

**Partie I. GÉOMÉTRIE
PROJECTIVE LINÉAIRE**

Introduction historique¹

On ne peut parler de géométrie sans évoquer Euclide, et quelques-uns des résultats que nous étudierons sont déjà dans les *Éléments*. Cependant, dans cette première partie, comme la géométrie considérée n'est pas métrique, l'aspect euclidien sera peu présent.

Pappus

Parmi les successeurs d'Euclide dont le nom apparaît dans l'histoire de la géométrie projective, on peut citer Ménélaüs (vers 80 après J.-C.), dont nous rencontrerons le théorème le plus célèbre, ou Ptolémée, par l'utilisation qu'il fait de la projection.

Cependant, c'est aux travaux de Pappus (quatrième siècle après J.-C.) qu'il faut accorder une attention particulière. En effet, dans ses *Collections mathématiques*², ce géomètre prouve plusieurs théorèmes essentiels qui apparaîtront dans ce qui suit. Le plus important d'entre eux, (prop. 129 des *Collections*, qu'il prouve en utilisant le théorème de Thalès, voir 3.8.1 ci-dessous) est le fait que, quand on coupe un pinceau de quatre droites par une transversale, le birapport³ est indépendant de la sécante, voir 3.1.5. Il déduit plusieurs résultats de ce fait et de sa réciproque et notamment (prop. 139) le théorème qui porte son nom, voir 2.2.1 ci-dessous, avec une preuve qui est presque exactement celle que nous donnons⁴. Il en déduit aussi (prop. 145) la propriété de la polaire et de la division harmonique, voir 2.4.1.

Il est amusant de noter, comme le fait Chasles p. 34, que le résultat de la prop. 129, n'a pas été beaucoup utilisé par les géomètres qui ont suivi Pappus. On verra pourtant que, de notre point de vue, il est essentiel⁵ (il signifie que les perspectives sont des homographies et nous en ferons un usage constant).

1. L'une de mes sources principales est le livre de Michel Chasles *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, réédité par J. Gabay en 1989.

2. Pappus of Alexandria, Book 7 of the *Collection* (2 vol.); édité, traduit, commenté par Alexander Jones, Springer Verlag, 1986.

3. Pappus ne voit pas le birapport comme le quotient de deux rapports de longueurs, mais comme le rapport de deux aires. Ainsi, pour exprimer l'égalité de birapports $[[A, B, C, D]] = [[A', B', C', D']]$, il dit, en substance : *Le rectangle défini par CA et DB est au rectangle défini par CB et DA comme le rectangle défini par C'A' et D'B' est au rectangle défini par C'B' et D'A'*, ce qui signifie qu'on a $\frac{CA \cdot DB}{CB \cdot DA} = \frac{C'A' \cdot D'B'}{C'B' \cdot D'A'}$. Le mot rapport anharmonique pour désigner le birapport est introduit par Chasles dans l'*Aperçu historique*. Le mot birapport est encore plus récent. En anglais on parle de *cross-ratio*, en allemand de *Doppelverhältnis*.

4. Mais dite avec les birapports, ou leurs variantes "rectangles".

5. Chasles en est bien conscient et la Note IX de l'*Aperçu* est consacrée au birapport.

Enfin, Pappus étudie aussi certaines propriétés de points de la droite (par exemple sa prop. 22 et les suivantes) que l'on peut interpréter aujourd'hui comme celles des involutions (voir ci-dessous, ch. 3).

Comme la géométrie de Pappus se place dans le cadre euclidien et qu'il n'est pas fait mention d'une utilisation de points à l'infini, cela empêche qu'on la classe d'emblée comme projective, mais on voit qu'elle contient en germe beaucoup des notions que nous allons étudier ici.

Desargues

Même si on peut la relier à l'utilisation de la perspective en peinture, notamment à l'époque de la renaissance, la première naissance véritable de la géométrie projective doit être associée au nom de Girard Desargues (1591-1661)⁶. Après plusieurs essais sur la perspective dont l'un, daté de 1636, s'intitule : *Exemple de l'une des manières universelles du Sieur Girard Desargues de Lyon touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*, dans lequel on voit apparaître pour la première fois l'idée d'une géométrie sans mesure, il publie le *Brouillon-project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan* (1639). Dans ce livre, on trouve notamment l'énoncé de ce que l'on appelle maintenant le théorème de Desargues sur les pinceaux de coniques, voir ci-dessous 3.5.6. On peut encore citer le *Brouillon-project d'exemple d'une manière universelle touchant la pratique du traict à preuves pour la coupe des pierres* (1640), qui montre que les visées de Desargues étaient très liées aux applications pratiques, et surtout le *Livre de ténèbres*, qui a disparu, mais dont on retrouve des fragments dans le *Traité de perspective* d'un de ses disciples, A. Bosse, et qui renferme l'autre théorème essentiel de Desargues, celui sur les triangles (cf. 2.3.3), avec les deux versions, dans l'espace et le plan (et d'ailleurs, Desargues est conscient de la possibilité de passage de l'un à l'autre). Dans ces ouvrages, Desargues utilise notamment la perspective, le birapport et les points à l'infini⁷, même s'ils ne sont pas clairement définis. Cependant, Desargues est décrié en son temps⁸ et son œuvre reste largement méconnue, notamment parce que ses manus-

6. Voir le livre de R. Taton, *L'œuvre mathématique de G. Desargues*, PUF, 1951.

7. Voici ce que dit Descartes à ce sujet : *Pour votre façon de considérer les lignes parallèles comme si elles s'assembloient à un but à distance infinie, afin de les comprendre sous le même genre que celles qui tendent à un point, elle est fort bonne ...*

8. Comme le dit Chasles : *Ces détails montrent le génie de Desargues, dont ses plus illustres contemporains, Descartes, Pascal, Fermat, faisaient le plus grand cas ; mais que des hommes médiocres, dont la nouveauté et la généralité de ses vues surpassaient l'intelligence, ont persécuté et dégoûté.*

crits sont perdus, jusqu'au XIX-ième siècle où Chasles a retrouvé une copie du livre sur les coniques faite par La Hire.

Signalons aussi, au XVII-ième siècle les travaux de Pascal, et notamment son théorème sur l'hexagone inscrit dans une conique, qu'il obtient (en 1639, il a 16 ans) par projection à partir du cas du cercle. Nous reverrons abondamment ce résultat dans la partie III.

Poncelet

La seconde naissance de la géométrie projective est due à Jean-Victor Poncelet (1788-1867). Lieutenant du génie dans la Grande Armée de Napoléon, Poncelet est fait prisonnier par les Russes à la bataille de Krasnoï en 1812 et passe deux ans en captivité à Saratov (1812-1814). C'est là que, sans aucun livre, il retrouve une bonne partie de la géométrie d'Euclide, mais aussi celle de ses maîtres à l'Ecole Polytechnique : Monge et Carnot et qu'il invente une nouvelle géométrie qu'il appelle projective. Comme Desargues, il dit (cf. [Pon62] p. 373) qu'il s'agit d'étudier *les propriétés des figures ... liées entre elles par des conditions générales de position indépendantes de toute grandeur ou mesure déterminée*.

Son ouvrage principal *Traité des propriétés projectives des figures* ([Pon62], [Pon64]) est publié en 1822. Le principe fondateur de cette géométrie est la notion de perspective (ou projection centrale). Il n'est peut-être pas inutile d'expliquer en quoi consiste cette opération qui va permettre de comprendre les définitions qui vont suivre. Pour étudier la géométrie d'un plan (affine), on le plonge dans l'espace à trois dimensions. On prendra par exemple ici, dans \mathbf{R}^3 muni des coordonnées (x, y, t) , le plan P d'équation $t = 1$. On considère un autre plan de \mathbf{R}^3 (non parallèle au premier), par exemple ici le plan Q d'équation $x = 1$. On prend enfin un point de l'espace n'appartenant pas à ces plans, par exemple $o = (0, 0, 0)$. La projection π , de centre o , de P sur Q associe à un point p de P le point d'intersection q de la droite (op) avec Q . La géométrie projective est donc, essentiellement, une géométrie de la règle.

Cette application est injective, mais elle n'est pas définie si (op) est parallèle à Q et les points $q \in Q$ tels que (oq) soit parallèle à P ne sont pas dans l'image de π . Dans notre exemple, π associe à $(x, y, 1)$ le point $(1, y/x, 1/x)$. Elle n'est pas définie pour les points $(0, y, 1)$ et les points non atteints sont les $(1, y, 0)$.

On voit facilement que ces projections conservent les propriétés d'incidence des figures⁹ (intersection, contact), qu'elles transforment droites en

9. Pour Poncelet (*ibid* p. 377) il s'agit essentiellement de figures formées par des points, des droites, des coniques, voire des courbes algébriques de plus grands degrés.

droites, coniques en coniques et qu'elles conservent plus généralement le degré des courbes algébriques (vu comme le nombre de points d'intersection de la courbe avec une droite générique).

Poncelet (cf. [Pon64] p. 425) appelle projective *une figure dont les parties n'auront entre elles que des dépendances ... indestructibles par l'effet de la projection* et l'idée de la géométrie projective est que, pour montrer une propriété projective, on a intérêt à projeter la figure pour la transformer en une figure plus simple. Il montre par exemple (*ibid* p. 380) qu'on peut toujours projeter une famille de droites concourantes sur une famille de droites parallèles, ou l'inverse, ou projeter une conique sur un cercle. Cette méthode n'est d'ailleurs pas tout à fait nouvelle, puisque c'est celle qu'avait utilisée Pascal pour prouver le théorème sur l'hexagone évoqué ci-dessus, mais Poncelet va la systématiser.

Pour pallier les deux difficultés évoquées ci-dessus (non définition et non surjectivité de π), Poncelet a recours à la définition d'éléments à l'infini : les points p tels que (op) est parallèle à Q s'envoient "à l'infini" dans Q , et les points q de Q tels que (oq) soit parallèle à P proviennent des points "à l'infini" de P . Il s'agit là de notions qui avaient été introduites avant lui, mais l'usage des projections permet d'en donner une définition assez satisfaisante. En effet, les points $(x, y, 1)$ à distance finie de P correspondent bijectivement aux droites (op) , avec $p \in P$, tandis que les points à l'infini correspondent aux droites (op) parallèles à P , c'est-à-dire aux droites qui joignent o aux points $(x, y, 0)$ (deux tels points donnant la même droite, donc le même point à l'infini de P , s'ils sont proportionnels). De plus, comme ces dernières, par π s'envoient sur des points alignés (ici les points $(1, y', 0)$), et que la projection conserve l'alignement, on peut, à bon droit, voir les points à l'infini de P comme formant une droite.

En définitive, les points p du plan projectif \widehat{P} obtenu en adjoignant à P ses points à l'infini correspondent bijectivement aux droites projetantes issues de o , qui sont de la forme :

$$\{(\lambda x, \lambda y, \lambda t) \mid \lambda \in \mathbf{R}^*\}$$

avec x, y, t non tous nuls. Le triplet (x, y, t) est ce qu'on appelle un système de coordonnées homogènes pour p (c'est justifié par le fait que deux triplets proportionnels donnent le même point). Poncelet n'utilise pas ces coordonnées, mais elles sont introduites peu après (1829), par Plücker, dans un article paru au Journal de Crelle *Ueber ein neues Coordinatensystem*. Elles apparaissent d'ailleurs comme distances (orientées) d'un point à trois droites données du plan¹⁰. Cette introduction des coordonnées homogènes permet de décrire les

10. Si on appelle X, Y, T les équations de ces droites on retrouve les coordonnées ho-

points à l’infini, d’introduire les équations homogènes pour les droites, les coniques et les courbes algébriques de plus grands degrés. Elle permet aussi de justifier l’usage des points cycliques, que Poncelet utilisait de manière informelle. Voici ce que dit Plücker¹¹ : *Ebenso stossen wir in diesem System auf den andern Poncelet’schen Satz, “dass zwei concentrische Kreise in unendlicher Entfernung einen imaginären doppelten Contact haben”*.

Dès les années 1840 les coordonnées homogènes sont systématiquement utilisées par les géomètres. On les trouve notamment en maints endroits dans les volumineuses œuvres de Cayley. Une présentation très claire en est donnée dans le livre de O. Hesse *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes*¹².

La fin de l’histoire ?

Il serait trop long de résumer ici l’explosion des géométries au XIX-ième siècle, avec en particulier la naissance des géométries non euclidiennes, anallagmatique, etc. et leurs liens avec la géométrie projective, et nous reviendrons d’ailleurs sur ces questions dans les parties suivantes. On peut considérer que le point d’orgue de ce siècle de recherches en géométrie est le programme d’Erlangen de Felix Klein que nous avons évoqué dans l’introduction. Le lecteur aura d’ailleurs un bon aperçu de la géométrie du XIX-ième siècle dans deux livres de Klein *Vorlesungen über höhere Geometrie*¹³ et *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*¹⁴.

La plupart des auteurs du XIX-ième siècle¹⁵ utilisent soit la définition analytique avec les coordonnées homogènes, soit une définition empirique de l’espace projectif en adjoignant des éléments à l’infini à l’espace affine. Dans la plupart des cas cela se fait sans avoir un support axiomatique bien solide (voir cependant les travaux de Peano¹⁶ et de Pasch¹⁷ dans les années 1880-1890).

Dans ce texte, nous utiliserons dès les premières lignes la notion d’espace vectoriel, l’espace projectif étant vu comme un quotient d’un espace vectoriel privé de 0. Bien entendu, cette approche abstraite un peu pédante

homogènes usuelles.

11. *De même, nous rencontrerons dans ce système un autre théorème de Poncelet “que deux cercles concentriques ont un double contact imaginaire à l’infini”*.

12. Springer, 1861.

13. Springer 1926, première édition 1893.

14. Springer 1979, première édition 1926.

15. Et cela dure jusqu’au début du XX-ième siècle, voir par exemple le livre d’Enriques.

16. *Geometric Calculus*, trad. L.C. Kannenberg, Birkhäuser.

17. *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Springer, 1882.

revient essentiellement à l’usage des coordonnées homogènes des anciens. Il faut bien être conscient que le mot “espace vectoriel”, qui nous est si familier, ne s’est imposé que très tard dans la littérature. On sait que c’est Hermann Grassmann¹⁸ qui est le premier initiateur de cette notion (mais pas avec ce nom), mais il ne me semble pas qu’il l’utilise pour donner une définition de l’espace projectif¹⁹. Elle est aussi dans le livre de Peano cité plus haut, sous une forme plus proche du concept habituel.

En dépit de ces définitions, la notion est peu utilisée et, au début du siècle, un livre comme celui de Maxime Bôcher *Introduction to higher algebra*²⁰ qui fait autorité en matière d’algèbre linéaire (et où l’on trouve notamment les notions d’indépendance, d’applications linéaires, de matrices et de déterminants), utilise exclusivement des n -uplets de quantités (donc des éléments de \mathbf{R}^n) ou des polynômes, et ne prononce pas le mot “espace vectoriel”, même s’il note que les règles vérifiées par ces objets sont les mêmes. Le premier ouvrage qui présente à nos oreilles une tonalité résolument moderne en la matière est sans doute le *Moderne Algebra* de Van der Waerden (1930) dont on sait qu’il influença fortement le groupe Bourbaki.

18. *Ausdehnungslehre, 1862*, traduction française de Flament, Blanchard 1994 ou traduction anglaise *Extension Theory* AMS et London Math. Soc. 2000. On peut signaler aussi le travail d’Hermann Grassmann fils *Projektive Geometrie der Ebene* Teubner 1909.

19. Je n’ai pas lu Grassmann dans le détail, mais je note, dans cette œuvre dense et parfois obscure, cette phrase qui concerne les points à l’infini : *kein algebrisches Gesetz für das Unendliche gilt* (aucune loi algébrique ne vaut pour l’infini).

20. Dover publication, 1964, première édition 1907.

Chapitre 1

L'espace projectif et ses sous-espaces

Dans ce chapitre on définit les principales notions relatives à l'espace projectif : points, sous-espaces, homographies, repères, on explique le lien entre espaces affines et projectifs et on commence à développer la notion de dualité. Rappelons que nous avons choisi l'entrée dans la géométrie projective via l'algèbre linéaire. Nous nous en sommes expliqué dans l'introduction. Que le lecteur qui trouverait ce chapitre un peu théorique se rassure : il fera de la géométrie dès le chapitre suivant.

Dans tout ce qui suit on travaille sur un corps commutatif¹ k . Dans le premier chapitre, on considère un k -espace vectoriel E de dimension $n + 1$, avec $n \geq 0$.

1.1 Définition de l'espace projectif

Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence définie sur $E - \{0\}$ par

$$x\mathcal{R}y \iff \exists \lambda \in k^*, \quad y = \lambda x$$

(autrement dit, x et y sont colinéaires). Les classes d'équivalence pour cette relation sont les droites vectorielles de E , privées de 0. On définit alors :

1. Le lecteur curieux qui s'intéresse au cas d'un corps non commutatif consultera par exemple le livre d'Artin [Art62].

1.1.1 Définition. L'espace projectif associé à E est l'espace quotient $\mathbf{P}(E) := (E - \{0\})/\mathcal{R}$ et l'entier n est appelé dimension de $\mathbf{P}(E)$. Lorsque l'on a $E = k^{n+1}$ on note $\mathbf{P}(k^{n+1}) = \mathbf{P}^n(k)$ et cet espace est appelé espace projectif standard de dimension n . On note $p : E - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}(E)$ la projection canonique.

1.1.2 Remarque. Lorsque n est égal à 0, 1, 2 on dit que $\mathbf{P}(E)$ est un point, une droite projective ou un plan projectif respectivement. Une première explication de la déperdition de 1 entre les dimensions annoncées de E et de $\mathbf{P}(E)$ tient au fait que les fibres de p (c'est-à-dire les images réciproques $p^{-1}(x)$ pour $x \in \mathbf{P}(E)$) sont de dimension 1. On verra une autre explication en 1.4 ci-dessous.

1.1.3 Notations.

1) Les éléments de $\mathbf{P}(E)$ sont appelés **points** (et on doit les penser comme tels et non comme des droites) et notés avec des minuscules : a, x , etc. Les éléments de E sont appelés vecteurs. On utilisera deux types de notations pour préciser le lien entre vecteurs et points : on notera \widehat{a} un antécédent de $a \in \mathbf{P}(E)$ dans E et, inversement, $p(x) = \bar{x}$ pour $x \in E - \{0\}$.

2) Supposons qu'on ait identifié E et k^{n+1} par le choix d'une base. Soit $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de E d'image \bar{x} . On dit que x est un **système de coordonnées homogènes** de \bar{x} . Cela signifie que les x_i sont non tous nuls et que $\lambda x = (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n)$ (avec $\lambda \in k^*$) a aussi pour image \bar{x} (donc est un autre système de coordonnées homogènes de \bar{x} , ce qui justifie l'appellation).

1.2 Sous-espaces projectifs

1.2.1 Définition

1.2.1 Définition. Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E , de dimension $m + 1$, avec $0 \leq m \leq n$. L'image $\overline{F} = p(F - \{0\})$ est appelé un **sous-espace projectif** de $\mathbf{P}(E)$ de dimension m .

1.2.2 Remarques.

1) Cette définition est justifiée par le fait que la relation de colinéarité sur F est la restriction de celle sur E , de sorte que \overline{F} est canoniquement en bijection avec l'espace projectif $\mathbf{P}(F)$.

2) Là encore, on dit que \overline{F} est un point si on a $m = 0$, une droite si $m = 1$, un plan si $m = 2$, un hyperplan si $m = n - 1$.

3) Les notions précédentes permettent de développer une géométrie dans l'espace projectif, comme dans les espaces affines usuels. On peut ainsi parler de

points alignés ou colinéaires (a, b, c sont alignés s'il existe une droite projective qui les contient), de droites concourantes (A, B, C sont concourantes si leur intersection contient un point), de points coplanaires, etc. On utilisera d'ailleurs le vocabulaire euclidien usuel : une droite *pass*e par un point, deux droites *se coupent* en un point, etc.

1.2.3 Définition. Soit H un hyperplan vectoriel de E , défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle $f \in E^*$. On dit que f est une **équation** de l'hyperplan projectif \overline{H} . Cette équation est définie à un scalaire multiplicatif près.

1.2.4 Exemple. Dans le plan $\mathbf{P}^2(k)$, muni des coordonnées homogènes (x, y, t) , une droite projective est définie par une équation de la forme $ux + vy + wt = 0$, avec u, v, w non tous nuls.

1.2.2 Propriétés d'incidence

Les propriétés ci-dessous, qui fondent la géométrie projective, sont immédiates en revenant à l'espace vectoriel :

1.2.5 Théorème. Soit $\mathbf{P}(E)$ un espace projectif de dimension $n \geq 2$. On a les propriétés suivantes :

- 1) Par deux points distincts a, b passe une droite et une seule, que nous noterons (ab) .
- 2) Par trois points a, b, c non alignés passe un plan et un seul, que nous noterons (abc) .

Démonstration. Pour 1) il suffit de noter que si \widehat{a} et \widehat{b} sont deux vecteurs relevant a, b , ils sont non colinéaires, donc déterminent un plan vectoriel $(\widehat{a}, \widehat{b})$, dont l'image dans le projectif est une droite projective contenant a, b . Le raisonnement est analogue dans le cas de trois points.

La proposition suivante est fondamentale :

1.2.6 Proposition. On suppose E de dimension 3.

- 1) Soit \bar{x} un point de $\mathbf{P}(E)$ de représentant $x \in E$ et soit D une droite de $\mathbf{P}(E)$ d'équation $f \in E^*$. Le point \bar{x} est sur la droite D si et seulement si on a $f(x) = 0$.
- 2) Soient $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ trois points de $\mathbf{P}(E)$ de représentants $x, y, z \in E$. Ces points sont alignés si et seulement si les vecteurs x, y, z sont linéairement dépendants.
- 3) Soient F, G, H trois droites de $\mathbf{P}(E)$ d'équations $f, g, h \in E^*$. Ces droites sont concourantes si et seulement si les formes f, g, h sont linéairement dépendantes.

Démonstration. Les points 1) et 2) sont évidents. Pour 3), on peut écrire le système d'équations correspondant ou appliquer 2) au plan dual (voir 1.6.5).

1.2.3 Théorèmes d'intersection

L'un des intérêts essentiels de l'espace projectif, par rapport à l'anne, est d'offrir des théorèmes d'intersection sans exceptions.

1.2.7 Théorème. *Soit $\mathbf{P}(E)$ un espace projectif de dimension n et soient $V = \overline{A}, W = \overline{B}$ deux sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}(E)$, de dimensions r et s , avec $r + s - n \geq 0$, provenant de sous-espaces vectoriels A, B de E . Alors, on a $V \cap W = \overline{A \cap B}$ et $V \cap W$ est un sous-espace projectif de dimension $\geq r + s - n$ (et en particulier il est non vide).*

Démonstration. Cela résulte aussitôt du théorème d'intersection des sous-espaces vectoriels : $\dim(A + B) + \dim(A \cap B) = \dim A + \dim B$.

1.2.8 Exemple.

Si $n = 2$, deux droites distinctes du plan projectif se coupent en un point et un seul. Si $n = 3$, un plan et une droite ont au moins un point commun et en ont un seul si la droite n'est pas incluse dans le plan ; deux plans distincts se coupent suivant une droite, etc... Dans le cas général de dimension n , une droite et un hyperplan ont au moins un point commun et en ont un seul si la droite n'est pas contenue dans l'hyperplan.

On voit que les énoncés sont les mêmes que ceux de l'espace affine, avec la différence notable qu'il n'y a plus d'exceptions : plus de droites ou de plans parallèles. On peut dire, en quelque sorte, que la géométrie projective correspond au cas "générique" de la géométrie affine : le cas où il n'y a pas de parallèles.

1.3 Les homographies

Dans ce paragraphe nous définissons les homographies qui sont les morphismes entre espaces projectifs, c'est-à-dire les applications entre ces objets qui en conservent les structures. Comme, dans notre présentation, les espaces projectifs proviennent des espaces vectoriels, il est naturel de partir des bonnes applications entre ceux-ci : les applications linéaires.

1.3.1 Définition

Soient E, E' deux espaces vectoriels et soit u une application linéaire de E dans E' . Il s'agit de définir, à partir de u , une application entre les

espaces projectifs par passage au quotient. Comme u conserve la colinéarité, la formule $\bar{u}(\bar{x}) = \overline{u(x)}$ a un sens, sauf si $u(x)$ est nul. Autrement dit, la seule chose à imposer c'est que u soit injectif. En fait, on préfère se limiter au cas bijectif (pour avoir aussi les applications inverses) :

1.3.1 Définition. Soit $u : E \rightarrow E'$ une application linéaire bijective. L'application bijective $\bar{u} : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E')$ définie par $\bar{u}(\bar{x}) = \overline{u(x)}$ est appelée une **homographie**.

1.3.2 Remarque. Pour une explication du mot homographie, cf. 1.4.1.

1.3.3 Proposition.

1) La composée de deux homographies est une homographie. En particulier, l'ensemble des homographies de $\mathbf{P}(E)$ dans lui-même est un groupe noté $PGL(E)$.

2) Le groupe $PGL(E)$ est isomorphe au quotient de $GL(E)$ par le groupe k^* des homothéties de E .

3) L'image par une homographie d'un sous-espace projectif est un sous-espace projectif de même dimension. En particulier **les homographies conservent l'alignement** (on dit encore que ce sont des **collinéations**).

Démonstration. Le point 1) résulte du fait que la composée de deux applications linéaires bijectives est une application linéaire bijective.

Pour 2), il est clair que les homothéties opèrent trivialement sur $\mathbf{P}(E)$. Réciproquement, si une application linéaire u transforme tout vecteur en un vecteur colinéaire, on vérifie que u est une homothétie (voir Exercice 1.7.2).

Enfin, si \bar{F} est un sous-espace projectif de $\mathbf{P}(E)$, on a $\bar{u}(\bar{F}) = \overline{u(F)}$, ce qui prouve l'assertion 3).

1.3.4 Remarque. Le point 3) admet une réciproque partielle, appelée théorème fondamental de la géométrie projective, voir ci-dessous chapitre 4.

1.3.2 Homographies, matrices, déterminant

Si l'espace vectoriel E de dimension $n + 1$ est muni d'une base e_0, \dots, e_n , l'application qui à un automorphisme $u \in GL(E)$ associe sa matrice A dans la base des e_i est un isomorphisme de $GL(E)$ sur le groupe $GL(n + 1, k)$ des matrices inversibles $(n + 1) \times (n + 1)$ à coefficients dans k . Cet isomorphisme induit un isomorphisme du groupe des homographies $PGL(E)$ sur le groupe $PGL(n + 1, k) = GL(n + 1, k)/k^*$. L'homomorphisme déterminant, $\det : GL(E) \rightarrow k^*$ induit par passage au quotient un homomorphisme $\overline{\det} : PGL(E) \rightarrow k^*/(k^*)^{n+1}$ (où l'on note $(k^*)^{n+1}$ le sous-groupe de k^*

formé des éléments de la forme λ^{n+1} avec $\lambda \in k^*$) dont le noyau est le groupe $PSL(E)$, image des automorphismes de déterminant 1. On sait que ce groupe est simple (sauf dans deux cas exceptionnels), cf. [Per96], [Die70].

1.4 Espaces affines et espaces projectifs

Ce qui suit est une première approche du lien affine-projectif. Le lecteur est supposé familier avec la notion d'espace affine pour laquelle on le renvoie à [Ber90], [Aud06], [MCD07].

Pour l'essentiel, on a choisi de traiter cette question avec des coordonnées. En effet, tout espace affine peut être identifié, par le choix d'un repère affine, à l'espace numérique k^n et c'est en ce sens que nous l'entendrons ici. Une variante intrinsèque est toutefois donnée au dernier paragraphe. Elle sera utile dans les parties II et V.

1.4.1 Des espaces affines dans l'espace projectif

Supposons que l'espace vectoriel E , de dimension $n + 1$, est muni d'une base, de sorte que l'on a $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}^n(k)$, avec les coordonnées (x_0, x_1, \dots, x_n) . Soit H l'hyperplan vectoriel d'équation $x_0 = 0$ et \overline{H} l'hyperplan projectif associé et posons $U = \mathbf{P}^n(k) - \overline{H}$. On a une bijection $\varphi : U \rightarrow k^n$ qui à \overline{x} (avec $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$) associe $(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0)$. Cette application est bien définie : sur U , x_0 est non nul et l'image ne dépend pas du système de coordonnées homogènes de \overline{x} . Elle est bijective, la réciproque étant donnée par $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (1, x_1, \dots, x_n)$.

Comme l'hyperplan \overline{H} est un espace projectif de dimension $n - 1$, ce qui précède décrit l'espace projectif $\mathbf{P}^n(k)$ de dimension n comme réunion disjointe d'un espace affine k^n de dimension n et d'un espace projectif \overline{H} de dimension $n - 1$. On peut aussi dire qu'on a plongé l'espace affine de dimension n dans un espace projectif de même dimension. Les points de k^n seront dits "à distance finie", ceux de \overline{H} "à l'infini".

Bien entendu cette notion d'infini est relative au choix de l'hyperplan \overline{H} et il est tout à fait possible d'en changer en prenant par exemple les autres hyperplans $x_i = 0$ ou d'autres encore. En vérité, dans l'espace projectif il n'y a pas d'infini : l'infini est une notion affine !

1.4.2 La droite projective

On prend $n = 1$, on appelle (x, t) les coordonnées de k^2 et on choisit $t = 0$ comme hyperplan \overline{H} "à l'infini". En fait, comme tous les points $(x, 0)$ de H

sont colinéaires, \overline{H} est réduit au seul point $\infty = (1, 0)$ et on identifie k et $\mathbf{P}^1(k) - \{\infty\}$ par $x \mapsto (x, 1)$. On voit donc qu'une droite projective est une droite affine, à laquelle on a adjoint un unique point à l'infini.

La figure ci-dessous illustre ce qui précède. La droite projective $\mathbf{P}^1(k)$ est l'ensemble des droites passant par l'origine. On associe à chaque droite de $\mathbf{P}^1(k)$ son intersection avec la droite affine D d'équation $t = 1$, excepté pour l'axe des x qui est parallèle à D et correspond au point à l'infini ajouté à D .

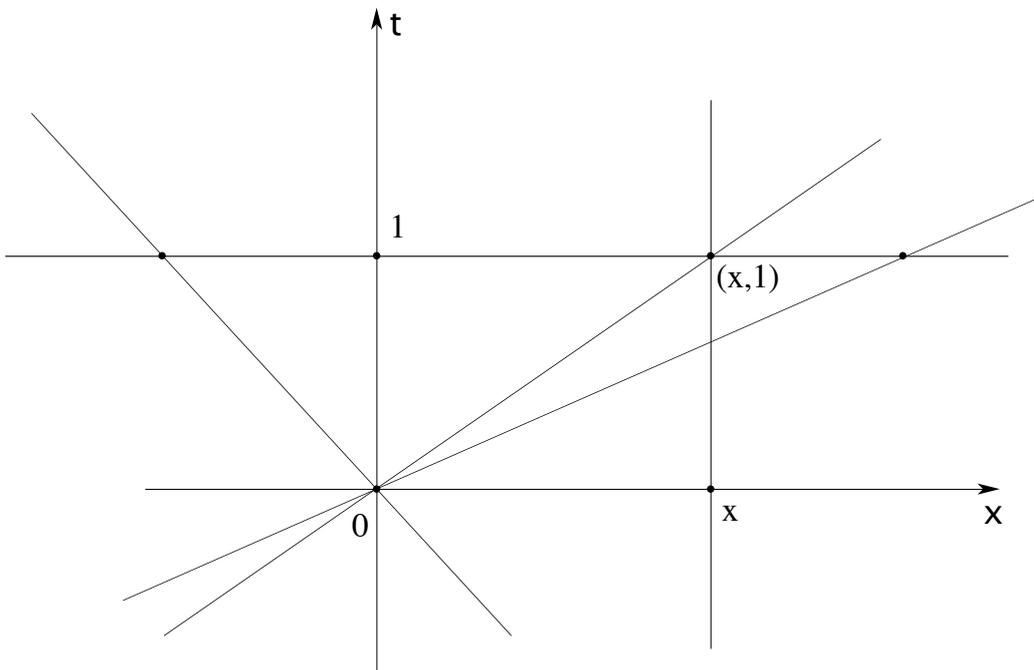


FIGURE 1.1 – La bijection entre les droites passant par l'origine et la droite projective

L'écriture ci-dessus donne le cardinal de la droite projective si k est fini et, si $k = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , des renseignements de nature topologique : la droite projective est le compactifié d'Alexandroff de la droite affine donc homéomorphe à un cercle si $k = \mathbf{R}$ ou à une sphère si $k = \mathbf{C}$ (voir exercice 1.7.6 pour la définition de la topologie).

On peut aussi utiliser cette décomposition pour décrire les homographies de la droite projective :

1.4.1 Proposition. *Avec les notations précédentes, les homographies de $\mathbf{P}^1(k)$ sont les applications de la forme $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, avec $a, b, c, d \in k$ vérifiant $ad - bc \neq 0$ et les conventions suivantes :*

- 1) si on a $c = 0$, $f(x)$ est de la forme $ax + b$ (application affine) et on pose $f(\infty) = \infty$,
- 2) si on a $c \neq 0$, on pose $f(-\frac{d}{c}) = \infty$ et $f(\infty) = \frac{a}{c}$.

Démonstration. Le point essentiel est de noter qu'en vectoriel l'image de $(x, 1)$ par l'application linéaire de matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $(ax + b, cx + d)$, soit, en projectif, le point $\frac{ax + b}{cx + d}$ (au moins si $x \neq -\frac{d}{c}$).

1.4.2 Remarque. On reconnaît les homographies au sens élémentaire du terme, avec les conventions usuelles par rapport à l'infini, que l'on peut relier dans les cas $k = \mathbf{R}$ ou \mathbf{C} , aux limites de f lorsque x tend vers $-d/c$ ou lorsque $|x|$ tend vers l'infini.

1.4.3 Le plan projectif

On utilise les coordonnées (x, y, t) et toujours $t = 0$ comme hyperplan à l'infini. Cette fois \overline{H} est formé des points de coordonnées **homogènes** $(x, y, 0)$ et c'est donc une droite projective notée D_∞ . Le complémentaire de \overline{H} est formé des points $(x, y, 1)$, il est isomorphe au plan affine k^2 par oubli de la troisième coordonnée.

Les droites projectives du plan

Cherchons les droites projectives de $\mathbf{P}^2(k)$. Une telle droite \overline{D} est donnée comme image d'un sous-espace de dimension 2 de k^3 , donc par une unique équation linéaire non triviale : $ux + vy + wt = 0$ (avec u, v, w non tous nuls) et il y a deux cas de figure :

- 1) Si $u = v = 0$ on peut supposer $w = 1$ et \overline{D} n'est autre que D_∞ .
- 2) Sinon, on regarde la trace D de \overline{D} dans le plan affine k^2 : on trouve les points (x, y) vérifiant $ux + vy + w = 0$ c'est-à-dire une droite affine. On cherche aussi la trace de \overline{D} sur D_∞ , on trouve les points $(x, y, 0)$ avec $ux + vy = 0$, il y a un unique point, dont on peut prendre $(v, -u, 0)$ comme coordonnées homogènes. Le point à l'infini de D est appelé **direction** de D et d'ailleurs une droite affine D' est parallèle à D si et seulement si elle a pour équation $ux + vy + w' = 0$, donc le même point à l'infini que D : deux droites sont parallèles si et seulement si elles se coupent sur la droite de l'infini.

Pour résumer on voit que les droites projectives distinctes de D_∞ correspondent bijectivement aux droites affines, chaque droite projective étant munie, en plus, d'un point à l'infini qui correspond à sa direction.

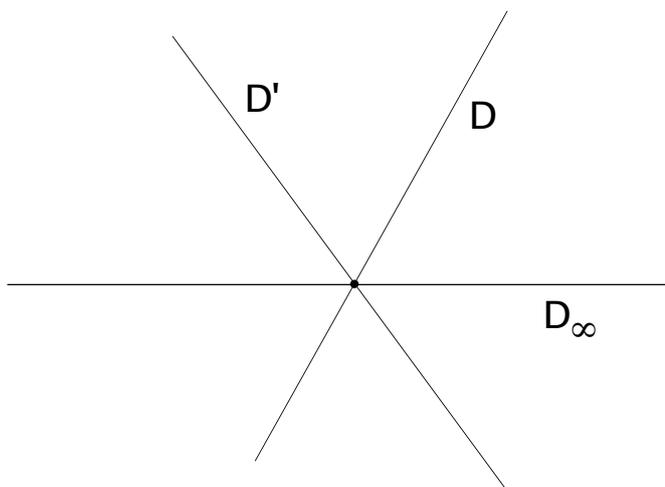


FIGURE 1.2 – Droites parallèles

Théorèmes affines et théorèmes projectifs

Ce qui précède établit un lien entre la géométrie affine et la géométrie projective. Ce lien peut être exploité de deux manières différentes et quelque peu contradictoires.

On peut choisir de prouver les théorèmes de géométrie (Pappus, Desargues, Ménélaüs, Pascal, etc.) en géométrie affine, avec les outils de cette géométrie : le passage au vectoriel, les barycentres, les aires, les translations et les homothéties, etc., puis de généraliser ces théorèmes en projectif en changeant de droite de l’infini. Il faut, pour que cela soit possible, que les théorèmes en question soient “projectifs”, i.e. qu’une homographie n’altère ni leurs hypothèses, ni leurs conclusions (c’est le cas par exemple du théorème de Pappus). Pour de nombreuses applications de cette technique, voir par exemple [Ber90].

On peut, à l’inverse, prouver ces théorèmes en projectif (lorsque leur énoncé est projectif, bien entendu ; cela peut nécessiter un travail de traduction, voir par exemple le théorème de Céva), puis les spécialiser en affine (en choisissant des éléments à l’infini particuliers), voir ci-dessous 2.2.3, 2.2.4, 2.3.5, 3.6.4, 3.6.7, 3.6.13, voire en euclidien, cf. 3.5.9, 3.8.11. Nous avons choisi systématiquement cette option tout au long de ce texte. Il y a une raison “philosophique” à cela : nous pensons que les théorèmes sont plus faciles à prouver quand ils sont débarrassés de leur gangue, c’est-à-dire des hypothèses inutiles (ici les hypothèses affines ou euclidiennes) et qu’ils ont trouvé, en quelque sorte, leur niche écologique privilégiée. Cette conviction repose essentiellement sur notre lecture de la théorie des invariants et nous

nous en expliquerons plus longuement dans la Partie II.

1.4.4 Variante intrinsèque

Rappelons brièvement la définition intrinsèque (c'est-à-dire sans coordonnées) d'un espace affine. On considère un ensemble X sur lequel opère un espace vectoriel V . Pour des éléments $x \in X$ et $\vec{v} \in V$, on note $x + \vec{v}$ cette opération (on pensera à une translation). On suppose que l'opération est simplement transitive. Cela signifie qu'étant donnés deux points $x, y \in X$ il existe un unique vecteur \vec{v} qui vérifie $x + \vec{v} = y$. Ce vecteur est noté \overrightarrow{xy} et on a deux propriétés :

- La relation de Chasles : $\overrightarrow{xz} = \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz}$ pour tous $x, y, z \in X$.
- Le fait que, pour $a \in X$ fixé, l'application $x \mapsto \overrightarrow{ax}$ est une bijection de X sur V .

Ces propriétés constituent d'ailleurs une définition alternative d'espace affine.

Revenons à l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ associé à l'espace vectoriel E . Soit H un hyperplan de E et posons $U = \mathbf{P}(E) - \mathbf{P}(H)$. On choisit une équation T de H , $T \in E^*$. Si \bar{x} est un point de U , on a $T(x) \neq 0$.

1.4.3 Proposition. *L'application qui à $h \in H$ et $\bar{x} \in U$ associe $h \cdot \bar{x} = \overline{x + T(x)h}$ est bien définie. C'est une opération de H sur U , simplement transitive, de sorte qu'elle fait de U un espace affine sous H . Pour des points $\bar{x}, \bar{x}' \in U$, le vecteur $\overrightarrow{\bar{x}\bar{x}'}$ est égal à $\frac{x'}{T(x')} - \frac{x}{T(x)}$. Il est indépendant du choix des représentants² x et x' des points \bar{x}, \bar{x}' .*

Démonstration. On vérifie aussitôt que $\overline{x + T(x)h}$ ne dépend pas du choix du représentant de \bar{x} et que c'est une opération. Soient \bar{x}, \bar{x}' deux points de U , de représentants x, x' . On cherche $h \in H$ et $\lambda \in k^*$ tels que l'on ait $x + T(x)h = \lambda x'$. Comme $T(h)$ doit être nul, on trouve $\lambda = \frac{T(x)}{T(x')}$, de sorte que l'unique h qui fait passer de \bar{x} à \bar{x}' est :

$$h = \frac{T(x)x' - T(x')x}{T(x)T(x')}.$$

On vérifie qu'il est indépendant du choix des représentants x, x' , c'est bien le "vecteur" $\overrightarrow{\bar{x}\bar{x}'}$.

2. Et on pourra donc le noter $\overrightarrow{\bar{x}\bar{x}'}$.

1.4.4 Remarques.

1) Pour $x \in U$ on a $T(x) \neq 0$ et, quitte à changer de représentant, on peut supposer que $T(x)$ est égal à 1. On parle alors du représentant “canonique” de \bar{x} et avec les notations du paragraphe précédent, cela revient à imposer $x_0 = 1$. Avec ce choix les calculs précédents sont plus faciles, on a $h.\bar{x} = \bar{x} + \bar{h}$ et si \bar{x}, \bar{x}' sont deux points de U , de représentants canoniques x, x' , l'unique h qui fait passer d'un point à l'autre est donné par $h = x' - x$.

2) On notera que la structure d'espace affine ainsi définie dépend du choix de l'équation T de H . Si on remplace T par λT avec $\lambda \in k^*$, le vecteur $\overrightarrow{xx'}$ est multiplié par $1/\lambda$.

1.5 Repères

D'une manière générale, la problématique de la notion de repère, pour une structure donnée, est liée aux transformations permises pour la structure (les morphismes en termes de catégories, ici les homographies). Le principe en est toujours le même : il s'agit de trouver un nombre fini de points de l'espace, tels que la donnée des images de ces points détermine un morphisme et un seul.

1.5.1 Définition

1.5.1 Définition. *On suppose toujours l'espace vectoriel E de dimension $n + 1$. Un repère de l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ consiste en la donnée de $n + 2$ points $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ tels qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n, e_{n+1})$ de E vérifiant :*

- 1) $p(e_i) = x_i$ pour $i = 1, \dots, n + 1$,
- 2) $p(e_1 + \dots + e_{n+1}) = x_0$.

1.5.2 Exemple. Si on identifie E et k^{n+1} grâce à la base (e_i) , le repère ci-dessus est formé des points de coordonnées homogènes : $(1, 0, \dots, 0)$; $(0, 1, 0, \dots, 0)$; ... ; $(0, 0, \dots, 0, 1)$ et du “point unité” : $(1, 1, \dots, 1)$.

1.5.3 Remarque. On notera l'inflation du nombre de points constituant un repère :

- en vectoriel, en dimension n , une base est formée de n vecteurs,
- en affine, en dimension n , un repère est formé de $n + 1$ points,
- en projectif, toujours en dimension n , il faut $n + 2$ points.

1.5.2 Simple transitivité

Le théorème suivant justifie l'appellation de repère :

1.5.4 Théorème. *Soient E et F deux k -espaces vectoriels de dimension $n+1$ et soient $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ et $(y_0, y_1, \dots, y_{n+1})$ des repères de $\mathbf{P}(E)$ et $\mathbf{P}(F)$ respectivement. Alors, il existe une unique homographie $f : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(F)$ telle que $f(x_i) = y_i$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n+1$.*

Démonstration. On note (e_i) et (f_i) les bases de E et F dont proviennent les repères donnés : $x_i = p(e_i)$, $y_i = p(f_i)$ pour $i > 0$.

1) *Existence.* On définit une application linéaire bijective $\widehat{u}_0 : E \rightarrow F$ en posant $\widehat{u}_0(e_i) = f_i$ pour tout i . Alors l'homographie u_0 associée convient (on notera qu'on a $\widehat{u}_0(\sum_{i=1}^{n+1} e_i) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i$, de sorte que u_0 envoie aussi x_0 sur y_0).

2) *Unicité.* Soit u une homographie vérifiant les conditions prescrites. Elle provient d'une application linéaire $\widehat{u} : E \rightarrow F$. Dire qu'on a $u(x_i) = y_i$ dans $\mathbf{P}(E)$ signifie qu'il existe des scalaires $\lambda_i \in k^*$ tels que l'on ait, pour tout $i > 0$: $\widehat{u}(e_i) = \lambda_i f_i$. Mais, comme on a aussi $u(x_0) = y_0$, il existe $\lambda \in k^*$ tel que :

$$\widehat{u}\left(\sum_{i=1}^{n+1} e_i\right) = \lambda \left(\sum_{i=1}^{n+1} f_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i$$

ce qui, comme (f_i) est une base, montre que les λ_i sont tous égaux à λ . Mais alors, avec les notations de 1) on a $\widehat{u} = \lambda \widehat{u}_0$, donc $u = u_0$.

1.5.3 Caractérisation géométrique

Nous donnons ci-dessous une caractérisation géométrique des repères :

1.5.5 Proposition. *Un $n+2$ -uplet de points de $\mathbf{P}(E)$ est un repère si et seulement si $n+1$ quelconques de ses points ne sont pas dans un même hyperplan.*

Démonstration. Notons d'abord qu'il est équivalent de dire que des vecteurs f_1, \dots, f_{n+1} forment une base de E ou que leurs images $y_i = p(f_i)$ ne sont pas dans un même hyperplan de $\mathbf{P}(E)$.

1) Si $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ est un repère provenant d'une base (e_i) de E le résultat vient du fait que $n+1$ quelconques des vecteurs $e_0 = \sum_{i=1}^{n+1} e_i$, e_1, \dots, e_{n+1} forment une base de E .

2) Réciproquement, si x_0, x_1, \dots, x_{n+1} vérifient les conditions de la proposition, on relève les x_i , $i > 0$, en des vecteurs e_i qui forment une base de

E et on relève x_0 en $e_0 = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i$. Alors, les λ_i sont tous non nuls (si λ_i est nul, tous les points sauf x_i sont dans l'hyperplan défini par la nullité de la i -ième coordonnée). Quitte à changer la base e_i en $\lambda_i e_i$ on a le résultat.

1.5.6 Remarques. 1) Un repère d'une droite projective est formé de trois points distincts, un repère d'un plan projectif est formé de 4 points dont 3 quelconques ne sont pas alignés.

2) Si D, D' sont deux droites projectives, il existe³ une unique homographie de D sur D' qui envoie trois points donnés distincts a, b, c de D sur trois points donnés distincts a', b', c' de D' . En particulier le groupe $PGL(2, k)$ opère triplement transitivement sur $\mathbf{P}^1(k)$. Nous verrons plus loin, dans le chapitre sur le birapport, ce qui se passe quand on considère un quatrième point. On notera que les groupes qui sont strictement plus que trois fois transitifs sont rarissimes (cf. [Hal76]).

1.5.4 Sous-espace projectif engendré par des points

La proposition suivante est immédiate :

1.5.7 Proposition-Définition. Soient a_0, a_1, \dots, a_m des points de $\mathbf{P}(E)$ et $\widehat{a}_0, \dots, \widehat{a}_m$ des représentants de ces points dans E . Le sous-espace vectoriel \widehat{F} de E engendré par les \widehat{a}_i est indépendant du choix des représentants. Son image $F = p(\widehat{F})$ dans $\mathbf{P}(E)$ est appelé **sous-espace projectif engendré** par les a_i et noté (a_0, a_1, \dots, a_m) voire $(a_0 a_1 \dots a_m)$. C'est le plus petit sous-espace projectif de $\mathbf{P}(E)$ contenant les a_i . C'est un sous-espace projectif de dimension $\leq m$ et on dit que a_0, \dots, a_m sont **projectivement indépendants** si cette dimension est exactement égale à m . Il revient au même de dire que les représentants $\widehat{a}_0, \dots, \widehat{a}_m$ sont linéairement indépendants.

1.5.8 Exemples.

- 1) Si on a deux points a_0, a_1 , le sous-espace engendré $(a_0 a_1)$ est une droite, sauf si $a_0 = a_1$ auquel cas c'est le singleton $\{a_1\}$.
- 2) Si on a trois points a_0, a_1, a_2 , le sous-espace engendré (a_0, a_1, a_2) est un plan, sauf si les points sont alignés.
- 3) On peut alors reformuler 1.5.5 en disant qu'un repère est formé de $n + 2$ points tels que $n+1$ quelconques d'entre eux soient projectivement indépendants.

3. Dans les manuels du XIX-ième siècle, ce résultat est présenté comme le "théorème fondamental" sur les homographies et il est prouvé en résolvant un système d'équations linéaires à l'aide des déterminants.

1.6 Dualité

Dans cette section, on utilise la notion de dualité pour établir un dictionnaire permettant de passer des propriétés des points à celles des droites et inversement. En dépit de nos efforts, le texte pourra sembler abstrait au lecteur novice.

1.6.1 Rappels sur la dualité dans les espaces vectoriels

Soit E un k -espace vectoriel de dimension $n+1$ et soit E^* son dual, espace des formes linéaires sur E . On rappelle que le noyau d'une forme linéaire non nulle est un hyperplan de E et qu'inversement tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle, définie à un scalaire près.

Si $(e_i) = e_1, \dots, e_{n+1}$ est une base de E , on définit une base de E^* , dite duale de (e_i) , elle est formée des e_i^* donnés par la formule $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

Si F est un sous-espace vectoriel de E on définit l'orthogonal de F , c'est un sous-espace de E^* :

$$F^\perp = \{f \in E^* \mid \forall x \in F, f(x) = 0\}.$$

On définit aussi l'orthogonal d'un sous-espace F de E . C'est un sous-espace de E :

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall f \in F, f(x) = 0\}.$$

Dans les deux cas on a les formules : $\dim F^\perp = n + 1 - \dim F$ et $F^{\perp\perp} = F$.

Rappelons enfin que si $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire, elle induit une application linéaire transposée ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$ définie par la formule ${}^t u(f) = f \circ u$. La correspondance $u \mapsto {}^t u$ est fonctorielle, i.e. vérifie ${}^t \text{Id}_E = \text{Id}_{E^*}$ et ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$. Si la matrice de u dans des bases de E, F est A , celle de ${}^t u$ dans les bases duales est la matrice transposée ${}^t A$.

1.6.2 L'espace des hyperplans

Pour $p = 0, \dots, n-1$, on note $G_p(\mathbf{P}(E))$ la "grassmannienne" d'indice p , c'est-à-dire l'ensemble des sous-espaces projectifs de dimension p de $\mathbf{P}(E)$. Nous n'étudierons ici que le cas $p = n-1$. Dans ce cas, $G_{n-1}(\mathbf{P}(E))$ est l'espace des hyperplans de $\mathbf{P}(E)$. On peut identifier $G_{n-1}(\mathbf{P}(E))$ et $\mathbf{P}(E^*)$ de la façon suivante.

On considère l'application $\Phi_E : \mathbf{P}(E^*) \rightarrow G_{n-1}(\mathbf{P}(E))$ qui associe à l'image \overline{f} d'une forme linéaire non nulle le sous-espace projectif $\overline{\text{Ker } f}$ (qui

est bien un hyperplan de $\mathbf{P}(E)$). Cette application est bien définie et c'est une bijection car on a $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ si et seulement si f et g sont proportionnelles. En un mot, Φ_E est la correspondance qui à une forme linéaire associe son noyau.

Dans ce qui suit, on munit $G_{n-1}(\mathbf{P}(E))$ de la structure d'espace projectif déduite de Φ_E au sens suivant :

1.6.1 Définition. *Soit X un ensemble, F un espace vectoriel non nul et $\Phi : \mathbf{P}(F) \rightarrow X$ une bijection. Cette bijection définit une structure d'espace projectif sur X , précisément :*

1) *On appelle sous-espaces projectifs de X les parties de la forme $\Phi(V)$ où V est un sous-espace projectif de $\mathbf{P}(F)$.*

2) *Si Y est un sous-espace projectif de X au sens précédent, une application $f : Y \rightarrow \mathbf{P}(F')$ (resp. $f : \mathbf{P}(F') \rightarrow Y$) est appelée une homographie si $f \circ \Phi$ (resp. $\Phi^{-1} \circ f$) en est une.*

1.6.2 Exemples.

1) Pour $n = 2$, $G_1(\mathbf{P}^2(k))$ est l'ensemble des droites de $\mathbf{P}^2(k)$. Avec l'identification précédente c'est lui-même un plan projectif $\mathbf{P}^2(k)$.

2) De même, $G_2(\mathbf{P}^3)$, ensemble des plans de $\mathbf{P}^3(k)$, est un espace $\mathbf{P}^3(k)$.

3) En revanche, $G_1(\mathbf{P}^3)$, grassmannienne des droites de \mathbf{P}^3 , n'est pas un espace projectif. Cependant, cet ensemble est muni naturellement d'une structure de variété algébrique (précisément une quadrique de \mathbf{P}^5 , c'est-à-dire une hypersurface définie par une équation de degré 2), cf. [Har77] ou [Per95].

1.6.3 Description des sous-espaces de $\mathbf{P}(E^*)$

La notion suivante va permettre d'interpréter géométriquement les sous-espaces de $G_{n-1}(\mathbf{P}(E))$:

1.6.3 Définition. *Si V est un sous-espace projectif de $\mathbf{P}(E)$ on pose :*

$$V^* = \{ \overline{H} \in G_{n-1}(\mathbf{P}(E)) \mid \overline{H} \supset V \}.$$

En clair, V^* est l'ensemble des hyperplans projectifs contenant V . La proposition suivante exprime que ces ensembles sont exactement les sous-espaces projectifs de $G_{n-1}(E)$ au sens de 1.6.1, puisqu'ils sont les images par Φ_E des sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}(E^*)$.

1.6.4 Proposition. *On a les formules suivantes :*

- 1) *Pour un sous-espace vectoriel F non nul de E^* : $\Phi_E(\overline{F}) = (\overline{F^\perp})^*$,*
- 2) *Pour un sous-espace vectoriel G non nul de E : $(\overline{G})^* = \Phi_E(\overline{G^\perp})$.*

Démonstration. Prouvons la première assertion. Soit $f \in F$. On a $\text{Ker } f \supset F^\perp$ par définition de F^\perp , soit encore $\overline{\text{Ker } f} \supset \overline{F^\perp}$, d'où $\Phi_E(f) \in (\overline{F^\perp})^*$.

Réciproquement, si un hyperplan \overline{H} d'équation f contient $\overline{F^\perp}$, c'est que f est nulle sur F^\perp , donc f est dans $F^{\perp\perp} = F$, d'où le résultat.

La seconde assertion résulte de la première appliquée à G^\perp .

1.6.5 Exemple. La dimension 2

Dans le plan projectif $\mathbf{P}(E)$ on dispose maintenant d'une description en termes de $\mathbf{P}(E)$ des sous-espaces projectifs de $\mathbf{P}(E^*)$.

- Un point de $\mathbf{P}(E^*)$ correspond à une droite vectorielle $\langle f \rangle$ de E^* et on lui associe, par Φ_E , la droite projective $D = \overline{\text{Ker } f}$ de $\mathbf{P}(E)$.

- Une droite \overline{F} de $\mathbf{P}(E^*)$ correspond à un plan vectoriel F de E^* . L'orthogonal F^\perp est de dimension 1 dans E et définit un point m de $\mathbf{P}(E)$ et on a, par 1.6.4, $\Phi_E(\overline{F}) = m^*$, ensemble des droites de $\mathbf{P}(E)$ passant par m .

1.6.6 Proposition-Définition. Soit $m \in \mathbf{P}(E)$. L'ensemble m^* est appelé **pinceau** des droites de $\mathbf{P}(E)$ passant par m . C'est une droite de $G^1(\mathbf{P}(E))$ au sens de 1.6.1, appelée aussi **droite projective duale**⁴ définie par m .

Si on choisit une base de E et qu'on appelle (x, y, t) les coordonnées homogènes des points dans cette base, une droite admet une équation de la forme $\lambda X + \mu Y + \nu T = 0$ avec $\lambda, \mu, \nu \in k$, non tous nuls, cette équation étant bien définie à un scalaire près. Si $m = (\alpha, \beta, \gamma)$ est un point de $\mathbf{P}(E)$, la droite duale m^* est l'ensemble des droites d'équation $\lambda X + \mu Y + \nu T = 0$ qui vérifient $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = 0$.

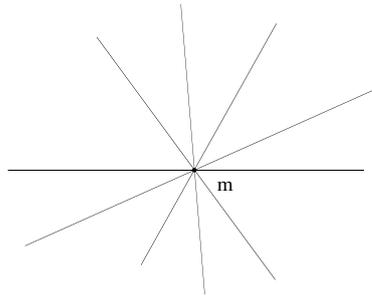


FIGURE 1.3 – Le pinceau m^*

4. Le fait qu'un pinceau est une droite projective duale est le seul point que le lecteur doit absolument retenir!

1.6.4 Homographies et dualité

Soit $\bar{u} : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(F)$ une homographie, provenant d'une application linéaire $u : E \rightarrow F$. L'application linéaire transposée ${}^t u : F^* \rightarrow E^*$ définit une homographie ${}^t \bar{u} : \mathbf{P}(F^*) \rightarrow \mathbf{P}(E^*)$ que nous appellerons encore homographie transposée.

1.6.7 Proposition. *Soit $\bar{u} : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(F)$ une homographie et soit \bar{H} un hyperplan de $\mathbf{P}(E)$. Soit \bar{h} le point correspondant de $\mathbf{P}(E^*)$. L'image $\bar{u}(\bar{H})$ est un hyperplan de $\mathbf{P}(F)$ qui correspond au point ${}^t \bar{u}^{-1}(\bar{h})$ de $\mathbf{P}(F^*)$.*

Démonstration. En effet, si H est défini par l'équation $h(x) = 0$, $u(H)$ est défini par $h \circ u^{-1}(y) = 0$, donc par ${}^t u^{-1}(h)$.

1.6.5 La dimension 1

Dans ce paragraphe, on suppose $n = 1$. Dans ce cas, l'ensemble des hyperplans de la droite projective $\mathbf{P}(E)$ n'est autre que l'ensemble des points de $\mathbf{P}(E)$, i.e. $\mathbf{P}(E)$ lui-même. L'application Φ_E est donc une bijection de $\mathbf{P}(E^*)$ sur $\mathbf{P}(E)$. Comme $\mathbf{P}(E)$ a déjà une structure d'espace projectif, il est essentiel de la comparer à celle venant de $\mathbf{P}(E^*)$ par 1.6.1. Heureusement, le résultat suivant montre que ce sont les mêmes :

1.6.8 Théorème. *Dans le cas $n = 1$, l'application $\Phi_E : \mathbf{P}(E^*) \rightarrow \mathbf{P}(E)$ est une homographie.*

Démonstration. Nous donnons deux preuves de ce résultat, essentiel dans les questions de dualité, la première qui utilise les coordonnées est élémentaire, la seconde, plus formelle, a le mérite d'être intrinsèque.

Preuve 1

Soit e_1, e_2 une base de E et e_1^*, e_2^* sa base duale. Soit $f \in E^*$ une forme linéaire non nulle, $f = x_1 e_1^* + x_2 e_2^*$. L'application Φ_E associe à f l'image de son noyau. Or, une base de celui-ci est le vecteur $x_2 e_1 - x_1 e_2$. On voit que Φ_E n'est autre que l'homographie associée à l'application linéaire $u : E^* \rightarrow E$ définie par $u(x_1 e_1^* + x_2 e_2^*) = x_2 e_1 - x_1 e_2$.

Preuve 2

On montre que Φ_E^{-1} est une homographie. Pour cela, on considère une forme bilinéaire alternée α non dégénérée sur E (il y en a une, unique à un scalaire près : le déterminant). Cette forme induit un isomorphisme $\beta : E \rightarrow E^*$ donné par $\beta(x) = \alpha_x$ avec $\alpha_x(y) = \alpha(x, y)$. On vérifie alors que l'homographie $\bar{\beta}$ associée n'est autre que Φ_E^{-1} . En effet, pour $x \in E$, non nul, on a $\Phi_E(\bar{\beta}(\bar{x})) = \Phi_E(\overline{\alpha_x}) = \overline{\text{Ker } \alpha_x}$. Mais, comme α est alternée, on a $\text{Ker } \alpha_x = kx = \bar{x}$, d'où $\Phi_E \circ \bar{\beta} = \text{Id}_{\mathbf{P}(E)}$ et on a la conclusion.

1.6.6 La dimension 2

Dans ce paragraphe on suppose $n = 2$.

1.6.9 Définition. Soit D une droite de $\mathbf{P}(E)$ et m un point de $\mathbf{P}(E)$, avec $m \notin D$. On définit une application bijective $i : m^* \rightarrow D$, appelée **incidence**, en associant à une droite Δ passant par m l'unique point d'intersection d de D et Δ . La réciproque de cette application (appelée elle aussi incidence) associe à un point d de D la droite (md) .

Le théorème suivant est fondamental :

1.6.10 Théorème. L'incidence est une homographie au sens de 1.6.1.

Démonstration. Comme pour le théorème 1.6.8 on va donner deux preuves de ce résultat.

Preuve 1

On choisit une base x, y, z de E avec $p(x) = m$ et $p(y), p(z) \in D$. Si x^*, y^*, z^* est la base duale, m^* est l'image par Φ_E du sous-espace de $\mathbf{P}(E^*)$ image de (y^*, z^*) . Soit δ dans ce sous-espace, $\delta = \lambda y^* + \mu z^*$ avec λ, μ non tous deux nuls. On cherche l'intersection d de la droite Δ définie par δ avec D , i.e. les $\alpha y + \beta z$ vérifiant $(\lambda y^* + \mu z^*)(\alpha y + \beta z) = \lambda\alpha + \mu\beta = 0$. On voit qu'on a $d = \mu y - \lambda z$, à un scalaire près, de sorte que i , qui provient de l'application linéaire $\lambda y^* + \mu z^* \mapsto \mu y - \lambda z$, est bien une homographie.

Preuve 2

La droite D est l'image d'un plan vectoriel F , le point m d'un vecteur $x \notin F$ et on pose $G = (x)^\perp \subset E^*$. Soit $\psi : G \rightarrow F^*$ l'application linéaire qui à f , forme linéaire sur E nulle en x , associe sa restriction à F . L'application ψ est injective en vertu de la formule $E = F \oplus (x)$. Elle définit donc une homographie $\bar{\psi} : \bar{G} = \mathbf{P}(G) \rightarrow \mathbf{P}(F^*)$. On vérifie qu'on a $\bar{\psi} = i \circ \Phi_E$, ce qui, en vertu de 1.6.1, montre que i est bien une homographie.

1.6.7 Dualité et théorèmes corrélatifs

Restons dans le cadre de la dimension 2 pour expliciter l'utilisation géométrique que nous allons faire de la dualité. La dualité permet une traduction quasiment automatique des propriétés des points et des droites en propriétés des droites et des points. Ainsi, par exemple, trois points a, b, c de $\mathbf{P}(E)$ sont alignés sur une droite D de $\mathbf{P}(E)$ si et seulement si les droites duales a^, b^*, c^* sont concourantes en D dans $\mathbf{P}(E^*)$. De même, trois droites A, B, C de $\mathbf{P}(E)$ sont concourantes dans $\mathbf{P}(E)$ en un point m si et seulement si, lorsqu'on les*

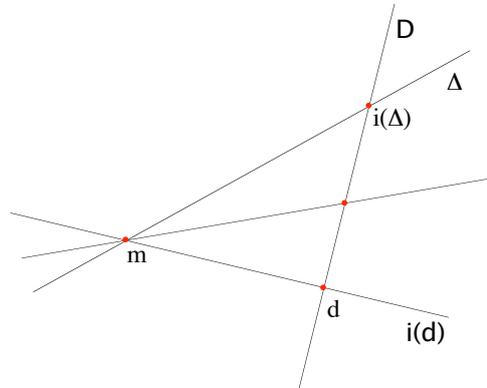


FIGURE 1.4 – Les incidences entre m^* et D

considère comme des points de $\mathbf{P}(E^*)$, A, B, C sont alignés sur la droite duale m^* .

Pour chaque théorème portant sur les points et droites de $\mathbf{P}(E)$ on peut ainsi obtenir une variante duale de ce théorème (appelé théorème corrélatif) en l'appliquant à $\mathbf{P}(E^*)$ et en traduisant l'énoncé sur les points et droites de $\mathbf{P}(E^*)$ en termes de droites et points de $\mathbf{P}(E)$. Nous verrons ce principe en œuvre au chapitre suivant, notamment avec le théorème de Pappus. Le même principe s'appliquera aussi à l'étude des coniques et, de manière essentielle, en géométrie elliptique et hyperbolique.

Pour illustrer ce principe, notons que la traduction duale de la proposition 1.5.5 montre qu'un repère de $\mathbf{P}(E^*)$ est formé de quatre droites dont trois quelconques ne sont pas concourantes.

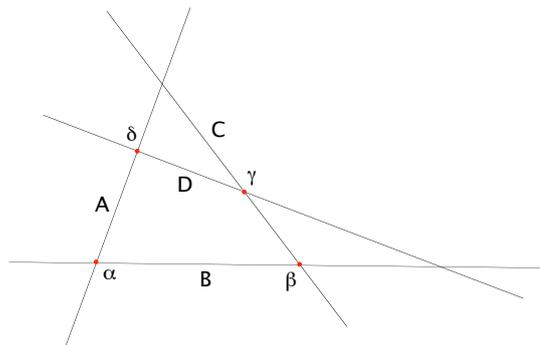


FIGURE 1.5 – Le lemme du quadrilatère

À cet égard, le lecteur vérifiera la proposition suivante qui pourra être

utile :

1.6.11 Proposition. (Le lemme du quadrilatère) Soient A, B, C, D quatre droites distinctes d'un plan projectif $\mathbf{P}(E)$ formant un repère de $\mathbf{P}(E^*)$ (c'est-à-dire telles que trois d'entre elles ne soient pas concourantes). On appelle respectivement $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les points d'intersection de A, B ; B, C ; C, D ; D, A . Alors, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ forment un repère de $\mathbf{P}(E)$.

1.7 Exercices

1.7.1 Exercice. Quel est le cardinal d'un espace projectif de dimension n défini sur le corps à q éléments? Montrer qu'il n'y a pas d'espace projectif admettant les cardinaux suivants : 2, 11, 16, 19, 22, 23, 25, 27, 29, 34, 35, 36, 37, 39, 41, 43, 45, 46, 47, 49 ..., 1000, ... 1729,

1.7.2 Exercice. Soient E un espace vectoriel de dimension $n+1$, $\mathbf{P}(E)$ l'espace projectif associé, u un automorphisme de E et \bar{u} l'homographie de $\mathbf{P}(E)$ associée. On suppose que \bar{u} est l'identité de $\mathbf{P}(E)$. Montrer que u est une homothétie. (Pour $x, y \in E$ on a $u(x) = \lambda x$, $u(y) = \mu y$ et il s'agit de montrer $\lambda = \mu$. On distinguera selon que x et y sont colinéaires ou non.)

1.7.3 Exercice. Homologies et élations

Soient E un espace vectoriel de dimension $n+1$, $\mathbf{P}(E)$ l'espace projectif associé, u un automorphisme de E et \bar{u} l'homographie de $\mathbf{P}(E)$ associée.

1) On suppose que u fixe un hyperplan H mais n'est pas l'identité. Montrer qu'il y a deux cas possibles selon la valeur du déterminant de u (voir [Per96] Ch. IV) :

a) Si l'on a $\det u = \lambda \neq 1$, montrer que u est diagonalisable et préciser sa matrice dans une base convenable (on dit que u est une **dilatation**).

b) Si l'on a $\det u = 1$, montrer que u n'est pas diagonalisable mais que, dans une base convenable, u s'écrit avec un seul coefficient non nul, et égal à 1, en dehors de la diagonale (on dit que u est une **transvection**).

On considérera l'identité à la fois comme une dilatation de rapport 1 et comme une transvection.

2) On suppose que u est une dilatation différente de l'identité.

a) Montrer que \bar{u} admet un unique point fixe a en dehors de \bar{H} et que toutes les droites passant par a sont stables par \bar{u} . On dit que \bar{u} est une **homologie** de centre a et d'axe \bar{H} .

b) On choisit \bar{H} comme hyperplan à l'infini. Quelle est l'application induite par \bar{u} dans l'espace affine $\mathbf{P}(E) - \bar{H}$?

c) On suppose que E est de dimension 3. L'hyperplan \overline{H} est alors une droite. Soit m un point de $\mathbf{P}(E)$ distinct de a et n'appartenant pas à \overline{H} . Montrer que l'image $m' = \overline{u}(m)$ est alignée avec a et m . Réciproquement, on suppose donné a et D avec $a \notin D$ et deux points m, m' , distincts de a , non situés sur D et alignés avec a . Montrer qu'il existe⁵ une homologie de centre a , d'axe D , qui envoie m sur m' . Construire l'image par cette homologie d'un point quelconque n du plan (on commencera par le cas d'un point non situé sur (am) et on notera que les droites (mn) et $(m'n')$ se coupent sur l'axe).

3) On suppose que u est une transvection différente de l'identité.

a) Montrer que \overline{u} n'a aucun point fixe en dehors de \overline{H} , mais qu'il existe un unique point $a \in \overline{H}$ tel que les droites passant par a soient stables par \overline{u} . On dit que \overline{u} est une **élation**⁶ d'axe \overline{H} et de centre a .

b) On choisit \overline{H} comme hyperplan à l'infini. Quelle est l'application induite par \overline{u} dans l'espace affine $\mathbf{P}(E) - \overline{H}$?

c) On suppose que E est de dimension 3. L'hyperplan \overline{H} est alors une droite D . Soit m un point de $\mathbf{P}(E)$ n'appartenant pas à D . Montrer que l'image $m' = \overline{u}(m)$ est alignée avec a et m . On suppose m' donnée. Construire l'image n' par \overline{u} d'un point n quelconque du plan (on notera que (mn) et $(m'n')$ d'une part, (nn') et (mm') d'autre part, se coupent sur l'axe).

4) Soit f une homographie de $\mathbf{P}(E)$. On suppose qu'il existe un point a de $\mathbf{P}(E)$ (nécessairement fixe par f) tel que toutes les droites passant par a soient stables par f . Montrer que f est une homologie ou une élation. (On pourra considérer l'homographie transposée et montrer qu'elle fixe l'hyperplan de $\mathbf{P}(E^*)$ correspondant à a^* .)

5) On suppose E de dimension 3.

a) Soit u une homographie qui fixe deux points distincts p et q . Montrer que l'une des deux éventualités suivantes se produit :

- ou bien u fixe la droite (pq) ,
- ou bien u laisse invariante une droite passant par p ou q et distincte de (pq) .

(Le plus simple est d'écrire la matrice de f dans une base contenant p, q . Pour une preuve géométrique voir l'exercice suivant.)

b) On suppose $k \neq \mathbf{F}_2$. Soit f une homographie distincte de Id .

Montrer qu'il existe une droite D telle que $f(D) \neq D$ et qu'on peut choisir $p, q \in D$ distincts tels que $p' = f(p) \neq p$ et $q' = f(q) \neq q$. En déduire qu'il existe une homologie g telle que $g \circ f$ fixe p et q .

5. Même sur \mathbf{F}_2 !

6. On pourrait proposer des adaptations de ce mot anglais : transmission, transfusion, transgression, transition, transpiration ...

¶ Montrer qu'il existe une homologie h telle que $h \circ g \circ f$ soit une homologie. (On utilisera a) et on distinguera plusieurs cas de figure.)

En déduire que f est produit d'au plus trois homologies. (Voir [Per96], Ch. 4 §2, exercice 8, pour une preuve algébrique de ce résultat.)

6) Montrer que toute homographie de $\mathbf{P}(E)$ est produit d'homologies et d'élations (on se ramènera au cas vectoriel et on ira lire les bons livres, par exemple [Per96] ...).

1.7.4 Exercice. Cet exercice propose une preuve géométrique⁷ de la question 5.a) de l'exercice précédent.

Soit u une homographie qui fixe deux points distincts p et q .

On suppose qu'il existe un point m de la droite (pq) tel que $u(m) = n$ soit différent de m . Soit D_q une droite passant par q et distincte de (pq) .

1) Montrer qu'il existe une homologie h_p de centre p et d'axe D_q qui envoie n sur m .

2) Montrer que $f := h_p \circ u$ fixe la droite (pq) . En vertu de 1.7.3 c'est donc soit une élation, soit une homologie.

a) On suppose que f est une homologie. Montrer qu'il existe un point w hors de (pq) tel que f stabilise toutes les droites passant par w et en déduire que (pw) est stable par u .

b) On suppose que f est une élation. Soit D_p une droite passant par p distincte de (pq) , et h_q l'homologie de centre q et d'axe D_p qui envoie n sur m . Montrer que $g := h_q \circ u$ fixe la droite (pq) et s'écrit $g = h \circ f$ où h est une homologie d'axe (pq) . En déduire que g est une homologie d'axe (pq) . Si w est le centre de g , montrer que (wq) est stable par u .

1.7.5 Exercice. Projection centrale.

Soient E un espace vectoriel de dimension $n + 1$, $\mathbf{P}(E)$ l'espace projectif associé, F un hyperplan vectoriel de E et H l'hyperplan projectif image de F . Soit a un point de $\mathbf{P}(E)$ n'appartenant pas à H . On considère l'application $p_{a,H}$, définie sur $\mathbf{P}(E) - \{a\}$ et à valeurs dans H , qui à un point m associe le point d'intersection de (am) et de H .

a) Montrer que cette application est bien définie. On l'appelle projection centrale de centre a .

b) Montrer que l'image par $p_{a,H}$ d'une droite de $\mathbf{P}(E)$ ne passant pas par a est une droite de H .

c) Soit \hat{a} un vecteur relevant a . Montrer que $p_{a,H}$ est obtenue par passage au quotient à partir de la projection de E sur F parallèlement au sous-espace vectoriel (\hat{a}) . Retrouver ainsi le résultat de b).

7. Merci à Erwann Aubry de me l'avoir soufflée.

d) Soit K un hyperplan de $\mathbf{P}(E)$ ne contenant pas a . Montrer que la restriction de $p_{a,H}$ à K est une homographie de K sur H .

1.7.6 Exercice. Dans cet exercice on définit une topologie sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ et on en étudie les propriétés. On note p la projection de $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$ sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$.

1) On définit sur $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ la topologie dite quotient de celle de $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$: les ouverts pour cette topologie sont les parties $\Omega \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ telles que $p^{-1}(\Omega)$ soit un ouvert de $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}$. Montrer que p est continue et qu'une application f de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ dans un espace topologique X est continue si et seulement si $f \circ p$ l'est.

2) On considère la sphère unité de \mathbf{R}^{n+1} :

$$\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\},$$

que l'on munit de la topologie induite par celle de \mathbf{R}^{n+1} . Montrer que la restriction q de p à $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^n$ est continue et surjective. En déduire que $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est connexe.

3) Soit U un ouvert de $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^n$. Montrer que la partie $\bigcup_{\lambda \in \mathbf{R}^{+*}} \lambda U$ est un ouvert de \mathbf{R}^{n+1} . En déduire qu'une application f de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ dans un espace topologique X est continue si et seulement si $f \circ q$ l'est.

4) Montrer que l'application $\varphi : \mathbf{S}_{\mathbf{R}}^n \rightarrow \mathbf{R}^{(n+1)(n+2)/2}$ qui à (x_0, \dots, x_n) associe la famille des $(x_i x_j)$ pour $i \leq j$ définit une application continue injective de $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^{(n+1)(n+2)/2}$. En déduire que $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est séparé, puis qu'il est compact.

5) Montrer que l'espace $\mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ est homéomorphe au cercle $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^1$.

6) Traiter le même exercice avec $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$ en utilisant la sphère complexe définie par l'équation $|x_0|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1$. En dimension 1 on montrera que $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ est homéomorphe à la sphère $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^2$.

¶ 7) Dans cette question on se propose de montrer que $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^2$. Pour cela, on utilisera le (difficile) théorème de Jordan : si γ est une courbe simple continue fermée de \mathbf{R}^2 , le complémentaire de γ est non connexe (autrement dit, γ partage le plan en deux régions).

a) Montrer que la sphère $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^2$, privée d'un point, est homéomorphe à \mathbf{R}^2 (on utilisera une projection stéréographique).

b) Montrer que $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ n'est pas homéomorphe à $\mathbf{S}_{\mathbf{R}}^2$. (Sinon, \mathbf{P}^2 privé de l'origine du plan affine serait homéomorphe à \mathbf{R}^2 par un homéomorphisme φ . On considère alors la droite D_∞ , qui est homéomorphe à un cercle. Son image par φ est une courbe de Jordan et on examine les complémentaires.)

Pour d'autres méthodes, voir [Gra71].

Chapitre 2

La géométrie des droites du plan

Dans ce chapitre on applique les notions introduites au chapitre précédent pour faire de la géométrie plane. On montre notamment les théorèmes de Pappus, Desargues, la propriété de la polaire, etc. Toutes ces démonstrations utilisent exclusivement deux ingrédients :

- 1) le fait que les perspectives sont des homographies (ou encore que les incidences sont des homographies, cf. ci-dessous),*
- 2) le fait qu'une homographie d'une droite projective est entièrement déterminée par la donnée des images de trois points.*

Dans tout ce qui suit, E est un k -espace vectoriel de dimension 3 et $\mathbf{P}(E)$ le plan projectif associé.

2.1 Les perspectives

2.1.1 Proposition-Définition. *Soient D et D' deux droites de $\mathbf{P}(E)$ et soit m un point n'appartenant pas à $D \cup D'$. L'application $p_m : D \rightarrow D'$ qui à $x \in D$ associe l'unique point d'intersection de (mx) et de D' est une homographie. On l'appelle **perspective** de centre m de D sur D' .*

Démonstration. Pour une preuve par le calcul voir exercice 2.5.1. On note d'abord que le point $p_m(x)$ est bien défini. En effet, comme m n'est pas sur D , la droite (mx) existe, et comme il n'est pas sur D' , les droites D' et (mx) sont distinctes, donc se coupent en un point. Pour montrer que p_m est une homographie on considère la droite m^* de $\mathbf{P}(E^*)$ (ensemble des droites

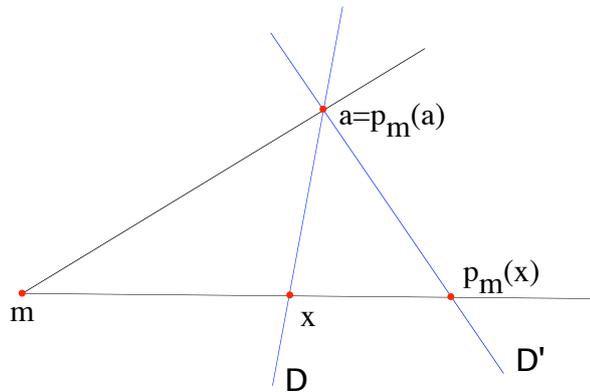


FIGURE 2.1 – La perspective de centre m , de D sur D'

passant par m). L'application p_m apparaît alors comme composée de deux incidences : celle de D dans m^* qui à x associe (mx) et celle de m^* dans D' qui à une droite Δ associe l'unique point de $\Delta \cap D'$. Comme les incidences sont des homographies on a le résultat.

2.1.2 Remarques.

1) Il est clair que p_m est bijective, sa réciproque étant la perspective de centre m de D' sur D .

2) Si on a $D = D'$, p_m est l'identité.

3) Si D et D' sont distinctes le point d'intersection de D et D' est fixe par p_m . Réciproquement, si une homographie de D sur D' fixe le point d'intersection c'est une perspective, voir exercice 2.5.2.

4) On peut définir des perspectives duales, que l'on appellera **réfractions** : on considère deux points m, m' de $\mathbf{P}(E)$ et une droite D ne contenant aucun de ces points. La réfraction d'axe D de m^* sur $(m')^*$ associe à une droite Δ passant par m l'unique droite Δ' qui coupe Δ sur D . C'est une homographie en vertu de 2.1.1 appliqué dans $\mathbf{P}(E^*)$.

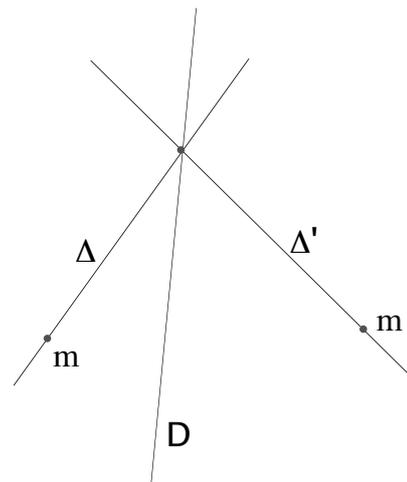


FIGURE 2.2 – La réfraction d'axe D de m^* sur m'^*

5) On peut évidemment définir des perspectives en dimension quelconque,

2.2.2 Remarque. On peut montrer le théorème de Pappus par le calcul, cf. 2.5.5. On constate alors que ce théorème équivaut à la commutativité du corps de base, cf. aussi [Art62] ou [Sei62]. Pour une preuve utilisant homologies et élations, voir 2.5.6, pour la preuve originelle de Pappus, très voisine de celle donnée ci-dessus, voir 3.8.2.

2.2.2 Variantes affines

On obtient des variantes affines du théorème de Pappus en choisissant une droite particulière Δ comme droite à l'infini et en traduisant les propriétés d'incidence en termes affines. Le fait essentiel est que si deux droites projectives se coupent sur Δ , leurs traces en affine sont parallèles. Voici quelques exemples des résultats obtenus ainsi, le lecteur en inventera d'autres :

2.2.3 Théorème. (Pappus affine 1) Soient D, D' deux droites distinctes du plan affine, se coupant en o et soient a, b, c (resp. a', b', c') trois points distincts de D (resp. de D'), distincts de o . On suppose que les droites (bc') et $(b'c)$ sont parallèles, ainsi que les droites (ca') et $(c'a)$. Alors les droites (ab') et $(a'b)$ sont parallèles.

(Voir fig. 2.4 ; ici la droite (uv) a été choisie comme droite à l'infini. Pour une preuve affine, voir exercice 2.5.7.)

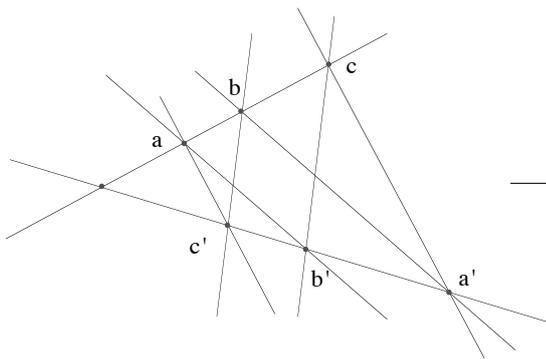


FIGURE 2.4 – Variante affine 1

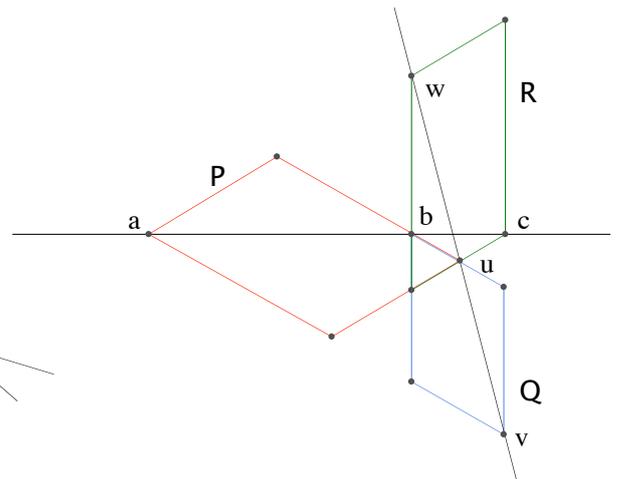


FIGURE 2.5 – Variante affine 2

2.2.4 Théorème. (Pappus affine 2) Soient P, Q, R trois parallélogrammes tels que deux quelconques d'entre eux ont exactement deux côtés opposés portés par les mêmes droites. On suppose que trois sommets a, b, c , de P, Q, R respectivement, sont alignés. Alors, les sommets u, v, w opposés à a, b, c sur P, Q, R sont alignés.

(Voir fig. 2.5 ; cette fois c'est la droite D' qui est à l'infini. Pour une preuve affine, voir exercice 2.5.7.)

2.2.3 Le théorème de Brianchon

Cette fois, nous utilisons la dualité pour énoncer le théorème corrélatif de Pappus :

2.2.5 Théorème. Soient d, d' deux points distincts de $\mathbf{P}(E)$, $D = (dd')$ la droite qui les joint et soient A, B, C (resp. A', B', C') trois droites distinctes passant par d (resp. par d'), et distinctes de D . On appelle respectivement U, V, W les droites qui joignent les points d'intersection de B, C' et de B', C , de C, A' et de C', A , de A, B' et de A', B . Alors, U, V, W sont concourantes.

Démonstration. Il n'y a pas de démonstration à faire : c'est le théorème de Pappus, lu dans $\mathbf{P}(E^*)$.

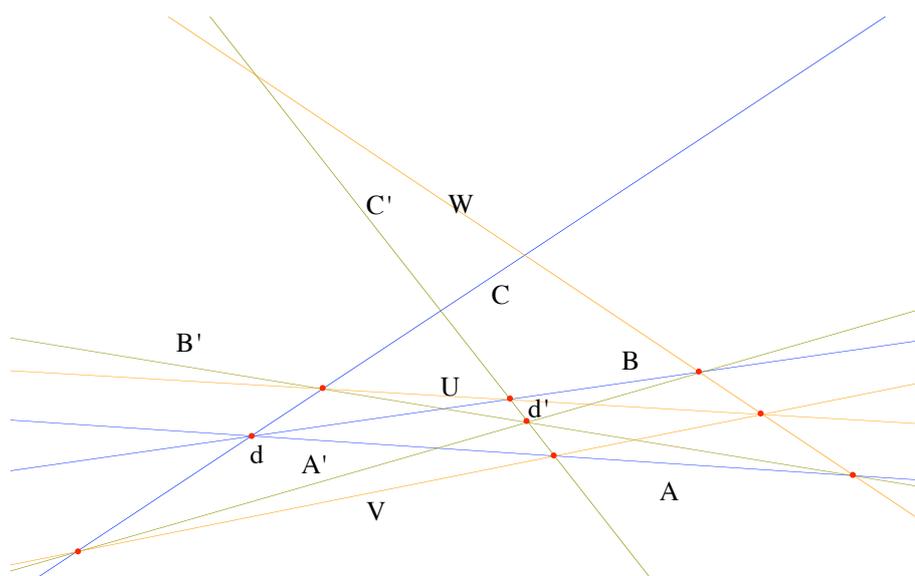


FIGURE 2.6 – Le théorème de Brianchon

Le lecteur, au vu des exemples précédents et de ceux qui seront donnés au paragraphe suivant, méditera la phrase un peu amère de Chasles (voir [Cha89] p. 268) :

Aujourd'hui, chacun peut se présenter, prendre une vérité quelconque, et la soumettre aux divers principes généraux de transformation; il en retirera d'autres vérités, différentes ou plus générales; et celles-ci seront susceptibles de pareilles opérations; de sorte qu'on pourra multiplier, presque à l'infini, le nombre des vérités nouvelles déduites de la première ...

Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en géométrie; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice.

2.3 Le théorème des triangles de Desargues

2.3.1 Le lemme des trois perspectives

2.3.1 Lemme. *Soient A, B, C trois droites distinctes, concourantes en o et soient u, v, w trois points distincts tels que $u \notin B \cup C$, $v \notin C \cup A$, $w \notin A \cup B$. On considère les trois perspectives p_u, p_v, p_w respectivement de B sur C , C sur A , A sur B . Alors, si on a $p_w \circ p_v \circ p_u = \text{Id}_B$, les points u, v, w sont alignés.*

Démonstration. Si les droites (uv) et (vw) passent par o , elles sont toutes deux égales à (ov) et les trois points sont alignés. Sinon, supposons par exemple que (uv) ne passe pas par o . Alors (uv) coupe A, B, C (car $u \notin B \cup C$ et $v \notin A$) en a, b, c respectivement et on a $a \neq b$ (sinon on a $a = b = o$), de sorte qu'on a $(uv) = (ab)$. Mais, on a $p_u(b) = c$ et $p_v(c) = a$ et comme $p_w p_v p_u = \text{Id}_B$ on a aussi $p_w(a) = b$ donc w est sur $(ab) = (uv)$.

2.3.2 Remarque. Le fait que les points u, v, w soient alignés n'implique pas que la composée des perspectives soit l'identité, voir fig. 2.7, mais si pour un point $y \in B$ distinct de o et du point b défini dans la preuve du lemme on a $p_w p_v p_u(y) = y$, alors la composée est l'identité (regarder sur le repère o, b, y). (On est alors dans la configuration de Desargues, cf. ci-dessous.)

2.3.2 Desargues

2.3.3 Théorème. *Soient A, B, C trois droites distinctes concourant en o et soient $a, a' \in A$; $b, b' \in B$; $c, c' \in C$. On suppose que, sur chaque droite, les points sont distincts et distincts de o et on suppose a, b, c (resp. a', b', c') non*

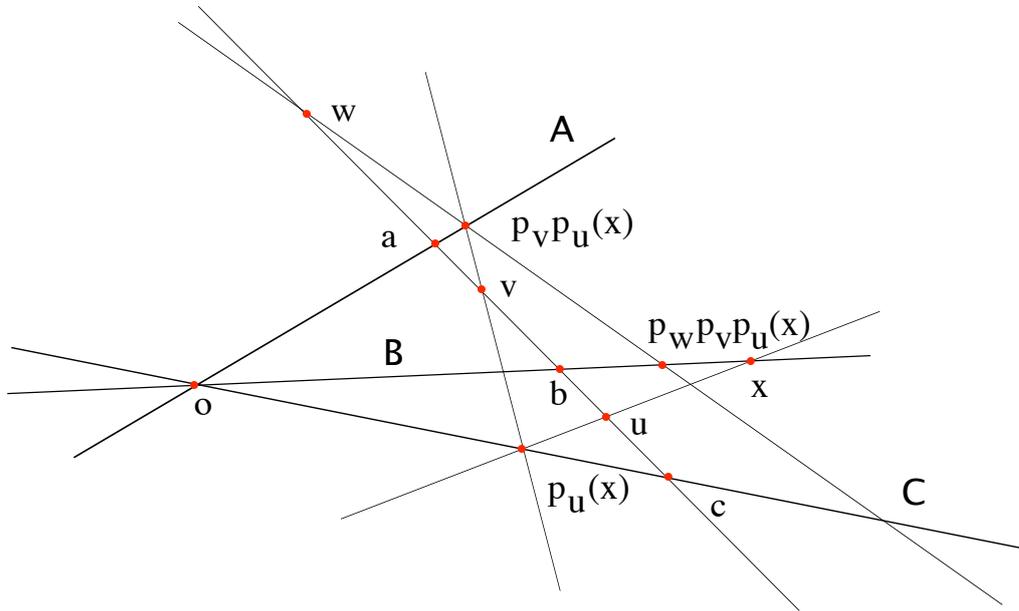


FIGURE 2.7 – Contre-exemple à la réciproque du lemme des trois perspectives

alignés. Soient u, v, w les points d'intersection des droites $(bc), (b'c'); (ca), (c'a'); (ab), (a'b')$ respectivement. Alors, u, v, w sont alignés.

Démonstration. On considère la composée des perspectives $f = p_w p_v p_u$ (cf. 2.3.1). On a $f(o) = o, f(b) = b$ et $f(b') = b'$, voir fig. 2.8, et la conclusion vient de 2.3.1.

2.3.4 Remarque. Le lecteur se convaincra sans peine¹ qu'il est possible que les points u, v, w soient alignés avec o (premier cas de 2.3.1). Pour d'autres preuves de Desargues, voir 2.5.8 et 2.5.9.

2.3.3 Variantes

Comme pour Pappus, et sans plus d'effort, nous donnons une variante affine et une variante duale. Le lecteur multipliera de tels exemples.

2.3.5 Proposition. (Desargues affine) *Soient A, B, C trois droites distinctes concourant en o et soient $a, a' \in A; b, b' \in B; c, c' \in C$. On suppose*

1. Faire la figure à l'envers en partant de A, B, C et d'une droite passant par o en s'arrangeant pour que ce soit (uw) .

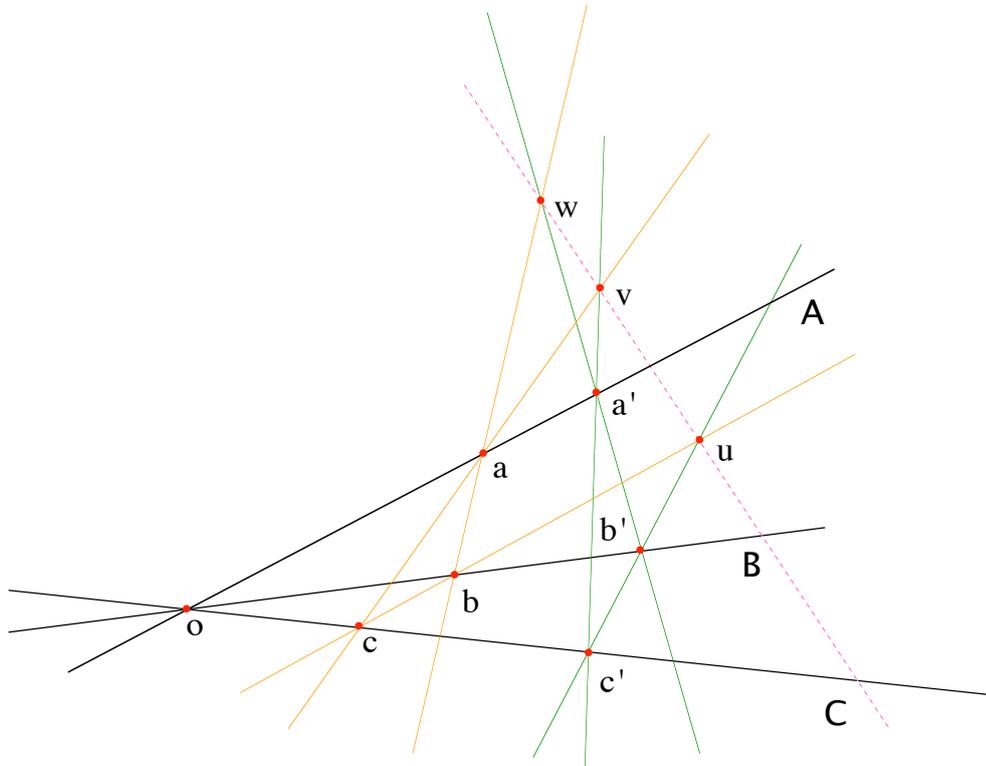


FIGURE 2.8 – Le théorème des triangles de Desargues

que, sur chaque droite, les points sont distincts et distincts de o et on suppose a, b, c (resp. a', b', c') non alignés. On suppose que les droites (bc) et $(b'c')$ sont parallèles, ainsi que (ca) et $(c'a')$. Alors (ab) et $(a'b')$ sont parallèles.

2.3.6 Proposition. (Desargues dual) Soient a, b, c trois points distincts alignés sur une droite D et soient A, A' (resp. B, B' , resp. C, C') des droites passant par a (resp. b , resp. c). On suppose ces droites distinctes et distinctes de D et on suppose A, B, C (resp. A', B', C') non concourantes. Soient U, V, W les droites joignant respectivement les points d'intersection des droites B, C et B', C' ; C, A et C', A' ; A, B et A', B' respectivement. Alors, U, V, W sont concourantes.

2.4 Polaire : première approche

La configuration fondamentale de la polaire est donnée par le théorème suivant :

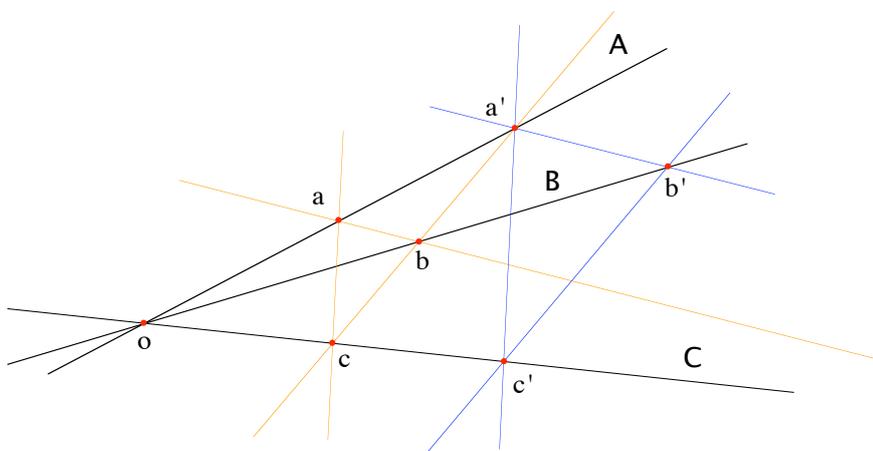


FIGURE 2.9 – Desargues, variante affine

2.4.1 Théorème. Soient A, B deux droites distinctes concourantes en o et soit $d \notin A \cup B$. Soient $\Delta, \Delta', \Delta''$ trois droites distinctes, passant par d mais pas par o qui coupent respectivement A, B en $a, b; a', b'; a'', b''$. On considère les points d'intersection u, v de (ab') et (ba') et de $(a'b'')$ et $(b'a'')$ respectivement. Alors, les points o, u, v sont alignés.

Démonstration. On considère les perspectives p_u, p_v, p_o , respectivement de Δ sur Δ' , puis Δ' sur Δ'' et enfin Δ'' sur Δ . Comme on a $p_o p_v p_u = \text{Id}_\Delta$ (regarder sur le repère d, a, b), le résultat vient du lemme des trois perspectives 2.3.1.

2.4.2 Définition. Dans la situation de 2.4.1, la droite $D = (ou)$ est appelée **polaire** de d par rapport aux droites A, B . Elle est indépendante du choix des sécantes Δ, Δ' .

Nous retrouverons la polaire à maints endroits dans les chapitres suivants. Pour des applications, voir les exercices.

2.5 Exercices

2.5.1 Perspectives

2.5.1 Exercice. Dans cet exercice on montre la proposition 2.1.1 par un calcul direct. Soient D et D' deux droites de $\mathbf{P}(E)$ et soit m un point n'appartenant pas à $D \cup D'$. Montrer qu'il existe un repère a, b, c, m où a est le point d'intersection de D et D' et où b, c sont des points de D et D' différents de

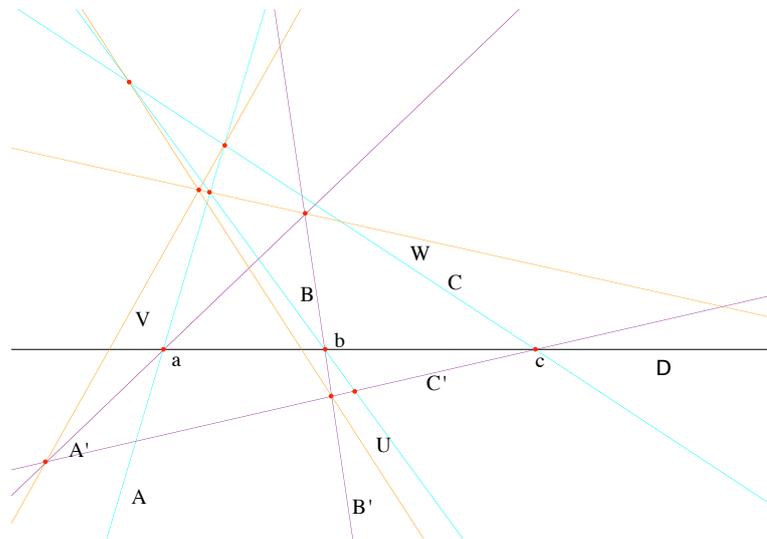


FIGURE 2.10 – Desargues, variante duale

a. Un point x de D a donc pour coordonnées dans ce repère $x = (\lambda, \mu, 0)$. Déterminer une équation de (mx) et les coordonnées du point d'intersection de (mx) et D' et conclure.

2.5.2 Exercice. Soit $f : D \rightarrow D'$ une homographie entre deux droites du plan $\mathbf{P}(E)$ sécantes en o . Montrer que f est une perspective si et seulement si on a $f(o) = o$. (Pour le sens réciproque, prendre $a, b \in D$ distincts et distincts de o et leurs images a', b' . Le centre de la perspective est l'intersection de (aa') et (bb') .)

2.5.2 Décomposition des homographies

2.5.3 Exercice. Soient D, D' deux droites distinctes de $\mathbf{P}(E)$, se coupant en o , et soit $h : D \rightarrow D'$ une homographie, donnée par les images $a', b', c' \in D'$ de trois points a, b, c de D , distincts et distincts de o . On supposera aussi, par exemple, $a' \neq o$.

1) Justifier que les droites (ab') et $(a'b)$ (resp. (ac') et $(a'c)$) existent et sont distinctes. Soient β (resp. γ) les points d'intersection de ces droites. Montrer que β et γ sont distincts.

2) Soit $\Delta = (\beta\gamma)$. On considère² les perspectives $p_{a'} : D \rightarrow \Delta$ et $p_a : \Delta \rightarrow D'$. Montrer qu'on a $h = p_a \circ p_{a'}$. En déduire une construction "à la

2. Le lecteur scrupuleux vérifiera qu'elles existent.

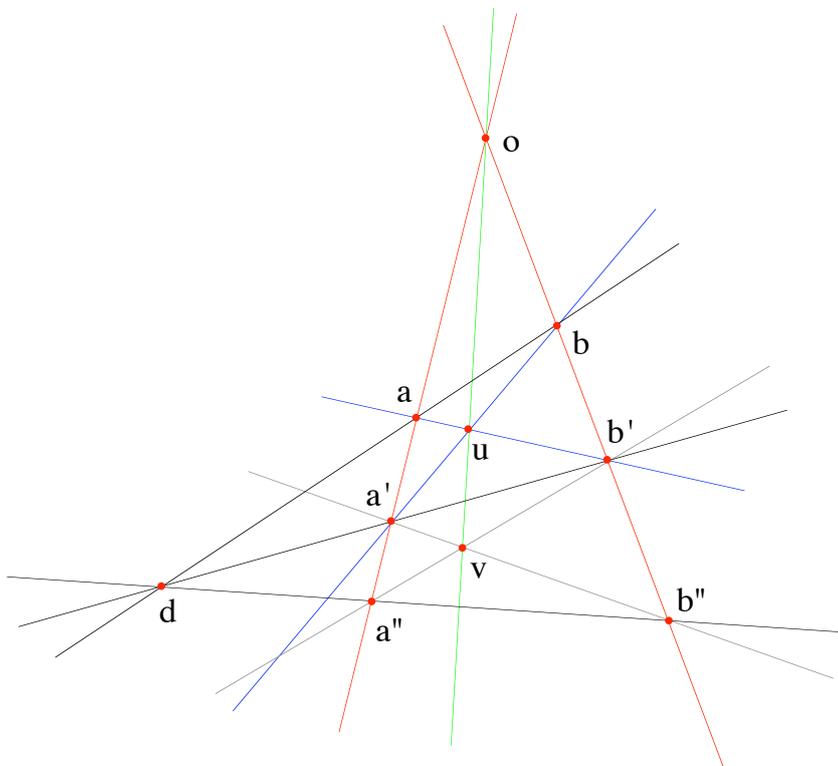


FIGURE 2.11 – La polaire

règle” (i.e. en construisant seulement des droites, cf. 3.7.1 pour une définition précise) de l’image d’un point $m \in D$ par h .

3) Que se passe-t-il si a' est en o ? Si l’un des points a, b, c est en o ?

2.5.4 Exercice. Soit $h : D \rightarrow D$ une homographie d’une droite du plan $\mathbf{P}(E)$, donnée par les images a', b', c' de trois points distincts a, b, c .

1) Montrer que h est produit d’au plus trois perspectives (utiliser 2.5.3). En déduire une méthode de construction à la règle de l’image d’un point m .

2) On suppose que h admet un point fixe (par exemple a). Montrer que h est produit de deux perspectives (utiliser 2.5.2).

2.5.3 Pappus, Desargues

2.5.5 Exercice. Cet exercice propose une preuve du théorème de **Pappus par le calcul**. Les notations sont celles de 2.2.1.

On prend comme repère³ les points $o = (0, 0, 1)$, $a = (0, 1, 0)$, $b' =$

3. Ce n’est qu’une suggestion parmi beaucoup d’autres possibles.

$(1, 0, 0)$, $v = (1, 1, 1)$.

1) Écrire les équations des droites (oa) , (ob') , (ab') , (av) . Calculer les coordonnées de c' . Montrer que les points b et a' sont de la forme suivante : $b = (0, \lambda, 1)$, $a' = (\mu, 0, 1)$ avec $\lambda, \mu \in k^*$.

2) Déterminer les équations des autres droites et les coordonnées des autres points de la figure et montrer que u, v, w sont alignés.

Si on mène soigneusement le calcul, sans supposer le corps k commutatif, on s'apercevra⁴ que la condition d'alignement des points u, v, w s'écrit $\lambda\mu = \mu\lambda$, de sorte que le théorème de Pappus est équivalent à la commutativité de k . Question subsidiaire : où cette commutativité intervient-elle dans les résultats qui fondent la preuve de Pappus par les perspectives ?

2.5.6 Exercice. Cet exercice propose une preuve de **Pappus en utilisant les homologies ou les élations**. On reprend les notations de l'exercice 1.7.3 du chapitre 1 avec E de dimension 3.

1) Soient o et D un point et une droite de $\mathbf{P}(E)$, avec $o \notin D$. Montrer que le sous-groupe des homographies qui fixent o et D est formé de l'identité et des homologies d'axe D et centre o et qu'il est commutatif. (Ce groupe est isomorphe à k^* et c'est la commutativité du corps.)

2) On se place dans la situation du théorème de Pappus. On considère la droite $D = (uw)$ et on suppose que le point o n'est pas sur D . On considère les homologies h et k d'axe D et centre o qui envoient respectivement a sur b et b sur c . Montrer qu'on a $h(b') = a'$ et $k(c') = b'$. Montrer que $h \circ k$ et $k \circ h$ sont égales et en déduire le théorème de Pappus.

3) Soient o et D un point et une droite de $\mathbf{P}(E)$, avec $o \in D$. Montrer que le groupe des homographies qui fixent D et laissent stables toutes les droites passant par o est formé de l'identité et des élations d'axe D et centre o et qu'il est commutatif. (Cette fois c'est le groupe additif k .)

4) On se place dans la situation du théorème de Pappus. On considère la droite $D = (uw)$ et on suppose que le point o est sur D . En considérant les élations h et k d'axe D et centre o qui envoient a sur b et b sur c , prouver le théorème de Pappus.

2.5.7 Exercice. Cet exercice a pour but de montrer les **variantes affines de Pappus** par des méthodes de géométrie affine.

1) On reprend la situation de 2.2.3. Montrer le résultat en utilisant le théorème de Thalès (lorsque les droites (ab) et $(a'b')$ se coupent en o) ou les parallélogrammes (lorsqu'elles sont parallèles).

4. Attention, ce n'est pas si facile.

2) On reprend la situation de 2.2.4. On désigne par d, e, f les sommets de Q, R, P non encore nommés et situés respectivement sur $(ub), (vc)$ et (wa) . Montrer le résultat en utilisant le théorème de Ménélaüs et sa réciproque appliqués au triangle def .

2.5.8 Exercice. Cet exercice propose une preuve de **Desargues par le calcul**. Les notations sont celles de 2.3.3 et on prend comme repère les points $a = (1, 0, 0), b = (0, 1, 0), c = (0, 0, 1)$ et $o = (1, 1, 1)$.

Justifier qu'on peut poser $a' = (\alpha, 1, 1), b' = (1, \beta, 1), c' = (1, 1, \gamma)$. Déterminer les équations des droites $(bc), (ca), (ab), (b'c'), (c'a'), (a'b')$. En déduire les coordonnées des points u, v, w et conclure (on notera que le déterminant des coordonnées des points u, v, w se ramène à celui d'une matrice antisymétrique).

2.5.9 Exercice. Cet exercice propose une preuve de **Desargues en utilisant les homologies et les élations**. On reprend les notations de l'exercice 1.7.3 du chapitre 1 avec E de dimension 3 et celles de 2.3.3.

1) On suppose que o n'est pas sur la droite $D = (uv)$. Montrer qu'il existe une homologie h de centre o et d'axe D qui envoie b sur b' . Montrer qu'on a $h(c) = c'$, puis $h(a) = a'$ et conclure. Adapter cette preuve au cas affine en utilisant des homothéties au lieu des homologies.

2) On suppose que o est sur la droite $D = (uv)$. Montrer qu'il existe une élation h de centre o et d'axe D qui envoie b sur b' . Montrer qu'on a $h(c) = c'$, puis $h(a) = a'$ et conclure. Adapter cette preuve au cas affine en utilisant des translations au lieu des élations.

2.5.10 Exercice. Desargues en passant par la dimension 3

1) Soient $a, b, c; a', b', c'$ des points distincts de l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ de dimension 3. On suppose que les droites $A = (aa'), B = (bb'), C = (cc')$ ne sont pas coplanaires, mais qu'elles concourent en un point o , différent des six points donnés.

a) Montrer que les droites (bc) et $(b'c')$ sont coplanaires et distinctes. Soit u leur point d'intersection. De même on désigne par v (resp. w) le point d'intersection de (ca) et $(c'a')$ (resp. (ab) et $(a'b')$).

b) Montrer que les points u, v, w sont alignés. (On considérera les plans (abc) et $(a'b'c')$.)

2) Soit $\mathbf{P}(F)$ un plan projectif, que l'on plonge dans un espace projectif $\mathbf{P}(E)$ de dimension 3. Utiliser 1) pour montrer le théorème de Desargues dans $\mathbf{P}(F)$. (Avec les notations de 2.3.3, prendre un point ω extérieur à $H = \mathbf{P}(F)$, un point o_1 de $(o\omega)$, distinct de o et ω et reconstituer la configuration de Desargues de l'espace avec des points o_1, a_1, \dots, c'_1 , de sorte que la projection

centrale $p_{\omega,H}$, cf. 1.7.5, transforme cette configuration en la configuration de Desargues plane.)

2.5.11 *Exercice. Pappus implique Desargues*

On se propose de montrer que le théorème de Pappus implique celui de Desargues. On reprend les notations du théorème 2.3.3 et on introduit les points s , intersection de (ab) et $(a'c')$, r , intersection de (oa) et (bc') , t , intersection de (bc) et (os) et q , intersection de (os) et $(b'c')$.

1) En appliquant le théorème de Pappus aux points o, c, c' et b, s, a montrer que les points v, r, t sont alignés.

2) En appliquant le théorème de Pappus aux points o, b, b' et c', a', s montrer que les points w, q, r sont alignés.

3) Conclure en appliquant le théorème de Pappus aux points b, c', r et q, t, s .

2.5.12 *Exercice. Le théorème à quatre points*

On se propose de montrer ici le théorème peut-être le plus simple de la géométrie projective. On part de quatre points a, b, c, d formant un repère. On construit les six droites qui les joignent, puis les trois points intersections de ces droites et distincts de a, b, c, d : il s'agit de a', b', c' , intersections respectives de (ad) et (bc) ; (bd) et (ca) ; (cd) et (ab) . Ces points définissent trois nouvelles droites qui sont les côtés du triangle $a'b'c'$. On construit alors les points a'', b'', c'' intersections des côtés des triangles abc et $a'b'c'$ (par exemple, a'' intersection de (bc) et $(b'c')$). Le théorème affirme que a'', b'', c'' sont alignés. On en propose ci-dessous quatre preuves.

1) Montrer que le théorème à quatre points est un cas particulier de Desargues et le prouver par usage direct du lemme des trois perspectives.

2) Montrer le théorème par le calcul en utilisant a, b, c, d comme repère. Variante : choisir un repère arbitraire et calculer les coordonnées de a'', b'', c'' en fonction de celles de a, b, c, d . On montrera qu'on a, par exemple, $a'' = [c, a, d]b - [a, b, d]c$ où le crochet est le déterminant des vecteurs relevant les points. On montrera alors⁵ que le déterminant $[a'', b'', c'']$ est le produit de $[b, c, d][c, a, d][a, b, d]$ par le déterminant d'une matrice antisymétrique ne comportant que des termes 0, 1, -1.

3) Montrer que le théorème est une conséquence du théorème de Céva (cf. 3.6.12). On notera qu'on a, par exemple, $[[b, c, a', a'']] = -1$ par construction de la polaire.

4) Montrer le théorème par passage à l'anne : choisir une droite à l'infini et envoyer a, b, c, d sur le repère formé par un triangle et son centre de gravité.

5. Voir Partie II ?? pour une discussion.

5) ¶¶ Montrer le théorème “par liaison” : on montrera qu’il existe une conique passant par a', b', c' et tangente respectivement à (bc) , (ca) et (ab) en ces points et on appliquera une variante de III ??.

6) Énoncer et démontrer un théorème à “quatre droites”.

Si on part d’une définition axiomatique du plan projectif comme nous le ferons ci-dessous (Chapitre 4, paragraphe 4), mais sans les axiomes de Pappus ni de Desargues, on peut définir un système de coordonnées avec une structure plus faible que la structure de corps habituelle (un “anneau ternaire”, voir [Hal76]). On peut montrer alors que le théorème à quatre points est équivalent à la relation $(-1).(-1) = 1$ dans cette structure.

2.5.4 Applications des polaires

2.5.13 Exercice. Énoncer diverses variantes affines du théorème de la polaire (en envoyant o ou d ou les deux à l’infini). Les prouver par des méthodes affines (translations, homothéties, etc.)

2.5.14 Exercice. Énoncer et prouver le théorème corrélatif (ou dual) du théorème de la polaire.

2.5.15 Exercice. Construire à la règle seule, en utilisant les polaires, la droite qui joint un point a au point d’intersection de deux droites D, D' situé hors de la feuille de papier.

2.5.16 Exercice. On dispose d’une règle, trop courte pour joindre deux points a, b . Réaliser la construction de la droite (ab) , à la règle seule en utilisant les polaires (voir aussi [Aud06] pour une variante utilisant Pappus).

2.5.17 Exercice. Pappus et la polaire

1) On reprend les notations du théorème de Pappus 2.2.1. Montrer que le point o est sur la droite (uvw) si et seulement si les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes. (On montrera que si ces droites concourent en m , la droite de Pappus est la polaire de m par rapport à D, D' .)

2) On reprend les notations de l’exercice 2.5.5. Montrer par le calcul que le fait que les droites (aa') , (bb') , (cc') soient concourantes, comme le fait que la “droite de Pappus” (uv) passe par o , sont tous deux équivalents à $\lambda + \mu = 0$. En déduire une démonstration de 2.4.1 par le calcul.

Chapitre 3

Le birapport

Dans ce chapitre on introduit le birapport, invariant projectif par excellence. La problématique de cette introduction s’inscrit dans la suite du résultat de triple transitivité du chapitre 1 (le “théorème fondamental” des anciens) : le groupe des homographies d’une droite est triplement transitif, mais pas quadruplement, et le birapport apparaît comme l’obstruction à la quadruple transitivité. On étudie aussi le cas particulier du birapport -1 , c’est-à-dire celui de la division harmonique et ses liens avec la polaire et les involutions. On peut alors prouver de nombreux théorèmes classiques : le théorème de l’involution de Desargues, Ménélaüs, Newton, Céva, etc.

3.1 Définition

3.1.1 Birapport de quatre points

On considère la droite projective standard $\mathbf{P}^1(k)$ que l’on identifie à $k \cup \{\infty\}$ comme expliqué au chapitre 1 : on identifie $x \in k$ au point $(x, 1)$ de \mathbf{P}^1 et ∞ au point $(1, 0)$. Un repère de $\mathbf{P}^1(k)$ est alors formé des points $\infty, 0, 1$. Nous donnons ici une définition non calculatoire du birapport, adaptée à notre problématique de transitivité :

3.1.1 Définition. Soit D une droite projective et soient a, b, c, d quatre points de D , avec a, b, c **distincts**. Soit h l’unique homographie de D sur $\mathbf{P}^1(k)$ définie par $h(a) = \infty$, $h(b) = 0$, $h(c) = 1$. On appelle **birapport** des quatre points a, b, c, d pris dans cet ordre l’élément $h(d) \in \mathbf{P}^1(k) = k \cup \{\infty\}$ et on le note $\llbracket a, b, c, d \rrbracket$.

3.1.2 Remarque. La définition fournit les égalités $\llbracket a, b, c, a \rrbracket = \infty$, $\llbracket a, b, c, b \rrbracket = 0$, $\llbracket a, b, c, c \rrbracket = 1$. L’égalité $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket a, b, c, d' \rrbracket$ équivaut à $d = d'$.

La principale propriété du birapport est de décrire le défaut de quadruple transitivité des homographies :

3.1.3 Proposition. *Soient D, D' deux droites projectives, a, b, c un repère de D et $d \in D$.*

1) *Soit $f : D \rightarrow D'$ une homographie. On a l'égalité :*

$$\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket f(a), f(b), f(c), f(d) \rrbracket$$

(autrement dit : l'homographie conserve le birapport).

2) *Réciproquement, si on a quatre points $a', b', c', d' \in D'$, il existe une homographie $f : D \rightarrow D'$ qui envoie a, b, c, d sur a', b', c', d' respectivement si et seulement si on a $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket a', b', c', d' \rrbracket$ (ce qui sous-entend que les points a', b', c' sont distincts).*

3) *Si une bijection $f : D \rightarrow D'$ conserve le birapport, c'est une homographie.*

Démonstration. 1) Soit h_D (resp. $h_{D'}$) l'homographie de D dans $\mathbf{P}^1(k)$ (resp. de D' dans $\mathbf{P}^1(k)$) qui envoie a, b, c (resp. $f(a), f(b), f(c)$) sur $\infty, 0, 1$. On a, par définition, $h_D(d) = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$ et $h_{D'}(f(d)) = \llbracket f(a), f(b), f(c), f(d) \rrbracket$. Mais, comme h_D et $h_{D'} \circ f$ coïncident sur le repère a, b, c , ces homographies sont égales et on a le résultat.

Le point 2) est clair en définissant f sur a, b, c et en utilisant ce qui précède. Pour le point 3), on considère l'homographie g qui a même effet que f sur le repère a, b, c . Le point 1) et la remarque 3.1.2 montrent qu'elle coïncide avec f .

3.1.2 Birapport de quatre droites

Soit $\mathbf{P}(E)$ un plan projectif et m un point de $\mathbf{P}(E)$. L'ensemble m^* des droites passant par m étant une droite projective duale, si A, B, C, D sont quatre droites passant par m , avec A, B, C distinctes, le birapport $\llbracket A, B, C, D \rrbracket$ a un sens. On peut encore le voir géométriquement comme suit (et c'est parfois ainsi qu'on définit le birapport de quatre droites) :

3.1.4 Proposition. *Soit Δ une droite ne passant pas par m et soient a, b, c, d les traces de A, B, C, D sur Δ . Alors on a $\llbracket A, B, C, D \rrbracket = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$.*

Démonstration. Cela résulte du fait que l'incidence est une homographie, cf. 1.6.10.

Pour mémoire, signalons une conséquence importante de 3.1.3, qui montre que la définition alternative du birapport de quatre droites est consistante, voir figure ci-dessous :

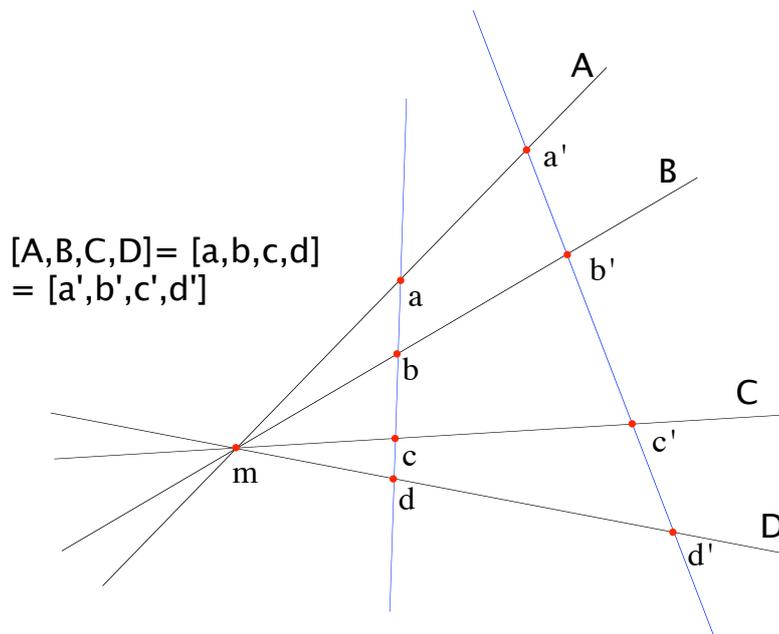


FIGURE 3.1 – birapport et incidence

3.1.5 Proposition. *Si p_m est une perspective de Δ sur Δ' qui envoie a, b, c, d sur a', b', c', d' on a $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket a', b', c', d' \rrbracket$.*

Pour une preuve de ce résultat à la manière de Pappus, voir exercice 3.8.1.

3.2 Calcul du birapport

Dans ce paragraphe, nous donnons plusieurs expressions du birapport : il faut bien expliquer la dénomination ! Ces calculs ne seront pas très souvent utilisés, sauf lorsqu'il s'agira de calculer des sommes et produits de birapports, cf. 3.7.3 et 3.8.13 ou dans la partie qui concerne les invariants.

Soit E un k -espace vectoriel de dimension 2, muni d'une base e_1, e_2 et soient $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ quatre points de $\mathbf{P}(E)$, les trois premiers étant distincts. Il s'agit de calculer le birapport $r = \llbracket \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \rrbracket$. Pour cela on relève les quatre points en quatre vecteurs a, b, c, d que l'on décompose sur la base : $a = a_1e_1 + a_2e_2$, $b = b_1e_1 + b_2e_2$, $c = c_1e_1 + c_2e_2$, $d = d_1e_1 + d_2e_2$.

3.2.1 Notation. Soient $x, y \in E - \{0\}$, avec $x = x_1e_1 + x_2e_2$, $y = y_1e_1 + y_2e_2$.

On pose $\overline{xy} = \begin{vmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{vmatrix} = y_1x_2 - y_2x_1$.

3.2.2 Remarques.

1) Dans le cas où E est l'espace k^2 muni de la base canonique et où les éléments x, y sont de la forme $(x, 1), (y, 1)$ on a $\overline{xy} = y - x$. En identifiant le vecteur $(x, 1)$ avec le point x de la droite affine k on reconnaît la mesure algébrique du vecteur \overrightarrow{xy} , ce qui explique la notation.

2) On a $\overline{xy} = 0 \iff \bar{x} = \bar{y}$.

3) La quantité \overline{xy} dépend du choix de la base : si l'on effectue un changement de base de matrice P , \overline{xy} est multiplié par $\det P$.

4) La quantité \overline{xy} ne dépend pas seulement des points \bar{x}, \bar{y} du projectif : si on remplace x, y par $\lambda x, \mu y$, \overline{xy} est multiplié par $\lambda\mu$.

5) La quantité \overline{xy} sera notée $[yx]$ dans les chapitres portant sur les invariants. Nous avons choisi ici la notation \overline{xy} pour garder la proximité avec les mesures algébriques.

3.2.3 Proposition. Soient $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ quatre points de $\mathbf{P}(E)$, les trois premiers étant distincts. On a la formule :

$$[[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}]] = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} : \frac{\overline{da}}{\overline{db}} = \frac{\overline{ca} \times \overline{db}}{\overline{cb} \times \overline{da}}.$$

(On identifie ici $\mathbf{P}^1(k)$ avec $k \cup \{\infty\}$, avec la convention que, pour $\lambda, \mu \in k$ avec $\lambda \neq 0$ et $\mu = 0$, on a $\lambda/\mu = \infty$).

3.2.4 Remarques.

1) Le nom de birapport est maintenant transparent.

2) On vérifie aussitôt que la quantité $\frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} : \frac{\overline{da}}{\overline{db}}$ ne dépend plus du choix des représentants a, b, c, d ni de la base de E .

Démonstration. Appelons provisoirement birapport géométrique et birapport algébrique les quantités $r = [[\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}]]$ et $r' = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} : \frac{\overline{da}}{\overline{db}}$. Pour montrer qu'elles sont égales, la remarque 2) ci-dessus montre qu'on peut choisir les représentants et la base. On commence par noter que, comme \overline{cb} n'est pas nul (car $\bar{b} \neq \bar{c}$), les deux birapports sont infinis si et seulement si \bar{a} et \bar{d} sont égaux et on écarte désormais ce cas.

Comme $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ forment un repère on peut choisir les représentants a, b, c de telle sorte que l'on ait $c = a + b$ (et (a, b) est alors une base de E , dans laquelle nous travaillons désormais). On a ainsi $d = \lambda a + \mu b$, avec $\mu \neq 0$. On considère l'homographie $h : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}^1(k)$ qui définit le birapport géométrique : $h(\bar{a}) = \infty, h(\bar{b}) = 0, h(\bar{c}) = 1, h(\bar{d}) = r$. Elle provient de l'application linéaire u définie par $u(xa + yb) = (x, y)$. On a donc $u(d) = (\lambda, \mu)$ et $h(\bar{d}) = r = \frac{\lambda}{\mu}$ avec l'identification usuelle.

Calculons maintenant le birapport algébrique : on a $\overline{ca} = 1$, $\overline{cb} = -1$, $\overline{da} = \mu$, $\overline{db} = -\lambda$, d'où $r' = \frac{\lambda}{\mu}$ et le résultat s'ensuit.

3.2.5 Corollaire. *Si a, b, c, d sont quatre points de k , avec a, b, c distincts et $d \neq a$ on a la formule $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} : \frac{\overline{da}}{\overline{db}} = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b}$ (où les symboles \overline{ca} peuvent être compris comme des mesures algébriques). Dans le cas où $d = \infty$, il reste seulement $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}}$.*

3.2.6 Remarque. Si dans 3.1.5 on choisit $D = (dd')$ comme droite à l'infini, le point m est à l'infini de sorte que les droites A, B, C sont parallèles, l'égalité de birapports $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket a', b', c', d' \rrbracket$ s'écrit simplement $\frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} = \frac{\overline{c'a'}}{\overline{c'b'}}$ et on retrouve le théorème de Thalès.

3.2.7 Notation. Afin d'alléger les notations, on se permettra, dans les calculs de birapports exclusivement, l'abus de notation suivant : si a, b, c, d sont quatre points de $\mathbf{P}(E)$, de représentants $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}, \widehat{d}$, on notera \overline{ab} , etc. au lieu de $\widehat{\overline{ab}}$, bien que ces quantités dépendent des représentants. Cet abus est innocent puisque les birapports ne dépendent plus du choix des représentants.

3.3 Permutations du birapport

On a dit que le birapport est celui des quatre points, dans l'ordre. On examine ici ce qui se passe quand on permute les points.

3.3.1 Théorème. *Soit D une droite projective et soient a, b, c, d quatre points distincts de D . On pose $r = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$. C'est un élément de k . On a les formules suivantes :*

- 1) $\llbracket b, a, c, d \rrbracket = \llbracket a, b, d, c \rrbracket = \frac{1}{r}$.
- 2) $\llbracket a, c, b, d \rrbracket = 1 - r$.

Démonstration. On peut établir le résultat grâce aux calculs du paragraphe précédent, mais il est plus simple de procéder directement.

Posons $r' = \llbracket b, a, c, d \rrbracket$. On considère l'homographie $u : \mathbf{P}^1(k) \rightarrow \mathbf{P}^1(k)$ qui à z associe $1/z$. Cette homographie échange ∞ et 0 et fixe 1 . Si h (resp. h') est l'homographie de D dans \mathbf{P}^1 qui envoie a, b, c (resp. b, a, c) en $\infty, 0, 1$, on a $h' = u \circ h$. Comme on a, par définition, $r = h(d)$, $r' = h'(d)$, on en déduit $r' = u(r) = \frac{1}{r}$, cqfd.

Le raisonnement est analogue pour le birapport $\llbracket a, b, d, c \rrbracket$ en considérant l'homographie $v(z) = z/r$ et pour $\llbracket a, c, b, d \rrbracket$ avec $w(z) = 1 - z$.

3.3.2 Remarques.

1) Lorsque d est le point ∞ , la relation $\llbracket a, c, b, d \rrbracket = 1 - r$ s'écrit $\overline{ba} = \overline{bc} + \overline{ca}$: c'est la relation de Chasles sur les mesures algébriques !

2) L'action des permutations sur les birapports donne une opération du groupe des permutations \mathcal{S}_4 sur $\mathbf{P}^1(k) - \{\infty, 0, 1\}$. On vérifie facilement que le groupe de Klein formé des permutations (12)(34), (13)(24), (14)(23) et de l'identité opère trivialement. Les orbites de \mathcal{S}_4 dans cette action sont formées des six éléments : $r, \frac{1}{r}, 1 - r, \frac{1}{1 - r}, \frac{r - 1}{r}, \frac{r}{r - 1}$, sauf pour deux orbites exceptionnelles : $\{-1, 2, \frac{1}{2}\}$ (si k n'est pas de caractéristique 2) et $\{-j, -j^2\}$ (si k contient une racine cubique primitive de l'unité notée j).

3.4 Points fixes des homographies

Il s'agit de discuter du nombre de points fixes d'une homographie d'une droite projective dans elle-même.

3.4.1 Proposition. *Soit D une droite projective. Une homographie $f : D \rightarrow D$ distincte de l'identité admet au plus deux points fixes.*

Démonstration. En effet, si elle en admet trois, ils forment un repère et f est l'identité en vertu de 1.5.6.

3.4.2 Remarques.

1) Si D est la droite $\mathbf{P}^1(k)$ et si on écrit l'homographie f sous la forme $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, cf. 1.4.1, les points fixes sont donnés par la relation $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ (avec ∞ en plus dans le cas $c = 0$). On retrouve ainsi le fait que f a au plus deux points fixes.

2) Si k est algébriquement clos, une homographie admet au moins un point fixe. Sinon, elle peut ne pas en avoir (c'est le cas de $f(z) = -\frac{1}{z}$ sur \mathbf{R}).

3) Il se peut qu'une homographie admette un unique point fixe. C'est le cas des translations : $f(z) = z + b$ avec $b \neq 0$ qui fixent seulement ∞ .

La proposition suivante élucide les classes de conjugaison des homographies de $\mathbf{P}^1(k)$ qui admettent un ou deux points fixes :

3.4.3 Proposition. *Soit f une homographie de $\mathbf{P}^1(k)$.*

1) *Si f admet un unique point fixe elle est conjuguée (dans $PGL(2, k)$) d'une translation $z \mapsto z + b$ avec $b \neq 0$.*

2) *Si f admet deux points fixes distincts a, b elle est conjuguée d'une homothétie $z \mapsto \lambda z$ avec $\lambda \in k^*$, $\lambda \neq 1$. Dans ce cas, on a $\llbracket a, b, m, f(m) \rrbracket = \lambda$*

pour tout m distinct de a, b , ou encore, avec les conventions usuelles :

$$\frac{f(m) - b}{f(m) - a} = \lambda \frac{m - b}{m - a},$$

que l'on désigne parfois comme la "forme canonique" de f .

Démonstration. 1) Si f admet le point fixe m , on choisit une homographie h qui envoie m sur ∞ (par exemple $h(z) = \frac{1}{z - m}$). Alors, $g = hfh^{-1}$ a pour unique point fixe ∞ . Avec les notations de 1.4.1 on a donc $c = 0$, donc $g(z) = az + b$. Comme g n'a que ∞ comme point fixe, on a $a = 1$ (sinon, l'équation $az + b = z$ a une solution) et g est bien une translation.

2) Si f fixe a et b on choisit h telle que $h(a) = \infty$ et $h(b) = 0$ (par exemple $h(z) = \frac{z - b}{z - a}$). Alors, $g = hfh^{-1}$ a pour points fixes ∞ et 0 et on vérifie que g est une homothétie de rapport λ . On a alors $[[a, b, m, f(m)]] = [[h(a), h(b), h(m), hf(m)]] = [[\infty, 0, z, \lambda z]] = \lambda$.

Pour une application de ce résultat aux suites récurrentes homographiques, voir exercice 3.8.5.

3.5 Involutions

3.5.1 Premières propriétés

3.5.1 Définition. Soit D une droite projective, $f : D \rightarrow D$ une homographie. On dit que f est une involution si on a $f^2 = \text{Id}_D$ et $f \neq \text{Id}_D$.

3.5.2 Proposition. Soit f une homographie de la droite projective $D = \mathbf{P}(E)$. On suppose que f provient de l'application linéaire $u \in GL(E)$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) L'homographie f est une involution,
- 2) L'application linéaire u n'est pas une homothétie, mais il existe $\lambda \in k^*$ tel que $u^2 = \lambda \text{Id}_E$.

Si k n'est pas de caractéristique 2, ces conditions sont encore équivalentes à $\text{Tr}(u) = 0$.

Démonstration. L'équivalence de 1) et 2) est claire si l'on se souvient que le groupe des homographies est le quotient de $GL(E)$ par le groupe des homothéties.

Supposons que $f = \bar{u}$ est une involution. Comme f n'est pas l'identité, il existe $a \in E$, $a \neq 0$, tel que $u(a) = b$ n'est pas colinéaire à a . Comme on

a $f^2 = \text{Id}_D$, on a $u(b) = \lambda a$ avec $\lambda \neq 0$. Dans la base a, b , u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on a bien $\text{Tr}(u) = 0$ (ici, la caractéristique est quelconque).

Réciproquement, si on a $\text{Tr}(u) = 0$, on a, par le théorème de Cayley-Hamilton, $u^2 + (\det u)\text{Id}_E = 0$, donc u^2 est une homothétie. Comme la caractéristique de k n'est pas 2, u n'est pas une homothétie (car la trace de l'homothétie de rapport λ est 2λ). C'est donc une involution par 2).

3.5.3 Proposition. *Soit $f : D \rightarrow D$ une homographie. Alors, f est une involution si et seulement si il existe $m \in D$ tel que $f(m) \neq m$ et $f^2(m) = m$.*

Démonstration. Le sens direct est clair. Réciproquement, si on a $f(m) \neq m$ et $f^2(m) = m$, soit $a \neq m, f(m)$. Il s'agit de montrer qu'on a $f^2(a) = a$. Or, on a l'égalité des birapports $r := \llbracket m, f(m), a, f(a) \rrbracket = \llbracket f(m), m, f(a), a \rrbracket$ (par permutation), mais aussi $r = \llbracket f(m), m, f(a), f^2(a) \rrbracket$ (conservation du birapport par f), d'où $a = f^2(a)$.

3.5.4 Corollaire. *Si a, a', b, b' sont des points de D , avec a, a', b distincts, l'homographie qui échange a et a' et envoie b sur b' est une involution qui échange b et b' .*

Nous reverrons les involutions dans l'étude du groupe d'une conique. Notons déjà qu'elles engendrent le groupe des homographies :

3.5.5 Théorème. (Variante de Cartan-Dieudonné) *Soit D une droite projective et $f : D \rightarrow D$ une homographie. Alors, f est produit d'au plus deux involutions.*

Démonstration. Le résultat est évident si f est l'identité. Sinon, comme f a au plus deux points fixes, il existe au moins deux points¹ a, b de D non fixes par f . Soit c un troisième point de D et a', b', c' les images de a, b, c par f .

Si on a $a = b'$ et $b = a'$, on a $f^2(b) = f(b') = f(a) = a' = b$ et $f(b) \neq b$, de sorte que f est une involution.

Sinon, on a, disons, $a \neq b'$. On définit alors l'homographie i sur le repère a, b, b' par $i(a) = b'$, $i(b) = a'$ et $i(b') = a$. Comme i échange a et b' , c'est une involution. Soit alors $c'' = i(c)$. Les trois points b', a', c'' sont distincts (images par i de a, b, c). On peut donc définir j sur ce repère par $j(b') = a'$, $j(a') = b'$ et $j(c'') = c'$. Comme j échange a' et b' , c'est une involution et on a $j \circ i(a) = a'$, $j \circ i(b) = b'$, $j \circ i(c) = c'$, ce qui montre que f est égale à $j \circ i$.

1. Le lecteur qui se poserait la question : et si k est le corps \mathbf{F}_2 à deux éléments ? réfléchira un instant de plus.

3.5.2 Le théorème de Desargues sur les pincesaux de coniques : premier contact

Il s'agit d'un théorème très important que nous reverrons dans la Partie III, voir ???. La variante que nous donnons ici ne fait apparaître de coniques que dégénérées. La démonstration utilise essentiellement les perspectives et les permutations du birapport.

3.5.6 Théorème. *Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ un repère du plan projectif $\mathbf{P}(E)$ et soit D une droite ne passant par aucun des points du repère. On note a, b, c, a', b', c' les intersections de D avec les droites $(\alpha\beta)$, $(\alpha\gamma)$, $(\alpha\delta)$, $(\gamma\delta)$, $(\delta\beta)$ et $(\beta\gamma)$ respectivement et on suppose $a \neq a'$. Alors, l'involution f qui échange a et a' et b et b' échange aussi c et c' .*

Démonstration. On pose $\Delta = (\gamma\delta)$ et on considère les perspectives $p_\alpha : D \rightarrow \Delta$ et $p_\beta : \Delta \rightarrow D$ et leur composée $h = p_\beta \circ p_\alpha$ qui est une homographie de D . Soit u l'intersection de $(\alpha\beta)$ et $(\gamma\delta)$. Comme p_α transforme respectivement a en u , a' en a' , b en γ et c en δ , on $h(a) = a$, $h(a') = a'$, $h(b) = c'$ et $h(c) = b'$, d'où l'égalité de birapports : $[[a, a', b, c]] = [[a, a', c', b']] = [[a', a, b', c']]$ par permutation. Il en résulte qu'on a $[[a, a', b, c]] = [[f(a), f(a'), f(b), c']]$ d'où $c' = f(c)$.

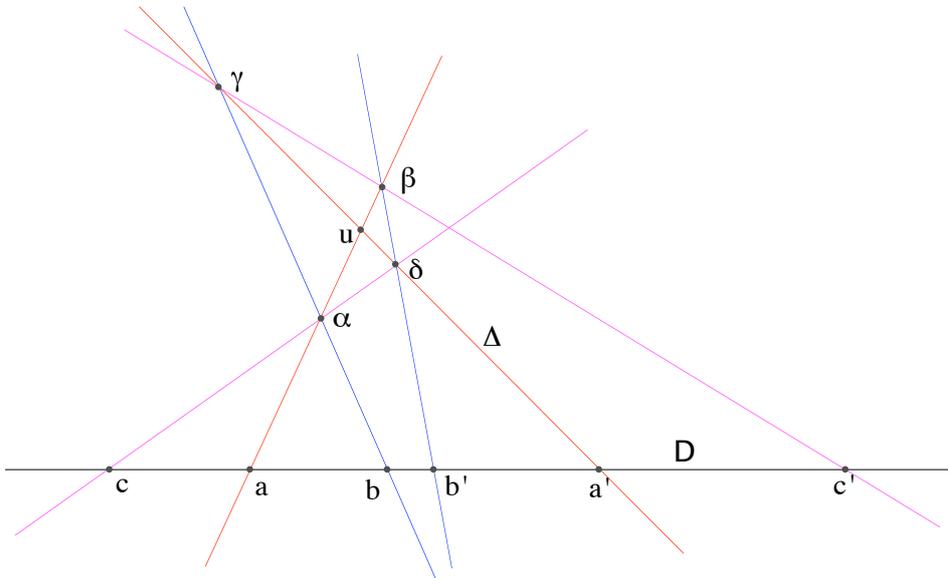


FIGURE 3.2 – Le théorème de Desargues-coniques

Deux applications de Desargues

3.5.7 Remarque. Comme nous l'avons déjà vu sur d'autres exemples, le théorème précédent peut avoir une traduction affine lorsqu'une droite à l'infini a été choisie. Par exemple, une variante peut alors consister à dire que si a, a' et b, b' ont même milieu m , alors m est aussi le milieu de c, c' .

Une autre (jolie) application qui anticipe sur les chapitres ultérieurs est la suivante. On travaille sur le corps $k = \mathbf{R}$. On choisit une droite à l'infini D_∞ et on suppose que le plan affine $\mathbf{P}(E) - D_\infty$ est muni d'une structure euclidienne. On verra que cela revient à se donner une forme quadratique sur l'espace vectoriel $p^{-1}(D_\infty)$ et cette forme induit une application $\perp : D_\infty \rightarrow D_\infty$ qui à une direction d associe la direction orthogonale d^\perp . On a alors le lemme suivant (cf. Partie V ??) :

3.5.8 Lemme. *L'application \perp est une involution (homographique) de D_∞ .*

Un corollaire de Desargues est alors le suivant :

3.5.9 Corollaire. *Dans le plan euclidien, les hauteurs d'un triangle sont concourantes.*

Démonstration. On considère un triangle $\alpha\beta\gamma$ et deux de ses hauteurs, issues de β et γ qui se coupent en δ . On applique au repère $\alpha\beta\gamma\delta$ et à la droite D_∞ le théorème de Desargues. Les points a et a' correspondent aux directions de $(\alpha\beta)$ et $(\gamma\delta)$ qui sont orthogonales, les points b et b' correspondent aux directions de $(\alpha\gamma)$ et $(\beta\delta)$ qui sont aussi orthogonales. L'involution définie par le théorème de Desargues est donc simplement l'orthogonalité. Mais alors, les points c, c' qui correspondent aux directions de $(\alpha\delta)$ et $(\beta\gamma)$ sont échangés par l'involution, donc ces directions sont aussi orthogonales et $(\alpha\delta)$ est la troisième hauteur du triangle : cqfd !

3.5.3 Division harmonique, involution, polaire

Dans ce paragraphe on suppose que le corps k est de caractéristique différente de 2.

Division harmonique

3.5.10 Définition. *Soient a, b, c, d quatre points distincts d'une droite projective D . On dit que ces points forment une **division harmonique** si on a $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = -1$.*

3.5.11 Remarques.

1) Si on a $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = -1$, on a aussi $\llbracket b, a, c, d \rrbracket = \llbracket a, b, d, c \rrbracket = \llbracket c, d, a, b \rrbracket = -1$. Autrement dit, le fait pour a, b, c, d d'être une division harmonique est une propriété de la double paire : $\{a, b\}, \{c, d\}$. On dit que a et b sont **conjugués harmoniques** par rapport à c et d (ou l'inverse).

2) Si l'on est dans $\mathbf{P}^1(k)$, avec $a = \infty$, on a $\llbracket \infty, b, c, d \rrbracket = \frac{d-b}{c-b} = -1 \iff c+d = 2b$. Autrement dit b est alors le milieu du segment $[cd]$ de la droite affine k : le conjugué harmonique de ∞ par rapport à c, d est le milieu de c, d .

3) Si a, b, c, d sont tous dans la droite affine k , leur birapport vaut -1 si et seulement si on a $\frac{c-a}{c-b} = -\frac{d-a}{d-b}$ ou encore, en termes de mesures

algébriques : $\frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} = -\frac{\overline{da}}{\overline{db}}$ comme on l'écrivait jadis.

4) Si m^* est une droite projective duale, quatre droites A, B, C, D passant par m forment une division harmonique si leur birapport vaut -1 . On parle plutôt alors de pinceau harmonique (on disait autrefois faisceau harmonique), voir plus loin. Si Δ est une droite ne passant pas par m qui coupe les droites en a, b, c, d , on a $\llbracket A, B, C, D \rrbracket = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$ (cf. 3.1.4), de sorte qu'un pinceau est harmonique si et seulement si ses traces sur une sécante quelconque forment une division harmonique. Un exemple classique de pinceau harmonique en géométrie euclidienne est celui de deux droites et de leurs deux bissectrices, voir exercice 3.8.10.

Lien avec les involutions

3.5.12 Proposition. Soit $f : D \rightarrow D$ une homographie admettant deux points fixes a, b distincts.

1) Si f est une involution on a , pour tout $m \in D$, $m \neq a, b$: $\llbracket a, b, m, f(m) \rrbracket = -1$ (autrement dit, m et $f(m)$ sont conjugués harmoniques par rapport à a, b).

2) Réciproquement, s'il existe $m \neq a, b$ tel que l'on ait $\llbracket a, b, m, f(m) \rrbracket = -1$, f est une involution.

Démonstration. 1) Posons $r = \llbracket a, b, m, f(m) \rrbracket$ et appliquons f : on a $r = \llbracket a, b, f(m), m \rrbracket = 1/r$. On en déduit $r = \pm 1$ et comme $f(m) \neq m$ (f n'est pas l'identité donc n'a que deux points fixes), on a $r = -1$.

2) Le même argument montre qu'on a $f^2(m) = m$ et on conclut par 3.5.3.

Parmi les involutions de $\mathbf{P}^1(k)$ on trouve notamment les symétries centrales : la symétrie de centre a est l'application (affine) de $\mathbf{P}^1(k)$ dans lui-même qui à z associe $2a - z$. Cette homographie est l'unique involution qui

fixe ∞ et a . En fait, les involutions qui ont deux points fixes sont conjuguées de ces applications :

3.5.13 Corollaire. *Soient $a, b \in \mathbf{P}^1(k)$. Il existe une unique involution f qui admet a et b comme points fixes. Cette involution f est conjuguée de l'application $z \mapsto -z$ (symétrie de centre 0).*

Démonstration. Cela résulte de la proposition et de la remarque précédentes et de 3.4.3.

3.5.14 Remarque. Une involution, sur un corps de caractéristique $\neq 2$ admet 0 ou 2 points fixes. En effet, les homographies admettant un unique point fixes sont les conjuguées des translations (cf. 3.4.3) et ce ne sont pas des involutions (sauf en caractéristique 2!) Le cas d'une involution sans point fixe peut se produire, notamment sur \mathbf{R} , par exemple avec $i(z) = -\frac{1}{z}$. Pour des précisions sur les classes de conjugaison des involutions, cf. 3.8.6.

Polaire et divisions harmoniques

C'est dans ce paragraphe que l'hypothèse de caractéristique différente de 2 va jouer tout son rôle. Le lemme crucial est le suivant :

3.5.15 Lemme. *Soit $\mathbf{P}(E)$ un plan projectif sur le corps k et soit a, b, a', b' un repère du plan. On appelle respectivement d, o, u les intersections de (ab) et $(a'b')$; (aa') et (bb') ; (ab') et $(a'b)$. Alors d, o, u sont alignés si et seulement si le corps k est de caractéristique 2.*

Démonstration. Le mieux est de calculer, en posant $a = (1, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0)$, $a' = (0, 0, 1)$ et $b' = (1, 1, 1)$. On obtient $d = (1, 1, 0)$, $o = (1, 0, 1)$ et $u = (0, 1, 1)$ et le résultat est évident (par exemple parce que le déterminant de ces vecteurs vaut -2).

3.5.16 Remarque. Le résultat précédent peut se voir aussi *via* la géométrie affine en choisissant (od) comme droite de l'infini. Le quadrilatère $abb'a'$ est un parallélogramme et ses diagonales se coupent en leur milieu u qui n'est pas à l'infini ... sauf en caractéristique 2 où il n'y a pas de milieu et où les diagonales sont parallèles : $\vec{ab'} = \vec{ab} + \vec{bb'} = \vec{a'b'} - \vec{b'b} = \vec{a'b'} + \vec{b'b} = \vec{a'b}$.

Ce point étant acquis, on reprend essentiellement la situation de 2.4.1 :

3.5.17 Théorème. *On suppose toujours la caractéristique de k différente de 2. Soient A, B deux droites distinctes concourantes en o , soit $d \notin A \cup B$ et D la polaire de d au sens de 2.4.2. Soit m un point de D , distinct de o . Alors on*

$a \neq d$. Si (dm) coupe A, B en a, b respectivement, on a $\llbracket a, b, d, m \rrbracket = -1$, ou encore $\llbracket A, B, (od), D \rrbracket = -1$. La droite D est l'ensemble des conjugués harmoniques de d "par rapport aux droites A, B ".

Démonstration. Voir fig. 3.3. Posons $\Delta = (dm)$ et soit Δ' une autre sécante passant par d et pas par o qui coupe A, B en a', b' . Soit u l'intersection de (ab') et $(a'b)$. On a vu en 2.4.1 que D est la droite (ou) . Si m est sur cette droite, il est distinct de d , sinon d, o, u seraient alignés ce qui est contraire à l'hypothèse que k n'est pas de caractéristique 2.

Il suffit de montrer la relation $\llbracket a, b, d, m \rrbracket = -1$. On considère les perspectives $p_u : \Delta \rightarrow \Delta'$ et $p_o : \Delta' \rightarrow \Delta$. En appliquant $p_o \circ p_u$ on obtient : $r = \llbracket a, b, d, m \rrbracket = \llbracket b, a, d, m \rrbracket = 1/r$, d'où $r = \pm 1$. Mais, comme on a $m \neq d$, le birapport vaut -1 .

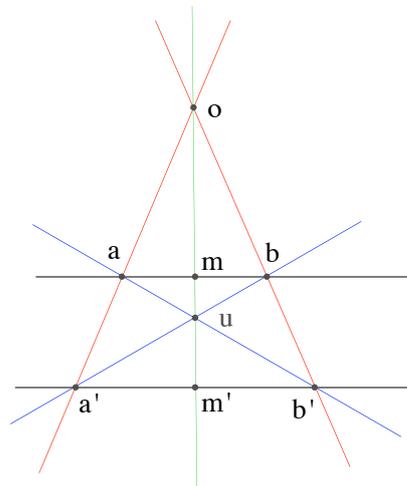
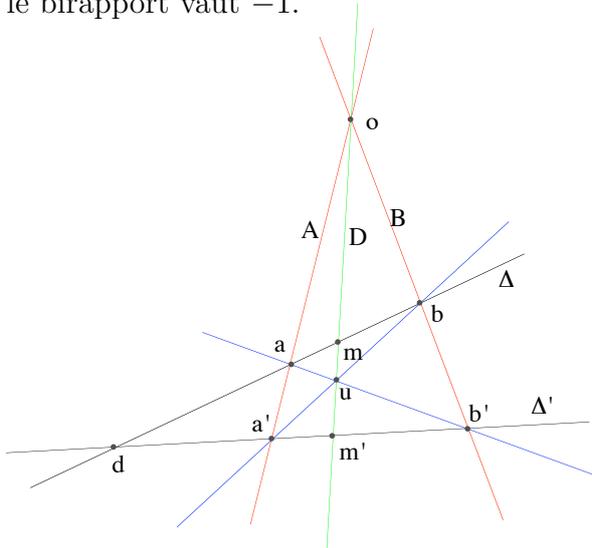


FIGURE 3.3 – Polaire et division harmonique
FIGURE 3.4 – Variante d'un théorème de Newton

3.5.18 Remarques.

1) Si on prend d à l'infini, on obtient une variante d'un théorème de Newton², voir fig. 3.4 : avec les notations précédentes, le quadrilatère $abb'a'$ est un trapèze et la droite (ou) coupe les bases $[ab]$ et $[a'b']$ en leurs milieux. En effet, comme d est à l'infini, la relation $\llbracket a, b, m, d \rrbracket = -1$ signifie que m est milieu de $[ab]$ (cf. 3.5.11).

2) Si maintenant on prend (od) comme droite à l'infini, on trouve un résultat affine plus connu encore. En effet, le quadrilatère $abb'a'$ est un parallélogramme et u est l'intersection de ses diagonales. On a $\llbracket A, B, (od), D \rrbracket = \llbracket a, b', \infty, u \rrbracket =$

² Voir ci-dessous 3.6.5. Avec les notations de ce résultat, le cas envisagé ci-dessus correspond au cas $p = q$, mais avec un résultat un peu différent.

–1, ce qui signifie que u est le milieu de a, b' : les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

3) Le théorème apparaît comme une variante du théorème de Desargues 3.5.6. En effet, si on considère le repère o, a, b, u et la droite Δ' , les droites (oa) et (bu) (resp. (ob) et (au)) se coupent en a' (resp. b') sur Δ' , tandis que (om) et (ab) coupent Δ' en m' et d . On considère alors l'unique involution de Δ' qui fixe a' et b' (voir 3.5.13). Le théorème 3.5.17 donne $[[a', b', d, m']] = -1$, de sorte que l'involution échange d et m' en vertu de 3.5.12. C'est la situation de Desargues, mais avec deux couples de points confondus.

3.6 Les variantes projectives de Ménélaüs et Céva

3.6.1 Le lemme des trois birapports

3.6.1 Lemme. Soient a, b, c, d, e cinq points distincts d'une droite projective D . On a la formule : $[[b, c, d, e]] \times [[c, a, d, e]] \times [[a, b, d, e]] = 1$.

Démonstration. Cela résulte de la formule qui donne le birapport :

$$[[b, c, d, e]] \times [[c, a, d, e]] \times [[a, b, d, e]] = \frac{\overline{db}}{\overline{dc}} : \frac{\overline{eb}}{\overline{ec}} \times \frac{\overline{dc}}{\overline{da}} : \frac{\overline{ec}}{\overline{ea}} \times \frac{\overline{da}}{\overline{db}} : \frac{\overline{ea}}{\overline{eb}} = 1.$$

3.6.2 Remarque. On peut écrire la formule précédente sous la forme

$$[[b, c, d, e]] \times [[c, a, d, e]] = [[b, a, d, e]],$$

une sorte de relation de Chasles multiplicative des birapports. Pour une discussion sur cette formule en termes d'invariants, voir Partie II ??.

3.6.3 Lemme. Soient a, b, c trois points non alignés d'un plan projectif $\mathbf{P}(E)$. On considère deux droites distinctes D et Δ ne passant pas par a, b, c et coupant respectivement (bc) , (ca) , (ab) en a', b', c' et α, β, γ . Alors, on a l'égalité :

$$[[b, c, a', \alpha]] \times [[c, a, b', \beta]] \times [[a, b, c', \gamma]] = 1.$$

Réciproquement, si on a trois points a, b, c non alignés, et des points a', α ; b', β et c', γ situés respectivement sur (bc) , (ca) et (ab) tels que a', b', c' soient alignés et que le produit des birapports ci-dessus soit égal à 1, alors les points α, β, γ sont alignés.

Démonstration. Soit o le point d'intersection de D et Δ et posons $A = (oa)$, $B = (ob)$, $C = (oc)$, cf. ci-dessous, fig. 3.5. L'incidence entre la droite duale o^* et les droites (bc) , (ca) , (ab) donne $\llbracket b, c, a', \alpha \rrbracket = \llbracket B, C, D, \Delta \rrbracket$, $\llbracket c, a, b', \beta \rrbracket = \llbracket C, A, D, \Delta \rrbracket$, $\llbracket a, b, c', \gamma \rrbracket = \llbracket A, B, D, \Delta \rrbracket$, d'où le résultat par 3.6.1. La réciproque s'obtient en appliquant le sens direct avec $\gamma' = (ab) \cap (\alpha\beta)$.

3.6.2 Ménélaüs

3.6.4 Théorème. Soient Π un plan affine, a, b, c trois points non alignés de Π et soient a', b', c' respectivement sur (bc) , (ca) , (ab) , distincts de a, b, c . Alors, a', b', c' sont alignés si et seulement si on a la relation suivante sur les mesures algébriques :

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \times \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \times \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = 1.$$

Démonstration. On plonge le plan affine dans un plan projectif et on appelle Δ la droite de l'infini. Supposons d'abord a', b', c' alignés sur une droite D , voir fig. 3.6. Si α, β, γ sont les points à l'infini de (bc) , (ca) , (ab) , on a, en vertu de 3.6.3 la relation

$$\llbracket b, c, a', \alpha \rrbracket \times \llbracket c, a, b', \beta \rrbracket \times \llbracket a, b, c', \gamma \rrbracket = 1$$

qui n'est autre que la relation annoncée, cf. 3.2.5.

Réciproquement, si on a cette relation, appelons c'' le point d'intersection de (ab) et de $(a'b')$. Le sens direct et l'hypothèse donnent $\llbracket a, b, c', \gamma \rrbracket = \llbracket a, b, c'', \gamma \rrbracket$ d'où $c' = c''$ et le résultat.

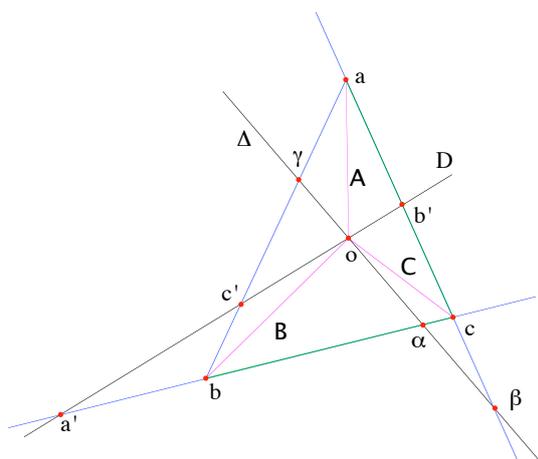


FIGURE 3.5 – Le lemme des 3 birapports

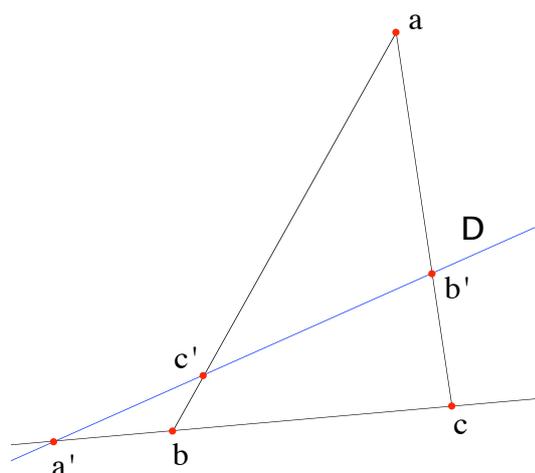


FIGURE 3.6 – Le théorème de Ménélaüs

3.6.3 Application : le théorème de Newton

3.6.5 Théorème. Soit a, b, c, d un repère et soient e et f les intersections de $(ab), (cd)$ et $(ad), (bc)$ respectivement (voir fig. 3.7). Soit D une droite et p, q, r les intersections de D avec $(ca), (bd)$ et (ef) . On appelle i, j, k les conjugués harmoniques de p, q, r par rapport à c, a ; b, d et e, f . Alors i, j, k sont alignés.

Démonstration. On note u, v, w les intersections de $(bd), (ef)$; $(ef), (ac)$ et $(ac), (bd)$ respectivement et on applique la partie réciproque de 3.6.3 au triangle uvw . Il s'agit donc de montrer qu'on a :

$$\llbracket v, w, p, i \rrbracket \llbracket w, u, q, j \rrbracket \llbracket u, v, r, k \rrbracket = 1,$$

ou encore, en permutant les termes :

$$\llbracket i, p, w, v \rrbracket \llbracket j, q, u, w \rrbracket \llbracket k, r, v, u \rrbracket = 1.$$

Mais, on a le lemme suivant :

3.6.6 Lemme. On a $\llbracket i, p, w, v \rrbracket = \llbracket p, a, v, w \rrbracket^2 = \llbracket p, c, v, w \rrbracket^2$ et les égalités analogues sur les droites (bd) et (ef) .

Ce lemme implique le théorème car on a $\llbracket p, a, v, w \rrbracket \llbracket q, d, w, u \rrbracket \llbracket r, f, u, v \rrbracket = 1$ par application du sens direct de 3.6.3 au triangle uvw et aux points alignés p, q, r d'une part et a, d, f d'autre part.

Démonstration. (du lemme) On a $\llbracket a, c, p, i \rrbracket = -1$ par définition de i . Par ailleurs, la polaire de w par rapport aux droites (ad) et (bc) n'est autre que (fe) par construction de la polaire et on en déduit $\llbracket a, c, v, w \rrbracket = -1$. L'unique involution φ de (ac) admettant a et c pour points fixes (voir 3.5.13) échange donc i, p (resp. v, w) (c'est d'ailleurs l'involution de Desargues de (ac) associée au quadrilatère $jkqr$). L'application de φ donne l'égalité $\llbracket i, p, w, v \rrbracket = \llbracket p, i, v, w \rrbracket$. On en déduit, avec le lemme des trois birapports 3.6.1, $\llbracket i, p, w, v \rrbracket = \llbracket p, a, v, w \rrbracket \llbracket a, i, v, w \rrbracket = \llbracket p, a, v, w \rrbracket \llbracket a, p, w, v \rrbracket$ par application de φ et le lemme en résulte par permutation.

Le théorème originel de Newton correspond au cas où D est la droite de l'infini (voir fig. 3.8) :

3.6.7 Corollaire. (Newton) Soit a, b, c, d quatre points du plan affine non trois à trois alignés. Soient e et f les intersections de $(ab), (cd)$ et $(ad), (bc)$ respectivement. Alors les milieux i, j, k de c, a ; b, d et e, f respectivement, sont alignés.

Nous reviendrons sur ce théorème dans les Parties II et III. Le lecteur qui voudrait en voir d'autres preuves pourra se reporter au livre de Jean-Louis Ayme (voir [Aym03]) où il en trouvera une trentaine !

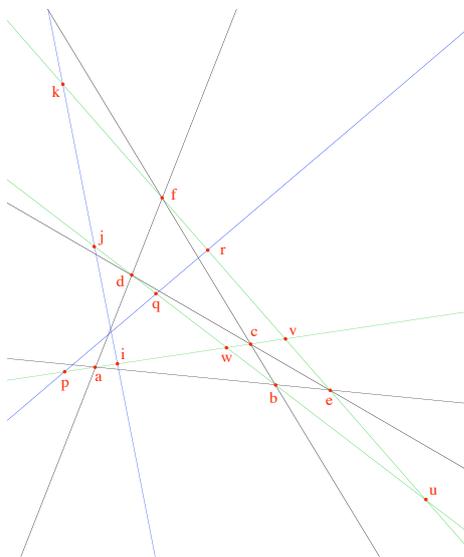


FIGURE 3.7 – Le théorème de Newton projectif

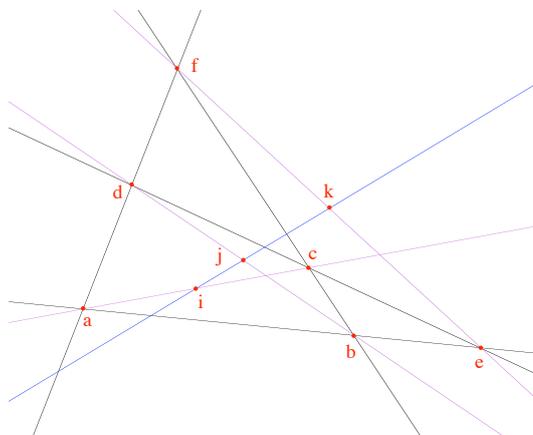


FIGURE 3.8 – Le théorème de Newton affine

3.6.4 Involutions et birapports

3.6.8 Lemme. Soit D une droite projective et soient $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ six points distincts de D . Soit $f : D \rightarrow D$ l'homographie définie par $f(\alpha) = \alpha', f(\beta) = \beta', f(\gamma) = \gamma'$. Alors f est une involution si et seulement si on a la relation suivante entre birapports :

$$(*) \quad [[\alpha, \beta, \gamma, \gamma']] [[\beta, \gamma, \alpha, \alpha']] [[\gamma, \alpha, \beta, \beta']] = -1.$$

Démonstration. On vérifie que la relation (*) équivaut à

$$\frac{\overline{\gamma'\beta}}{\overline{\gamma'\alpha}} \times \frac{\overline{\alpha'\gamma}}{\overline{\alpha'\beta}} \times \frac{\overline{\beta'\alpha}}{\overline{\beta'\gamma}} = 1,$$

ce qui, en multipliant haut et bas par $\overline{\gamma'\gamma}$, conduit à :

$$[[\gamma', \alpha', \beta, \gamma]] = [[\gamma', \beta', \gamma, \alpha]]^{-1} = [[\gamma', \beta', \alpha, \gamma]] = [[\gamma, \alpha, \beta', \gamma']].$$

Il en résulte que l'homographie qui envoie γ' sur γ , α' sur α , β sur β' envoie aussi γ sur γ' . C'est donc une involution. Mais alors elle envoie α sur α' , donc cette involution n'est autre que f .

3.6.9 Remarque. On peut affaiblir l'hypothèse que les six points sont distincts. Il faut bien entendu supposer α, β, γ distincts, ainsi que α', β', γ' et

supposer aussi que l'un des couples homologues par f est non trivial (par exemple $\gamma \neq \gamma'$), sinon on a $f = \text{Id}$. Sous ces hypothèses, le résultat reste vrai avec la convention que si l'un des birapports est infini (par exemple si $\gamma' = \alpha$) alors l'un des autres est nul (et ici on a nécessairement $\alpha' = \gamma$).

3.6.5 Involutions et concours

3.6.10 Théorème. *Soient a, b, c trois points non alignés de $\mathbf{P}(E)$ et soient a', b', c' des points de (bc) , (ca) et (ab) respectivement, distincts de a, b, c . Soit D une droite ne passant ni par les points a, b, c, a', b', c' , ni par les points d'intersections de (aa') , (bb') , (cc') . La droite D coupe respectivement (bc) , (ca) , (ab) , (aa') , (bb') , (cc') en des points $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$. Alors les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes si et seulement si l'homographie de D qui envoie α sur α' , β sur β' , γ sur γ' est une involution.*

Démonstration. Supposons (aa') , (bb') , (cc') concourantes en d . Alors le résultat n'est rien d'autre que le théorème de Desargues, cf. 3.5.6, appliqué au repère a, b, c, d .

Pour la réciproque on appelle d le point d'intersection de (aa') et (bb') et γ'' celui de D et de (cd) . On applique encore Desargues au repère $abcd$. On en déduit une involution de D qui échange α et α' , β et β' et γ et γ'' . C'est nécessairement l'homographie de l'énoncé et on a $\gamma' = \gamma''$, ce qui signifie que d est sur (cc') .

3.6.11 Remarque. C'est cet argument qui a été utilisé en 3.5.9 pour prouver le concours des hauteurs d'un triangle.

3.6.12 Corollaire. *Avec les notations ci-dessus, les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes si et seulement si on a la relation*

$$(*) \quad [[\alpha, \beta, \gamma, \gamma']] [[\beta, \gamma, \alpha, \alpha']] [[\gamma, \alpha, \beta, \beta']] = -1,$$

ou encore la relation (**) : $[[b, a, \gamma, c']] [[c, b, \alpha, a']] [[a, c, \beta, b']] = -1$.

Démonstration. Le premier point vient de 3.6.8 (car les six points $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ sont distincts). Pour le second on montre successivement les égalités $[[\alpha, \beta, \gamma, \gamma']] = [[b, a, \gamma, c']]$, $[[\beta, \gamma, \alpha, \alpha']] = [[c, b, \alpha, a']]$ et $[[\gamma, \alpha, \beta, \beta']] = [[a, c, \beta, b']]$ en utilisant les perspectives de centres c, a, b .

3.6.6 Céva

Il s'agit de la variante usuelle de la relation (**):

3.6.13 Théorème. Soient a, b, c trois points non alignés d'un plan affine Π et soient a', b', c' des points de (bc) , (ca) et (ab) respectivement, distincts de a, b, c .

Alors les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a l'égalité :

$$\frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \times \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \times \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = -1.$$

Démonstration.

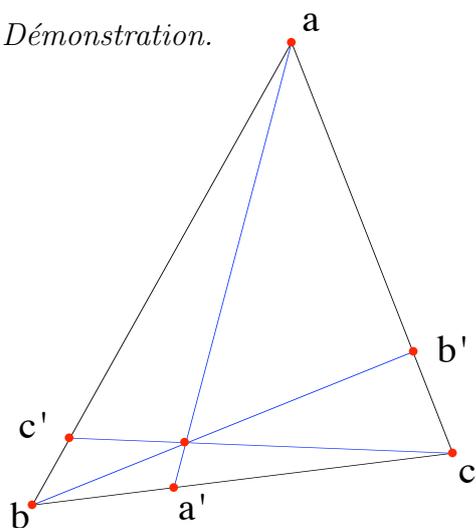


FIGURE 3.9 – Céva : le cas concourant

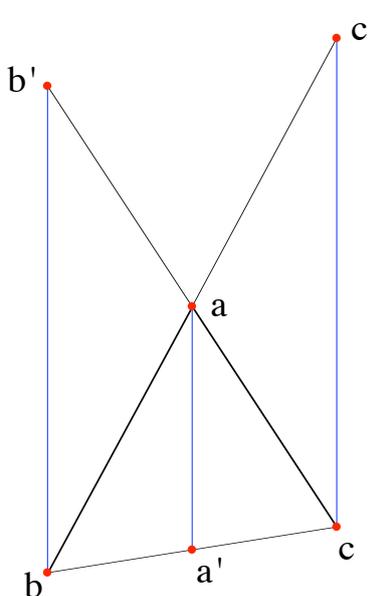


FIGURE 3.10 – Céva : le cas parallèle

On plonge Π dans un plan projectif et on applique la formule (**) du corollaire précédent en prenant pour D la droite de l'infini. Comme les points α, β, γ sont à l'infini les birapports se réduisent aux rapports de mesures algébriques, par exemple $\llbracket b, a, \gamma, c' \rrbracket = \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}}$, cf. 3.2.5.

Dans les figures 3.9 et 3.10, les rapports sont respectivement $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, -6 et $-1, 2, \frac{1}{2}$.

3.6.14 Remarque. Il est clair que le théorème de Céva, vu sous la forme de 3.6.12, est un énoncé projectif. La situation du théorème de Céva usuel 3.6.13 (obtenu en envoyant la droite D à l'infini) peut sembler plus paradoxale³. En effet, si la conclusion du théorème est clairement projective (les droites

3. Je remercie Georges Lion de m'avoir signalé ce fait.

sont concourantes ou parallèles, i.e. concourantes en projectif), l'hypothèse, elle, dans sa formulation avec les rapports de mesures algébriques, semble bel et bien affine. En fait, l'hypothèse aussi est projective car on peut la mettre sous la forme (**) en prenant pour α, β, γ les intersections des côtés du triangle avec une droite D quelconque. On notera, en effet, qu'on passe du produit des mesures algébriques à celui des birapports en multipliant par $\frac{\gamma b}{\gamma a} \times \frac{\alpha c}{\alpha b} \times \frac{\beta a}{\beta c}$, lequel vaut 1 ... par Ménélaüs !)

3.7 Construction à la règle du birapport somme et du birapport inverse

Dans ce paragraphe nous montrons comment on peut construire "à la règle" (i.e. en utilisant uniquement des alignements) les points correspondant au birapport inverse et au birapport somme⁴. Ces constructions seront essentielles pour prouver le théorème fondamental de la géométrie projective au chapitre suivant.

3.7.1 Constructions à la règle

Nous formalisons dans ce paragraphe la notion de construction à la règle. Le lecteur vérifiera que les constructions produites ci-dessous répondent bien à ces critères. Ces constructions rentreront dans le cadre plus général des constructions projectives dans la partie II.

3.7.1 Définition. *On considère un ensemble de points $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_m\}$ et un ensemble de droites $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_n\}$ dans $\mathbf{P}(E)$. On dit qu'un point a (resp. une droite D) est construit "à la règle" en r pas à partir des données s'il existe deux suites de parties $\mathcal{A}_0, \dots, \mathcal{A}_r$ de $\mathbf{P}(E)$ et $\mathcal{D}_0, \dots, \mathcal{D}_r$ de $\mathbf{P}(E^*)$ telles que l'on ait :*

- 1) $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}, \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}$,
- 2) $a \in \mathcal{A}_r$ (resp. $D \in \mathcal{D}_r$),
- 3) \mathcal{A}_{i+1} (resp. \mathcal{D}_{i+1}) est obtenu à partir de \mathcal{A}_i (resp. \mathcal{D}_i) en lui adjoignant l'intersection de deux droites de \mathcal{D}_i (resp. la droite joignant deux points de \mathcal{A}_i).

3.7.2 Le birapport inverse

Soit D une droite projective, contenue dans un plan projectif $\mathbf{P}(E)$ et soient a, b, c, x des points distincts de D . On cherche à construire un point

4. C'est Michel Wirth qui le premier a attiré, jadis, mon attention sur ces constructions.

$y \in D$ tel que le birapport $[[a, b, c, y]]$ soit l'inverse du birapport $r = [[a, b, c, x]]$. On doit donc avoir $[[a, b, c, x]] = [[a, b, c, y]]^{-1} = [[b, a, c, y]]$. Autrement dit, y doit être l'image de x dans l'involution qui fixe c et échange a et b . La solution est alors évidente avec le théorème de Desargues sur les pincesaux de coniques. On choisit deux droites A et B passant par c , distinctes de D , et une droite $\Delta \neq D$ passant par x , qui coupe A et B en α , β . Les droites $(a\alpha)$ et $(b\beta)$ coupent respectivement B et A en γ et δ . Alors, le théorème de Desargues (cf. 3.5.6) montre que le point y cherché est le point d'intersection de D et de $(\gamma\delta)$.

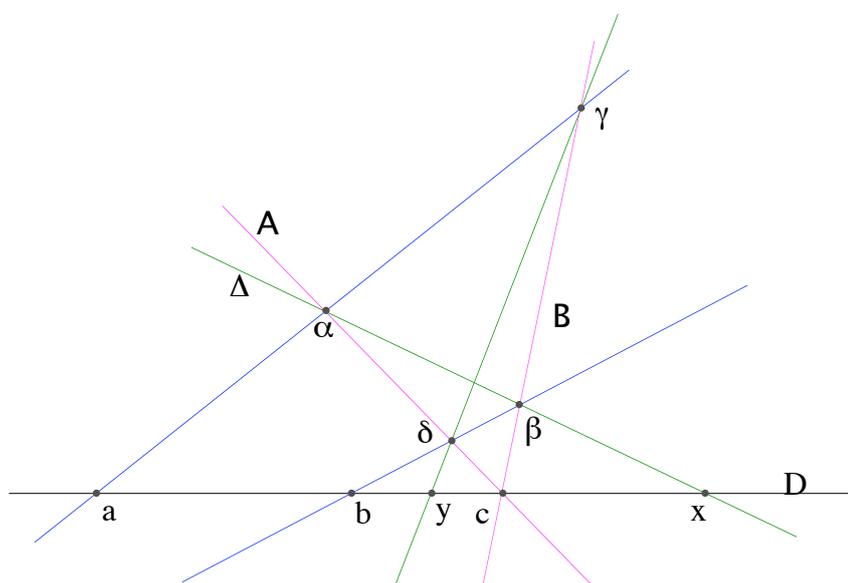


FIGURE 3.11 — Le birapport inverse

3.7.3 Le birapport somme

Soit D une droite projective, contenue dans un plan projectif $\mathbf{P}(E)$ et soient a, b, c des points distincts de D et $x, y \in D - \{a\}$. On cherche à construire le point $z \in D$ tel que $[[a, b, c, z]] = [[a, b, c, x]] + [[a, b, c, y]] = r + s$. On commence par noter que si x ou y est en b , r ou s est nul et donc z est en y ou en x . Le calcul des birapports donne

$$\frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} \times \frac{\overline{xb}}{\overline{xa}} + \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} \times \frac{\overline{yb}}{\overline{ya}} = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} \times \frac{\overline{zb}}{\overline{za}},$$

c'est-à-dire : $\frac{\overline{xb}}{\overline{xa}} + \frac{\overline{yb}}{\overline{ya}} = \frac{\overline{zb}}{\overline{za}}$.

Ce calcul montre d'abord que z est en b (ce qui signifie $\llbracket a, b, c, x \rrbracket + \llbracket a, b, c, y \rrbracket = 0$) si et seulement si on a $\llbracket a, b, x, y \rrbracket = -1$, autrement dit si les points a, b, x, y forment une division harmonique.

Si z n'est pas en b , la relation précédente s'écrit, en divisant par $\frac{\overline{zb}}{\overline{za}}$, $\llbracket b, a, x, z \rrbracket = 1 - \llbracket b, a, y, z \rrbracket = \llbracket b, y, a, z \rrbracket$. On considère alors l'homographie $f : D \rightarrow D$ donnée par $f(b) = b$, $f(a) = y$ et $f(x) = a$. Le point z cherché est alors le second point fixe de f (s'il existe) et on le construit comme suit. On prend une droite Δ passant par b , distincte de D et un point $o \notin D \cup \Delta$, les droites (ao) et (xo) coupent respectivement Δ en α et en ξ et on appelle ω le point d'intersection de $(a\xi)$ et $(y\alpha)$. Alors, f est la composée des perspectives $p_o : D \rightarrow \Delta$ et $p_\omega : \Delta \rightarrow D$ et z est le point d'intersection de D et de $(o\omega)$. La construction est valable dans tous les cas. Notons cependant que le point z ainsi construit est distinct de b , sauf si les points o, ω, b sont alignés. Dans ce cas, on reconnaît la construction de la polaire de x par rapport à (oa) et (ob) et on a $\llbracket a, b, x, y \rrbracket = -1$, comme annoncé ci-dessus.

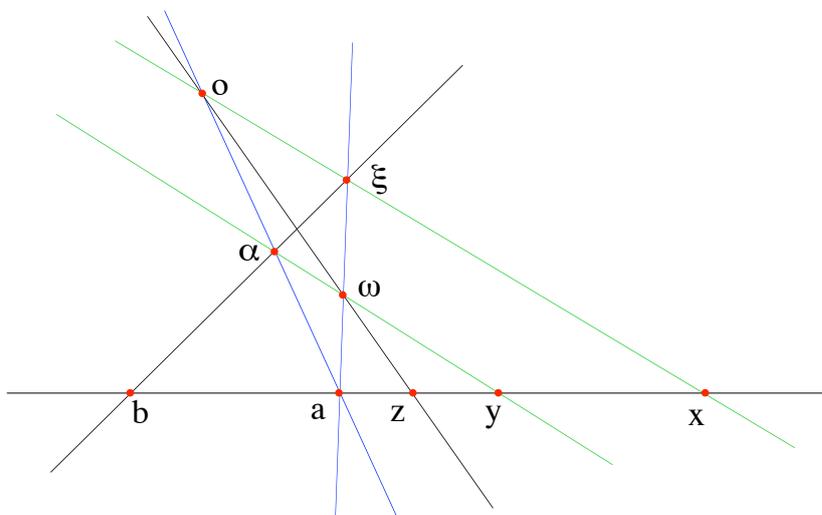


FIGURE 3.12 – Le birapport somme

3.8 Exercices

3.8.1 Birapport

3.8.1 Exercice. Une preuve affine de la conservation du birapport par perspective

Soit X un plan affine et soient A, B, C, D quatre droites distinctes passant par o qui coupent respectivement les droites Δ et Δ' en a, b, c, d et a', b', c', d' . On se propose de montrer l'égalité des birapports $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket a', b', c', d' \rrbracket$.

1) La droite parallèle à A passant par b coupe respectivement C et D en γ et δ . Montrer qu'on a $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \frac{\overline{\delta b}}{\overline{\gamma b}}$ (on utilisera la formule $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \frac{\overline{ca}}{\overline{cb}} : \frac{\overline{da}}{\overline{db}}$ et le théorème de Thalès).

2) Montrer le résultat annoncé en utilisant 1) et l'analogue avec la parallèle à A passant par b' .

(Cette preuve est essentiellement celle que donnait Pappus au IV-ième siècle de notre ère et qu'on trouve encore dans les livres de géométrie du XIX-ième siècle.)

3.8.2 Exercice. On reprend les notations de 2.2.1. Montrer le théorème de Pappus en utilisant la conservation du birapport par perspective (on montrera successivement les égalités $\llbracket b, x, u, c' \rrbracket = \llbracket o, a', b', c' \rrbracket = \llbracket b, a', w, y \rrbracket$ en utilisant les perspectives de centres c et a et on conclura avec la perspective de centre v). (Cette preuve est essentiellement celle de Pappus.)

3.8.3 Exercice. Soient D et D' deux droites se coupant en a , et soient b, c, d (resp. b', c', d') des points de D (resp. D') distincts de a . Montrer que les droites (aa') , (bb') , (cc') sont concourantes si et seulement si on a $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket a, b', c', d' \rrbracket$. (Considérer la perspective de centre $(bb') \cap (cc')$.)

3.8.4 Exercice. Soient m, m' deux points distincts, A la droite (mm') et soient B, C, D (resp. B', C', D') trois droites passant par m (resp. m') et distinctes de A . On appelle b, c, d les points d'intersection de B, B' ; C, C' ; D, D' respectivement. Montrer que les points b, c, d sont alignés si et seulement si on a $\llbracket A, B, C, D \rrbracket = \llbracket A, B', C', D' \rrbracket$.

(Utiliser l'exercice précédent appliqué dans le dual ou la réfraction d'axe (bc) .)

3.8.2 Conjugaison

3.8.5 Exercice. Suites récurrentes homographiques

Soit f une homographie de $\mathbf{P}^1(k)$. On considère la suite (u_n) de points de $\mathbf{P}^1(k)$ définie par récurrence par la donnée de u_0 et la formule $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) On suppose que f admet deux points fixes a et b distincts. On considère l'homographie h définie par $h(z) = \frac{z-a}{z-b}$. Montrer que $g = hf h^{-1}$ est une homothétie de la droite affine k . En déduire que la suite de terme général

$v_n = h(u_n)$ est une suite géométrique. Dans le cas $k = \mathbf{R}$ ou $k = \mathbf{C}$ étudier la convergence de la suite (u_n) .

2) On suppose que f admet un unique point fixe a . Montrer qu'il existe une homographie h telle que la suite de terme général $v_n = h(u_n)$ soit une suite arithmétique. Étudier les cas $k = \mathbf{R}$ ou $k = \mathbf{C}$.

3.8.6 Exercice. Conjugaison des involutions Soit f une involution de $\mathbf{P}^1(k)$. Montrer que f est conjuguée d'une involution g qui échange ∞ et 0 . Montrer qu'une telle involution est de la forme $i(z) = \frac{\lambda}{z}$ avec $\lambda \in k$. Que vaut $\overline{\det}(i)$? À quel(s) λ correspond l'involution $z \mapsto -z$? Montrer que deux involutions $i(z) = \frac{\lambda}{z}$ et $j(z) = \frac{\mu}{z}$ sont conjuguées si et seulement si λ/μ est un carré de k . (Pour montrer que la condition est nécessaire on notera que si i et j sont conjuguées, on a $\overline{\det}(i) = \overline{\det}(j)$ dans k^*/k^{*2} .)

3.8.7 Exercice. Conjugaison des homographies Dans cet exercice, E est un k -espace vectoriel de dimension 2.

1) Soient $f \in GL(E)$ une application linéaire qui n'est pas une homothétie. Montrer qu'il existe un vecteur e tel que e et $f(e)$ forment une base de E . Préciser la matrice de f dans cette base et en déduire que, si $f, g \in GL(E)$ ne sont pas des homothéties, elles sont conjuguées si et seulement si elles ont même trace et même déterminant.

2) Soient $f, g \in GL(E)$ et soient \bar{f} et \bar{g} les homographies associées. On suppose que \bar{f} et \bar{g} sont différentes de l'identité et que ce ne sont pas des involutions. Montrer qu'elles sont conjuguées dans $PGL(E)$ si et seulement si l'on a $J(f) := \frac{(\text{Tr } f)^2}{\det f} = J(g) := \frac{(\text{Tr } g)^2}{\det g}$. (On montrera que $(\text{Tr } f)g$ et $(\text{Tr } g)f$ sont conjuguées dans $GL(E)$.)

3.8.8 Exercice. Une autre preuve de 3.6.8

Prouver le résultat par le calcul en prenant $\alpha = \infty$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$ et en calculant les coefficients a, b, c, d de $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ pour que f envoie $\infty, 0, 1$ sur α', β', γ' . (Utiliser la caractérisation des involutions par $\text{Tr}(f) = a + d = 0$.)

3.8.9 Exercice. Homographies et invariants

On travaille sur la droite projective $D = \mathbf{P}^1(k)$. Soient a, b, c (resp. a', b', c') trois points distincts de D et soit f l'unique homographie qui envoie a sur a' , b sur b' et c sur c' . Le but de cet exercice est de donner une expression analytique de la matrice de f , définie à un scalaire près, et de l'invariant $J(f)$ défini en 3.8.7. Les formules feront apparaître les coefficients de la matrice en

termes d'invariants associés à des vecteurs relevant les points donnés (sous forme de crochets, c'est-à-dire de déterminants). L'invariant $J(f)$ s'écrira, lui, en termes de birapports. Dans cet exercice, qui annonce la partie II, nous utiliserons, pour le déterminant de deux vecteurs $a = (a_1, a_2)$ et $b = (b_1, b_2)$ la notation $[a, b] = a_1b_2 - b_1a_2$, plutôt que \overline{ab} .

1) Montrer qu'une matrice de f est donnée par les formules :

$$\alpha = [b'c'] [a'b] [ca], \quad \beta = [c'a'] [b'b] [ca], \quad \gamma = [b'c'] [a'a] [cb], \quad \delta = [c'a'] [b'a] [cb].$$

(On montrera qu'on peut supposer $a = \infty$, $b = 0$, $c = 1$ et prendre des représentants $a = (1, 0)$, $b = (0, 1)$, $c = (1, 1)$. On posera alors $a' = (a'_1, a'_2)$, $b' = (b'_1, b'_2)$, $c' = (c'_1, c'_2)$.)

2) Montrer la formule :

$$J(f) = \frac{2 - \llbracket c', a, b', c \rrbracket \llbracket c', b, c, a' \rrbracket - \llbracket b, a, c, b' \rrbracket \llbracket b, c', b', a' \rrbracket}{\llbracket a, a', b, b' \rrbracket}.$$

(Attention, il y a de multiples expressions possibles.)

3) Retrouver le résultat de 3.6.8. On pourra utiliser, soit une relation entre crochets :

$$[c'a][a'b][b'c] - [c'b][a'c][b'a] = [b'c'][a'b][ca] - [c'a'] [b'a][bc]$$

(voir Partie II pour une discussion de ce type de relations et notamment l'exercice ??), soit une relation entre birapports :

$$\llbracket b, c, a', b' \rrbracket \llbracket b, a, c', b' \rrbracket = \llbracket c', b, b', a' \rrbracket \llbracket c', c, a', a \rrbracket - \llbracket a', a, c', b' \rrbracket \llbracket a', b, b', c \rrbracket.$$

3.8.3 Involutions, division harmonique

3.8.10 Exercice. Bissectrices et division harmonique

Dans cet exercice on donne deux démonstrations du résultat suivant : si A et B sont deux droites distinctes du plan euclidien sécantes en o et si C et D sont leurs bissectrices, on a $\llbracket A, B, C, D \rrbracket = -1$.

1) On considère une droite Δ perpendiculaire à C ne passant pas par o . Elle coupe A, B, C en a, b, c respectivement. Montrer que le triangle oab est isocèle en o . En déduire qu'on a $\llbracket a, b, c, \infty \rrbracket = -1$ et conclure.

2) Une droite Δ ne passant pas par o coupe A, B, C, D en a, b, c, d . Montrer qu'on a les égalités de rapports de longueurs : $\frac{oa}{ob} = \frac{ca}{cb} = \frac{da}{db}$ (on étudiera le rapport d'aires des triangles oac et obc notamment). Conclure.

3.8.11 Exercice. Un bel exercice euclidien

Dans un plan euclidien, on considère un triangle abc non rectangle, on désigne par a', b', c' les pieds des hauteurs du triangle et par h l'orthocentre. Soit m un point de $(b'c')$. La perpendiculaire à (cm) (resp. (bm)) passant par c (resp. b) coupe (ah) en β (resp. γ). Montrer que β et γ sont symétriques par rapport au milieu de $[ah]$.

Indications : On décrira l'application f , de (ah) dans elle-même, qui fait passer de β à γ , comme une homographie composée d'incidences et d'orthogonalités *via* les droites b^* , c^* et $(b'c')$. On montrera ensuite que f échange a et h et qu'elle fixe le point à l'infini de (ah) .

3.8.4 Constructions

3.8.12 Exercice. 1) Soit h une homographie de D sur D . On connaît un point fixe a de h ainsi qu'un couple $m, h(m)$. Construire le second point fixe (on se souviendra qu'on a $\llbracket a, b, m, h(m) \rrbracket = -1$ et on utilisera la polaire).

2) On considère un tétraèdre $T = abcd$ de l'espace euclidien de dimension 3, représenté en perspective sur un plan. On se donne un plan $P = (mnp)$ défini par trois points $m \in (abc)$, $n \in (abd)$ et $p \in (acd)$. Construire la section $T \cap P$. (On ne supposera pas que les points donnés sont sur les arêtes, mais on pourra se limiter au cas facile où la section est triangulaire. On considérera, dans le plan de la figure, l'homographie de (ac) dans elle-même composée des perspectives de centres m, p, n .)

Cet exercice est une parfaite application de la géométrie projective à la taille des pierres telle que l'envisageait Desargues.

3.8.13 Exercice. Le birapport produit

Soit a, b, c un repère de $\mathbf{P}^1(k)$ et soient $x, y \in \mathbf{P}^1(k)$. On pose $\alpha = \llbracket a, b, c, x \rrbracket$, $\beta = \llbracket a, b, c, y \rrbracket$. Soit z le point défini par $\llbracket a, b, c, z \rrbracket = \alpha\beta$.

Montrer qu'on a $\llbracket a, b, c, x \rrbracket = \llbracket b, a, z, y \rrbracket$ et en déduire une construction à la règle de z (on utilisera le théorème de Desargues-coniques.)

Chapitre 4

Le théorème fondamental de la géométrie projective

On a vu en 1.3.3 que les homographies conservent l'alignement. On s'intéresse ici à la réciproque de cette assertion. Autrement dit, il s'agit de faire le lien entre deux formes des automorphismes de $\mathbf{P}(E)$: la forme algébrique (les homographies, issues d'applications linéaires bijectives de E) et la forme géométrique (les collinéations, bijections conservant l'alignement). Le théorème fondamental de la géométrie projective affirme que ces notions sont – presque – équivalentes.

4.1 Applications semi-linéaires

4.1.1 Définition. Soient E et E' deux k -espaces vectoriels et $\sigma \in \text{Aut } k$ un automorphisme de corps. Une application $u : E \rightarrow E'$ est dite σ -semi-linéaire si on a :

- 1) $\forall x, y \in E, \quad u(x + y) = u(x) + u(y),$
- 2) $\forall x \in E, \quad \forall \lambda \in k, \quad u(\lambda x) = \sigma(\lambda)u(x).$

4.1.2 Remarques.

- 1) Si σ est l'identité on retrouve la notion d'application linéaire.
- 2) Le groupe $\text{Aut } k$ est connu dans un certain nombre de cas (par exemple, $\text{Aut } \mathbf{Q}$, $\text{Aut } \mathbf{R}$ sont réduits à l'identité, le groupe d'automorphismes d'un corps fini est cyclique engendré par l'automorphisme de Frobenius $\lambda \mapsto \lambda^p$ si p est la caractéristique de k , etc). En revanche le groupe $\text{Aut } \mathbf{C}$ est compliqué (sauf si on se limite aux automorphismes continus).

4.1.3 Exemples.

- 1) Si on suppose $k = \mathbf{C}$ et $\sigma(z) = \bar{z}$, l'application de \mathbf{C}^2 dans \mathbf{C}^2 définie par

$u(x, t) = (a\bar{x} + b\bar{t}, c\bar{x} + d\bar{t})$, avec $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, est σ -semi-linéaire.

2) Plus généralement, si e_1, \dots, e_n est une base de E et si on se donne n vecteurs f_1, \dots, f_n de E' , l'application u définie par

$$u\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \sigma(x_i) f_i$$

est σ -semi-linéaire.

4.1.4 Proposition.

1) Si on a $u : E \rightarrow E'$ et $v : E' \rightarrow E''$, respectivement σ -semi-linéaire et τ -semi-linéaire, la composée $v \circ u$ est $\tau\sigma$ -semi-linéaire. En particulier, l'ensemble des applications semi-linéaires bijectives de E dans E est un groupe noté $\Gamma L(E)$.

2) L'application π qui à $u \in \Gamma L(E)$, σ -semi-linéaire, associe $\sigma \in \text{Aut } k$ est un homomorphisme et on a la suite exacte :

$$1 \rightarrow GL(E) \rightarrow \Gamma L(E) \xrightarrow{\pi} \text{Aut } k \rightarrow 1.$$

3) Si u est semi-linéaire bijective de E sur E' , l'image d'un sous-espace vectoriel de E de dimension p est un sous-espace vectoriel de E' de même dimension.

Démonstration. Seul le point 3) mérite une preuve¹. Si F est un sous-espace muni d'une base (e_i) , $i = 1, \dots, p$, il suffit de montrer que $(u(e_i))$ est une base de $u(F)$. Il est clair que tout élément de $u(F)$ est combinaison linéaire des $u(e_i)$ par semi-linéarité. Montrons que les $u(e_i)$ sont libres. Si on a $\sum_{i=1}^p \lambda_i u(e_i) = 0$, on pose $\mu_i = \sigma^{-1}(\lambda_i)$ et on a $\sum_{i=1}^p \lambda_i u(e_i) = u\left(\sum_{i=1}^p \mu_i e_i\right) = 0$. Comme u est injective on en déduit $\sum_{i=1}^p \mu_i e_i = 0$, mais comme les (e_i) sont libres, les μ_i sont tous nuls, donc aussi les λ_i .

4.2 Semi-homographies

4.2.1 Définition et premières propriétés

4.2.1 Proposition-Définition. Soit $u : E \rightarrow E'$ une application semi-linéaire bijective. La formule $\bar{u}(\bar{x}) = \overline{u(x)}$ définit une bijection $\bar{u} : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E')$. L'application \bar{u} est appelée une σ -semi-homographie.

1. Pour la surjectivité de π on utilise 4.1.3.2, si E est de dimension finie. Le même argument vaut en dimension infinie si l'on a une base, ce qui est assuré, au moins si l'on accepte l'axiome du choix.

Démonstration. C'est clair car si on a $x\mathcal{R}y$, i.e. $y = \lambda x$ on a aussi $u(x)\mathcal{R}u(y)$ grâce à la formule $u(y) = \sigma(\lambda)u(x)$.

4.2.2 Exemple. L'application semi-linéaire de 4.1.3 induit sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ la semi-homographie définie par $\bar{u}(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$.

La proposition suivante est immédiate avec 4.1.4 :

4.2.3 Proposition.

- 1) On a les propriétés de composition pour les semi-homographies analogues à celles vues en 4.1.4.
- 2) Les semi-homographies de $\mathbf{P}(E)$ dans lui-même forment un groupe $PGL(E)$. Si la dimension de E est supérieure ou égale à 2, ce groupe est isomorphe au quotient de $GL(E)$ par le groupe k^* des homothéties.
- 3) L'image d'un sous-espace projectif par une semi-homographie est un sous-espace projectif de même dimension. En particulier, les semi-homographies conservent l'alignement.

4.2.2 Semi-homographies et repères

La proposition suivante se démontre comme 1.5.4 :

4.2.4 Proposition. Soient E, E' deux k -espaces vectoriels de dimension $n+1$, soit $\sigma \in \text{Aut } k$ et soit $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ (resp. $(x'_0, x'_1, \dots, x'_{n+1})$) un repère de $\mathbf{P}(E)$ (resp. de $\mathbf{P}(E')$). Alors il existe une unique σ -semi-homographie $f : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E')$ qui vérifie $f(x_i) = x'_i$ pour tout i .

4.2.3 Semi-homographies et birapport

4.2.5 Proposition. Soit $f : D \rightarrow D'$ une σ -semi-homographie entre deux droites projectives et soient a, b, c, d quatre points distincts de D . On a la formule :

$$\llbracket f(a), f(b), f(c), f(d) \rrbracket = \sigma(\llbracket a, b, c, d \rrbracket).$$

Démonstration. On considère les homographies $g : D \rightarrow \mathbf{P}^1(k)$ et $h : D' \rightarrow \mathbf{P}^1(k)$ qui envoient respectivement a, b, c et $f(a), f(b), f(c)$ sur $\infty, 0, 1$. Par définition du birapport on a $g(d) = \llbracket a, b, c, d \rrbracket = r$, $h(f(d)) = \llbracket f(a), f(b), f(c), f(d) \rrbracket = r'$. L'application hfg^{-1} , qui envoie r sur r' , est alors l'unique σ -semi-homographie de $\mathbf{P}^1(k)$ qui fixe $\infty, 0, 1$ (cf. 4.2.4). Elle provient de l'application σ -semi-linéaire $u : k^2 \rightarrow k^2$ définie par $u(1, 0) = (1, 0)$ et $u(0, 1) = (0, 1)$. Mais alors on a $u(r, 1) = u(r(1, 0) + (0, 1)) = \sigma(r)u((1, 0)) + u((0, 1)) = (\sigma(r), 1)$ d'où $r' = \sigma(r)$.

4.2.4 Le théorème de Hua

Il s'agit d'un résultat purement algébrique qui simplifiera un peu la preuve du théorème fondamental :

4.2.6 Théorème. *Soit k un corps commutatif et $\sigma : k \rightarrow k$ une bijection qui vérifie :*

- 1) $\sigma(1) = 1$,
- 2) $\forall \lambda, \mu \in k, \quad \sigma(\lambda + \mu) = \sigma(\lambda) + \sigma(\mu)$,
- 3) $\forall \lambda \in k^*, \quad \sigma(\lambda^{-1}) = \sigma(\lambda)^{-1}$.

Alors σ est un automorphisme de k .

Démonstration. Dans tous les cas il s'agit de prouver la formule $\sigma(\lambda\mu) = \sigma(\lambda)\sigma(\mu)$.

1) En caractéristique différente de 2, grâce à la formule $(\lambda + \mu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu$, il suffit de montrer $\sigma(\lambda^2) = \sigma(\lambda)^2$. Cela découle des hypothèses avec la formule :

$$\lambda^2 - \lambda = \frac{1}{\frac{1}{\lambda-1} - \frac{1}{\lambda}}.$$

2) En caractéristique 2, outre la formule précédente qui donne encore $\sigma(\lambda^2) = \sigma(\lambda)^2$, on utilise la formule :

$$\frac{\lambda^2}{\mu} = \lambda + \frac{1}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda+\mu}}$$

qui permet de prouver qu'on a $\sigma\left(\frac{\lambda^2}{\mu}\right) = \frac{\sigma(\lambda)^2}{\sigma(\mu)}$ pour tous λ, μ avec $\mu \neq 0$. On

en déduit, en écrivant $\lambda^2 = \frac{(\lambda\mu)^2}{\mu^2}$, $\sigma(\lambda^2) = \frac{\sigma(\lambda\mu)^2}{\sigma(\mu^2)}$, ce qui s'écrit encore $\sigma(\lambda\mu)^2 = \sigma(\lambda)^2\sigma(\mu)^2$, d'où le résultat (l'élevation au carré est injective en caractéristique 2).

4.3 Énoncé du théorème fondamental

4.3.1 Théorème. *Soient E, E' deux k -espaces vectoriels de même dimension $n+1$, avec $n \geq 2$, et $f : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}(E')$ une bijection conservant l'alignement (autrement dit, une collinéation). Alors f est une semi-homographie.*

4.3.1 Démonstration en dimension 2

Dans ce paragraphe on suppose que $\mathbf{P}(E)$ est un plan projectif.

4.3.2 Lemme. *L'application f^{-1} conserve l'alignement.*

Démonstration. Sinon, on a trois points a, b, c non alignés donnant par f trois points $f(a), f(b), f(c)$ alignés sur une droite D . Alors, par conservation de l'alignement, f envoie les trois droites $(bc), (ca), (ab)$ dans D . Si x est un point de $\mathbf{P}(E)$ non situé sur ces droites, (ax) coupe (bc) en y . Comme a et y s'envoient dans D , x aussi par conservation de l'alignement. Il en résulte que $\mathbf{P}(E)$ tout entier s'envoie dans D ce qui contredit la bijectivité de f .

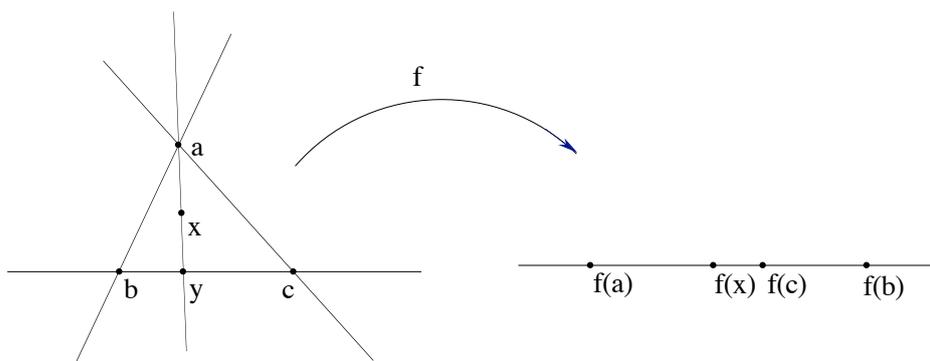


FIGURE 4.1 – Conservation de l'alignement par f^{-1}

4.3.3 Corollaire. *L'image par f d'un repère a, b, p, q est un repère a', b', p', q' .*

Démonstration. Vu la caractérisation des repères (cf. 1.5.5), cela résulte du lemme précédent.

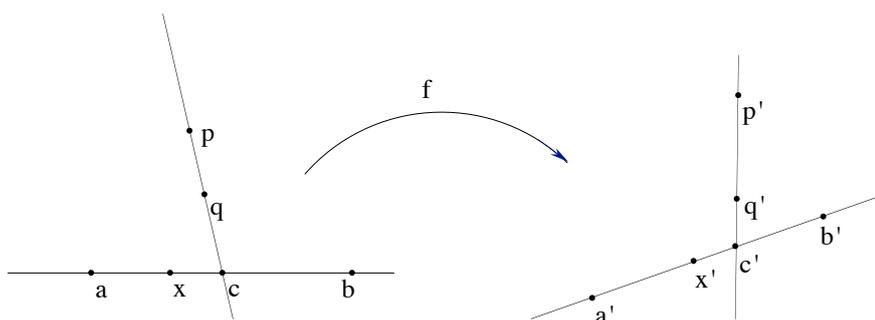


FIGURE 4.2 – Conservation des repères

On considère un repère a, b, p, q et son image comme ci-dessus. On appelle c (resp. c') le point d'intersection de (ab) et (pq) (resp. $(a'b')$ et $(p'q')$). Par

conservation de l'alignement on a $f(c) = c'$. On pose $D = (ab)$, $D' = (a'b')$. La restriction de f à D induit une bijection de D sur D' . Comme a, b, c et a', b', c' sont des repères de D et D' on peut considérer les homographies $g : D \rightarrow \mathbf{P}^1(k)$ et $h : D' \rightarrow \mathbf{P}^1(k)$ qui envoient respectivement a, b, c et a', b', c' sur $\infty, 0, 1$. L'application hfg^{-1} de $\mathbf{P}^1(k)$ dans lui-même fixe $\infty, 0, 1$ et on appelle σ sa restriction à k . Par définition du birapport, pour $r = \llbracket a, b, c, x \rrbracket$ avec $x \in D$, on a $r' := \sigma(r) = \llbracket a', b', c', x' \rrbracket$ avec $x' = f(x) \in D'$. On a alors le lemme suivant :

4.3.4 Lemme. *L'application σ est un automorphisme du corps k .*

Démonstration. Elle provient, *via* le lemme de Hua, des constructions des birapports inverse et somme, cf. 3.7.2 et 3.7.3.

Montrons d'abord la formule $\sigma(r^{-1}) = (\sigma(r))^{-1}$. On considère les points x et y tels que $\llbracket a, b, c, x \rrbracket = r$ et $\llbracket a, b, c, y \rrbracket = r^{-1}$. On effectue la construction de 3.7.2, voir fig. 3.11 : on choisit deux droites A et B passant par c , distinctes de D , et une droite $\Delta \neq D$ passant par x , qui coupe A et B en α, β . Les droites $(a\alpha)$ et $(b\beta)$ coupent respectivement B et A en γ et δ et le point y est le point d'intersection de D et de $(\gamma\delta)$.

On applique alors f à la figure précédente. Si on pose $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $\Delta' = f(\Delta)$, par conservation de l'alignement, $\alpha' = f(\alpha)$ est l'intersection de Δ' et A' et de même pour $\beta' = f(\beta)$, $\gamma' = f(\gamma)$ et $\delta' = f(\delta)$ qui sont à l'intersection des droites B', Δ' ; $(a'\alpha')$, B' et $(b'\beta')$, A' respectivement. Le point $y' = f(y)$ est alors à l'intersection de D' et de $(\gamma'\delta')$. Mais alors, le théorème de Desargues-coniques montre que l'involution qui fixe c' et échange a' et b' échange aussi x' et y' . On a donc $\llbracket a', b', c', x' \rrbracket = \llbracket b', a', c', y' \rrbracket = \llbracket a', b', c', y' \rrbracket^{-1}$, soit encore $\sigma(r) = \sigma(r^{-1})^{-1}$, cqfd.

La preuve de la formule $\sigma(r + s) = \sigma(r) + \sigma(s)$ est analogue en utilisant cette fois la construction du birapport somme, voir 3.7.3 et la figure 3.12.

On peut alors finir la preuve du théorème en dimension 2.

On considère la semi-homographie $f' : \mathbf{P}(E') \rightarrow \mathbf{P}(E)$, relative à σ^{-1} , qui envoie le repère a', b', p', q' sur a, b, p, q , cf. 4.2.4. Il suffit de montrer que $f' \circ f = \text{Id}_{\mathbf{P}(E)}$ car f sera alors une σ -semi-homographie, comme inverse de f' .

Soit $x \in D = (ab)$ et $x' = f(x)$. Par définition de σ on a $\llbracket a', b', c', x' \rrbracket = \sigma(\llbracket a, b, c, x \rrbracket)$. Mais, si on applique f' , qui est une σ^{-1} -semi-homographie on a :

$$\llbracket f'(a'), f'(b'), f'(c'), f'(x') \rrbracket = \sigma^{-1}(\llbracket a', b', c', x' \rrbracket) = \llbracket a, b, c, x \rrbracket$$

d'où $\llbracket a, b, c, f'(x') \rrbracket = \llbracket a, b, c, x \rrbracket$, ce qui impose $x = f'(x') = f' \circ f(x) : f' \circ f$ est l'identité sur D .

Soit maintenant $x \notin D \cup (pq)$. On appelle u et v les points d'intersection de (xp) et (xq) avec D . Comme $f' \circ f$ fixe p, q, u, v et qu'elle conserve l'alignement, elle fixe aussi x .

Enfin, si x est sur (pq) , on prend $y \notin D \cup (pq)$. La droite (xy) coupe D en z . Comme $f' \circ f$ fixe y et z et laisse stable (pq) elle fixe x , ce qui achève de montrer le théorème dans le cas $n = 2$.

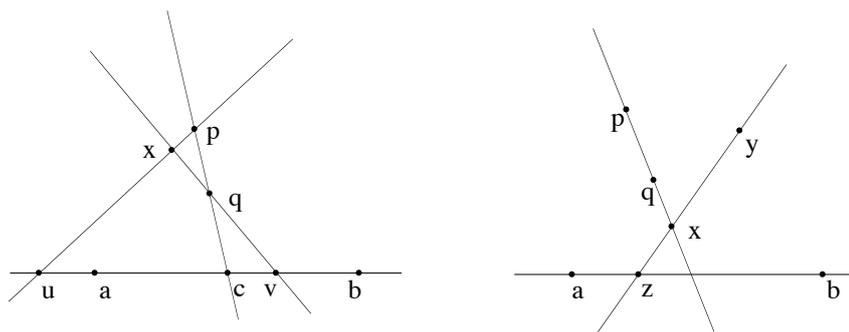


FIGURE 4.3 – Fin de la preuve en dimension 2

4.3.2 Fin de la démonstration du théorème fondamental

On renvoie à 1.5.7 pour les notions intervenant dans le lemme suivant.

4.3.5 Lemme. Avec les notations de 4.3.1, soit m un entier avec $1 \leq m \leq n$ et soient $a_0, \dots, a_m \in \mathbf{P}(E)$. On a les propriétés suivantes :

- 1) On a $f((a_0, \dots, a_m)) \subset (f(a_0), \dots, f(a_m))$.
- 2) Si les a_i sont projectivement indépendants il en est de même des $f(a_i)$.
- 3) L'application f^{-1} conserve l'alignement.
- 4) On a $f((a_0, \dots, a_m)) = (f(a_0), \dots, f(a_m))$.
- 5) Si a_0, \dots, a_{n+1} est un repère de $\mathbf{P}(E)$, $f(a_0), \dots, f(a_{n+1})$ est un repère de $\mathbf{P}(E')$.
- 6) Si V est un sous-espace projectif de dimension m de $\mathbf{P}(E)$, $f(V)$ est un sous-espace projectif de dimension m de $\mathbf{P}(E')$.

Démonstration. 1) On raisonne par récurrence sur m . Pour $m = 1$ c'est l'hypothèse de conservation de l'alignement. Supposons la propriété établie jusqu'à $m - 1$. Soit $x \in (a_0, \dots, a_m)$. Si x est dans (a_0, \dots, a_{m-1}) on conclut grâce à l'hypothèse de récurrence. Si x est égal à a_m le résultat est évident.

Sinon, on considère la droite (xa_m) qui coupe (a_0, \dots, a_{m-1}) en y . La conservation de l'alignement montre qu'on a $f(x) \in (f(y)f(a_m))$, mais comme $f(y)$ est dans $(f(a_0), \dots, f(a_{m-1}))$ (hypothèse de récurrence), on a gagné.

2) Si a_0, \dots, a_m sont projectivement indépendants on peut les compléter en $a_0, \dots, a_m, \dots, a_{n+1}$ projectivement indépendants, c'est-à-dire formant un repère de $\mathbf{P}(E)$. On a alors :

$$\mathbf{P}(E') = f(\mathbf{P}(E)) = f((a_0, \dots, a_{n+1})) \subset (f(a_0), \dots, f(a_{n+1})),$$

ce qui montre que les $f(a_i), i = 0, \dots, n+1$ sont indépendants, donc *a fortiori* $f(a_0), \dots, f(a_m)$.

Le point 3) résulte aussitôt de 2). Pour le point 4) il suffit maintenant d'appliquer 1) à f et f^{-1} . Le point 5) découle de 2) et de la remarque 1.5.8.3. Enfin, 6) résulte des points précédents en choisissant un repère de V .

Fin de la preuve du théorème

On montre 4.3.1 par récurrence sur n , le cas $n = 2$ ayant déjà été traité. On suppose donc $n \geq 3$. Soit a_0, \dots, a_{n+1} un repère de $\mathbf{P}(E)$. Son image par f , a'_0, \dots, a'_{n+1} , est un repère de $\mathbf{P}(E')$ en vertu de 4.3.5. Le sous-espace H engendré par a_0, \dots, a_{n-1} est un hyperplan, qui ne contient pas a_n, a_{n+1} , tandis que $D = (a_n a_{n+1})$ est une droite, non contenue dans H . On appelle b l'intersection de H et D et on pose $b' = f(b)$. Posons $H' = f(H)$, $D' = f(D)$, ce sont respectivement un hyperplan et une droite de $\mathbf{P}(E')$, cf. 4.3.5. Comme $f|_H$ conserve l'alignement, c'est une σ -semi-homographie.

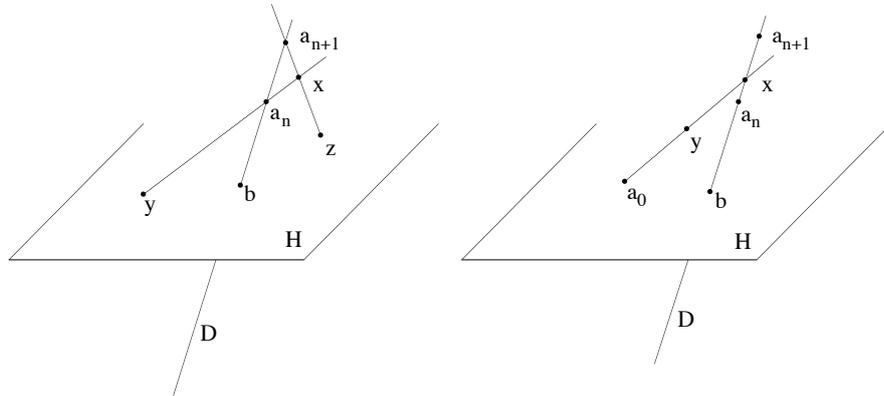


FIGURE 4.4 – Fin de la preuve du cas général

Soit g la σ^{-1} -semi-homographie définie par $g(a'_i) = a_i$ pour $i = 0, \dots, n+1$. Nous allons montrer la formule $g \circ f = \text{Id}_{\mathbf{P}(E)}$, qui assurera que f est une σ -semi-homographie. On a déjà $g \circ f(a_i) = a_i$. De plus, on a, toujours par 4.3.5, $g(H') = H$ et $g(D') = D$. Il en résulte que l'on a $g(b') = b$. On vérifie alors

que a_0, \dots, a_{n-1}, b est un repère de H . Comme $g \circ f|_H$ est une homographie (c'est l'hypothèse de récurrence), et qu'elle fixe ce repère, on a $g \circ f|_H = \text{Id}_H$.

Soit maintenant $x \notin H$. Si x n'est pas dans D , la droite (xa_n) (resp. (xa_{n+1})) coupe H en y (resp. z). Par conservation de l'alignement, on en déduit $g(f(x)) = x$.

Enfin, si x est sur D , distinct de a_n, a_{n+1} , la droite (xa_0) contient un point $y \notin D \cup H$, qui est fixe par $g \circ f$ d'après ce qui précède. Cette droite est donc stable, ainsi que D , et x est fixe.

Ceci achève la preuve de 4.3.1.

4.4 L'approche axiomatique

Dans cette section nous signalons brièvement (et en laissant au lecteur le plus gros du travail) l'autre approche possible de la géométrie projective : l'approche axiomatique (dite parfois synthétique) en indiquant comment elle redonne le point de vue linéaire.

4.4.1 Les axiomes

Nous donnons ci-dessous la définition axiomatique minimale d'un plan projectif. Nous utilisons librement le vocabulaire usuel de la géométrie (une droite *pass*e par un point, deux droites *se coupent* en un point, des points sont *alignés*, etc.). Le lecteur pointilleux pourra formuler ces axiomes uniquement en termes ensemblistes. Cette présentation est fortement inspirée de [Har67] et surtout [Sei62].

4.4.1 Définition. *On appelle **plan projectif (axiomatique)** la donnée d'un ensemble \mathbf{P} , dont les éléments sont appelés **points** et d'un ensemble \mathcal{D} de parties de \mathbf{P} dont les éléments sont appelés **droites**, vérifiant les axiomes suivants :*

- P1) Par deux points distincts passe une droite et une seule.*
- P2) Deux droites se coupent en un point au moins.*
- P3) Il existe trois points non alignés.*
- P4) Toute droite contient au moins trois points.*

Avec ces notions on peut définir les configurations de Pappus et Desargues que l'on a étudiées plus haut. On peut alors introduire deux axiomes supplémentaires :

- P5) Le théorème de Desargues est vrai dans \mathbf{P} .*
- P6) Le théorème de Pappus est vrai dans \mathbf{P} .*

4.4.2 Remarque. On peut montrer que Pappus implique Desargues et donc cet axiome est, en fait, inutile (cf. [Har67] ou ci-dessus exercice 2.5.11).

4.4.2 Chou-vert et vert-chou

On a alors le théorème suivant qui montre que la géométrie projective axiomatique n'est pas fondamentalement différente de celle que nous avons vue :

4.4.3 Théorème. Soit \mathbf{P} un plan projectif axiomatique vérifiant les axiomes P1–P6. Il existe un corps commutatif k , un k -espace vectoriel E de dimension 3 et une bijection $\Phi : \mathbf{P}(E) \rightarrow \mathbf{P}$ telle que les droites de \mathbf{P} soient exactement les images des droites de $\mathbf{P}(E)$.

Démonstration. C'est celle de [Sei62] p. 78-86 que nous proposons ci-dessous au lecteur² sous forme de problème.

On appelle encore repère de \mathbf{P} un quadruplet de points tels que trois quelconques d'entre eux ne soient pas alignés. La notion de perspective, telle que nous l'avons définie en 2.1.1 garde un sens dans \mathbf{P} .

0) Montrer que l'axiome P5 implique que Desargues-dual est vrai (i.e. avec les notations de 2.3.3, si u, v, w sont alignés, alors A, B, C sont concourantes).

A) Hexades quadrangulaires ou configuration de Desargues-coniques

Soit (a, b, c, a', b', c') un sextuplet de points d'une droite D . On dit que ces points forment une **hexade quadrangulaire** (ou qu'ils sont en configuration de Desargues-coniques) et on note cette propriété $Q \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ s'il existe un repère $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ du plan tel que les points $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ne soient pas sur D et que a, a', b, b', c, c' soient respectivement les intersections de D avec les droites $(\alpha\beta), (\gamma\delta), (\alpha\gamma), (\delta\beta), (\alpha\delta)$ et $(\beta\gamma)$. On notera que a, b, c sont les points liés à α tandis que a', b', c' sont sur les côtés du triangle $\beta\gamma\delta$.

A1) On suppose qu'on a $Q \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$. Montrer que les points a, b, c sont distincts et que a' (resp. b' , resp. c') est distinct de b, c (resp. c, a , resp. a, b).

A2) On suppose qu'on a $Q \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$. Montrer qu'on a $Q \begin{pmatrix} a & b' & c' \\ a' & b & c \end{pmatrix}$ et aussi $Q \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) & \sigma(c) \\ \sigma(a)' & \sigma(b)' & \sigma(c)' \end{pmatrix}$ où σ est une permutation de a, b, c .

2. Lequel est averti que certaines vérifications sont un peu laborieuses.

A3) On suppose qu'on a $Q \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$. Montrer (en utilisant Pappus, i.e. l'axiome P6) qu'on a aussi $Q \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \end{pmatrix}$. (On utilisera le quadrilatère $\delta\beta'\beta\delta'$ avec $\beta' = (\gamma\delta) \cap (\beta c)$ et $\delta' = (\alpha\beta) \cap (\delta c')$.)

En déduire qu'on conserve une hexade quadrangulaire si on échange de manière arbitraire les points a, a' ou b, b' ou c, c' .

A4) On se donne cinq points a, b, c, a', b' d'une droite D tels que a, b, c soient distincts et que l'on ait $a' \neq b, c$ et $b' \neq c, a$. Montrer qu'il existe un unique point c' de D tel que les six points forment une hexade quadrangulaire et que, de plus, le sommet α du quadrilatère qui la définit peut être choisi arbitrairement.

Indications : L'existence est facile : prendre α quelconque en dehors de D , puis $\gamma \in (b\alpha)$ et reconstituer la figure.

L'unicité est plus ardue et on se contente d'en indiquer la ligne dans le cas générique, cf. [Sei62] pour des détails. On suppose qu'on a construit c' avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et c'' avec p, q, r, s , il s'agit de montrer que les droites $(\beta\gamma)$ et (qr) se coupent sur D . On le montre en utilisant Desargues-dual appliqué à $\alpha\beta\delta$ et pqs ainsi qu'à $\alpha\gamma\delta$ et prs , puis Desargues appliqué à $\beta\gamma\delta$ et qrs ! En fait, il faut distinguer plusieurs cas de figures, selon que l'on a $p = \alpha$ ou non et selon les coïncidences éventuelles des droites (αa) et (pa) , etc.

A5) Soient A, B, C, A', B', C' six droites concourantes en m . On dit qu'elles forment une hexade quadrangulaire duale s'il existe quatre droites trois à trois non concourantes P, Q, R, S , ne passant pas par m , telles que les six droites données soient les droites qui joignent m aux six points d'intersection $P \cap Q, P \cap R, P \cap S, R \cap S, Q \cap S$ et $Q \cap R$, respectivement, et on note alors $Q \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$.

Montrer que si on a $Q \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$, et si cette hexade est définie par le quadrilatère $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, on a aussi $Q \begin{pmatrix} (\alpha a') & (\alpha b') & (\alpha c') \\ (\alpha a) & (\alpha b) & (\alpha c) \end{pmatrix}$. En déduire qu'on a $Q \begin{pmatrix} (ma') & (mb') & (mc') \\ (ma) & (mb) & (mc) \end{pmatrix}$ pour tout m n'appartenant pas à D . (Autrement dit : l'incidence transforme une hexade quadrangulaire de points en une hexade quadrangulaire de droites.)

Montrer l'assertion duale de la précédente.

A6) Montrer que l'image d'une hexade quadrangulaire de points par une perspective est encore une hexade quadrangulaire.

À partir de maintenant on fixe une droite D de \mathbf{P} et on choisit trois points distincts de D que l'on note $\infty, 0, 1$. On pose $k = D - \{\infty\}$.

B) L'addition

Sur les points de la droite, distincts de ∞ , on définit une opération de la façon suivante. Si x, y sont deux points de k distincts de 0 on appelle $x + y$ le point tel que l'on ait $Q \begin{pmatrix} \infty & x & 0 \\ \infty & y & x + y \end{pmatrix}$. (On notera que c'est exactement la construction du birapport somme, voir 3.7.3). On pose $x + 0 = 0 + x = x$.

B1) Montrer l'on définit ainsi une loi interne sur k (utiliser A3).

B2) Montrer que l'opération $+$ est commutative.

B3) Montrer que, pour tous $y, z \in k$ il existe un unique $x \in k$ tel que $x + y = z$.

B4) Montrer que la loi $+$ est associative.

Indication : on prend $x, y, z \in k$. On trace deux droites D, E passant par ∞ et on choisit $p \in D$. On définit $r = (0p) \cap E$, $s = (yp) \cap E$, $q = (xr) \cap D$, puis $l = (zr) \cap D$, $m = (0s) \cap D$ et $n = (zm) \cap E$. On montrera que $x + y$ est défini par le quadrilatère $rsqp$, $z + y$ par $rslp$, $x + (z + y)$ par $rnqp$ et $(x + y) + z$ par $snqm$ et la conclusion ne se fera pas attendre.

B5) Conclure que $(k, +)$ est un groupe abélien.

C) La multiplication

On définit sur k une autre opération en notant $x \times y$ ou simplement xy le point défini (pour $x, y \neq 0, 1$) par $Q \begin{pmatrix} \infty & x & 1 \\ 0 & y & xy \end{pmatrix}$, voir la construction du birapport produit, cf. 3.8.13. On pose $x \times 0 = 0 \times x = 0$ et $x \times 1 = 1 \times x = x$.

C1) Montrer que l'on définit ainsi une loi interne sur k .

C2) Montrer que cette loi est commutative (utiliser A3).

C3) Montrer que pour tout $x \in k - \{0\}$ il existe y tel que $xy = 1$.

C4) ¶ Montrer que la loi \times est associative.

Indication : une fois réalisée une figure lisible, il s'agit de montrer le concours de trois droites, dont D . On utilise pour cela Desargues dual, cf. 0), en voyant ces droites comme joignant les sommets de deux triangles. Pour montrer que les intersections des côtés sont alignées on utilisera Desargues direct !

C5) On considère l'application $\mu_a : D \rightarrow D$ définie par $\mu_a(\infty) = \infty$ et $\mu_a(x) = ax$ pour $x \in k$. Montrer que μ_a est composée de deux perspectives. (Utiliser le quadrilatère définissant le produit.) Même question pour l'application $\nu_a : x \mapsto xa$.

Montrer que la loi \times est distributive par rapport à la loi $+$ (appliquer A6 à μ_a et ν_a).

C6) Conclure que k muni des lois $+$ et \times est un corps commutatif.

D) Les coordonnées et le morphisme

On reprend la droite D avec les trois points $a = \infty$, $c = 0$, $v = 1$. On choisit un point b quelconque en dehors de D (par l'axiome P3), puis, par P4, un point d sur la droite (bv) , distinct de b et v . Les quatre points a, b, c, d forment un repère et on va définir les coordonnées homogènes associées dans k^3 . Pour comprendre cette construction, il faut penser à (ac) comme axe des x , (bc) comme axe des y et (ab) comme droite à l'infini. On définit les coordonnées des points de D ainsi : les coordonnées de a sont $(1, 0, 0)$ et on note (abusivement) $a = (1, 0, 0)$, celles du point $x \in k = D - \{\infty\}$ sont $(x, 0, 1)$ avec, en particulier, $c = (0, 0, 1)$ et $v = (1, 0, 1)$. On pose ensuite $b = (0, 1, 0)$, $d = (1, 1, 1)$, puis on définit deux nouveaux points : $u = (ad) \cap (bc)$ et $w = (cd) \cap (ab)$ et on impose leurs coordonnées : $u = (0, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 0)$.

Pour définir les coordonnées d'un point $m \neq b, c$ de (bc) (i.e. "l'axe des y ") on considère la droite (mw) . Elle coupe D en un point distinct de a, c , donc un point $x \in k$. On pose alors $m = (0, -x, 1)$. On peut donc identifier $(bc) - \{b\}$ avec k en identifiant $(0, y, 1)$ et y . On procède de même sur (ab) en utilisant u . Enfin, pour un point m non situé sur les droites (bc) , (ca) , (ab) , on considère les droites (ma) et (mb) . Elles coupent respectivement (bc) en y et (ac) en x et on pose $m = (x, y, 1)$.

D1) Montrer qu'on définit ainsi une bijection Φ de \mathbf{P} sur $\mathbf{P}^2(k)$.

D2) Montrer que l'image d'une droite de \mathbf{P} est une droite de $\mathbf{P}^2(k)$.

Indication : On traite d'abord le cas de la droite de l'infini et des axes, puis celui des droites "parallèles" aux axes, dont on montre que les points non sur (ab) ont pour coordonnées $(\lambda, y, 1)$ ou $(x, \mu, 1)$ avec $x, y \in k$ variables et $\lambda, \mu \in k$ constants. On en déduit que ces droites correspondent aux droites de $\mathbf{P}^2(k)$ d'équations $X = \lambda T$ ou $Y = \mu T$.

On aborde ensuite le cas d'une droite passant par c dont on montre que les points non sur (ab) ont pour coordonnées $(x, y, 1)$ avec $y = \lambda x$ (regarder les diverses intersections et utiliser la définition de la multiplication). On traite enfin le cas d'une droite quelconque en utilisant la "parallèle" à cette droite passant par c .

4.4.3 Commentaires

Nous renvoyons le lecteur à la bibliographie et notamment [Art62], [Art65], [Har67], [Sei62] pour de plus amples développements sur le sujet. Ces référen-

ces proposent des preuves de 4.4.3, mais, à l'exception de Seidenberg, ces preuves font le détour par les plans affines. Le lecteur verra qu'on peut définir des coordonnées pour un plan projectif, même sans Desargues ni Pappus. On obtient alors des structures algébriques plus faibles (anneaux ternaires, Moufang loops, etc). On a vu dans la preuve de 4.4.3 que l'associativité de la multiplication est liée à Desargues et sa commutativité à Pappus. En fait ces propriétés algébriques et géométriques sont équivalentes, comme le montrent toutes les références ci-dessus.

Une remarque pour finir : il est facile de voir que si le plan projectif est plongé dans un espace projectif de dimension 3 (avec les axiomes naturels pour les plans de cet espace), le théorème de Desargues est automatique, cf. exercice 2.5.10. Cela signifie que les structures un peu exotiques (Moufang et autres) ne se produisent que pour le plan.

4.4.4 Exercices

4.4.4 Exercice. L'exercice suivant permet de donner une définition géométrique des homographies, à partir des axiomes P1) à P4). Il montre aussi comment l'axiome de Pappus P6) est lié au théorème de triple transitivité. On reprend les notations de 4.4.1.

Soient D, D' deux droites distinctes de \mathbf{P} et o un point n'appartenant pas à $D \cup D'$. On définit la perspective $p_o : D \rightarrow D'$, de centre o , exactement comme en 2.1.1. On appelle **homographie** d'une droite D sur une droite D' (éventuellement égale à D) la composée d'un nombre fini de perspectives $p_i : D_i \rightarrow D_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n$, avec $D_i \neq D_{i+1}$, $D_1 = D$ et $D_n = D'$.

1) Montrer que les perspectives et les homographies sont des bijections.

2) Montrer que la composée de deux homographies est une homographie et que l'ensemble des homographies de D dans elle-même forme un groupe pour la composition.

3) Soient D, D' deux droites et a, b, c (resp. a', b', c') des points distincts de D (resp. D').

a) Montrer qu'il existe une homographie $h : D \rightarrow D'$ vérifiant $h(a) = a'$, $h(b) = b'$ et $h(c) = c'$. (Commencer par le cas $D \neq D'$; considérer les droites (ab') et $(a'b)$ et leur point d'intersection γ , ainsi que (ac') et $(a'c)$ et leur point d'intersection β . Soit Δ la droite $(\beta\gamma)$. Montrer qu'on a $h_a = p_a \circ p_{a'}$ où p_a (resp. $p_{a'}$) est la perspective de centre a (resp. a') de Δ sur D' (resp. D sur Δ).

b) Montrer que, si le théorème de Pappus est vrai dans \mathbf{P} , les homographies h_a, h_b et h_c définies en a) sont égales. Plus généralement, montrer, en utilisant 4.4.3, que l'homographie h de a) est unique.

c) Inversement, montrer que si l'on a la propriété de a) avec l'unicité, le théorème de Pappus est vrai (procéder comme en 2.2.1).

Bibliographie

- [Art62] Emil Artin. *Algèbre géométrique*. Gauthier-Villars, Paris, 1962.
- [Art65] Rafael Artzy. *Linear geometry*. Addison-Wesley, Reading, 1965.
- [Aud06] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, Les Ulis, 2006.
- [Aym03] Jean-Louis Ayme. *Méthodes et techniques en géométrie à propos de la droite de Newton*. Ellipses, Paris, 2003.
- [Ber90] Marcel Berger. *Géométrie*. Nathan, Paris, 1990.
- [Cha89] Michel Chasles. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Gabay, Paris, 1989.
- [Die70] Jean Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Springer, Berlin, 1970.
- [Gra71] André Gramain. *Topologie des surfaces*. PUF, Paris, 1971.
- [Hal76] Marshall Hall. *The theory of groups*. AMS, Providence, 1976.
- [Har67] Robin Hartshorne. *Foundations of projective geometry*. Benjamin, New-York, 1967.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer, Berlin, 1977.
- [MCD07] Daniel Perrin Marie-Claude David, Frédéric Haglund. *Géométrie affine (polycopié)*. Université Paris-Sud, Orsay, 2007.
- [Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique, une introduction*. Interéditions, Paris, 1995.
- [Per96] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, Paris, 1996.
- [Pon62] Jean-Victor Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures 1*. Mallet-Bachelier, Paris, 1862.
- [Pon64] Jean-Victor Poncelet. *Traité des propriétés projectives des figures 2*. Gauthier-Villars, Paris, 1864.
- [Sei62] Abraham Seidenberg. *Lectures in projective geometry*. Van Nostrand, Princeton, 1962.