Attention, dans $\text{Hilb}_{4,0}$, il y a d'autres composantes, par exemple les réunions d'une courbe 4, 1 et d'un point constitue une famille de dimension 19. Nous montrons simplement ici que, dans ce schéma de Hilbert, il existe une famille joignant H_1 et H_2 .

Il faut noter aussitôt que la courbe spéciale de cette famille est aussi obtenue comme courbe spéciale d'une famille formée par deux droites sécantes et un point isolé :

7.5 Lemme. *Il existe une famille plate, paramétrée par un avd , dont le point générique est la réunion de deux droites sécantes et d'un point isolé et le point spécial la réunion de ces deux droites sécantes avec un point immergé à leur intersection.*

Démonstration. On prend la réunion de la conique dégénérée (Y, XZ) (les axes des x et des z) et du point $(0, \lambda, 0, 1)$, d'équations $(X, Z, Y - \lambda T)$, son idéal est $(XY, YZ, XZ, Y^2 - \lambda YT)$ et à la limite il devient (XY, YZ, XZ, Y^2) comme ci-dessus.

On peut maintenant prouver la connexité de $\text{Hilb}_{4,0}$ dans le cas des courbes avec des points. On peut représenter la composante de type 1 par une courbe en bâtons tracée sur une quadrique lisse et formée de trois droites d'une famille (donc disjointes) et une de l'autre (donc coupant les trois premières). On déforme cette courbe en rapprochant deux des droites disjointes selon 7.4, sans bouger les autres. Comme l'intersection de ces courbes ne change pas, 7.3 montre qu'on a une famille plate dont le point spécial est un triangle, avec un point immergé en un sommet et une droite non située dans le plan du triangle mais coupant l'un des côtés. Avec 7.5 on peut alors déformer cette courbe en transformant le point immergé en un point isolé, voir figure 10.

De l'autre côté, on part d'une courbe plane de degré 3, que l'on peut représenter par un triangle, uni à une droite qui ne le rencontre pas. Par 7.4 (et toujours 7.3) on rapproche la droite d'un des côtés du triangle en obtenant un point immergé, non situé en un sommet. Enfin, avec 7.5, on décolle ce point immergé pour en faire un point isolé. On constate qu'on a obtenu la même courbe qu'en partant du type 1 : on a gagné.

Les opérations sont résumées dans les figures ci-dessous. La convention implicite c'est que deux droites de la figure qui ne se coupent pas sur la figure sont disjointes dans $\mathbf{P}^3$.

7.6 Exercice. Écrire des équations explicites pour ces familles. (On pourra s'aider des couleurs.)

7.4 La connexité sans les points

Le lemme crucial est le suivant :

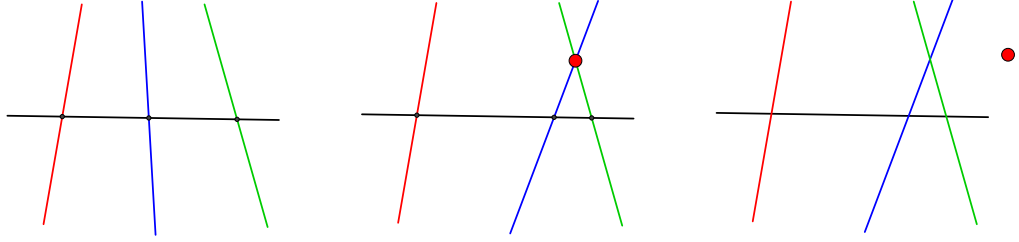


FIGURE 10 – Déformation d'une courbe de type 1

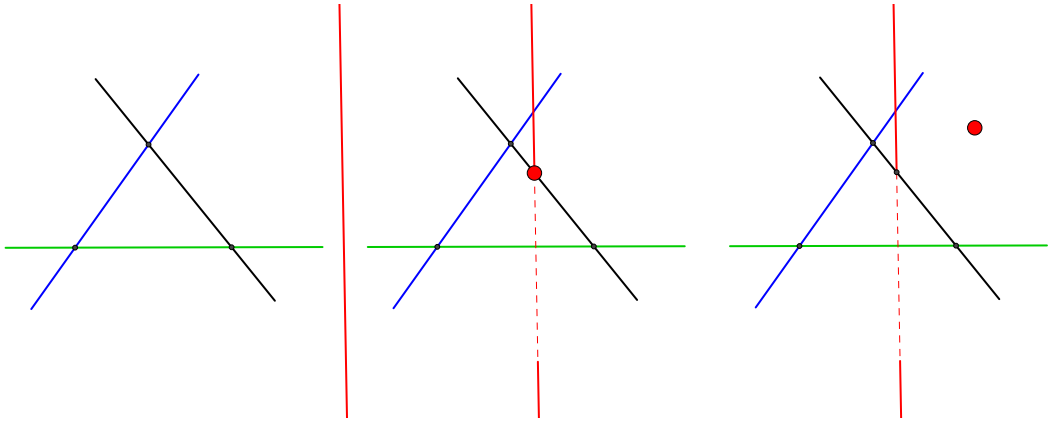


FIGURE 11 – Déformation d'une courbe de type 2

7.7 Lemme. Soit C_1 une conique du plan P et C_2 une structure double de genre -1 sur une droite D . On suppose que $C_1 \cap C_2$ est un schéma fini de longueur 2. Alors, la réunion $C_1 \cup C_2$ est une courbe de degré 4 et genre 0. De plus, la réunion est de type 2 si D est dans P et de type 1 sinon.

Démonstration. Que la réunion soit de degré 4 et genre 0 résulte encore de 3.8. Pour le rabiote, on écrit $C_1 = (Z, F)$ avec F de degré 2. Si D est dans $P = V(Z)$, on peut écrire $C_2 = (Y^2, YZ, Z^2, YA + ZB)$ avec A, B de degré 1 (voir [20]). Si l'on suppose que A ne divise pas⁶⁷ F , on voit que l'intersection de ces courbes est finie de longueur 2, de sorte que la réunion est bien de degré 4 et genre 0. Mais alors, l'idéal de $C := C_1 \cup C_2$ contient Z^2 et YZ . On a donc $h^0 \mathcal{I}_C(2) \geq 2$, de sorte que C est de type 2.

Au contraire, si D n'est pas dans P , on peut écrire, par exemple, $C_2 = (X^2, XY, Y^2, XZ + YT)$. Pour que l'intersection soit non vide on doit supposer que F est dans l'idéal (X, Y, Z) (et on peut supposer qu'il est dans (X, Y)). Il s'écrit alors $F = XG + YH$ avec G, H de degré 1 et, pour que

⁶⁷. Par exemple $A = T$.

l'intersection soit de longueur 2 il faut aussi que G soit dans (X, Y, Z) , donc n'ait pas de terme en T . Comme D n'est pas dans P , c'est que H a un terme non nul en T et on peut alors écrire le polynôme F sous la forme $F = aX^2 + bXY + cY^2 + YT + XZ$ de sorte qu'il est dans l'intersection des idéaux. On vérifie aussitôt que F est alors la seule équation de degré 2 dans l'idéal de $C_1 \cup C_2$, ce qui montre que cette courbe est de type 1.

7.4.1 D'une réunion de deux droites à une droite double

La méthode est essentiellement la même que ci-dessus, mais les courbes dégénérées par lesquelles on transite ne sont pas les mêmes puisqu'on ne dispose plus des composantes ponctuelles. Le principe de base, comme dans le cas précédent, est de faire dégénérer deux droites disjointes, mais au lieu d'obtenir deux droites sécantes en un point immergé, on trouve ici une structure double sur une droite :

7.8 Lemme. *La famille de courbes d'idéal*

$$(X^2 + \lambda XT, XY + \lambda XZ, XY + \lambda YT, Y^2 + \lambda YZ, YT - XZ)$$

est plate sur Λ . Son point générique est la réunion des deux droites disjointes d'équations (X, Y) et $(X + \lambda T, Y + \lambda Z)$ et son point fermé est la structure double de genre -1 sur l'axe des z donné par les équations $(X^2, XY, Y^2, YT - XZ)$.

Démonstration. L'idéal de la réunion est l'intersection des idéaux, qui en est aussi le produit, soit $(X^2 + \lambda XT, XY + \lambda XZ, XY + \lambda YT, Y^2 + \lambda YZ)$. La famille définie par cet idéal n'est pas plate car il contient $\lambda(YT - XZ)$ de sorte que λ est diviseur de zéro dans le quotient. Elle le devient si l'on ajoute le polynôme $YT - XZ$. Au point générique, comme λ est inversible, on a bien la réunion des deux droites et au point fermé la structure double annoncée (qui est de genre -1 , voir 3.16).

7.4.2 Dans la composante H_1

Revenons à $H_{4,0}$. La réunion schématique de quatre droites D_1, D_2, D_3, D_4 telles que chaque D_i et D_{i+1} soient sécantes pour $i = 1, 2, 3$ est une courbe $4, 0$ de type⁶⁸ 1. En effet, elle est $4, 0$ en vertu de 3.7 et de type 1 car elle est connexe, de sorte que son module de Rao n'a pas de terme de degré 0. Des équations de ces quatre droites sont, par exemple, dans l'ordre, (X, Y) , (X, Z) , $(Z, X + \lambda T)$ et $(X + \lambda T, Y + \lambda Z)$ avec $\lambda \neq 0$.

⁶⁸. Elle n'est pas tracée sur une quadrique lisse, mais sur un "biplan", réunion des plans (D_1, D_2) et (D_3, D_4) .

On fait dégénérer la courbe ci-dessus en faisant tendre $D_2 \cup D_3$, dans le plan $Z = 0$ vers C_1 , d'équations X^2, Z , conique dégénérée en une droite double, et $D_1 \cup D_4$, comme dans le lemme 7.8, vers la structure double C_2 d'équations $(X^2, XY, Y^2, YT - XZ)$. Le lemme 7.3 montre qu'on a alors une famille plate qui passe de la réunion des quatre droites D_i à $C_1 \cup C_2$. L'idéal de la courbe limite est :

$$(X^2, XYZ, Y^2Z, YZT - XZ^2).$$

On vérifie qu'il s'agit d'une courbe de degré 4 et de genre 0 et que son module de Rao est $k(-1)$, de sorte que c'est une courbe de H_1 . (Un argument en ce sens est que l'on a $H^0 \mathcal{I}_C(2) = 1$.)

7.4.3 Dans la composante H_2

Cette fois, la courbe en bâtons de départ est réunion de quatre droites $\Delta_1, D_2, D_3, \Delta_4$, D_2 et D_3 étant les mêmes que ci-dessus, mais avec Δ_1 définie par l'idéal (Y, Z) et Δ_4 par $(Y + \lambda X, Z + \lambda T)$. Il s'agit d'une courbe $4, 0$ de type 2 réunion disjointe de la cubique plane dégénérée $\Delta_1 \cup D_2 \cup D_3$ et de la droite Δ_4 .

On fait dégénérer cette courbe en faisant tendre $D_2 \cup D_3$ vers la courbe $C_1 = (Z, X^2)$ et $\Delta_1 \cup \Delta_4$, comme dans le lemme 7.8, vers $\Gamma_2 = (Y^2, YZ, Z^2, XZ - YT)$. La réunion $C_1 \cup \Gamma_2$ a pour idéal l'intersection :

$$(Z^2, YZ, X^2Y^2, X^3Z - X^2YT).$$

On vérifie que c'est bien une $(4, 0)$ de type 2.

7.4.4 Une famille

Il reste à construire une famille passant de l'une à l'autre. On construit d'abord une famille de courbes C_Λ de degré 2 et genre -1 , paramétrée par un avd Λ , d'équations $(Y^2, (\lambda X + Z)^2, Y(\lambda X + Z), YT - X(\lambda X + Z))$. On note C_ξ la courbe générique de la famille, isomorphe à la courbe C_2 ci-dessus (en faisant le changement $X \mapsto \lambda X + Z$), donc dans H_1 , et on note que la courbe spéciale n'est autre que Γ_2 , dans H_2 .

On réunit cette famille avec la famille constante égale à la conique dégénérée fixe C_1 d'équations (X^2, Z) en notant que les intersections $C_1 \cap C_\xi$ et $C_1 \cap \Gamma_2$ sont toutes deux finies de longueur 2 (d'équations (X^2, XY, Y^2, YT, Z) et (Y^2, YT, X^2, Z) , donc toutes deux (X^2, Y, Z) en version saturée). On applique alors le lemme 7.3 et on obtient une famille de point fermé $C_1 \cup \Gamma_2$ et de point générique $C_1 \cup C_\xi$. En vertu de 7.7 la courbe spéciale est dans H_2 et la courbe générique dans H_1 , de sorte qu'on a une famille de courbes $(4, 0)$ qui joint H_2 et H_1 , ce qui montre la connexité de $H_{4,0}$.

Références

- [1] Aït-Amrane S., *Sur le schéma de Hilbert des courbes de degré d et de genre $(d-3)(d-4)/2$* Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 50 (2000), 1671-1707.
- [2] Aït-Amrane S., Perrin D., *Un contre-exemple sur les familles de courbes gauches*, Comm. in Algebra, 28(12), 6003-6015, (2000).
- [3] Bourbaki N., *Algèbre commutative, chapitres 1 à 4*, Springer, 1969.
- [4] Ellia Ph., Hirschowitz A., Mezzetti E., *On the number of irreducible components of the Hilbert scheme of smooth space curves*, Internat. J. Math. 3, 1992, 799-807.
- [5] Ellingsrud G., *Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans $\mathbf{P}^e$ à cône de Cohen-Macaulay*, Ann. Scient. E.N.S, 4^e série, 8, 1975, 423-432.
- [6] Ginouillac S. *Sur les schémas des modules de Rao de longueur 3*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 320, 1995, 1327-1330.
- [7] Ginouillac S. *Sur le nombre de composantes du schéma de Hilbert des courbes ACM de $\mathbf{P}_k^3$* , C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 329, 1999, 857-862.
- [8] Gramain A. *Topologie des surfaces*, Collection Sup, PUF, 1971.
- [9] Gruson L., Peskine C., *Genre des courbes de l'espace projectif*, Ann. Scient. E.N.S., 4^e série, 15, 1982, 401-418.
- [10] Halphen G., *Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques*, Oeuvres complètes, t.3, 261-455.
- [11] Hartshorne R., *Connectedness of the Hilbert scheme*, Publications mathématiques de l'IHES, 29, (1966), 5-48.
- [12] Hartshorne R., *On the connectedness of the Hilbert scheme of Curves in $\mathbf{P}^3$* , Comm. in Algebra 28 (12), (2000), 6059-6077.
- [13] Hartshorne R., Lella P., Schlesinger E., *Smooth Curves specialize to extremal Curves*, Math. Ann. 361, 459-476, (2015).
- [14] Hartshorne R., Martin-Deschamps M., Perrin D. *Triades et familles de courbes gauches*, Math. Ann. 315, 397-468, (1999).
- [15] Martin-Deschamps M., Perrin D. *Sur la classification des courbes gauches*, Astérisque, 1990.
- [16] Martin-Deschamps M., Perrin D. *Courbes gauches et modules de Rao*, J. reine angew. Math. **439** (1993), 103-145.

- [17] Martin-Deschamps M., Perrin D. *Sur les bornes du module de Rao*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 137, Série I, p. 1159-1162, 1993.
- [18] Martin-Deschamps M., Perrin D. *Sur les courbes gauches à modules de Rao non connexes*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 319, Série I, p. 233-236, 1994.
- [19] Martin-Deschamps M., Perrin D. *Le schéma de Hilbert des courbes gauches localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais connexe ni réduit* Rapport de recherche du LMENS 94-14.
- [20] Martin-Deschamps M., Perrin D. *Le schéma de Hilbert des courbes gauches localement Cohen-Macaulay n'est (presque) jamais réduit*, Ann. Scient. E.N.S, 4^e série, 29, 1996, 757-785.
- [21] *Vector bundles and differential equations*, Proceedings, Nice, 1979.
- [22] Nollet S., Schlesinger E., *Hilbert Schemes of Degree Four Curves*, Compositio Mathematica **139**, 2003, 169-196.
- [23] Perrin D., *Un pas vers la connexité du schéma de Hilbert : les courbes de Koszul sont dans la composante des extrémales*, Collect. Math. **52**, 3 (2001), 295-319.
- [24] Perrin D., *La connexité asymptotique du schéma de Hilbert des courbes gauches*, Ann. Univ. Ferrara - Sez. VII, Sc. Math. Vol. IL, (2003) 183-195.
- [25] Perrin D., *Livre de géométrie projective*,
https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livre_de_geometrie_projective.html
- [26] Peskine C., Szpiro L., *Liaison des variétés algébriques*, Invent. Math., 26 (1974), 271-302.

email : daniel.perrin@universite-paris-saclay.fr