

**Partie IV. LA GÉOMÉTRIE  
D'UNE FORME  
QUADRATIQUE,  
deuxième épisode : LES  
GÉOMÉTRIES NON  
EUCLIDIENNES**



## Introduction historique

On ne peut parler de géométries non euclidiennes sans évoquer le postulat d'Euclide (postulat des parallèles) et l'histoire de sa remise en question qui a donné naissance à ces géométries nouvelles. C'est d'ailleurs ce que je vais faire dans cette introduction, toujours soucieux des fondements historiques des problèmes abordés. Il n'empêche que, dans ce cas, c'est presque le seul moment au cours de cette longue partie où j'évoquerai ce postulat et même la notion de parallèle. Mon opinion, en effet, est que cette notion de parallèle, contrairement à ce que semblerait indiquer l'histoire, n'est pas fondamentale en géométrie non euclidienne. Pour une fois, l'histoire, à mon avis, ne fait que masquer la véritable nature des choses. Nous verrons en revanche dans la Partie V, que même avec l'entrée par la géométrie projective et les formes quadratiques que j'ai choisie, la notion de parallélisme est absolument fondamentale en géométrie euclidienne. C'est sans doute cette importance des parallèles dans le cadre euclidien et la prégnance de ce cadre sur nos habitudes de pensée qui expliquent qu'aujourd'hui encore, on mette en avant le problème des parallèles dans toute présentation des géométries non euclidiennes. J'annonce tout de suite que cela ne sera pas ma position, préférant une entrée par la géométrie projective et les formes quadratiques dont j'espère que le lecteur pourra apprécier la pertinence.

### Le cinquième postulat

#### L'axiome originel d'Euclide

Voici le cinquième postulat d'Euclide, dans la traduction de Peyrard<sup>1</sup> :

*Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.*

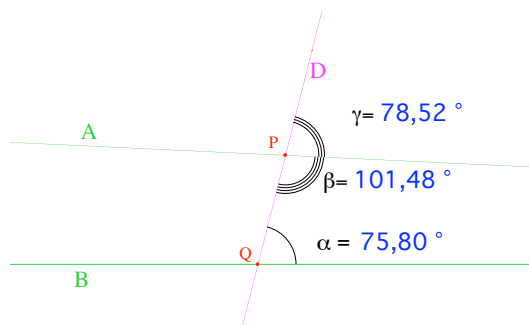


FIGURE 1 – Le postulat dans la version d'Euclide

1. Celle de Kayas formule les choses de manière plus moderne.

## La variante de Proclus

La formulation “moderne” est due à Proclus (410-483). En tentant de prouver le postulat, il prétend<sup>2</sup> démontrer un lemme qui affirme que si une droite coupe une droite elle coupe aussi ses parallèles. En fait, il s’agit de l’énoncé suivant<sup>3</sup>, dont on montre qu’il est équivalent à celui d’Euclide :

**Axiome.** *Étant donné un point  $A$  du plan et une droite  $D$ , il existe une et une seule droite parallèle à  $D$  passant par  $A$ .*

## Conséquences

Même si nombre de résultats de géométrie euclidienne sont indépendants du cinquième postulat (par exemple les cas d’isométrie des triangles, le fait que la somme de deux angles d’un triangle est plus petite que  $\pi$  ou encore que deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles), ses conséquences sont nombreuses et familières. Citons-en quelques unes :

- La transitivité du parallélisme.
- L’égalité des angles alternes-internes et correspondants.
- Le fait qu’une perpendiculaire à une droite est aussi perpendiculaire à ses parallèles.
- Le fait que la somme des angles d’un triangle est égale à deux droits.

Nous verrons que ces résultats, ainsi que bien d’autres<sup>4</sup>, sont en défaut en géométrie hyperbolique.

## Tentatives de preuves du cinquième postulat

Beaucoup de géomètres (Proclus, Clavius, Clairaut, Simson, Wallis, etc.) ne se sont pas satisfaits de devoir prendre le postulat d’Euclide comme un axiome et ont essayé de le prouver. Toutes ces tentatives ont été infructueuses, mais parfois intéressantes. Lorsqu’elles n’étaient pas évidemment fausses, elles revenaient le plus souvent :

- soit à donner une nouvelle définition de parallèle (par exemple, l’ensemble des points équidistants d’une droite donnée situés d’un même côté de cette droite, Clavius, 1574),

---

2. Il y a plusieurs fautes dans le raisonnement de Proclus. La principale est qu’il pense que la distance d’un point d’une droite à une parallèle est constante. Nous verrons en 5.3.3 que c’est faux en géométrie hyperbolique.

3. Les anglo-saxons attribuent parfois cet axiome à Playfair (1748-1819). La primauté de Proclus ne fait guère de doute.

4. Par exemple, l’existence de rectangles.

• soit à remplacer l'axiome d'Euclide par un autre (par exemple celui de Proclus vu ci-dessus, ou celui de Clairaut sur le rectangle<sup>5</sup>).

Plusieurs autres exemples sont intéressants à cet égard :

• Wallis (1663) demande qu'il existe des triangles semblables non isométriques. On verra que cela n'existe pas en géométrie hyperbolique. De manière analogue, Gauss (1799), prouve le postulat s'il y a des triangles d'aire arbitrairement grande (on verra qu'en hyperbolique l'aire est  $< \pi$ ).

• Farkas Bolyai (le père) prouve le postulat 1851 en supposant que trois points sont cocycliques ou alignés. Nous verrons que ce résultat est faux en hyperbolique car les médiatrices ne sont pas toujours concourantes.

Parmi ces tentatives, trois méritent une attention particulière, celles de Saccheri (1667-1733), Legendre (1752-1833) et Lambert (1728-1777), car elles sont beaucoup plus élaborées (voir l'analyse de [Har00]). Le principe de ces géomètres a été de partir de l'hypothèse que le postulat des parallèles était faux et dérouler les nombreuses conséquences de cette hypothèse, avec l'espoir d'aboutir à une contradiction, ce qui aurait montré que le postulat était vrai. D'ailleurs ils y sont parvenus, en commettant une erreur, ou en rajoutant un axiome, comme Legendre qui formule la propriété :

*étant donné un angle  $\widehat{ABC}$  et un point  $P$  intérieur à cet angle, il existe une droite passant par  $P$  qui coupe les droites  $(AB)$  et  $(BC)$ .*

Il ne présente pas cette assertion comme un axiome, mais il dit<sup>6</sup> : ... *or il répugne à la nature de la ligne droite, qu'une telle ligne, indéfiniment prolongée, puisse être renfermée dans un angle.*

Le cas de Lambert est un peu différent. Il connaît la formule de Girard sur l'aire des triangles sphériques et imagine une sphère de rayon imaginaire pour avoir une somme des angles  $< \pi$ . Sans doute Lambert est-il celui, parmi les précurseurs, qui est passé le plus près de la géométrie hyperbolique : il ne semble pas avoir eu, autant que les autres, l'unique souci de démontrer le cinquième postulat.

## Les géométries non euclidiennes : Gauss, Bolyai, Lobatchevsky

### Bolyai

Janos Bolyai (1802-1860) est hongrois, capitaine au corps du génie dans l'armée autrichienne. Il est le fils du mathématicien Farkas (Wolfgang en al-

---

5. Si  $(AC)$  et  $(BD)$  sont perpendiculaires à  $(AB)$  et si l'on a  $AC = BD$ , alors  $(CD)$  est perpendiculaire à  $(AC)$  et  $(BD)$ .

6. Répugnant ou pas, en géométrie hyperbolique, cette situation est tout à fait possible.

lemand) Bolyai qui a montré le fameux théorème du découpage (voir [Per11]) et qui est un ami de Gauss, le plus grand mathématicien de l'époque.

Le cheminement de Bolyai commence de manière classique par une tentative de preuve du postulat. Son père l'en ayant dissuadé, il bascule de l'autre côté, c'est-à-dire dans l'idée qu'une géométrie non euclidienne peut exister. Il écrit vers 1830 *La science absolue de l'espace* où il développe toute une géométrie sans l'axiome des parallèles. Comme il le dit : *À partir de rien, j'ai créé un étrange et nouvel univers*. Ce texte apparaît en appendice d'un ouvrage du père *Tentamen*, 1831. Le père envoie ce texte à Gauss qui répond, en substance : *je savais déjà tout cela depuis longtemps, mais je n'avais pas osé le publier de peur de la réaction du public*<sup>7</sup>. Cela déprime complètement Janos, qui était, il faut le dire, d'un tempérament ombrageux<sup>8</sup>.

## Lobatchevsky

Nikolai Ivanovich Lobatchevsky (1792-1856) est russe, il devient recteur de l'université de Kazan en 1826 et publie en 1829 en russe, puis en 1837 en français son article *Géométrie imaginaire*, où il obtient des résultats très similaires à ceux de Bolyai<sup>9</sup>. Outre les formules relatives à l'aire d'un triangle en fonction des angles, Lobachevsky développe des formules pour le cercle,

---

7. Voici précisément la lettre de Gauss à Bolyai père :

*Parlons maintenant un peu du travail de ton fils. Si je commence en disant que je ne puis louer ce travail, tu pourras bien un instant reculer d'étonnement ; mais je ne puis dire autre chose ; le louer serait me louer moi-même ; en effet, le contenu tout entier de l'Ouvrage, la voie qu'a frayée ton fils, les résultats auxquels il a été conduit, coïncident presque entièrement avec mes propres méditations qui ont occupé en partie mon esprit depuis déjà trente à trente-cinq ans. Aussi ai-je été complètement stupéfait. Quant à mon travail personnel, dont d'ailleurs j'ai confié peu de chose jusqu'ici au papier, mon intention était de n'en rien laisser publier de mon vivant.*

*En effet, la plupart des hommes n'ont pas l'esprit juste sur les questions dont il s'agit, et j'ai trouvé seulement bien peu d'entre eux qui prissent un intérêt particulier à ce que je leur ai communiqué à ce sujet. Pour pouvoir prendre cet intérêt, il faut d'abord avoir senti bien vivement ce qui fait essentiellement défaut, et sur ces matières la plupart des hommes sont dans une obscurité complète. C'était, au contraire, mon idée de mettre, avec le temps, tout ceci par écrit afin qu'au moins cela ne périsse pas avec moi. Aussi est-ce pour moi une agréable surprise de voir que cette peine peut maintenant m'être épargnée, et je suis rempli d'une joie extrême que ce soit précisément le fils de mon vieil ami qui m'ait devancé d'une manière si remarquable. Il énonce ensuite quelques critiques à l'encontre du travail de Bolyai et, pour bien montrer qu'il ne raconte pas n'importe quoi, il ajoute la preuve de quelques résultats, dont le lien entre l'aire d'un triangle et la somme de ses angles.*

8. Il a à son actif 13 duels victorieux au sabre.

9. Comme le dit Bolyai père : *les découvertes apparaissent souvent simultanément en plusieurs endroits, comme les violettes au printemps.*

introduit des objets nouveaux, inexistantes en géométrie euclidienne comme les horocycles. Son génie mathématique n'étant pas reconnu à sa juste valeur, il est congédié de son poste en 1846.

## Les modèles non euclidiens : Beltrami, Cayley, Klein, Poincaré, Riemann

Les travaux de Bolyai et Lobatchevsky, s'ils sont essentiels et précurseurs n'ont, comme Gauss le craignait, pas entraîné l'adhésion de leurs contemporains. En vérité, pour croire à **l'existence** des géométries non euclidiennes, il faudra attendre de les voir vraiment<sup>10</sup>, et dans un cadre euclidien (ou presque).

Dans la fameuse réponse à Bolyai, Gauss énonce le problème de l'existence de ces géométries de manière très claire :

*Pour traiter la Géométrie, dès les débuts, d'une manière bien ordonnée, il est indispensable de démontrer la possibilité de l'existence du plan. La définition habituelle renferme trop de choses et implique déjà un théorème à proprement dire tacite. L'on doit s'étonner que tous les écrivains, depuis Euclide jusqu'à nos jours, se soient mis à l'œuvre d'une façon si négligente.*

C'est la problématique des modèles. Bien entendu, comme les géométries non euclidiennes ne sont pas euclidiennes, on se doute bien qu'on ne parviendra à les représenter dans le cadre euclidien qu'au prix de renoncements. L'objectif de la quête (désespérée) d'un modèle est de satisfaire aux exigences suivantes :

- avoir un "plan" qu'on puisse représenter comme une partie d'un plan ou d'un espace euclidien,
- avoir un plan qui ressemble à un plan et, en tous cas, qui soit de dimension 2, donc une surface,
- avoir des droites qui ressemblent à des droites, ou au moins qui soient des courbes, simples si possible,
- conserver les propriétés usuelles d'incidence,
- avoir une compatibilité entre les invariants des géométries (longueur, angle) et ceux du modèle (par sa structure euclidienne), donc avoir une représentation isométrique et/ou conforme.

Nous analyserons cette situation, d'abord dans la deuxième partie de cette introduction, puis, plus en détail, au chapitre 2 ci-dessous, et nous

---

10. La difficulté est que la validité de ces géométries, c'est-à-dire leur non-contradiction, ne peut être prouvée à l'intérieur de la théorie en vertu du théorème d'incomplétude de Gödel. Bien entendu, ceci vaut aussi pour la géométrie euclidienne, mais en ramenant les géométries euclidiennes au cadre euclidien familier, on leur donne la caution de la tradition.

constaterons que cette recherche de modèle est totalement désespérée si l'on ne réduit pas ces exigences.

Il n'empêche qu'en dépit de leurs imperfections, ces modèles ont permis à la plupart des mathématiciens de considérer ces géométries comme également dignes d'intérêt. Ajoutons que les deux grandes géométries ont eu un destin assez différent. La géométrie hyperbolique a connu depuis le XIX-ième siècle une explosion phénoménale. Une des raisons en est sans doute qu'elle fournit un cadre naturel à la théorie de la relativité, mais ce n'est pas la seule comme le montre l'importance qu'elle a dans les travaux de Poincaré sur les fonctions fuchsiennes, ou, plus récemment dans ceux de Thurston ou Gromov notamment. En revanche, la géométrie elliptique est très peu développée, peut-être parce qu'elle a un avatar plus naturel sous sa forme sphérique. C'est pourtant, pour le mathématicien, une sorte de petit paradis où tout fonctionne à merveille, comme je tenterai de le montrer au lecteur dans la suite de cette partie.

## Introduction au modèle de Klein

### L'objectif

Notre objectif est d'indiquer comment les idées du programme d'Erlangen de Klein peuvent mener à la construction d'un modèle de la géométrie hyperbolique<sup>11</sup>, donc d'une géométrie avec beaucoup de parallèles. On travaille sur le corps des réels et les deux principes de base adoptés sont les suivants :

1) Comme Klein, on part du principe qu'il y a une géométrie-mère : la géométrie projective, et spécialement ici celle du plan projectif  $\mathbf{P}(E)$ . On va donc chercher à construire une géométrie nouvelle, avec une donnée supplémentaire  $\Gamma$ . Si l'on garde points et droites de  $\mathbf{P}(E)$ , éventuellement sur une partie du plan, cela donnera déjà les propriétés d'incidence.

2) Comme Klein, on veut disposer d'un groupe de transformations, et on veut qu'il soit assez gros pour avoir les propriétés d'homogénéité, c'est-à-dire de transitivité sur les points, les droites, les drapeaux (par exemple pour pouvoir prouver le premier cas d'égalité comme Euclide). Bien entendu, le groupe naturel dans cette situation est le groupe des homographies conservant  $\Gamma$ .

---

11. Il s'agit de celui de Klein, appelé parfois de Cayley-Klein.



## Un plan affine non euclidien ?

### Le cas euclidien

On sait que la géométrie affine ordinaire s'obtient à partir de la géométrie projective en se donnant une droite, décrétée à l'infini, les droites parallèles étant alors les droites qui se coupent à l'infini (c'est-à-dire qui ont même "direction" :  $\delta := D \cap D_\infty = D' \cap D_\infty$ ). Le fait d'avoir pris une droite comme élément à l'infini, outre que c'est le choix le plus simple, assure le postulat d'Euclide : si on se donne une droite  $D$  et un point  $a$ , l'unique parallèle à  $D$  passant par  $a$  est la droite  $(a\delta)$  où  $\delta$  est l'unique direction de  $D$ .

### Un infini pour disqualifier Euclide ?

Pour obtenir une géométrie (affine) non euclidienne, on va remplacer la droite à l'infini par une courbe algébrique  $\Gamma$  de degré  $d \geq 2$ . En effet, une droite  $D$  va couper  $\Gamma$  en  $d$  points (en général), donc elle aura  $d$  directions, et il y aura autant de parallèles à  $D$  passant par  $a$ .

On considère donc une courbe  $\Gamma$ , que l'on choisit comme élément à l'infini. Le plus simple est de prendre une conique (un cercle puisque toutes sont équivalentes). C'est le plus simple et c'est aussi la seule possibilité raisonnable. En effet, si  $G$  est le groupe conservant  $\Gamma$  on souhaite qu'il opère transitivement sur  $\mathbf{P}(E) - \Gamma$ , or, en degré  $\geq 3$ , le groupe en question est fini, donc il ne peut être transitif sur une variété de dimension 2.

En revanche, pour une conique, on sait que le groupe  $G$  est isomorphe à  $PGL(2, k)$ , donc de dimension<sup>12</sup> 3. C'est une bonne dimension : c'est celle du groupe euclidien et c'est ce qu'il faut pour avoir les cas d'isométrie.

### Le plan de Klein : tout le plan privé de la conique ?

On choisit donc un cercle comme élément à l'infini. On notera que cela fournit une forme quadratique  $q$  naturelle : l'équation de ce cercle, et c'est le point de départ que nous adopterons ci-dessous. Malheureusement, l'homogénéité n'est pas réalisée sur  $\mathbf{P}(E) - \Gamma$  : il y a des points avec  $q > 0$  et d'autres avec  $q < 0$  et on ne peut les échanger par une isométrie. Si l'on veut l'homogénéité, on doit n'en garder que la moitié.

On voit aussitôt qu'il faut refuser l'extérieur de  $\Gamma$  à cause de l'homogénéité de l'ensemble des droites. En effet, par deux points extérieurs passent trois types de droites qui coupent  $\Gamma$  en 0, 1 ou 2 points. Pour l'intérieur, en revanche, il n'y a plus de problème.

---

12. Les coniques sont de dimension 5 et le groupe total  $PGL(E)$  de dimension 8.

On prend donc l'intérieur du disque comme plan et les traces des droites projectives comme droites. C'est le modèle de Klein, noté  $\mathbf{K}$ . L'axiome numéro un d'Euclide est assuré (par deux points passe une droite et une seule). En revanche, comme chaque droite a deux points à l'infini, l'axiome des parallèles n'est pas vrai.

## La métrique

On notera que la construction précédente relève d'une idée de géométrie **affine** et non métrique : on s'est seulement donné l'infini du plan. En fait, on va voir que la métrique est déjà dans cette donnée comme le ver est dans le fruit.

## L'orthogonalité

Commençons par l'orthogonalité<sup>13</sup>. Que signifie le fait que deux droites sont perpendiculaires ? Au sens du programme d'Erlangen, donc des transformations, cela signifie que l'une est invariante par la symétrie d'axe l'autre. Reste à savoir ce que sont les symétries axiales (ou réflexions). On peut le dire en deux mots : ce sont des involutions, et qui fixent une droite.

Par chance, dans le groupe  $G = PGL(2, k)$ , les involutions sont bien connues, et très naturelles, ce sont les involutions de Frégier, voir Partie III, Chapitre 3, §3. Rappelons simplement que l'involution de point de Frégier  $p \notin \Gamma$  agit sur  $\Gamma$  en associant à  $a$  le second point d'intersection de  $(ap)$  et  $\Gamma$ . On note cette involution  $s_p$ . Rappelons que les points  $p, a$  et  $s_p(a)$  sont alignés.

Si  $p$  est extérieur, la polaire de  $p$ , est la droite  $D$  qui joint les points de contact des tangentes à  $\Gamma$  issues de  $p$ . Cette droite coupe  $\mathbf{K}$ , donc définit une droite de  $\mathbf{K}$  qui est fixe par  $s_p$ . En effet, les points de contact des tangentes le sont, de sorte que  $D$  est stable, et comme la droite  $(ap)$  l'est aussi,  $a$  est fixe. L'involution  $s_p$  est donc la réflexion par rapport à  $D$ .

Si maintenant on prend une droite  $D$  de  $\mathbf{K}$ , de pôle  $p$ , les perpendiculaires à  $D$  sont les droites invariantes par  $s_p$ , donc les droites passant par  $p$ . On voit que l'orthogonalité est bien dans la donnée de  $\Gamma$ , mais on constate avec dépit que le modèle n'est pas conforme ...

---

13. Le lecteur trouvera aisément plusieurs arguments pour refuser l'orthogonalité au sens euclidien ordinaire.

## Des similitudes ?

Dans le plan euclidien, conserver l'orthogonalité n'est pas l'apanage des isométries, mais des similitudes, et en particulier des homothéties, qui sont des transformations affines qui non seulement laissent stable  $D_\infty$ , mais la fixent. Ici, ces transformations n'existent pas<sup>14</sup> et c'est une grande différence avec le cas euclidien (adieu Thalès ...) : si une transformation  $h$  fixe  $\Gamma$  c'est l'identité. En effet, si  $m$  est un point de  $\mathbf{K}$  et si on trace deux droites passant par  $m$ , elles coupent chacune  $\Gamma$  en deux points, qui sont fixes par  $h$ , donc les droites sont stables et  $m$  est fixe.

## Une distance ?

L'absence d'homothéties peut faire penser que, non seulement l'orthogonalité, mais aussi la distance est contenue dans la donnée de  $\Gamma$ . En termes du programme d'Erlangen, il s'agit de trouver un invariant de la transitivité sur les couples de points  $(a, b)$ . Or, la droite  $(ab)$  coupe  $\Gamma$  en deux points  $u, v$  et le birapport  $\llbracket a, b, u, v \rrbracket$  est un tel invariant. En ce sens c'est une distance. Les traditionalistes ne le trouveront sans doute pas à leur goût, car il ne vérifie pas les propriétés usuelles des distances : l'inégalité triangulaire, sa variante égalité dans le cas aligné, etc. On note tout de même qu'il est positif. De plus, le birapport n'est certes pas additif pour trois points  $a, b, c$  alignés, mais il est multiplicatif :  $\llbracket a, b, u, v \rrbracket = \llbracket a, c, u, v \rrbracket \times \llbracket c, b, u, v \rrbracket$ . (C'est évident en l'écrivant !) Pour avoir une fonction additive il suffit de prendre le logarithme du birapport<sup>15</sup>. Cette fois plus d'objections ; on vérifie même que les droites sont des géodésiques pour cette distance.

Quand on a une distance, on a tout ce qu'il faut pour faire de la géométrie<sup>16</sup>. Il est facile de voir que ce modèle n'est ni isométrique, ni conforme, mais il est tout de même très efficace. Le lecteur patientera jusqu'au Chapitre 2 pour la construction de modèles conformes, voire isométriques.

---

14. L'existence de similitudes était l'axiome rajouté par Wallis. Gauss était conscient de leur inexistence, il dit (lettre à Schumacher, 1831) : *Dans la géométrie non euclidienne il n'y a jamais, dans les figures, de similitude sans égalité.*

15. Ou plutôt la valeur absolue du logarithme, car ce nombre doit être indépendant de l'ordre de  $a, b$  ou de  $u, v$  et les permuter passe à l'inverse, donc à l'opposé pour le logarithme.

16. Pour avoir des angles il y a au moins deux voies élémentaires : soit on les définit à partir des longueurs (en prenant la longueur sur le cercle unité), soit on les définit à partir de l'angle droit par division par 2 puis par 4, etc.

## Le contenu de cette partie

L'entrée choisie ici <sup>17</sup> dans les géométries non euclidiennes consiste à partir d'un plan projectif  $\mathbf{P}(E)$  muni d'une forme quadratique **non dégénérée**  $q$  (le cas dégénéré, qui correspond à la géométrie euclidienne, sera étudié dans la partie suivante). On a choisi, dans la mesure du possible, de mener de front l'étude des deux cas :  $q$  anisotrope (géométrie elliptique) et  $q$  de Lorentz (géométrie hyperbolique).

Le chapitre 1 plante le décor, avec quelques innovations, dont l'usage des points "extérieurs" dans le cas hyperbolique, l'objectif étant de pouvoir utiliser pleinement la dualité. Les modèles des géométries non euclidiennes, évoqués ci-dessus, sont étudiés au chapitre 2. Le chapitre 3 permet, sur l'exemple des droites remarquables du triangle, de vérifier l'intérêt du cadre choisi et des choix effectués. Les trois chapitres suivants tournent autour de la transitivité, dans le cas général (Ch. 4), puis dans le cas réel (Ch. 5,6). Ils permettent d'introduire les invariants : longueur, angle, spin. L'objectif de ces chapitres est le calcul de quotients sous l'action du groupe  $PO(q)$  (notamment celui de l'espace des triangles). La question est évidemment liée aux cas d'isométrie des triangles. Le chapitre 7 traite des cercles et de leurs avatars (équidistantes, horicycles) et le chapitre 8 des invariants orientés (vecteurs, angles, aires). On verra que l'absence de sous-groupe distingué dans  $PO(q)$  rend ces notions moins commodes que dans le cas euclidien. Enfin, le chapitre 9 revient sur les invariants en prouvant les deux théorèmes fondamentaux : on les connaît tous, ainsi que leurs relations.

Cette partie contient de nombreuses figures, réalisées avec le logiciel Cabri. Ces figures utilisent toutes des macros dues à Yves Martin, voir [Mar02]. C'est déjà un grand apport, mais l'influence d'Yves sur cette partie va bien au-delà des figures.

---

17. Ce choix a été justifié ci-dessus dans le cas hyperbolique.

# Chapitre 1

## Présentation des géométries non euclidiennes

*Ce chapitre constitue le point de départ de l'étude des géométries non euclidiennes. Après avoir décrit le cadre (vectoriel et projectif comme nous nous en sommes expliqué dans la préface) dans lequel nous nous plaçons, nous définissons les premiers objets géométriques : points, droites, triangles. Attention, les choix opérés ici ne sont pas les choix habituels (au moins dans le cas de la géométrie hyperbolique). Nous nous en expliquons plus loin.*

*Dans cette partie, notre point de vue consiste à traiter ensemble les géométries elliptique et hyperbolique, sur un corps quelconque. En effet, nous pensons que leurs points communs sont beaucoup plus nombreux que leurs différences et qu'en revanche elles sont radicalement différentes de la géométrie euclidienne. Dans notre approche, la raison qui motive cette opinion est que la forme quadratique qui définit la géométrie est non dégénérée dans les deux cas hyperbolique et elliptique, alors qu'elle est dégénérée dans le cas euclidien. En particulier, dans les cas non euclidiens on bénéficie d'une polarité (du moins si l'on consent à ne pas oublier les points extérieurs !) et l'on verra qu'on tient là un outil extraordinaire. Cette similitude entre ces deux cas n'est pas toujours apparente dans la littérature pour deux raisons :*

– d’abord la plupart des auteurs ne considèrent, dans le cas hyperbolique, que la moitié des points et perdent ainsi tout ce qui se rapporte à la polarité, – ensuite, l’entrée par le problème des parallèles, qui correspond aux racines historiques de la question, introduit entre les deux géométries une différence qui disparaît si on les pense toutes deux comme des géométries projectives.

En tous cas, nous tenterons de discuter, à propos de la plupart des notions évoquées ici, des ressemblances et des différences des géométries non euclidiennes entre elles et avec la géométrie euclidienne.

## 1.1 Le cadre

### 1.1.1 Les données

Dans toute cette partie, on considère un corps  $k$  de caractéristique différente de 2, un espace vectoriel  $E$  de dimension 3 sur  $k$ , le plan projectif  $\mathbf{P}(E)$  associé et on se donne une forme quadratique  $q$  **non dégénérée** sur  $E$  (et l’on note  $\varphi$  sa forme polaire). Une telle forme vérifie l’une des conditions suivantes :

1)  $q$  est **anisotrope**, c’est-à-dire qu’il n’y a pas de vecteur isotrope pour  $q$  : **cas elliptique**,

2)  $q$  est équivalente à un scalaire près à la forme de **Lorentz** (c’est-à-dire la forme  $x^2 + y^2 - t^2$ ) : **cas hyperbolique**.

On renvoie au chapitre 1, Partie III, pour les généralités sur les formes quadratiques. Rappelons qu’une forme quadratique  $q$  définit une conique  $\bar{q}$  qui n’est autre que  $q$  identifiée à ses multiples non nuls  $\lambda q$ . Une telle conique a un ensemble de zéros  $\Gamma = V(\bar{q})$  qui est l’ensemble des points  $\bar{x}$  de  $\mathbf{P}(E)$  vérifiant  $q(x) = 0$  (cette annulation ne dépend ni du représentant de  $\bar{q}$ , ni de celui de  $\bar{x}$ ). Dans le cas elliptique  $\Gamma$  est vide, dans le cas hyperbolique c’est une conique propre non vide telle qu’on les a étudiées dans la partie III.

#### 1.1.1 Remarques.

1) Le cas d’une forme dégénérée sera traité dans la partie V. Il correspond aux géométries euclidiennes.

2) On vérifie facilement que toute forme non dégénérée est bien de l’un des deux types ci-dessus, voir [Per96]. En particulier, une forme non dégénérée qui admet des vecteurs isotropes est équivalente à la forme de Lorentz à un scalaire près. Notons que, si  $k$  est fini ou algébriquement clos, il n’y a que des formes du type Lorentz.

**1.1.2 Remarque.** Comme on s'intéresse au comportement de  $q$  sur l'espace projectif, on peut remplacer  $q$  par  $\lambda q$ . Cela signifie que, dans le cas hyperbolique, on peut supposer que la forme  $q$ , dans une base convenable, est exactement la forme de Lorentz  $x^2 + y^2 - t^2$  (et ce sur n'importe quel corps). Son discriminant est donc égal à  $-1$  dans  $k^*/k^{*2}$ .

Dans le cas elliptique, si le corps de base est  $\mathbf{R}$ , on peut supposer  $q = x^2 + y^2 + t^2$  à équivalence près (le cas elliptique réel). Attention si le corps de base est  $\mathbf{Q}$  (par exemple) les choses sont plus compliquées. Par exemple, les formes  $x^2 + y^2 + t^2$  et  $x^2 + y^2 + 7t^2$  ne sont pas équivalentes à un scalaire près, voir 1.5.1. On peut toutefois préciser le discriminant de  $q$ . En effet, sur les discriminants on a la relation  $\Delta(\lambda q) = \lambda^3 \Delta(q)$ . Quitte à remplacer  $q$  par  $\Delta(q)q$  on peut donc supposer que le discriminant de la forme est un carré (donc est égal à 1 dans  $k^*/k^{*2}$ , puisque le discriminant n'est défini que modulo les carrés).

**1.1.3 Convention.** Dans toute la suite on supposera toujours que  $q$  est équivalente à la forme de Lorentz dans le cas hyperbolique (donc est de discriminant  $-1$  modulo les carrés)<sup>1</sup> et que  $q$  est de discriminant 1 dans le cas anisotrope.

**1.1.4 Remarque.** Si  $a, b$  sont des points de  $\mathbf{P}(E)$ , les quantités  $q(a)$  et  $\varphi(a, b)$  n'ont pas de sens *a priori* puisqu'elles ne sont définies que pour des vecteurs et qu'elles dépendent des représentants de  $a$  et  $b$  dans  $E$ . Toutefois, on se permettra d'utiliser ces notations dans les cas suivants :

- lorsqu'il s'agit de dire si ces quantités sont nulles ou non, on parlera ainsi de points de  $\mathbf{P}(E)$  isotropes pour parler des points de  $\Gamma$ , et d'orthogonalité pour signifier qu'on a  $\varphi(a, b) = 0$ , voir ci-dessous,

- lorsqu'il s'agit de parler du signe de  $q(a)$  sur  $\mathbf{R}$  ou, plus généralement, lorsque  $q(a)$  est vu dans  $k^*/k^{*2}$ ,

- lorsque ces quantités interviennent dans des fractions rationnelles avec même degré en numérateur et en dénominateur, qui ne dépendent que des points, comme par exemple l'invariant  $I(a, b) = \frac{\varphi(a, b)^2}{q(a)q(b)}$ .

## Un mot sur les carrés

**1.1.5 Remarque.** Dans de nombreux énoncés de cette partie on va voir apparaître le groupe  $k^*/k^{*2}$ , avec des conditions du genre " $q(a) = q(b)$  dans

---

1. Une autre possibilité est de prendre la forme  $-x^2 - y^2 + t^2$  dont le discriminant est égal à 1. Le choix ci-dessus permet que les angles à l'origine  $(0, 0, 1)$  soient les mêmes que dans le plan affine muni de la forme  $x^2 + y^2$ , voir 5.5.14.

$k^*/k^{*2}$ . Disons un mot de ce groupe. D'abord, c'est un groupe abélien, donc un  $\mathbf{Z}$ -module (en posant  $n.x = x^n$ ) et, comme tous ses éléments sont d'ordre 2, c'est même un  $\mathbf{F}_2$ -espace vectoriel. De plus, il est intimement lié à la structure "arithmétique" du corps. Dans certains cas il peut être très simple. Le pire (le mieux ?) est le cas d'un corps algébriquement clos où il est réduit à l'élément neutre. Un autre cas très important est le cas du **corps des réels** où le groupe  $k^*/k^{*2}$  est égal à  $\{+1, -1\}$  de sorte que **l'égalité dans ce groupe est juste une égalité de signe**. Dans le cadre de la géométrie hyperbolique, où l'on aura souvent des conditions du genre  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ , cela signifiera seulement que  $a$  et  $b$  sont tous deux à l'intérieur ou tous deux à l'extérieur de la conique  $\Gamma$ . D'une certaine façon, un cas très proche de celui-là est celui d'un corps fini où le groupe  $k^*/k^{*2}$  est aussi de cardinal 2, voir [Ser70]. À l'opposé de ces cas très simples se situe le cas d'un corps comme celui des rationnels<sup>2</sup>. Dans ce cas, le groupe  $k^*/k^{*2}$  n'est pas de type fini. En effet, le théorème de décomposition des entiers en produit de facteurs premiers montre que l'ensemble des nombres premiers est une base de  $\mathbf{Q}^*/\mathbf{Q}^{*2}$  sur  $\mathbf{F}_2$ .

### Rappel : la relation fondamentale

Le résultat suivant a essentiellement été vu Partie III ?? :

**1.1.6 Proposition.** 1) Soient  $a, b, c$  trois vecteurs de  $E$  écrits dans une base  $\mathcal{B}$  et notons  $[a, b, c]$  leur déterminant dans cette base. On a l'identité :

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathcal{B}}(q)[a, b, c]^2 &= q(a)q(b)q(c) + 2\varphi(b, c)\varphi(c, a)\varphi(a, b) \\ &\quad - q(a)\varphi(b, c)^2 - q(b)\varphi(c, a)^2 - q(c)\varphi(a, b)^2. \end{aligned}$$

2) Trois points  $a, b, c$  de  $\mathbf{P}(E)$  sont alignés si et seulement si ils vérifient :

$$q(a)q(b)q(c) + 2\varphi(b, c)\varphi(c, a)\varphi(a, b) - q(a)\varphi(b, c)^2 - q(b)\varphi(c, a)^2 - q(c)\varphi(a, b)^2 = 0$$

(avec l'abus de langage évoqué ci-dessus).

### 1.1.2 Dualité, orthogonalité, conjugaison

Rappelons qu'on a défini, Partie III, ?? et ??, les notions de conjugués, pôles et polaires par rapport à la conique  $\bar{q}$  associée à la forme quadratique  $q$  : si  $a, b$  sont des points de  $\mathbf{P}(E)$ , ils sont dits conjugués s'ils vérifient  $\varphi(a, b) = 0$

---

2. Un autre exemple intéressant est celui du corps  $p$ -adique  $\mathbf{Q}_p$ . On montre (voir [Ser70], Ch. II, corollaires du th. 3), que le groupe  $k^*/k^{*2}$  est de dimension 2 sur  $\mathbf{F}_2$  pour  $p$  impair et de dimension 3 pour  $p = 2$ .



(avec l'abus de langage vu en 1.1.4). Cela signifie que leurs représentants sont orthogonaux et utilisera aussi souvent ce mot pour  $a$  et  $b$ . La polaire de  $a$  est la droite  $a^\perp$ , image du plan vectoriel orthogonal à la droite vectorielle  $(a)$ .

**1.1.7 Remarque.** Encore une précision sur les abus de langage. Nous n'utiliserons les mots "conjugués", "pôles" et "polaires" qu'en référence aux points et aux droites de l'espace projectif (et donc pas dans le cadre vectoriel<sup>3</sup>). En revanche nous nous permettrons parfois d'utiliser parfois le mot "orthogonal" (normalement réservé au cas vectoriel) dans le cadre projectif.

Comme  $q$  est non dégénérée, l'application linéaire  $\bar{\varphi} : E \rightarrow E^*$ , qui à  $y$  associe  $\varphi_y$  avec  $\varphi_y(x) = \varphi(x, y)$ , est un isomorphisme qui nous permettra parfois d'identifier  $E$  et son dual. Cet isomorphisme permet aussi de définir la forme duale  $q^*$  sur  $E^*$ , voir Partie III, ???. Les données de  $q$  et  $q^*$  sont équivalentes.

Notons que si  $x$  est un représentant de  $a$ ,  $\varphi_x$  est une équation de  $a^\perp$ . Cela nous donne une manière linéaire d'associer à un point sa polaire (ou à une droite son pôle).

Par ailleurs, on a vu (voir Partie I, chapitre 1 ??) qu'un point de  $\mathbf{P}(E^*)$  s'identifie à une droite de  $\mathbf{P}(E)$ , via son équation. À cause de l'identification de  $E$  et  $E^{**}$ , un point  $a$  de  $\mathbf{P}(E)$  s'identifie aussi à une droite  $a^*$  de  $\mathbf{P}(E^*)$ , précisément,  $a^*$  est l'ensemble des droites passant par  $a$  et on a aussi une notion d'orthogonalité entre points et droites de  $\mathbf{P}(E^*)$ , via  $q^*$ .

Les formules données Partie III, ??? :  $q(x) = q^*(\varphi_x)$  et  $\varphi(x, y) = \varphi^*(\varphi_x, \varphi_y)$  ont la traduction suivante :

**1.1.8 Proposition.** *On utilise l'abus de langage évoqué en 1.1.4. Soient  $a, b \in \mathbf{P}(E)$  et  $A, B$  leurs polaires. On a  $q(a) = q^*(A)$  et  $q(b) = q^*(B)$  dans  $k^*/k^{*2}$ ;  $\varphi(a, b)$  est nul si et seulement si  $\varphi^*(A, B)$  est nul.*

La proposition suivante montre que les deux notions d'orthogonalité sont compatibles :

**1.1.9 Proposition.** *Soient  $a \in \mathbf{P}(E)$  et  $A \in \mathbf{P}(E^*)$ . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $A = a^\perp$ ,
- 2)  $a = A^\perp$ , (tous deux au sens de la forme  $q$  sur  $E$ ),
- 3)  $A = (a^*)^\perp$ ,
- 4)  $a^* = A^\perp$ , (tous deux au sens de la forme  $q^*$  sur  $E^*$ ).

*Démonstration.* L'équivalence de 1) et 2) vient de Partie III ???. Montrons par exemple 1)  $\implies$  3). Soit  $B \in a^*$ , il s'agit de montrer qu'on a  $\varphi^*(A, B) = 0$ .

---

3. Le lecteur qui nous prendrait en défaut sur ce point aurait gagné une sucette.

Posons  $b = B^\perp$ , ou, ce qui revient au même,  $B = b^\perp$ . En vertu de 1.1.8 il suffit de montrer  $\varphi(a, b) = 0$ . Mais dire que  $B$  est dans  $a^*$  signifie qu'on a  $a \in B$ , donc  $a$  est bien orthogonal à  $b$ .

## 1.2 Le produit vectoriel

La notion de produit vectoriel est la traduction, dans le cas où l'on dispose d'une forme quadratique, de celle de produit extérieur que nous avons vue au Chapitre 1 de la Partie II. Cette notion est très voisine de celle de produit vectoriel ordinaire d'un espace euclidien de dimension 3. Cependant, le fait de travailler dans le plan projectif et de disposer d'une forme non dégénérée va permettre d'interpréter le produit vectoriel de deux points du plan comme un point du plan et c'est là un gain essentiel<sup>4</sup>.

### 1.2.1 Définition

On a vu Partie II, Chapitre 1 que, pour se donner un produit extérieur, il suffit de se donner une base de  $E$ , ou simplement une forme trilinéaire alternée non nulle. Dans le cas présent, nous supposerons donnée une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  (pas nécessairement orthogonale). La donnée de la base  $\mathcal{B}$  définit une forme trilinéaire alternée non nulle :  $d(x, y, z) = \det_{\mathcal{B}}(x, y, z)$ . Soient  $x, y$  deux vecteurs de  $E$ . On a défini la forme linéaire  $x \wedge y$  par la formule  $(x \wedge y)(z) = d(x, y, z)$ , et cela fournit une application linéaire  $\wedge : E \times E \rightarrow E^*$ . On compose cette application avec l'isomorphisme  $\overline{\varphi}^{-1} : E^* \rightarrow E$  et on note  $x \wedge y$  (on remarquera la différence typographique) l'image de l'élément  $x \wedge y$  de  $E^*$ . On a alors la proposition suivante :

#### 1.2.1 Proposition.

- 1) On a  $\det_{\mathcal{B}}(x, y, z) = \varphi(x \wedge y, z)$ , pour tous  $x, y, z$  dans  $E$ . L'application  $\wedge : E \times E \rightarrow E$  est bilinéaire alternée et surjective.
- 2) Le vecteur  $a \wedge b$  est orthogonal à  $a$  et  $b$  et, si  $a$  et  $b$  sont indépendants, il constitue une base de  $(a, b)^\perp$ .
- 3) Si on remplace la base  $\mathcal{B}$  par  $\mathcal{B}'$  on a  $x \wedge y = (\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B})(x \wedge y)$ ,
- 4) On a, pour  $a, b, c \in E$ , l'identité de Jacobi :

$$a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b) = 0.$$

*Démonstration.* La première assertion vient des définitions et de Partie II, ?? et la seconde en résulte aussitôt (car  $a \wedge b$  est non nul).

---

4. Un grand merci à Georges Lion pour m'avoir communiqué ses notes sur la question.

On a vu, voir Partie II ??, que dans le changement de base  $\mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}'$  on avait  $x \wedge' y = (\det_{\mathcal{B}'} \mathcal{B})(x \wedge y)$  et la formule de l'assertion 3) résulte de la linéarité de  $\overline{\varphi}^{-1}$ .

Pour prouver Jacobi, posons  $J(a, b, c) = a \wedge (b \wedge c) + b \wedge (c \wedge a) + c \wedge (a \wedge b)$ . L'application  $J$  est trilineaire alternée de  $E^3$  dans  $E$ . Si  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base orthogonale de  $E$ , on a, par un calcul standard sur les applications multilinéaires alternées,  $J(a, b, c) = \det_{\mathcal{E}}(a, b, c)J(e_1, e_2, e_3)$ . Il suffit donc de prouver que  $J(e_1, e_2, e_3)$  est nul. C'est une conséquence immédiate de 2).

### 1.2.2 Remarques.

1) Soient  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  deux points de  $\mathbf{P}(E)$ . Comme l'application  $\mathbb{A}$  est bilinéaire, l'image de  $a \wedge b$  dans  $\mathbf{P}(E)$  est indépendante du choix des représentants  $a$  et  $b$  de  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$ . Elle est aussi indépendante du choix de la base  $\mathcal{B}$ . On a donc une façon **bilinéaire** canonique d'associer à deux points  $a, b$  de  $\mathbf{P}(E)$  le pôle de la droite qui les joint que l'on peut noter, avec l'abus de langage habituel,  $a \wedge b$ .

2) Si on a deux droites de  $\mathbf{P}(E)$ , d'équations  $A, B$ , la droite définie par  $D = A \mathbb{A} B$  vérifie  $\varphi^*(A, D) = [A, A, B] = 0$  et  $\varphi^*(B, D) = [B, A, B] = 0$ . C'est la perpendiculaire commune à  $A$  et  $B$ , voir ci-dessous 1.3.14.

3) Si  $b, c$  sont deux points distincts de  $\mathbf{P}(E)$ , le point  $u = a \mathbb{A} (b \mathbb{A} c)$  est le point d'intersection de la polaire de  $a$  et de la droite  $(bc)$ . En effet,  $u$  est orthogonal à  $a$ , donc sur la polaire de  $a$ , et orthogonal à  $b \wedge c$ . Mais ce dernier point est le pôle de  $(bc)$ , donc  $u$  est sur  $(bc)$ . Dans  $\mathbf{P}(E^*)$ , la droite  $A \wedge (B \wedge C)$  est la droite orthogonale à  $A$  et passant par le point d'intersection de  $B$  et  $C$ , c'est une hauteur du triangle dont les côtés sont  $A, B, C$ , voir 3.2.8 ci-dessous.

## 1.2.2 Quelques formules

### Valeurs de $q$ et $\varphi$ sur les produits vectoriels

**1.2.3 Proposition.** *On a les formules suivantes, pour  $a, b, c, d \in E$  :*

1)  $\Delta(q)q(a \wedge b) = q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$  où  $\Delta(q)$  est le discriminant de  $q$  dans la base  $\mathcal{B}$ ,

2)  $\Delta(q)\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = q(a)\varphi(b, c) - \varphi(a, b)\varphi(a, c)$ ,

3)  $\Delta(q)\varphi(a \wedge b, c \wedge d) = \varphi(a, c)\varphi(b, d) - \varphi(a, d)\varphi(b, c)$ .

4)  $q(a \wedge b) = q^*(a \wedge b)$ ,  $\varphi(a \wedge b, c \wedge d) = \varphi^*(a \wedge b, c \wedge d)$ .

*Démonstration.* 1) Supposons d'abord que les vecteurs  $a, b, a \wedge b$  constituent une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  et posons  $\delta = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}')$ . On a, en vertu de 1.2.1.1 :

$$q(a \wedge b) = \det_{\mathcal{B}'}(a, b, a \wedge b) = \delta.$$

Pour calculer  $\delta$  on utilise les discriminants de  $q$  sur  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . On a  $\Delta_{\mathcal{B}'}(q) = \delta^2 \Delta_{\mathcal{B}}(q) = \delta^2 \Delta(q)$ . Mais, comme  $a \wedge b$  est orthogonal au plan  $(a, b)$ , on a  $\Delta_{\mathcal{B}'}(q) = \Delta(q|_{(a,b)}) \times q(a \wedge b) = (q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2)q(a \wedge b)$ . On en déduit la formule annoncée.

Comme la formule est polynomiale, le principe de prolongement des identités algébriques (voir Partie II ??) montre qu'elle est vraie en général. (Le lecteur sceptique la prouvera sans peine par un calcul direct.)

2) Le résultat s'obtient à partir de la relation précédente et de la formule :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} [q(x + y) - q(x) - q(y)].$$

3) Grâce au principe de prolongement des identités algébriques on peut supposer que  $a, b, c$  forment une base. On écrit alors  $d = \lambda a + \mu b + \nu c$  et on calcule les deux membres de l'égalité par linéarité grâce aux formules précédentes. Dans les deux cas on trouve :

$$-\lambda q(a)\varphi(b, c) + \lambda \varphi(a, b)\varphi(a, c) + \mu q(b)\varphi(a, c) - \mu \varphi(a, b)\varphi(b, c).$$

Enfin les relations 4) viennent des formules  $q(x) = q^*(\varphi_x)$  et  $\varphi(x, y) = \varphi^*(\varphi_x, \varphi_y)$ , où l'on a posé  $\varphi_x = \overline{\varphi}(x)$ , voir Partie III ??.

**1.2.4 Remarque.** On notera que les valeurs de  $q(a \wedge b)$  et de  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c)$  ne dépendent du choix de la base que par l'intermédiaire du discriminant de la forme  $q$ . Avec la convention 1.1.3, cela nous permet de préciser les valeurs de  $q$  et  $\varphi$  sur les produits vectoriels :

— dans le cas elliptique, on peut supposer  $\Delta(q) = 1$  et on a  $q(a \wedge b) = q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$  et  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = q(a)\varphi(b, c) - \varphi(a, b)\varphi(a, c)$ ,

— dans le cas hyperbolique, on peut supposer  $\Delta(q) = -1$  et on a  $q(a \wedge b) = \varphi(a, b)^2 - q(a)q(b)$  et  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = \varphi(a, b)\varphi(a, c) - q(a)\varphi(b, c)$ .

## Calcul dans une base orthogonale

La proposition suivante est immédiate :

**1.2.5 Proposition.** *On suppose la base  $e_1, e_2, e_3$  orthogonale et on pose  $\alpha_i = q(e_i)$ . Soient  $x$  et  $y$  des vecteurs de coordonnées  $x_i$  et  $y_i$ . Les coordonnées de  $x \wedge y$  dans la base  $(e_i)$  sont les suivantes :*

$$\frac{1}{\alpha_1}(x_2 y_3 - x_3 y_2), \quad \frac{1}{\alpha_2}(x_3 y_1 - x_1 y_3), \quad \frac{1}{\alpha_3}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

*En particulier, si la base est orthonormée, les coordonnées de  $x \wedge y$  sont les mêmes que celles du produit extérieur  $x \wedge y$  dans la base duale.*

## Le double produit vectoriel

Nous aurons besoin d'une formule de double produit vectoriel :

**1.2.6 Lemme.** *Soient  $a, b, c, d$  quatre vecteurs de  $E$ . On a la formule :*

$$\Delta(q)((a \wedge b) \wedge (c \wedge d)) = [a, c, d]b - [b, c, d]a.$$

*Démonstration.* Cela résulte essentiellement de Partie II, ???. On vérifie d'abord que la formule ne dépend pas du choix de la base (cela résulte de Partie II ??, de 1.2.1 et de Partie III ??), de sorte qu'on peut supposer la base  $\mathcal{B} = (e_i)$  orthogonale. Alors les coordonnées du produit vectoriel  $a \wedge b$  sur la base des  $e_i$  sont égales à celles du produit extérieur  $a \wedge b$  sur celle des  $e_i^*$  à des coefficients  $1/q(e_i)$  près (voir 1.2.5). On en déduit la formule annoncée en tenant compte du fait que  $\Delta(q)$  est le produit des  $q(e_i)$ .

## Le jeu des deux bases

En utilisant le fait que  $a \wedge b$  est un concomitant (voir Partie II ??) sous  $GL(E)$ , on vérifie immédiatement que l'application  $(a, b) \mapsto a \wedge b$  est un concomitant pour le groupe  $O(q)$ . Vu le résultat de Partie II ??, il en résulte que les coordonnées du produit vectoriel  $a \wedge b$  sur une base qui lui est liée vont être des invariants sous  $O(q)$ . C'est ce qu'explique le théorème suivant, dont une lecture attentive fournit de nombreux résultats de géométrie élémentaire, voir 3.5.3 :

**1.2.7 Théorème.** *Soit  $a, b, c$  une base de  $E$  et soit  $a^*, b^*, c^*$  la base duale dans  $E^*$ . On considère les produits extérieurs  $b \wedge c, c \wedge a, a \wedge b$  et les produits vectoriels  $b \wedge c, c \wedge a$  et  $a \wedge b$ .*

1) *On a la formule  $b \wedge c = [a, b, c]a^*$  et les formules analogues obtenues en permutant circulairement  $a, b, c$ .*

2) *Les formes  $b \wedge c, c \wedge a, a \wedge b$  (resp. les produits vectoriels  $b \wedge c, c \wedge a$  et  $a \wedge b$ ) forment une base de  $E^*$  (resp. de  $E$ ).*

3) *On a les formules de changement de base :*

$$[a, b, c]a = q(a)(b \wedge c) + \varphi(a, b)(c \wedge a) + \varphi(c, a)(a \wedge b),$$

*et les formules analogues obtenues en permutant circulairement  $a, b, c$  ;*

$$[a, b, c](b \wedge c) = q(b \wedge c)a + \varphi(b \wedge c, c \wedge a)b + \varphi(a \wedge b, b \wedge c)c,$$

*et les formules analogues obtenues en permutant circulairement  $a, b, c$ .*

**1.2.8 Remarque.** Vu les formules de 1.2.3, les coefficients de  $b \wedge c$  s'écrivent au moyen des invariants  $[a, b, c]$ ,  $q(a)$ ,  $\varphi(a, b)$ , etc. dont on verra, voir 9.1.1, que ce sont les seuls invariants pour  $O(q)$ .

*Démonstration.* 1) On calcule la forme linéaire  $b \wedge c$  définie par  $(b \wedge c)(x) = [b, c, x]$ . Avec cette formule, on voit que  $b \wedge c$  est nulle sur  $b$  et  $c$  et qu'on a  $(b \wedge c)(a) = [a, b, c]$ , de sorte que  $b \wedge c$  est bien la forme  $[a, b, c]a^*$ . Cela montre que les trois formes  $b \wedge c$ ,  $c \wedge a$  et  $a \wedge b$  forment une base de  $E^*$  donc que les produits vectoriels  $b \wedge c$ ,  $c \wedge a$  et  $a \wedge b$  forment une base de  $E$  et on obtient 2).

3) On peut donc  $a, b, c$  sur la base des produits vectoriels, par exemple  $a = \lambda(b \wedge c) + \mu(c \wedge a) + \nu(a \wedge b)$ . Pour calculer les coefficients on évalue  $q(a) = \varphi(a, a)$ ,  $\varphi(a, b)$  et  $\varphi(a, c)$ . On a  $q(a) = \lambda\varphi(a, b \wedge c)$  (car les autres vecteurs sont orthogonaux à  $a$ ) d'où  $q(a) = \lambda[a, b, c]$ . Les autres formules sont analogues. Autrement dit, la matrice de passage de la base des  $b \wedge c$ ,  $c \wedge a$ ,  $a \wedge b$  à celle des  $a, b, c$  est le produit par  $1/[a, b, c]$  de la matrice de  $q$  dans la base  $a, b, c$ .

La méthode est la même pour l'autre formule en écrivant  $b \wedge c = \lambda a + \mu b + \nu c$  et en résolvant le système obtenu à partir des formules  $\varphi(a, b \wedge c) = [a, b, c]$ ,  $\varphi(b, b \wedge c) = \varphi(c, b \wedge c) = 0$ .

## 1.3 Points et droites

*Nous entrons dans le vif du sujet. Attention, par rapport aux textes standard sur les géométries non euclidiennes, ce livre présente une singularité. En effet, les points et les droites que nous définissons ici ne vérifient pas toujours l'axiome de base de la géométrie d'Euclide : par deux points passe une droite et une seule. Il nous semble, en effet, qu'il est préférable de renoncer à cet axiome dans un premier temps, même si le poids des traditions s'y oppose. Cette généralisation ne concerne d'ailleurs que le cas hyperbolique pour lequel elle revient à ajouter aux points du disque de Klein les points extérieurs. Dans ce cas, on verra que le surcroît d'efficacité obtenu en utilisant la polarité vaut bien quelques concessions. On verra tout au long des chapitres suivants qu'on retrouve aisément les résultats usuels en spécialisant les résultats généraux aux points et droites hyperboliques.*

### 1.3.1 Quelques explications

Le cadre est toujours le plan projectif  $\mathbf{P}(E)$  muni d'une forme quadratique  $q$ . Pour fixer les idées, supposons que le corps de base est le corps des réels et qu'on est dans le cas hyperbolique usuel, c'est-à-dire que  $q$  est la

forme  $x^2 + y^2 - t^2$  (le cas elliptique ne pose pas de problème). Appelons  $\Gamma$  la conique  $V(q)$  (le cercle unité si l'on préfère). Dans ce cas, il y a trois sortes de points (et de droites) qui peuvent, à bon droit, revendiquer cette appellation. Il y a d'abord les points  $a$  de  $\mathbf{P}(E)$  (tous les points) et les droites projectives  $D$  (toutes les droites). À l'opposé, on sait (et nous y reviendrons) que dans la géométrie hyperbolique usuelle les points sont seulement ceux qui sont intérieurs au cercle unité, i.e. vérifient  $q(a) < 0$ , et que les droites correspondent aux droites projectives  $D$  avec  $q^*(D) = q(d) > 0$  si  $d = D^\perp$  (les droites "hyperboliques", celles qui rencontrent  $\Gamma$  en deux points).

Nous allons considérer, pour notre part, une notion médiane entre ces deux extrêmes : pour nous, les points seront les points  $a \in \mathbf{P}(E)$  **non isotropes** (i.e. vérifiant  $q(a) \neq 0$ , donc non situés sur  $\Gamma$ ) et les droites les droites projectives  $D$  **non isotropes** (i.e. les droites non tangentes à  $\Gamma$  ou encore telles que  $d = D^\perp$  soit non isotrope).

Ce choix inhabituel mérite une justification. Répétons d'abord qu'il ne concerne que le cas hyperbolique : dans le cas elliptique les trois choix coïncident (il n'y a pas ni vecteurs ni droites isotropes et  $q$  est toujours  $> 0$ ). Ensuite, expliquons le rejet de chacune des autres solutions :

1) Nous avons rejeté les points et droites isotropes pour une raison géométrique simple : ils ne sont pas axes ou centres de symétries orthogonales. Cela les disqualifie pour être des médiatrices, bissectrices (pour les droites) ou milieux (pour les points). Cela étant, ils joueront tout de même un rôle non négligeable (par exemple, les points isotropes sont ce qu'on appelle les "bouts" en géométrie hyperbolique classique).

2) Nous avons préféré élargir le cas hyperbolique usuel pour plusieurs raisons. Bien entendu, il y a un prix à payer qui est de commettre un crime de lèse-Euclide, puisque l'axiome fondateur de la géométrie d'Euclide et des autres : *par deux points passe une droite et une seule* n'est plus toujours vrai, mais que le lecteur se rassure, il est toujours possible de revenir au cadre hyperbolique familier<sup>5</sup>, voir 2.4.3.

Les raisons de notre choix sont de deux ordres.

D'abord, le cas usuel ne s'applique guère que lorsque le corps est celui des réels (ou au moins un corps ordonné) et il peut y avoir de la belle géométrie sur d'autres corps (notamment  $\mathbf{C}$  ou les corps finis), que nous avons souhaité développer aussi ici. Ensuite, l'intérêt principal de notre choix est de permettre d'utiliser systématiquement la dualité. Cela permet de comprendre

---

5. En fait, dans cet axiome on peut penser que l'unicité est encore plus importante que l'existence et elle sera assurée dans le modèle choisi. C'est cet argument qui fait qu'on n'utilise pas la sphère comme modèle de la géométrie elliptique. De plus, comme on est dans  $\mathbf{P}(E)$ , on a toujours en cas d'urgence une droite – peut-être isotrope – qui joint deux points.

beaucoup mieux un certain nombre de phénomènes : les notions de pinceaux à la Bachmann, le lien entre médiatrices et bissectrices, les problèmes de milieux, etc. En vérité, toute la présente partie (avec sa traduction dans le cadre hyperbolique usuel, voir par exemple la section 3.4), n'est qu'un long exemple de l'usage de cette méthode. Le lecteur verra combien les démonstrations sont évidentes si l'on prend la peine de considérer, à côté des points vérifiant  $q < 0$  du plan hyperbolique usuel, ceux des ténèbres extérieures, i.e. les points  $q > 0$ . On en aura un premier exemple avec les variantes du théorème de Pappus, voir 1.3.18 ci-dessous.

Une autre raison d'utiliser  $\mathbf{T}$  a été entrevue dans la Partie III, voir ?? et ?? : on a un isomorphisme du groupe  $PGL(2, k)$  sur le groupe  $PO(q)$ , mais l'opération naturelle de  $PGL$  sur  $\mathbf{P}^1(k)$  ne s'étend pas bien à  $PO(q)$ . En revanche, on associe à l'opération de  $PGL$  sur  $\mathbf{P}^1(k) \times \mathbf{P}^1(k)$ , vu comme  $\Gamma \times \Gamma$ , une opération de  $PO(q)$  soit sur  $\mathbf{P}(E^*)$  en associant à deux points  $a, b$  la droite  $(ab)$ , soit sur  $\mathbf{P}(E)$  en associant à  $a, b$  le point d'intersection des tangentes en  $a$  et  $b$ . Mais, bien entendu, ce point est extérieur, donc dans  $\mathbf{T}$ !

## 1.3.2 Définition

**1.3.1 Définition.** *On appelle **point** un élément non isotrope de  $\mathbf{P}(E)$ . On appelle **droite** un élément non isotrope de  $\mathbf{P}(E^*)$  (que l'on identifie à une droite de  $\mathbf{P}(E)$ ). Entre ces objets, la notion d'incidence est celle de  $\mathbf{P}(E)$ .*

**1.3.2 Notations.** Nous appellerons (dans cette partie) point et droite (tout court, ou en précisant non isotropes si besoin est) ceux introduits ci-dessus, points et droites **projectifs** ou de  $\mathbf{P}(E)$  les points et droites généraux du plan. Dans le cas réel, nous définirons plus loin, voir 2.4.1, le modèle de Klein  $\mathbf{K} = \{a \in \mathbf{P}(E) \mid q(a) < 0\}$  et nous appellerons **hyperboliques** les points de  $\mathbf{K}$  et les droites  $D$  vérifiant  $q^*(D) = q(d) > 0$  (avec  $d = D^\perp$ ).

**1.3.3 Remarques.**

1) Dans le cas elliptique, il n'y a pas de restriction sur les points ni sur les droites. Dans le cas hyperbolique, les points sont tous les points de  $\mathbf{P}(E)$  sauf les points de la conique  $\Gamma$  définie par  $q = 0$ , les droites sont toutes les droites, sauf les tangentes à  $\Gamma$ , voir Partie III. Ainsi, dans la figure ci-dessus, tous les points sont des points en notre sens sauf  $i$  et  $j$ , mais seuls  $a, b$  sont hyperboliques. Toutes les droites sont des droites en notre sens sauf  $C$ , les droites  $A, D, G, H$  étant de plus hyperboliques.

2) Comme on l'a dit, avec ces définitions, la relation d'incidence ne vérifie pas la propriété usuelle de la géométrie d'Euclide : par deux points passe une



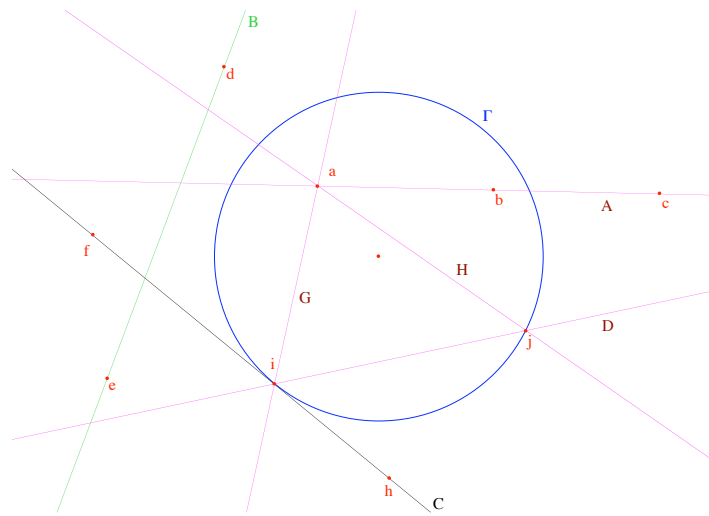


FIGURE 1.1 – Points et droites dans le plan hyperbolique

droite (il suffit de prendre deux points non isotropes situés sur une droite isotrope comme  $f$  et  $h$  ci-dessus). En revanche, l'unicité est garantie.

3) De l'autre côté, deux droites distinctes se coupent en un unique point  $a$  de  $\mathbf{P}(E)$ , donc en un unique point en notre sens, **sauf** si  $a$  est isotrope. Dans ce cas (et dans ce cas seulement<sup>6</sup>) on dira que les droites sont **parallèles** comme  $D$  et  $G$  ci-dessus. On notera que le postulat d'Euclide est faux avec cette notion de parallèle. En effet, si  $a$  est un point (non isotrope) et  $D$  une droite (non isotrope) il y a deux cas possibles :

a) Si  $D$  ne coupe pas  $\Gamma$  (par exemple si  $\Gamma$  est vide comme en elliptique) il n'y a pas de parallèle à  $D$  passant par  $a$ .

b) Si  $D$  coupe  $\Gamma$  en deux points  $i, j$  (rappelons que  $D$  n'est pas tangente à  $\Gamma$ ), il y a deux parallèles à  $D$  passant par  $a$  : les droites  $(ai)$  et  $(aj)$  ( $G$  et  $H$  sur la figure).

### 1.3.3 Triangles

Il y a plusieurs notions pertinentes en ce qui concerne les triangles :

#### 1.3.4 Définition.

1) On appelle **triangle généralisé** (resp. **trilatère généralisé**) la donnée de trois points  $a, b, c \in \mathbf{P}(E)$  non alignés (resp. de trois droites  $A, B, C$  non

6. Quand on travaillera dans le plan hyperbolique réel on dira parfois "faiblement parallèle" dans le cas de deux droites hyperboliques qui se coupent à l'extérieur de  $\mathbf{K}$ .

concourantes). Un tel triangle (resp. trilatère) est noté  $t = abc$  (resp.  $T = ABC$ ). Les points  $a, b, c$  sont les sommets de  $t$  et les droites  $(bc), (ca), (ab)$  sont ses côtés. Les droites  $A, B, C$  sont les côtés de  $T$  et ses sommets sont  $(BC), (CA), (AB)$  (vus comme droites de  $\mathbf{P}(E^*)$ , qui correspondent aux points  $B \cap C, C \cap A, A \cap B$  de  $\mathbf{P}(E)$ ).

2) On dit qu'un triangle généralisé (resp. un trilatère généralisé) est un **triangle** (resp. un **trilatère**) si les points  $a, b, c$  sont des points au sens de 1.3.1 (resp. si les droites sont des droites au sens de 1.3.1).

**1.3.5 Commentaire.** Dans ce qui suit, l'appellation triangle  $abc$  sous-entend donc toujours deux choses :

- les points  $a, b, c$  sont non isotropes,
- ils sont non alignés (et donc *a fortiori* distincts).

### 1.3.4 Perpendiculaires

Notons d'abord qu'en vertu de 1.1.8 les notions que nous venons de définir sont compatibles avec l'orthogonalité :

**1.3.6 Proposition.** *La polaire d'un point est une droite ; le pôle d'une droite est un point. (Ici les mots point et droite sont à prendre en notre sens, c'est-à-dire non isotropes.)*

Les notions de pôle et polaire permettent de définir la notion de droites perpendiculaires dans notre cadre (voir encore 1.1.8) :

**1.3.7 Proposition-Définition.** *Soient  $A, B$  deux droites (non isotropes) et  $a, b$  leurs pôles. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $A$  et  $B$  sont conjuguées pour  $q^*$ ,
- 2)  $a$  et  $b$  sont conjugués pour  $q$ ,
- 3) le pôle de  $A$  (resp. de  $B$ ) est sur  $B$  (resp. sur  $A$ ).

*On dit alors que  $A$  et  $B$  sont **perpendiculaires**.*

**1.3.8 Proposition.** *Deux droites  $A$  et  $B$  perpendiculaires sont distinctes et se coupent en un point  $c$  (non isotrope). (Autrement dit : deux perpendiculaires ne sont pas parallèles!)*

*Démonstration.* Comme  $A$  et  $B$  sont conjuguées et non isotropes, elles ne peuvent être égales. Soit  $c$  le point d'intersection de  $A$  et  $B$  et  $a, b$  leurs pôles (distincts et non isotropes). Supposons  $c$  isotrope. Il est alors orthogonal à  $c$ , mais aussi à  $a$  (puisque'il est sur la polaire  $A$  de  $a$ ). Cela montre que la droite  $c^\perp$  (qui est isotrope) n'est autre que  $(ac) = B$  et c'est absurde.

### 1.3.9 Remarques.

- 1) La propriété 3) traduit la “réciprocité polaire”, voir Partie III ??.
- 2) Soient  $A$  et  $B$  deux droites se coupant en  $c$  et soient  $a, b$  leurs pôles. Alors les droites sont perpendiculaires si et seulement si le triangle  $abc$  est autopolaire.

La notion de triangle rectangle s’exprime simplement en termes de  $q$  et  $\varphi$  :

**1.3.10 Proposition-Définition. (Pré-Pythagore)** Soit  $abc$  un triangle (au sens de 1.3.4). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- 1) Les droites  $(ab)$  et  $(ac)$  sont perpendiculaires.
- 2) On a  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = 0$ .
- 3) On a la relation  $q(a)\varphi(b, c) = \varphi(a, b)\varphi(a, c)$ .

On dit alors que le triangle  $abc$  est **rectangle** en  $a$ .

*Démonstration.* Le fait que  $(ab)$  et  $(ac)$  soient perpendiculaires est équivalent à l’orthogonalité de leurs pôles  $a \wedge b$  et  $a \wedge c$ . On conclut en utilisant la formule  $\Delta(q)\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = q(a)\varphi(b, c) - \varphi(a, b)\varphi(a, c)$ .

**1.3.11 Proposition.** Soient  $a$  un point et  $D$  une droite. On suppose que  $a$  n’est pas le pôle de  $D$ . Alors, il existe une unique droite passant par  $a$  et perpendiculaire à  $D$ .

*Démonstration.* C’est la droite  $(ad)$  où  $d = D^\perp$ .

**1.3.12 Remarque.** La restriction sur le pôle est essentielle. Si  $a$  est le pôle de  $D$  toute droite passant par  $a$  est perpendiculaire à  $D$  et il n’y a plus unicité. Ce défaut d’unicité a pour conséquence que deux droites perpendiculaires à une même troisième peuvent se couper (et ne sont donc pas nécessairement parallèles). C’est notamment le cas en géométrie elliptique. C’est cela qui fait que la démonstration euclidienne de l’**existence** d’une parallèle à une droite passant par un point est en défaut (on utilise une double perpendiculaire).

La remarque suivante est évidente, mais fondamentale, car elle ramène tous les problèmes de concours à des problèmes d’alignement, et réciproquement :

**1.3.13 Proposition.** Trois points  $a, b, c$  sont alignés si et seulement si leurs polaires sont concourantes.

*Démonstration.* Cela résulte de Partie III ?? (l’application  $a \mapsto \varphi_a$  est linéaire donc l’application point-polaire est une homographie).

*Cette remarque utilise fondamentalement le fait que  $q$  est non dégénérée. Il n’y a rien de tel sinon (notamment en euclidien). C’est ce qui justifie que nous traitons séparément le cas euclidien d’une part et les cas elliptique et hyperbolique d’autre part.*

## Perpendiculaires communes

**1.3.14 Proposition-Définition.** Soient  $A, B$  deux droites distinctes se coupant en un point  $c$  non isotrope. Il existe une unique droite  $D$  qui est perpendiculaire à la fois à  $A$  et  $B$ , c'est la polaire de  $c$ . On l'appelle **la perpendiculaire commune** à  $A$  et  $B$ . Si  $a$  et  $b$  sont les pôles de  $A$  et  $B$  on a  $D = (ab)$ .

*Démonstration.* La droite  $D$  est nécessairement la polaire de  $c$ . C'est une droite (non isotrope) si et seulement si  $c$  est non isotrope. Par ailleurs, comme  $D$  doit contenir les pôles  $a$  et  $b$  de  $A$  et  $B$ , c'est nécessairement la droite  $(ab)$ .

**1.3.15 Remarques.**

1) Si les droites distinctes  $A$  et  $B$  se coupent en un point  $c$  isotrope (i.e. sont parallèles), le point  $c$  est orthogonal aux pôles  $a$  et  $b$ . Si  $D$  est une perpendiculaire commune à  $A$  et  $B$  ce doit être la droite  $(ab)$  qui n'est autre que  $c^\perp$ , donc isotrope. Dans ce cas, il n'y a donc pas de perpendiculaire commune.

2) Une équation de la perpendiculaire commune à  $A$  et  $B$  est  $A \mathbb{A} B$ , voir 1.2.2.2.

*La notion de perpendiculaire commune est essentielle en géométrie non euclidienne. On notera que la situation est exactement l'inverse de la géométrie euclidienne où deux droites sécantes n'ont pas de perpendiculaire commune, tandis que deux droites parallèles en ont une infinité (voir Partie V, tout vient du fait que la droite de l'infini est dans le noyau de  $q^*$  en euclidien).*

## Où sont passés les rectangles ?

Une illustration de la remarque précédente est le fait que l'une des configurations les plus familières de la géométrie euclidienne n'existe pas dans le cas des géométries non dégénérées :

**1.3.16 Proposition.** On suppose  $q$  non dégénérée. Il n'existe pas de rectangle dans  $\mathbf{P}(E)$ , c'est-à-dire quatre droites distinctes,  $A, B, C, D$  avec  $A$  et  $B$  perpendiculaires à  $C$  et  $D$ .

*Démonstration.* En effet, en vertu de 1.3.14 et 1.3.15, il y a au plus une perpendiculaire commune à deux droites distinctes.

## Application hyperbolique, ou comment fabriquer des théorèmes

Examinons le plan hyperbolique usuel ( $k = \mathbf{R}$ ,  $q = x^2 + y^2 - t^2$ ) et le modèle de Klein  $\mathbf{K}$  qui consiste (voir 1.3.2) à ne considérer comme points que

ceux qui sont intérieurs au cercle unité  $\Gamma$  ( $q(a) < 0$ ) et comme droites (hyperboliques) que celles qui coupent  $\Gamma$ . Dans ce cas, deux droites hyperboliques ne se coupent pas toujours dans  $\mathbf{K}$ , elles peuvent se couper sur  $\Gamma$  (droites parallèles) ou à l'extérieur de  $\Gamma$ . Dans nombre de questions, notamment celle du concours des droites remarquables du triangle, la perpendiculaire commune à deux droites va apparaître comme un ersatz de point commun lorsque les droites se coupent à l'extérieur, en vertu du lemme suivant :

**1.3.17 Lemme.** *Deux droites hyperboliques distinctes  $D, D'$  se coupent à l'extérieur de  $\Gamma$  si et seulement si elles admettent une perpendiculaire commune qui est une droite hyperbolique.*

*Démonstration.* En effet si  $a$  est l'intersection de  $D$  et  $D'$  et  $A$  sa polaire,  $A$  est perpendiculaire à  $D$  et  $D'$ , et elle est hyperbolique si et seulement si on a  $q(a) = q^*(A) > 0$ , donc si  $a$  est extérieur.

Ce lemme permet des traductions hyperboliques de résultats projectifs. Prenons l'exemple du théorème de Pappus, avec une position particulière, le lecteur pourra en écrire autant qu'il le souhaite :

**1.3.18 Proposition. (Variante de Pappus)** *Soient  $D, D'$  deux droites hyperboliques et soient  $a, b, c$  (resp.  $a', b', c'$ ) des points distincts de  $D$  (resp.  $D'$ ) tous situés dans  $\mathbf{K}$ . Supposons par exemple que les droites  $(bc')$  et  $(b'c)$  (resp.  $(ac')$  et  $(a'c)$ ) se coupent en  $u \in \mathbf{K}$  (resp.  $v \in \mathbf{K}$ ), mais que les droites  $(ab')$  et  $(a'b)$  se coupent en un point  $w$  extérieur à  $\mathbf{K}$ , de sorte que la polaire  $W$  de  $w$  est la perpendiculaire commune à  $(ab')$  et  $(a'b)$ . Alors, la droite  $(uv)$  est perpendiculaire à  $W$ .*

*Démonstration.* En effet, en vertu du théorème de Pappus ordinaire, la droite  $(uv)$  passe par le point d'intersection  $w$  des droites  $(ab')$  et  $(a'b)$ , donc est perpendiculaire à  $W$ . La figure ci-dessous est réalisée dans le modèle du disque de Poincaré, voir chapitre 2.

**1.3.19 Remarque.** Attention, deux droites qui se coupent à l'extérieur de  $\Gamma$  ne sont pas parallèles au sens de 1.3.3.3. Il y a cependant une sorte de "parallélisme à trois" : trois droites seront dites **pacoiches**<sup>7</sup> si elles admettent une perpendiculaire commune (cela signifie qu'elles concourent en dehors de  $\mathbf{K}$ ). Dans le cas présent,  $(ab')$ ,  $(a'b)$  et  $(uv)$  sont donc pacoiches. Quand on sera plus savant on parlera de pinceau, voir 3.4.13.

---

7. Ce mot est issu du patois picard et son origine reste mystérieuse.

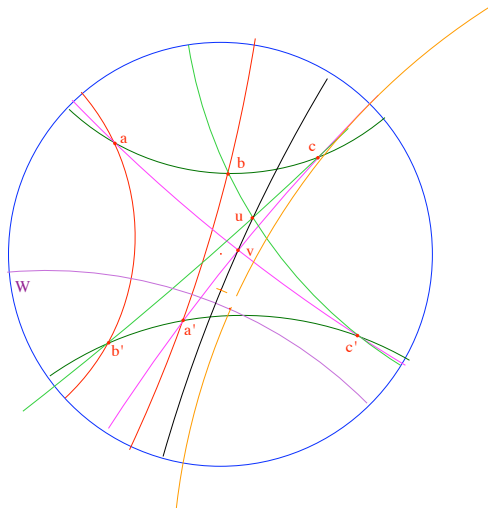


FIGURE 1.2 – Une variante de Pappus

## 1.4 Isométries

Dans ce paragraphe nous rappelons quelques résultats sur les isométries, dont certains ont été vus dans la partie précédente. Un point fondamental est l'étude des involutions et de leurs composées. Ces notions seront constamment utilisées dans la suite.

### 1.4.1 Isométries et homographies

Rappelons qu'on appelle  $PO(q)$  le sous-groupe du groupe  $PGL(E)$  des homographies de  $\mathbf{P}(E)$  qui sont dans l'image du groupe orthogonal  $O(q)$ . Les éléments de ce groupe sont donc les homographies  $\bar{u}$  où  $u \in GL(E)$  vérifie  $q \circ u = u$ . Rappelons pour mémoire, voir Partie III ?? et ?? et Partie I ?? :

**1.4.1 Proposition.** Soit  $\bar{u} \in PO(q)$ . On a les propriétés suivantes :

- 1)  $\bar{u}$  conserve l'alignement,
- 2)  $\bar{u}$  laisse stable  $\Gamma = V(q)$ ,
- 3)  $\bar{u}$  conserve l'orthogonalité (ou la conjugaison) par rapport à  $q$ .

**1.4.2 Remarques.**

- 1) Lorsque  $q$  est anisotrope la conique  $\Gamma$  est vide et le point 2) est sans objet. Lorsque la forme est de Lorentz, la conique  $\Gamma$  associée est non vide et les éléments de  $PO(q)$  sont exactement les homographies qui laissent stables  $\Gamma$  (voir Partie III ??).
- 2) Si  $\bar{u}$  est dans  $PO(q)$  il est l'image de  $u \in O(q)$ , mais aussi de  $-u \in O^+(q)$ . On en déduit que le groupe  $PO(q)$  est isomorphe à  $O^+(q)$  (voir Partie III

*loc. cit.*; la démonstration donnée vaut aussi dans le cas anisotrope).

3) Lorsqu'une homographie  $\bar{u}$  envoie un point  $\bar{a}$  en  $\bar{b}$ , on a  $u(a) = \lambda b$  pour un certain  $\lambda \neq 0$ . On a donc  $q(a) = \lambda^2 q(b)$  donc  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Conformément à 1.1.4, on écrira cette relation non seulement avec les vecteurs, mais avec les points.

**1.4.3 Remarque.** Rappelons aussi (voir Partie III ??) que le groupe  $PO(q)$  est isomorphe au groupe  $PGL(2, k)$  des homographies d'une droite projective. En particulier, comme groupe algébrique (ou comme variété), il est de dimension <sup>8</sup> 3 (les matrices  $2 \times 2$  sont de dimension 4 et on passe au quotient par le groupe des homothéties isomorphe à  $k^*$  qui est de dimension 1).

## 1.4.2 Involutions

Nous avons montré dans la partie III, voir ??, que les involutions de  $PO(q)$  sont les images des involutions de  $O(q)$  (la preuve vaut aussi dans le cas anisotrope) et ce sont donc les images des réflexions (qui sont dans  $O^-(q)$ ) et des renversements<sup>9</sup> (qui sont dans  $O^+(q)$ ).

**1.4.4 Définition.** Si  $D$  est une droite de  $\mathbf{P}(E)$ , non tangente à  $\Gamma$ , image d'un plan vectoriel non isotrope  $\widehat{D}$  de  $E$ , on note  $\tau_D$  l'homographie image de la réflexion de plan  $\widehat{D}$  et on l'appelle **symétrie axiale (ou réflexion)** d'axe  $D$ . Si  $d$  est un point de  $\mathbf{P}(E)$ , non situé sur  $\Gamma$ , image d'une droite vectorielle  $\widehat{d}$  non isotrope de  $E$ , on note  $\sigma_d$  l'homographie image du renversement d'axe  $\widehat{d}$  et on l'appelle **symétrie centrale**, de centre ou point de Frégier  $d$ .

En vérité, en géométrie non euclidienne (au moins si l'on utilise les points et droites en notre sens), les symétries axiales et centrales sont une seule et même chose :

**1.4.5 Proposition-Définition.** Toute involution de  $PO(q)$  est à la fois une symétrie axiale et une symétrie centrale correspondant à une droite  $D$  et à un point  $d$ , non isotropes, de  $\mathbf{P}(E)$ . Précisément, on a  $\tau_D = \sigma_d$  si et seulement si  $D$  est la polaire de  $d$ . Une involution admet donc à la fois un axe  $D$  et un point de Frégier  $d$ . Les points fixes sous  $\tau_D = \sigma_d$  sont le point  $d$  et les points de  $D$ . Les droites stables par  $\tau_D = \sigma_d$  sont  $D$  et les droites passant par  $d$ . Si  $m$  n'est pas un point fixe et si  $m'$  est son image, la droite  $(mm')$  est perpendiculaire à  $D$  et passe par  $d$ .

---

8. On retrouve ce résultat en notant que  $GL(E)$  est de dimension 9 et que l'espace des formes quadratiques est de dimension 6.

9. Rappelons qu'une réflexion (resp. un renversement) est une involution dont l'espace propre relatif à la valeur propre  $-1$  est de dimension 1 (resp. 2), voir [Per96].

#### 1.4.6 Remarques.

- 1) Cette définition est ce qui justifie la définition 1.3.1, les points  $d$  et les droites  $D$  en notre sens étant ceux pour lesquels les symétries existent, qu'on les considère comme centrales  $\sigma_d$  ou axiales  $\tau_D$ .
- 2) Les involutions engendrent  $PO(q)$  (précisément, tout élément est produit d'au plus deux involutions, voir ci-dessous).
- 3) Le fait que les involutions, telles Janus, aient deux visages, celui des symétries axiales, celui des symétries centrales, n'est qu'une des multiples manifestations de la polarité. On verra au chapitre 3 qu'il est riche de conséquences.
- 4) Voir l'exercice 1.5.6 pour la construction de l'image d'un point par une réflexion dans le cas hyperbolique.

**Attention**, dans le cas hyperbolique, sur le corps des réels, la plupart des auteurs distinguent les symétries centrales  $\sigma_d$ , celles dont le point de Frégier est un point hyperbolique, i.e. un point de  $\mathbf{K}$ , et les symétries axiales  $\tau_D$ , celles dont le point de Frégier est un point extérieur et dont la droite, au contraire, est hyperbolique (c'est-à-dire rencontre  $\mathbf{K}$ ). Nous retrouverons une justification algébrique de cette dichotomie en 1.4.14 ci-dessous.

### 1.4.3 Décomposition en produit d'involutions : le théorème de Cartan-Dieudonné

Rappelons l'énoncé du théorème vectoriel dans le cas qui nous intéresse :

**1.4.7 Théorème. (Cartan-Dieudonné)** *Soit  $u \in O(q)$  une isométrie vectorielle. Si  $u$  est dans  $O^+(q)$  elle est produit de 0 ou 2 réflexions et elle admet alors la valeur propre 1. Si  $u$  est dans  $O^-(q)$  elle est produit d'une ou trois réflexions et admet la valeur propre  $-1$ .*

*Démonstration.* Voir [Per96]. Pour la dernière assertion il suffit de considérer  $-u$  qui est dans  $O^+(q)$ .

**1.4.8 Remarque.** Si on considère  $\bar{u} \in PO(q)$ , on peut toujours, quitte à changer  $u$  en  $-u$ , supposer que  $u$  est dans  $O^+(q)$ . On voit que tous les éléments de  $PO(q)$  proviennent d'isométries admettant la valeur propre 1. Cette situation sera exploitée au paragraphe suivant.

On en déduit la variante projective (voir aussi Partie III ?? et exercice ??) :

#### 1.4.9 Proposition.

- 1) *Tout élément  $g$  de  $PO(q)$  s'écrit (de manière non unique) comme produit*



de deux involutions  $g = \sigma_a \sigma_b$ .

2) Tout élément de  $PO(q)$  admet (au moins) une droite stable et un point fixe (éventuellement isotropes).

3) Soient  $a, b$  deux points non isotropes,  $A$  et  $B$  leurs polaires,  $\sigma_a = \tau_A$  et  $\sigma_b = \tau_B$  les involutions associées. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Le produit  $\sigma_a \sigma_b = \tau_A \tau_B$  est une involution,

ii)  $\sigma_a$  et  $\sigma_b$  sont distincts et commutent,

iii)  $a$  et  $b$  sont orthogonaux,

iv) les droites  $A$  et  $B$  sont perpendiculaires.

Dans ce cas on a  $\sigma_a \sigma_b = \sigma_c = \tau_C$  où  $C$  est la droite  $(ab)$  et  $c$  son pôle.

*Démonstration.* 1) C'est le théorème de Cartan-Dieudonné, complété avec l'écriture de l'identité (comme carré de  $\sigma_a$ ) et celle d'une involution  $\sigma_a$  comme  $\sigma_b \sigma_c$  où  $a, b, c$  est une base orthogonale (un triangle autopolaire).

2) On écrit  $g = \sigma_a \sigma_b$ . Si  $g$  n'est pas l'identité, on a  $a \neq b$  et il est clair que  $(ab)$  est stable par  $g$ , donc que son pôle est fixe.

3) L'équivalence de i) et ii) est un fait algébrique général et évident et celle de iii) et iv) résulte de la polarité. Le fait que iii) implique i) (et l'assertion supplémentaire) se voit en considérant le pôle de  $(ab)$  (on notera que si  $a$  et  $b$  sont orthogonaux, la droite  $(ab)$  n'est pas isotrope). Pour ii)  $\implies$  iii), le mieux est d'écrire  $\sigma_b = \sigma_a \sigma_b \sigma_a^{-1}$ . Le principe de conjugaison montre que cela signifie  $\sigma_a(b) = b$  et la conclusion s'ensuit.

#### 1.4.10 Remarques.

1) La décomposition d'une isométrie en produit de deux involutions n'est pas unique. Nous reviendrons sur cette question en 1.5.11, 3.3.8 et 4.3.14.

2) La proposition précédente explique à quelle condition le produit de deux involutions en est une. Le produit de trois involutions est étudié ci-dessous.

### 1.4.4 Le lemme des trois involutions

Le résultat suivant, qui est le point fondamental de l'approche de Bachmann, voir [Bac59], explique quand un produit de trois involutions est encore une involution :

**1.4.11 Théorème.** Soient  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$  trois involutions de  $PO(q)$ , de points de Frégier  $a, b, c \in \mathbf{P}(E)$ . Le produit  $f = \sigma_a \sigma_b \sigma_c$  est une involution si et seulement si  $a, b, c$  sont alignés. Si  $A, B, C$  sont les polaires de  $a, b, c$  il revient au même de dire que  $A, B, C$  sont concourantes dans  $\mathbf{P}(E)$ . On a alors  $f = \sigma_d = \tau_D$  où  $d$  est aligné avec  $a, b, c$  et où  $D$  passe par le point de concours de  $A, B, C$ .

#### 1.4.12 Remarques.

1) On voit que deux propriétés géométriques fondamentales s'expriment en termes de composées d'involutions : l'orthogonalité, voir 1.4.9 et l'alignement, voir 1.4.11. Cette constatation est le point de départ de l'approche de Bachmann, cf. [Bac59].

2) En géométrie euclidienne, le même résultat vaut pour les réflexions : la composée de trois réflexions  $\tau_A, \tau_B, \tau_C$  en est une si et seulement si les droites  $A, B, C$  sont concourantes ou parallèles (on le voit aussitôt en notant que la transformation  $\tau_A\tau_B = \tau_D\tau_C$  est une rotation ou une translation). En revanche, le résultat est totalement faux dans le cas des symétries centrales : le produit de trois symétries centrales est **toujours** une symétrie centrale (car l'application vectorielle associée à une telle symétrie est  $-\text{Id}$ ).

*Démonstration.* On donne ici une preuve algébrique, pour une preuve géométrique utilisant le théorème de Desargues sur les pincesaux de coniques, voir 1.5.7. L'assertion est exactement équivalente au lemme suivant, qui n'est pas tout à fait évident :

**1.4.13 Lemme.** *Soient  $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c \in O(q)$  trois réflexions vectorielles de vecteurs propres  $a, b, c \in E$  relatifs à la valeur propre  $-1$ . Le produit  $g = \sigma_a\sigma_b\sigma_c$  est une réflexion si et seulement si  $a, b, c$  sont coplanaires.*

*Démonstration.* (du lemme) On peut supposer que les vecteurs  $a, b, c$  ne sont pas deux à deux colinéaires, sinon le résultat est évident.

Supposons  $a, b, c$  coplanaires dans le plan  $P$  et soit  $d$  orthogonal à  $P$ .  $C$ 'est un vecteur fixe de  $g$ .

Si le plan  $P$  est non isotrope,  $g' = g|_P$  est une réflexion de  $P$  (c'est Cartan-Dieudonné en dimension 2, voir [Per96] ou ci-dessous Partie V ?? :  $g'$  est *a priori* produit d'au plus deux réflexions, mais comme on a  $\det g' = \det g = -1$  il n'y en a qu'une). Il en résulte que  $g$  est une réflexion.

Si le plan  $P$  est de rang 1 (il ne peut être totalement isotrope car la forme  $q$  est non dégénérée), le noyau de  $g|_P$  est  $(d)$  qui est fixe par  $g$  et  $g'$ . Comme  $\det g' = -1$ , l'autre valeur propre de  $g'$  est  $-1$  et  $g'$  est donc diagonalisable, donc  $g$  a un vecteur propre  $e$  relatif à  $-1$  (non isotrope car  $d$  est l'unique droite isotrope de  $P$ ). On considère alors le plan  $H = e^\perp$  qui est non isotrope. En restriction à  $H$ ,  $g$  admet la valeur propre 1 double. Mais alors, c'est l'identité de  $H$  (voir [Per96] ou Partie V, ??). Il en résulte que  $g$  est une réflexion.

Réciproquement, si  $\sigma$  est une réflexion  $\sigma_d$ , on a  $\sigma_a\sigma_b = \sigma_d\sigma_c$  et si  $e$  est orthogonal à  $a, b$  et  $f$  à  $c, d$ , alors  $e$  et  $f$  sont colinéaires (sinon  $\sigma_a\sigma_b$  admet le plan  $(e, f)$  de points fixes et c'est l'identité, voir ci-dessous 1.4.22). Mais alors  $a, b, c, d$  sont dans le plan  $e^\perp$ .

### 1.4.5 Le cas de la forme de Lorentz : commutateurs et involutions directes

Dans ce paragraphe, on suppose que  $q$  est une forme de Lorentz<sup>10</sup> avec  $\Delta(q) = -1$ , selon la convention 1.1.3. On rappelle qu'on note  $\Omega(q)$  le groupe des commutateurs de  $O^+(q)$ . Comme  $-\text{Id}$  est une isométrie négative, ce groupe est isomorphe à son image  $P\Omega(q)$  dans  $PO(q)$ . Les résultats de la partie III se traduisent ainsi :

**1.4.14 Proposition.** *Soit  $\sigma$  une involution de point de Frégier  $d$ . Alors,  $\sigma$  est dans  $\Omega(q)$  si et seulement si on a  $q(d) = -1$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Dans le cas  $k = \mathbf{R}$ , cela signifie que  $d$  est dans  $\mathbf{K}$ .*

*Démonstration.* C'est Partie III ?? et ??.

**1.4.15 Remarque.** On voit que, dans le cas de  $\mathbf{R}$ , il y a tout de même une différence entre les symétries selon que leur point de Frégier est intérieur (dans ce cas,  $\sigma_d$  est ce que l'on appelle couramment une symétrie centrale) ou extérieur (dans ce cas, on préfère écrire  $\sigma_d$  sous la forme  $\tau_D$  et parler de symétrie axiale, par rapport à une droite hyperbolique). En revanche, il n'y a rien de tel sur les autres corps et notamment sur  $\mathbf{C}$ .

**1.4.16 Corollaire.** *On suppose  $k = \mathbf{R}$ . Les éléments de  $\Omega(q)$  sont produits de deux symétries "de même nature", c'est-à-dire ayant toutes deux leurs points de Frégier à l'intérieur, ou toutes deux à l'extérieur, ceux de  $O^+(q) - \Omega(q)$  sont les produits "mixtes", avec un point intérieur et un extérieur. Les symétries "axiales", c'est-à-dire celles dont le point de Frégier est extérieur, engendrent  $PO(q)$ .*

*Démonstration.* Le dernier point vient du fait qu'une symétrie "centrale"  $\sigma_a$  (i.e. à point de Frégier intérieur) est produit de deux symétries axiales, comme on le voit en prenant une base orthogonale  $a, b, c$ .

### 1.4.6 Les involutions dans les géométries euclidienne et non euclidiennes

Comme promis dans l'introduction, nous discutons ici des points communs et des différences des diverses géométries sur le chapitre des involutions.

---

10. La structure du groupe  $\Omega(q)$  et du quotient  $O^+(q)/\Omega(q)$  est beaucoup plus compliquée dans le cas anisotrope, sauf si  $k$  est le corps des réels, voir [Dieudonné] II §12.

## En géométrie euclidienne plane

Rappelons qu'il y a deux sortes d'involutions, les réflexions (ou symétries axiales)  $\tau_D$  et les symétries centrales  $\sigma_a$ . Les réflexions sont des isométries indirectes, elles admettent une droite de points fixes, elles engendrent le groupe des symétries tout entier et sont transitives sur les points et les droites. Les symétries centrales sont directes, elles admettent un unique point fixe, elles engendrent le sous-groupe distingué  $G$  formé des symétries centrales et des translations, elles sont transitives sur les points, mais pas sur les droites (elles échangent seulement les droites parallèles). Les deux types de symétries forment deux classes de conjugaison distinctes. Toute symétrie centrale est produit de deux réflexions d'axes perpendiculaires. On a le théorème de Bachmann pour les réflexions : un produit de trois réflexions en est une autre si et seulement si les axes sont concourants ou parallèles, mais pas pour les symétries centrales, voir 1.4.12.2.

## Le cas elliptique

Inutile de chercher des similitudes avec la géométrie euclidienne dans ce cas : il n'y en a guère<sup>11</sup>. En particulier les involutions sont à la fois des réflexions et des symétries centrales, puisqu'elles ont à la fois une droite de points fixes  $D$  et un autre point fixe  $d$  (le pôle de  $D$ ). Dans le cas réel il y a une seule classe de conjugaison de symétries, il n'y a pas de notion de transformation directe ou indirecte, nous verrons plus loin que les symétries sont à la fois transitives sur les points et les droites et qu'elles engendrent tout le groupe  $PO(q)$ .

## Le cas d'un corps quelconque

Là encore les choses sont très différentes<sup>12</sup>. Par exemple, sur  $\mathbf{C}$  il n'y a qu'une seule classe d'involutions, transitives sur les points et les droites, qui engendrent le groupe tout entier. Au contraire sur des corps de nombres il y a beaucoup de classes de conjugaison distinctes et beaucoup d'orbites de points et de droites.

---

11. Cela pourrait confirmer le mot de Jacqueline Lelong-Ferrand qui, sur la base des cinq axiomes fondamentaux d'Euclide, considère que la géométrie hyperbolique est à 80% euclidienne, contre 60 % seulement à la géométrie elliptique.

12. Mais c'est aussi le cas des géométries "euclidiennes" sur un corps autre que le corps des réels, si toutefois il en existe, voir par exemple le cas de  $\mathbf{Q}$ , cf. [Die70] II 12 ou [Per96] VI Exercice 6.4.

## Le cas hyperbolique réel

C'est là qu'on peut trouver le plus de ressemblances avec la géométrie euclidienne, mais aussi quelques différences fondamentales. Pour cela, il faut toutefois utiliser le vocabulaire usuel, réservant le nom de points aux points de  $\mathbf{K}$  et celui de droites aux droites qui coupent  $\mathbf{K}$ , ce que nous avons appelé les points et les droites hyperboliques.

Dans ce cas, on a bien deux types de symétries, les réflexions (ou symétries axiales)  $\tau_D$  (avec  $D$  hyperbolique, c'est-à-dire  $d$  extérieur) et les symétries centrales  $\sigma_d$  (avec  $d \in \mathbf{K}$ ). Comme dans le cas euclidien, elles forment deux classes de conjugaison distinctes, admettent respectivement une droite et un point fixe (hyperboliques<sup>13</sup>) et on a une notion de positivité : si on appelle isométries positives celles de  $\Omega(q)$ , les réflexions sont négatives et les symétries centrales positives. On a vu que les réflexions engendrent  $PO(q)$  et on verra plus loin que les réflexions et les symétries centrales sont transitives sur les points et les réflexions sur les droites. Enfin, on a encore le fait que le produit de deux réflexions d'axes perpendiculaires est une symétrie centrale.

Il y a toutefois deux différences essentielles, d'ailleurs étroitement liées. La première concerne le sous-groupe  $G$  engendré par les symétries centrales. Dans le cas hyperbolique, on a vu (cf. 1.4.16) que c'est le groupe  $\Omega(q)$ . Par rapport au cas euclidien c'est un groupe beaucoup plus gros. En effet, le groupe  $Is(X)$  des isométries du plan euclidien est un groupe algébrique de dimension 3 et le sous-groupe  $G$  engendré par les symétries centrales est seulement de dimension 2 (il contient le groupe des translations comme sous-groupe d'indice 2, ou encore, le quotient  $Is(X)/G$  est le groupe des angles de droites  $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$  qui est de dimension 1). Dans le cas hyperbolique, le groupe  $\Omega(q)$  est de dimension 3 comme  $PO(q)$  (et le quotient est réduit à  $\pm 1$ ). On montre d'ailleurs que le groupe  $PO(q)$  est "presque" simple (c'est-à-dire que le groupe  $\Omega(q)$  l'est), tandis qu'en euclidien on a un gros sous-groupe distingué, d'une importance capitale : le groupe des translations.

L'autre différence essentielle concerne la transitivité de  $G$  sur les droites. Dans le cas hyperbolique, on montre qu'il n'y a pas de symétrie centrale<sup>14</sup> qui échange deux droites concourantes et pas non plus deux droites parallèles "au sens fort" (i.e. se coupant sur  $\Gamma$ ). En revanche, comme en euclidien, il y a une telle symétrie qui échange deux droites faiblement parallèles (c'est-à-dire qui ne se coupent ni dans  $\mathbf{K}$ , ni sur  $\Gamma$ ). La différence avec le cas euclidien c'est que cette symétrie est unique. L'explication de ce phénomène est encore à chercher dans les dimensions. Dans le cas euclidien, le groupe  $G$ , qui est

---

13. Rappelons que si l'on considère aussi les points extérieurs les involutions ont toutes à la fois une droite fixe et un point fixe non situé sur cette droite.

14. Voir au chapitre 3 la notion de point bissecteur.

de dimension 2, opère sur l'ensemble des droites (de dimension 2 aussi) avec des orbites qui sont les droites de direction donnée (de dimension 1), donc avec un stabilisateur de dimension 1. Cela montre que pour aller de  $D_1$  à  $D_2$  parallèles il y a une famille de dimension 1 de transformations (les produits de l'une d'elles par le stabilisateur de  $D_2$ ).

En hyperbolique, en revanche, les orbites, i.e. les droites  $\Delta$  faiblement parallèles à une droite  $D$ , forment une famille de dimension 2 (si  $D$  coupe  $\Gamma$  en  $a$  et  $b$  et  $\Delta$  en  $\alpha, \beta$  le couple  $(\alpha, \beta)$  décrit les produits de deux copies de chacun des arcs  $ab$ ). Le stabilisateur est donc de dimension 0, en fait réduit à l'identité, et c'est ce qui explique qu'il n'y a qu'une symétrie centrale qui passe de  $D$  à  $\Delta$ .

Cette remarque a des conséquences géométriques capitales. En effet, l'existence de multiples symétries centrales échangeant deux parallèles euclidiennes (avec un centre sur chaque sécante) est ce qui assure notamment les propriétés angulaires des parallèles (angles alternes-internes, etc.) et l'on sait que c'est cette propriété qui permet de montrer le résultat sur la somme des angles d'un triangle, ou le théorème de l'angle inscrit, et bien d'autres. Il n'y a rien de tel en hyperbolique, avec de nombreuses conséquences, dont la plus importante est peut-être que, faute des outils majeurs que sont les angles alternes-internes, les angles inscrits, la somme des angles d'un triangle, etc. les cas d'isométrie perdent une partie de leur efficacité dans le plan hyperbolique. Nous reviendrons sur ce point au chapitre 6.

### 1.4.7 Le groupe des isométries fixant un point ou stabilisant une droite

*Nous avons vu ci-dessus que tout élément  $\bar{u}$  de  $PO(q)$  est l'image d'une isométrie  $u$  admettant la valeur propre 1 (voir 1.4.8) donc fixant, non seulement un point  $a$  de  $\mathbf{P}(E)$ , mais même un vecteur  $\hat{a}$  de  $E$ . Nous allons exploiter ce fait pour ramener l'étude des isométries de  $\mathbf{P}(E)$  au cas de la dimension vectorielle 2. Il faut distinguer deux cas selon que  $a$  est isotrope ou non. Les groupes étudiés ci-dessous joueront un rôle essentiel au chapitre 8.*

#### Le cas d'un point non isotrope

**1.4.17 Notation.** Soit  $a$  un point non isotrope de  $\mathbf{P}(E)$  et soit  $A$  sa polaire. On note  $G_a$  le sous-groupe de  $PO(q)$  des isométries qui fixent  $a$  :

$$G_a = \{g \in PO(q) \mid g(a) = a\}.$$

On notera que ce groupe est égal au groupe  $G_A$  des  $g$  qui laissent stable la polaire  $A$ . Il contient l'involution  $\sigma_a = \tau_A$ , de point de Frégier  $a$  qui est aussi la symétrie d'axe  $A$ .

Soit  $\hat{a} \in E$  un représentant de  $a$  et  $\hat{A}$  le plan vectoriel d'image  $A$ . On a donc  $\hat{A} = \hat{a}^\perp$ . Pour alléger les notations, la restriction de la forme  $q$  au plan  $\hat{A}$  sera notée  $q|_A$ .

On considère le sous-groupe  $G_{\hat{a}}$  de  $O(q)$  :

$$G_{\hat{a}} = \{g \in O(q) \mid g(\hat{a}) = \hat{a}\}.$$

On définit aussi  $G_{\hat{a}}^+ = G_{\hat{a}} \cap O^+(q)$ . Il est clair que l'homomorphisme  $\pi : O(q) \rightarrow PO(q)$  envoie  $G_{\hat{a}}$  dans  $G_a$ . En fait, on a la proposition suivante :

**1.4.18 Proposition.** *L'homomorphisme  $\pi : G_{\hat{a}} \rightarrow G_a$  est un isomorphisme. Ces groupes sont isomorphes au groupe  $O(q|_A)$ .*

*Démonstration.* Comme les éléments de  $G_{\hat{a}}$  fixent  $\hat{a}$ , la seule homothétie de ce groupe est l'identité, de sorte que  $\pi$  est injectif. Si  $g$  est dans  $G_a$  il provient d'une isométrie  $\hat{g}$  qui laisse stable la droite vectorielle  $(\hat{a})$ . Comme  $a$  est non isotrope, on a donc  $\hat{g}(\hat{a}) = \pm\hat{a}$  par conservation de  $q$ . Quitte à changer  $\hat{g}$  en son opposé on peut supposer qu'il fixe  $\hat{a}$ . Cela montre la surjectivité de  $\pi$ .

Si  $g$  est dans  $G_{\hat{a}}$ , il laisse stable  $\hat{A}$  et l'homomorphisme de restriction  $G_{\hat{a}} \rightarrow O(q|_A)$  est un isomorphisme. On a donc  $G_{\hat{a}} \simeq G_a \simeq O(q|_A)$ .

**1.4.19 Notation.** On note  $G_a^+$  (resp.  $G_a^-$ ) l'image de  $G_{\hat{a}}^+$  (resp.  $G_{\hat{a}}^-$ ) par  $\pi$ . On a  $G_a^+ \simeq O^+(q|_A)$ .

**1.4.20 Remarque.** Attention, il y a une petite difficulté ici. On a vu que  $PO(q)$  est aussi égal à  $PO^+(q)$ . En effet, comme  $-\text{Id}$  est négative, on peut toujours remplacer  $u \in O(q)$  par  $-u$  sans changer l'image  $\bar{u} \in PO(q)$ . En revanche,  $G_a$  n'est pas l'image de  $G_{\hat{a}}^+$  (groupe des isométries positives de  $G_{\hat{a}}$ ). En effet, dans ce dernier groupe on a imposé  $u(\hat{a}) = \hat{a}$ , de sorte qu'on n'a plus la possibilité de multiplier par  $-\text{Id}$  en cas de besoin. En particulier, si on pense aux involutions de  $G_a = G_{\hat{a}}$ , il y en a deux sortes : les réflexions qui, sur  $\hat{A}$ , ont pour valeurs propres 1 et  $-1$  et sont dans  $G_a^-$  et l'unique renversement (donc élément de  $G_a^+$ ) qui fixe  $\hat{a}$  et vaut  $-\text{Id}$  en restriction à  $\hat{A}$ . Les premières sont des involutions de point de Frégier  $c \in A$ , la seconde est l'involution  $\sigma_a$  de point de Frégier  $a$ . On notera que si on regarde l'involution  $\tau$  de point de Frégier  $c \in A$  comme un élément de  $G_{\hat{a}}$ , comme  $a$  est propre pour la valeur propre 1, la droite  $c$  est la droite propre relative à  $-1$ .

## Étude des groupes $G_a$ et $G_a^+$

On reprend les notations ci-dessus. Le résultat suivant, qui se situe au niveau vectoriel, est bien connu (voir par exemple [Per96]) :

**1.4.21 Proposition.** *Soit  $\hat{a}$  un vecteur non isotrope de  $E$ .*

- 1) *Les éléments du groupe  $G_{\hat{a}}^- = G_{\hat{a}} - G_{\hat{a}}^+$  sont des réflexions de vecteur  $x \in \hat{A}$ .*
- 2) *Les éléments du groupe  $G_{\hat{a}}^+$  sont produits de deux réflexions de vecteurs  $x, y \in \hat{A}$ , l'un des vecteurs pouvant être choisi arbitrairement.*
- 3) *Si  $u$  est dans  $G_{\hat{a}}^+$  et  $\tau$  dans  $G_{\hat{a}}^-$ , on a  $\tau u \tau^{-1} = u^{-1}$ . Le groupe  $G_{\hat{a}}$  est produit semi-direct de  $G_{\hat{a}}^+$  par  $\{1, -1\}$ , l'opération de  $-1$  correspondant au passage à l'inverse*
- 4) *Le groupe  $G_{\hat{a}}^+$  est commutatif.*
- 5) *Soit  $u \in G_{\hat{a}}^+$  et soit  $x \in \hat{A}$ . On suppose  $u(x) = x$  (resp.  $u(x) = -x$ ). Alors  $u$  est l'identité (resp. le renversement<sup>15</sup> de droite ( $\hat{a}$ )).*

On notera que le point 5 vaut même si le vecteur  $x$  est isotrope (car alors le plan  $\hat{A}$  est hyperbolique, l'autre droite isotrope est propre aussi et c'est aussi pour la valeur propre 1 (resp.  $-1$ ) car  $u$  est de déterminant 1).

Le résultat suivant<sup>16</sup> nous sera utile :

**1.4.22 Corollaire.** *Soit  $u \in O^+(q)$ . On suppose que  $u$  admet un plan (vectoriel)  $P$  de points fixes. Alors  $u$  est l'identité.*

*Démonstration.* Soient  $e \in P$  un vecteur non isotrope et  $H = e^\perp$ . Le plan non isotrope  $H$  est stable par  $u$ . Soit  $u' = u|_H$ , on a  $u' \in O^+(q|_H)$ . L'intersection  $H \cap P$  est de dimension 1, de sorte que  $u'$  admet un vecteur fixe. Il en résulte que  $u'$  est l'identité, voir 1.4.21.5, donc aussi  $u$ .

Le corollaire suivant ne fait que traduire 1.4.21 en projectif :

**1.4.23 Corollaire.** *Les éléments de  $G_a^- = G_a - G_a^+$  sont des involutions dont le point de Frégier est dans  $A$  (ou dont l'axe passe par  $a$ ). Les éléments de  $G_a^+$  sont produits de deux involutions de points de Frégier dans  $A$ , l'une d'elles étant arbitraire. Si  $u$  est dans  $G_a^+$  et  $\tau$  dans  $G_a^-$ , on a  $\tau u \tau^{-1} = u^{-1}$ . Le groupe  $G_a^+$  est commutatif. La seule involution contenue dans  $G_a^+$  est  $\sigma_a$ . Le groupe  $G_a$  est produit semi-direct de  $G_a^+$  par  $\{1, -1\}$ , l'opération de  $-1$  correspondant au passage à l'inverse.*

<sup>15</sup>. Rappelons que cela signifie qu'on a  $u(\hat{a}) = \hat{a}$  et  $u|_{\hat{A}} = -\text{Id}_{\hat{A}}$ .

<sup>16</sup>. Qui est évident lorsque le plan est non isotrope.



*Démonstration.* Notons seulement que l'assertion sur les involutions de  $G_a^+$  vient du point 5) de 1.4.21.

Le résultat suivant précise les points fixes non isotropes dans le cas de  $G_a^+$ . Il sera complété en 1.4.31.

**1.4.24 Proposition.** *Un élément  $g$  de  $G_a^+$  n'a pas de point fixe non isotrope distinct de  $a$  dans  $\mathbf{P}(E)$  sauf dans deux cas :*

- 1) *si  $g$  est l'identité,*
- 2) *si  $g = \sigma_a = \tau_A$  est l'involution de point de Frégier  $a$ , auquel cas ses points fixes sont  $a$  et les points de  $A$ .*

*Démonstration.* Soit  $u \in O^+(q)$  se projetant sur  $g$ . Si  $x$  est un vecteur non isotrope dont l'image est un point fixe de  $g$  distinct de  $a$ , on a  $u(x) = \pm x$ . Si le signe est  $+$ , le sous-espace propre relatif à la valeur propre 1 est de dimension  $\geq 2$  et on conclut par 1.4.22. Sinon, on écrit  $x = \lambda \hat{a} + y$  avec  $y \in \hat{A}$ , la relation  $u(x) = -x$  impose  $\lambda = 0$ , on a donc  $u(y) = -y$  et on conclut par 1.4.21.5.

Rappelons enfin que la structure de  $G_a^+$  est bien connue (et partant, celle de  $G_a^+$  aussi), voir [Per96].

**1.4.25 Proposition.**

- 1) *Si  $q|_A$  est hyperbolique, le groupe  $G_a^+$  est isomorphe à  $k^*$ . Ses éléments sont appelés **transformations hyperboliques d'axe  $A$** .*
- 2) *Si  $q|_A$  est anisotrope, le groupe  $G_a^+$  est isomorphe à  $\mathbf{U}_k$  (groupe des éléments de norme 1 dans une extension quadratique de  $k$ ). Ses éléments sont appelés **rotations de centre  $a$** .*

*Dans les deux cas l'image de  $\sigma_a = \tau_A$  dans  $k^*$  ou  $\mathbf{U}_k$  est égale à  $-1$ .*

*Démonstration.* On renvoie à [Per96] Ch. VIII 6.2 et 6.4 pour des détails.

1) Supposons  $q|_A$  hyperbolique. On choisit une base de  $E$  obtenue en complétant  $\hat{a}$  par une base hyperbolique de  $\hat{A}$ . La matrice d'un élément de

$G_a^+$  est alors de la forme  $t(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \in k^*$ . L'isomorphisme

de  $k^*$  sur  $G_a^+$  est donné par  $\lambda \mapsto t(\lambda)$ .

2) Si la forme  $q|_A$  est anisotrope, elle est équivalente à  $x^2 + \alpha y^2$ , où  $-\alpha$  n'est pas un carré de  $k$ . Si l'on complète alors  $\hat{a}$  par une base orthogonale de

$\hat{A}$ , la matrice d'un élément de  $G_a^+$  est de la forme  $\rho(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -y \\ 0 & y & x \end{pmatrix}$ ,

avec  $x^2 + \alpha y^2 = 1$ . L'isomorphisme cherché associe à l'élément  $x + \sqrt{-\alpha}y$  de  $\mathbf{U}_k$  la matrice  $\rho(x, y)$ .

#### 1.4.26 Remarques.

1) On notera que le groupe  $G_a$  n'est pas commutatif, voir [Per96] (sauf si  $q|_A$  est hyperbolique et si  $k$  est le corps  $\mathbf{F}_3$ !).

2) Dans le cas hyperbolique réel  $G_a^+$  contient le sous-groupe formé des matrices  $t(\lambda)$  avec  $\lambda \in \mathbf{R}^{+*}$ . On notera  $G_a^{++}$  ce sous-groupe et ses éléments seront appelés **translations**, voir chapitre 8.

3) Dans le cas anisotrope réel, on peut supposer  $\alpha = 1$ ,  $x = \cos \theta$  et  $y = \sin \theta$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$ . La matrice de l'élément  $\rho(x, y) = \rho(\theta)$  est celle d'une rotation au sens usuel.

### Le cas d'un point fixe isotrope

Il faut être plus soigneux dans ce cas. La forme  $q$  est alors hyperbolique et on suppose que c'est exactement la forme de Lorentz  $X^2 + Y^2 - T^2$ .

Soit  $g \in PO(q)$ . On suppose que  $g$  n'est pas une involution et que  $g$  ne relève pas de l'un des cas étudiés au paragraphe précédent. On sait que  $g$  provient d'une isométrie vectorielle positive  $u$  admettant la valeur propre 1. On va donc s'intéresser ici au cas où les vecteurs propres relatifs à cette valeur propre sont tous isotropes.

**1.4.27 Proposition.** *Soit  $u \in O^+(q)$  une isométrie positive (admettant donc la valeur propre 1). On suppose que le sous-espace propre relatif à 1 est totalement isotrope.*

Alors, il existe une base  $(e_1, e_2, e_3)$  dans laquelle la matrice de  $q$  est  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et celle de  $u$  est  $U(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & -\lambda^2/2 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \in k^*$ .

*Démonstration.* On note déjà que  $u$  ne peut être une involution (car les sous-espaces propres des involutions sont non isotropes, voir Partie III ??).

Comme la forme  $q$  est de rang 3, le sous-espace propre relatif à 1 est nécessairement une droite vectorielle dont on note  $e_1$  une base. Comme  $e_1$  est isotrope, son orthogonal est un plan  $P$  sur lequel  $q$  est de rang 1. Par ailleurs, voir [Per96], il existe un vecteur isotrope  $e_3$  tel que  $H = (e_1, e_3)$  soit un plan hyperbolique, de base hyperbolique  $e_1, e_3$ . Cela signifie que  $e_3$  est isotrope et qu'on a  $\varphi(e_1, e_3) = 1$ . L'orthogonal de  $H$  est une droite non isotrope dont on note  $e_2$  une base. Comme le discriminant de  $q$  est égal à  $-1$  modulo les carrés, on peut supposer, quitte à multiplier  $e_2$  par un scalaire, qu'on a  $q(e_2) = 1$ . On a alors la matrice annoncée pour  $q$ .

Comme  $e_1$  est propre, le plan  $P = (e_1)^\perp = (e_1, e_2)$  est stable par  $u$ . La deuxième valeur propre de  $u|_P$  est nécessairement égale à 1. En effet, sinon  $u$  aurait un vecteur propre  $e'_2$  dans  $P$  différent de  $e_1$  donc non isotrope (le plan  $P$  n'a pas d'autre droite isotrope que  $(e_1)$ ) et la valeur propre associée serait  $-1$  par conservation de  $q$ . Mais alors,  $u$  en restriction à  $(e'_2)^\perp$  serait une isométrie négative, donc une involution (voir 1.4.23), donc  $u$  serait une involution.

On a alors  $u(e_2) = e_2 + \lambda e_1$  avec  $\lambda \neq 0$ . La dernière valeur propre de  $u$  est encore égale à 1 (à cause du déterminant) et on a  $u(e_3) = e_3 + \mu e_2 + \nu e_1$ . En écrivant que  $\varphi(e_2, e_3)$  est conservé on trouve  $\mu = -\lambda$ . En écrivant que  $q(e_3)$  est conservé on trouve  $2\nu = -\mu^2$  d'où le résultat.

**1.4.28 Proposition-Définition.** *Soit  $g \in PO(q)$  une isométrie, image d'une isométrie vectorielle  $u \in O^+(q)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *L'isométrie vectorielle  $u$  est du type étudié en 1.4.27.*
- 2) *On a  $\text{Tr } u = 3$  et  $u \neq \text{Id}_E$ .*
- 3) *L'isométrie  $u$  n'est pas l'identité et admet la valeur propre 1 triple.*
- 4) *Le sous-espace propre de  $u$  relatif à la valeur propre 1 est une droite vectorielle isotrope.*
- 4') *L'isométrie  $g$  admet un unique point fixe  $c$ , qui est isotrope.*
- 5) *L'isométrie  $g$  est produit de deux involutions  $g = \sigma_a \sigma_b = \tau_A \tau_B$  avec  $A = a^\perp$  et  $B = b^\perp$ ; les droites  $A$  et  $B$  se coupent en un point isotrope  $c$  orthogonal à  $a$  et  $b$ .*

*On dit alors que  $g$  est un **déplacement parallèle de centre  $c$** . C'est un élément de  $\Omega(q)$ . L'ensemble des déplacements parallèles de centre le point isotrope  $c$  (augmenté de l'identité) est un sous-groupe abélien de  $PO(q)$ , isomorphe à  $(k, +)$ , qui sera noté  $G_c^+$ .*

*Démonstration.* Il est clair que 1) implique 2). Pour montrer que 2) implique 3), on note que le polynôme caractéristique  $\det(u - X\text{Id}_E)$  est de la forme  $P(X) = -X^3 + \text{Tr } u X^2 + \alpha X + 1$  (car on a  $\det u = 1$ ). Comme  $u$  admet la valeur propre 1, on a  $\alpha = -\text{Tr } u$ . On voit que si la trace vaut 3 on a  $P(X) = -(X - 1)^3$ , donc la valeur propre 1 triple.

Montrons que 3) implique 4) (ou 4') qui en est une variante projective). On sait que le sous-espace propre relatif à 1 est de dimension 1 en vertu de 1.4.22. S'il était engendré par un vecteur  $a$  non isotrope, l'orthogonal  $a^\perp$  serait stable par  $u$ , et comme  $u|_{a^\perp}$  admet encore la valeur propre 1, il aurait un vecteur propre dans ce sous-espace, ce qui contredit le fait que l'espace propre est de dimension 1.

Le fait que 4) implique 1) c'est 1.4.27.

Il est clair que 4') implique 5). En effet, on sait que  $g$  est produit de deux involutions  $\tau_A \tau_B$  et l'intersection de  $A$  et  $B$  étant fixe est isotrope. Il reste

à montrer la réciproque. Notons déjà que  $g = \sigma_a \sigma_b$  n'est pas une involution (si c'était le cas, en vertu de 1.4.9, les points  $a, b$  seraient orthogonaux et la droite  $(ab)$  ne serait pas isotrope). On raisonne par l'absurde en supposant que  $g$  admette un point fixe  $d \neq c$ . On peut supposer  $d$  anisotrope (s'il est isotrope, le pôle de la droite  $(cd)$  est fixe et anisotrope). On sait alors (voir 1.4.23) qu'on a  $g = \sigma_e \sigma_f$  où  $d$  est le pôle de  $(ef)$ . On a donc  $\sigma_a \sigma_b = \sigma_e \sigma_f$ , soit  $\sigma_a \sigma_b \sigma_f = \sigma_e$ . Le théorème de Bachmann 1.4.11 montre que  $f$  est sur  $(ab)$  et on voit de même que  $e$  est sur cette droite. On a donc  $(ab) = (ef)$  donc  $c = d$  en passant aux pôles et c'est absurde.

Montrons que  $g$  est dans  $\Omega(q)$ . Comme on a  $U(\lambda) = U(\lambda/2)^2$ ,  $g$  est un carré,  $g = h^2$  et en écrivant  $h = \sigma_a \sigma_b$ , on voit que  $g = \sigma_a \sigma_b \sigma_a \sigma_b = \sigma_a \sigma_b \sigma_a^{-1} \sigma_b^{-1}$  est un commutateur.

Enfin, la dernière assertion se voit sur les matrices ou avec [Per96] Exercice VIII 6.2.

**1.4.29 Remarques.** 1) Attention, pour un point  $c$  isotrope, le sous-groupe  $G_c^+$  n'est pas le sous-groupe des isométries qui fixent le point  $c$  (il y a d'autres isométries qui fixent  $c$  avec des valeurs propres  $\lambda \neq 1$ , par exemple les translations, voir 1.4.26).

2) Si  $g$  est un déplacement parallèle de centre  $a$  on a vu qu'il s'écrit comme produit de deux réflexions d'axes  $A, B$  passant par  $a$ . On peut d'ailleurs choisir arbitrairement  $A$ . En effet, si on a  $g = \tau_C \tau_D$  avec  $C, D$  passant par  $a$ , le produit  $\tau_A \tau_C \tau_D$  est une involution en vertu du théorème de Bachmann.

Le résultat suivant, analogue à l'une des assertions de 1.4.23, sera utile au chapitre 8 :

**1.4.30 Proposition.** *Soit  $g$  un déplacement parallèle de centre  $c$ ,  $C$  la polaire de  $c$  et  $m$  un point non isotrope de  $C$ . On a  $\sigma_m g \sigma_m = g^{-1}$ .*

*Démonstration.* Grâce à 1.4.28 on écrit  $g = \sigma_a \sigma_b$  avec  $a, b \in C$  non isotropes. En vertu du théorème de Bachmann 1.4.11, le produit  $\sigma_a \sigma_b \sigma_m$  est une involution  $\sigma_n$  avec  $n \in C$ . On a donc  $g = \sigma_n \sigma_m$ , d'où  $\sigma_m g \sigma_m = \sigma_m \sigma_n = g^{-1}$ .

## Bilan sur les points fixes des isométries

Nous reprenons les assertions de 1.4.9 concernant les points fixes en les précisant :

**1.4.31 Théorème.** *Soit  $u \in PO(q)$ . On a l'une des éventualités suivantes :*

0) *Tous les points de  $\mathbf{P}(E)$  sont fixes :  $u$  est l'identité.*

1) *Il y a une droite  $D$  (non isotrope) de points fixes et son pôle  $d$  :  $u$  est l'involution  $\tau_D = \sigma_d$ .*

- 2) Il y a un point fixe  $a$  non isotrope et deux points fixes  $b, c$  isotropes orthogonaux à  $a$  :  $u$  est une transformation hyperbolique d'axe la polaire de  $a$ ,  $A = (bc)$ , distincte de  $\tau_A$ .
- 3) Il y a un unique point fixe non isotrope  $a$  :  $u$  est une rotation de centre  $a$ , distincte de  $\sigma_a$ .
- 4) Il y a un unique point fixe isotrope  $a$  :  $u$  est un déplacement parallèle de centre  $a$ .

*Démonstration.* On vérifie par examen direct de chaque cas que les transformations énumérées ci-dessus ont les points fixes annoncés.

Réciproquement, on a vu que  $u$  admet au moins un point fixe. Si  $u$  admet un point fixe  $a$  non isotrope, il est dans  $G_a$  et on est dans l'un des cas 0), 1), 2) ou 3) en vertu de 1.4.23 et 1.4.25. Si  $u$  a deux points fixes isotropes  $a$  et  $b$ , la droite  $(ab)$  est non isotrope, son pôle  $d$  est fixe et non isotrope et on est ramené au cas précédent (on est dans le cas de la transformation hyperbolique). Enfin, si  $u$  n'a qu'un point fixe isotrope, on est dans le cas d'application de 1.4.28 et on a un déplacement parallèle.

**1.4.32 Corollaire.** Soient  $a, b$  deux points distincts de  $\mathbf{P}(E)$ . On note  $G_{a,b}$  le stabilisateur de  $a$  et  $b$  (c'est-à-dire le sous-groupe de  $PO(q)$  fixant  $a$  et  $b$ ).

On a les résultats suivants :

- 1) On suppose la droite  $(ab)$  isotrope (tangente à  $\Gamma$ ).
- 1.1 Si  $a, b$  sont non isotropes on a  $G_{a,b} = \{\text{Id}\}$ .
- 1.2 Si, disons,  $a$  est isotrope (et nécessairement  $b$  non isotrope), on a  $G_{a,b} = G_b^+ \simeq k^*$  (voir 1.4.25).
- 2) On suppose la droite  $(ab)$  non isotrope.
- 2.1 Si  $a, b$  sont non isotropes et non orthogonaux on a  $G_{a,b} = \{\text{Id}, \tau_{(ab)}\}$ .
- 2.2 Si  $a, b$  sont non isotropes mais orthogonaux on a  $G_{a,b} = \{\text{Id}, \tau_{(ab)}, \sigma_a, \sigma_b\}$ .
- 2.3 Si  $a$  est isotrope et  $b$  non isotrope (donc non orthogonal à  $a$ ) on a  $G_{a,b} = \{\text{Id}, \tau_{(ab)}\}$ .
- 2.4 Si  $a$  et  $b$  sont isotropes et si on note  $d$  le pôle de  $(ab)$  on a  $G_{a,b} = G_d^+ \simeq k^*$ .

*Démonstration.* Cela résulte de 1.4.31 par examen des cas.

**1.4.33 Corollaire.** Soient  $a, b, c$  trois points non alignés de  $\mathbf{P}(E)$ . Le stabilisateur  $G_{a,b,c}$  de  $a, b, c$  est réduit à l'identité sauf si l'un des points est le pôle de la droite qui joint les deux autres. Si ce point est, disons,  $a$  on a  $G = \{\text{Id}, \sigma_a\}$  si  $b$  ou  $c$  est non isotrope. Si  $b$  et  $c$  sont isotropes, on a  $G = G_a^+$  (voir 1.4.25).

*Démonstration.* Cela résulte de 1.4.31 (on notera que  $a$  ne peut être isotrope car sa polaire  $(bc)$  ne contient pas  $a$ ).

## Un mot sur la classification des isométries

La classification des isométries de  $\mathbf{P}(E)$  (c'est-à-dire la détermination des classes de conjugaison du groupe  $PO(q)$ ) est liée aux propriétés de transitivité de ce groupe. Elle sera initiée au chapitre 4 (voir 4.2.4) et achevée au chapitre 8.

## 1.5 Exercices

### 1.5.1 Quelques remarques sur les formes quadratiques

#### 1.5.1 Exercice. Équivalence des formes

1) Montrer que les formes  $x^2 + y^2$  et  $2x^2 + 2y^2$  sont équivalentes sur  $\mathbf{Q}$  (faire le changement de base  $\epsilon_1 = e_1 + e_2, \epsilon_2 = e_1 - e_2$ ). En déduire que la forme  $x^2 + y^2 + z^2$  est équivalente sur  $\mathbf{Q}$ , à un scalaire près, à  $x^2 + y^2 + 2z^2$ .

2) On se propose de montrer que la forme  $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + 7z^2$  n'est pas équivalente sur  $\mathbf{Q}$ , à un scalaire près, à  $r(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ .

a) Soit  $n$  un entier positif. On pose  $n = 2^\alpha m$  avec  $\alpha \in \mathbf{N}$  et  $m$  impair. Montrer que si  $n$  est de la forme de la forme  $x^2 + y^2 + z^2$  avec  $x, y, z$  entiers, on a<sup>17</sup>  $\alpha$  impair ou  $m \equiv 1, 3, 5 \pmod{8}$ . (On se ramènera au cas où  $x, y, z$  ne sont pas tous pairs et on examinera les congruences modulo 4 si  $n$  est pair et modulo 8 si  $n$  est impair.) On appelle  $B$  l'ensemble des entiers vérifiant la condition de congruence précédente.

b) Si  $n$  et  $s$  sont des entiers, montrer que  $ns^2$  est dans  $B$  si et seulement si  $n$  est dans  $B$ .

c) Montrer que si un rationnel  $a/b$  est de la forme  $x^2 + y^2 + z^2$  avec  $x, y, z \in \mathbf{Q}$  le produit  $ab$  est dans  $B$ .

d) On suppose que la forme  $q$  est équivalente à  $\lambda r$  avec  $\lambda \in \mathbf{Q}$ . Montrer qu'on peut supposer que  $\lambda$  est un entier sans facteur carré. Montrer qu'alors on a nécessairement  $\lambda = 7$  (on utilisera le discriminant).

e) Conclure.

#### 1.5.2 Exercice. ¶ Exemples de formes anisotropes

L'exercice a pour but de donner des exemples de formes anisotropes ailleurs que dans le cas standard des corps ordonnés.

1) On suppose que  $k$  est le corps des fractions rationnelles  $\mathbf{F}_3(t)$ . Montrer que la forme  $X^2 + Y^2 - tZ^2$  est anisotrope.

2) On suppose que  $k$  est le corps  $\mathbf{Q}(i)$  avec  $i^2 = -1$ .

---

17. On peut montrer que cette condition est suffisante, voir [Ser70]

a) Montrer que  $k$  n'a pas d'ordre compatible avec sa structure de corps (regarder  $i$ ).

b) Montrer que la forme quadratique  $X^2 + 2Y^2 - 5Z^2$  est anisotrope. (On se ramènera à travailler dans l'anneau principal  $\mathbf{Z}[i]$  et on réduira modulo 5. Le quotient est le produit direct  $\mathbf{Z}[i]/(2+i) \times \mathbf{Z}[i]/(2-i)$ , isomorphe à  $\mathbf{F}_5 \times \mathbf{F}_5$ .)

### 1.5.3 Exercice. Des produits "mixtes"

Soit  $x \in E$  et  $f \in E^*$  un vecteur et une forme.

1) Montrer qu'on définit deux produits bilinéaires (dits mixtes)  $\wedge_E : E \times E^* \rightarrow E$  et  $\wedge_{E^*} : E \times E^* \rightarrow E^*$  en posant :  $x \wedge_E f = \overline{\varphi}(x) \wedge f$  et  $x \wedge_{E^*} f = x \wedge (\overline{\varphi})^{-1}(f)$ .

2) Montrer que ces produits sont nuls si et seulement si  $x$  ou  $f$  est nul ou si  $f$  est une équation de la polaire de  $x$ . Interpréter sinon  $x \wedge_E f$  et  $x \wedge_{E^*} f$ .

3) Montrer les formules de Jacobi qui mélangent produits "mixtes" et produits extérieurs, pour  $a, b, c \in E$  et  $A, B, C \in E^*$  :

$$a \wedge_E (b \wedge c) + b \wedge_E (c \wedge a) + c \wedge_E (a \wedge b) = 0,$$

$$(B \wedge C) \wedge_{E^*} A + (C \wedge A) \wedge_{E^*} B + (A \wedge B) \wedge_{E^*} C = 0.$$

**1.5.4 Remarque.** Dans les formules précédentes,  $(B \wedge C) \wedge_{E^*} A$  est une forme linéaire qui est telle que la droite associée passe par le point d'intersection des droites  $B, C$  et soit orthogonale à  $A$ . Nous retrouverons cet élément dans le théorème de concours des hauteurs d'un triangle.

## 1.5.2 Involutions

### 1.5.5 Exercice. Involutions et trace égale à $-1$

Soit  $u \in O^+(q)$ . On suppose qu'on a  $\text{Tr } u = -1$ . Montrer<sup>18</sup> que  $u$  est une involution. (On montrera que  $u$  admet les valeurs propres 1 simple et  $-1$  double, puis qu'elle est diagonalisable. Pour cela, on envisagera différents cas selon que les vecteurs propres sont isotropes ou non.)

### 1.5.6 Exercice. Construction de l'image d'un point par une symétrie dans le cas hyperbolique

Soient  $q$  une forme de Lorentz,  $s$  une symétrie de point de Frégier  $d$  (n'appartenant pas à  $\Gamma = V(q)$ ) et d'axe  $D$ . Soit  $a$  un point de  $\mathbf{P}(E)$  distinct de  $d$  et soit  $b$  son image par  $s$ .

1) Montrer que la droite  $(ad)$  est stable par  $s$ .

2) Construire le point  $b$  à la règle. (Si  $a$  est sur  $\Gamma$ , on se reportera à Partie III ??). Sinon, on utilise un point  $i \in \Gamma$  tel que  $(ai)$  recoupe  $\Gamma$  en  $j$ .)

---

18. Bien d'autres preuves sont possibles.

### 1.5.7 Exercice. Bachmann par la géométrie

1) Soient  $a, b, c$  trois points (non isotropes) distincts alignés sur  $D$ . On se propose de montrer que  $\sigma_c\sigma_b\sigma_a$  est une involution.

a) Montrer que, quitte à faire une extension du corps de base, on peut se ramener au cas où la conique  $\Gamma$  est non vide et coupe la droite  $D$ . Il y a alors deux cas : soit  $D$  coupe  $\Gamma$  en deux points distincts  $i, j$ , soit  $D$  est tangente à  $\Gamma$  en  $i$ .

b) On suppose  $D \cap \Gamma = \{i, j\}$ . On considère un point  $m \in \Gamma$ , distinct de  $i, j$ , et les images  $n = \sigma_a(m)$ ,  $p = \sigma_b(n)$  et  $q = \sigma_c(p)$ . Montrer que le point  $d$  intersection de  $D$  et de  $(mq)$  ne dépend pas de  $m$  (considérer l'involution de  $D$  qui échange  $a, c$  et  $i, j$ ; cette involution est fournie par le théorème de Desargues appliqué aux points  $m, n, p, q$ , voir Partie III ??). En déduire qu'on a  $\sigma_d = \sigma_c\sigma_b\sigma_a$ .

c) Traiter de même le cas où  $D$  et  $\Gamma$  sont tangentes en  $i$  en utilisant l'involution de  $D$  qui fixe  $i$  et échange  $a$  et  $c$ . (Avec les notations de b), on montrera qu'on peut choisir  $m$  de sorte que  $q$  soit distinct de  $m$ .)

2) Réciproquement, on suppose qu'on a  $\sigma_a\sigma_b = \sigma_d\sigma_c$ , avec  $a \neq b$  et  $c \neq d$ . Montrer que  $a, b, c, d$  sont alignés. (On considérera, après extension éventuelle du corps de base, le ou les points d'intersection de  $(ab)$  et de  $\Gamma$ .)

### 1.5.8 Exercice. Bachmann variante

Dans cet exercice on travaille dans le plan hyperbolique réel, les réflexions ont pour axes des droites hyperboliques (i.e. rencontrant  $\mathbf{K}$ , voir 1.3.2), les symétries centrales ont pour centres des points de  $\mathbf{K}$ . Les énoncés qui suivent sont des traductions de 1.4.11.

1) Montrer que le produit de deux réflexions d'axes  $D_1, D_2$  et d'une symétrie de centre  $a$  (dans n'importe quel ordre) est une involution si et seulement si les droites  $D_1$  et  $D_2$  ne se coupent pas dans  $\mathbf{K}$  et si leur perpendiculaire commune passe par  $a$ .

2) Montrer que le produit d'une réflexion d'axe  $D$  et de deux symétries de centres  $a$  et  $b$  (dans n'importe quel ordre) est une involution si et seulement si  $D$  est perpendiculaire à  $(ab)$ .

1.5.9 Exercice. Soient  $D, D'$  deux droites distinctes non isotropes et  $m$  un point (non isotrope) tel que  $\sigma_m(D) = D'$ . Montrer que, si  $\Delta$  est perpendiculaire à  $D$  et  $D'$ , alors  $\Delta$  passe par  $m$ .

1.5.10 Exercice. Soit  $g$  une isométrie. On suppose que  $g$  fixe trois points  $a, b, c$  distincts mais alignés sur une droite  $D$ . Montrer que si  $D$  n'est pas isotrope (resp. est isotrope)  $g$  est l'identité ou la réflexion  $\tau_D$  (resp. l'identité).



### 1.5.11 Exercice. Le produit de deux symétries

Soient  $a, b$  deux vecteurs de  $E$ , non isotropes, distincts et tels que la droite  $D = (ab)$  soit non isotrope. On pose  $\delta = a \wedge b$ . Déterminer la matrice de  $\sigma_a \sigma_b$  dans la base  $a, b, \delta$ . Montrer en particulier que la trace de  $\sigma_a \sigma_b$  est égale à  $4 \frac{\varphi(a, b)^2}{q(a)q(b)} - 1$  soit, avec les notations du chapitre 4,  $4I(a, b) - 1$ . Si  $c, d$  sont deux autres points non isotropes de  $D$ , montrer que  $\sigma_a \sigma_b = \sigma_d \sigma_c$  implique  $I(a, b) = I(c, d)$  (cf. 4.3.14). Montrer, réciproquement, que  $I(a, b) = I(c, d)$  implique  $\sigma_a \sigma_b = \sigma_d \sigma_c$  ou  $\sigma_a \sigma_b = \sigma_c \sigma_d$  (utiliser 1.4.25).

### 1.5.12 Exercice. Le produit de trois symétries

Soient  $a, b, c$  trois vecteurs de  $E$ , non isotropes et indépendants. Calculer la matrice de l'application  $u = \sigma_c \sigma_b \sigma_a$  dans la base  $a, b, c$  (on rappelle la formule  $\sigma_m(x) = -x + \frac{2\varphi(m, x)}{q(m)}m$ ). Montrer en particulier la relation :

$$\text{Tr } u = 3 + 4 \frac{2\varphi(b, c)\varphi(c, a)\varphi(a, b) - q(a)\varphi(b, c)^2 - q(b)\varphi(c, a)^2 - q(c)\varphi(a, b)^2}{q(a)q(b)q(c)},$$

ou encore, avec les notations du chapitre 4 :

$$\text{Tr } u = 3 + 4(2S(a, b, c) - I(b, c) - I(c, a) - I(a, b)) := 3 + 4T(a, b, c).$$

Montrer qu'on a  $T(a, b, c) = \frac{\Delta(q)[a, b, c]^2}{q(a)q(b)q(c)} - 1$  (utiliser 1.1.6).

On rappelle (voir la preuve de 1.4.28) que le polynôme caractéristique de  $u$  est  $-X^3 + \text{Tr } u X^2 - \text{Tr } u X + 1$ . Montrer que  $u$  est un déplacement parallèle (resp. une involution<sup>19</sup>) si et seulement si on a  $T(a, b, c) = 0$ , resp.  $T(a, b, c) = -1$ . Si l'on est sur  $\mathbf{R}$ ,  $u$  est une transformation hyperbolique si  $T(a, b, c) > 3$  ou  $T(a, b, c) < -1$  et une rotation si  $-1 < T(a, b, c) < 3$ .

## 1.5.3 Congruence et normalisateurs

### 1.5.13 Exercice. Congruence et normalisateur

Soit  $G$  un groupe opérant sur un ensemble  $X$  et soit  $H$  un sous-groupe de  $G$ . On appelle **normalisateur** de  $H$  dans  $G$  le plus grand sous-groupe  $N = N_G(H)$  de  $G$  dans lequel  $H$  est distingué et on a :

$$N = \{n \in G \mid \forall h \in H, nhn^{-1} \in H\}.$$

Montrer que  $N$  permute les orbites de  $H$  sur  $X$  (autrement dit,  $N$  conserve la relation<sup>20</sup> de "congruence" sous  $H$  : si  $x$  et  $y$  sont deux éléments de  $X$

---

19. On peut utiliser Bachmann, ou le retrouver avec 1.5.5.

20. On pensera à "l'égalité" des triangles au sens d'Euclide.

équivalents sous l'action de  $H$  (i.e. dans la même orbite), il en est de même de  $n.x$  et  $n.y$  avec  $n \in N$ ).

**1.5.14 Commentaire.** Si l'on pense la géométrie selon le point de vue du programme d'Erlangen de F. Klein, la donnée fondamentale est celle d'un groupe opérant sur un ensemble et on peut concevoir des géométries "emboîtées" au sens où leurs groupes  $H$  et  $G$  le sont (par exemple la géométrie d'une forme quadratique est une sous-géométrie de la géométrie projective à cause de l'inclusion  $PO(q) \subset PGL(E)$ ). En ce cas, le normalisateur de  $H$  dans  $G$  apparaît comme le plus grand sous-groupe de  $G$  qui respecte la géométrie de  $H$  (au sens où il conserve la congruence relative à  $H$ ).

**1.5.15 Exercice. Normalisateur de  $PO(q)$  dans  $PGL(E)$**

On reprend les notations de l'exercice précédent.

Soit  $q$  une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel  $E$ . Montrer que le normalisateur de  $O(q)$  dans  $GL(E)$  est le groupe des similitudes  $GO(q)$ , voir Partie III ?? ou [Per96] Ch. V (on utilisera les réflexions ; voir aussi [Per96] V Ex. 7.3). En déduire que le normalisateur de  $PO(q)$  dans le groupe des homographies de  $E$  est égal à  $PO(q)$  (voir Partie III ??).

**1.5.16 Exercice. Normalisateur de  $PO(q)$  dans les bijections (cas réel)**

On reprend les notations des exercices précédents, mais on suppose de plus<sup>21</sup> que le corps de base est le corps des réels et que la forme  $q$  est une forme de Lorentz. On pose  $X = \mathbf{P}(E)$  et on se propose de montrer que le normalisateur de  $G = PO(q)$  dans le groupe  $\mathfrak{S}(X)$  des bijections de  $X$  est  $G$  lui-même.

1) Montrer que le centralisateur de  $G$  dans le groupe  $\mathfrak{S}(X)$  (c'est-à-dire l'ensemble des bijections  $\sigma$  qui commutent avec tous les éléments de  $G$ ) est réduit à l'identité. (Si  $\sigma$  centralise  $g \in G$  il laisse invariants les points fixes de  $G$ . On appliquera ce fait successivement aux rotations, aux déplacements parallèles et aux transformations hyperboliques.)

En particulier, le centre de  $G$  est réduit à l'élément neutre. Par ailleurs, on sait que tout automorphisme de  $G$  est intérieur (voir Partie III, exercice ??). Un groupe qui vérifie ces deux propriétés est parfois appelé un groupe **complet**.

2) Soit  $G$  un groupe complet agissant sur un ensemble  $X$ . On suppose que le centralisateur de  $G$  dans  $\mathfrak{S}(X)$  est contenu dans  $G$ . Montrer que le normalisateur de  $G$  dans  $\mathfrak{S}(X)$  est égal à  $G$ . Conclure dans le cas de  $PO(q)$ .

---

<sup>21</sup>. Le résultat est sans doute encore vrai dans le cas d'une forme elliptique sur  $\mathbf{R}$ . J'ignore ce qu'il en est dans le cas d'un corps quelconque.

**1.5.17 Commentaire.** Ce résultat signifie que le groupe  $PO(q)$  est le plus grand groupe associé à la géométrie considérée. Ce point est une différence essentielle avec le cas euclidien où le normalisateur du groupe des isométries est le groupe des similitudes, qui est strictement plus grand (de dimension 4 au lieu de 3 ici), voir Partie V et cela explique l'absence, en géométrie non euclidienne, de tout ce qui tourne autour des homothéties, des similitudes, etc.



# Chapitre 2

## Les différents modèles des géométries non euclidiennes réelles

*Ce chapitre a pour but d'introduire les nombreuses figures que nous allons rencontrer dans la suite et d'expliciter le cadre dans lequel elles sont valables. En effet, contrairement à la géométrie euclidienne qui a un modèle bien canonique, les géométries non euclidiennes utilisent traditionnellement de nombreux modèles différents. Il y a à cela de fortes raisons qui tiennent à l'impossibilité d'avoir un plongement totalement satisfaisant d'un espace non euclidien dans l'espace euclidien. Le point de vue que nous allons adopter tout au long de cette partie est de travailler dans le plan projectif muni d'une forme quadratique, mais il nous a semblé utile de faire le lien avec les autres façons de percevoir les géométries non euclidiennes et notamment avec les modèles conformes qui ont un intérêt visuel évident. Cela nous conduira à faire une petite incursion dans le monde de la géométrie riemannienne. Dans tout ce chapitre, le corps de base est le corps des réels.*

### 2.1 Problématique

Nous explicitons ici la problématique de cette recherche de modèles. Comme nous l'avons dit au chapitre précédent, notre vision des géométries non euclidiennes est celle de Klein : un plan projectif muni d'une forme quadratique  $q$  et du groupe d'isométries correspondant, avec, éventuellement, dans le cas hyperbolique réel, la restriction aux points  $q < 0$ . Nous espérons

convaincre le lecteur que c'est une entrée efficace pour faire de la géométrie "élémentaire". On verra qu'elle permet de donner des démonstrations très simples des résultats de base (l'exemple des droites remarquables du triangle est très éclairant à cet égard). On peut aussi dessiner dans ce cadre et le lecteur verra avec les modèles **E** et **K** que l'on peut y effectuer toutes les opérations usuelles de la géométrie. Si ce cadre est satisfaisant pour un géomètre "projectif", il présente cependant quelques inconvénients. En effet, les dessins étant effectués sur une feuille de papier ou un écran d'ordinateur, le sont, qu'on le veuille ou non, dans un espace euclidien et les notions définies dans les géométries non euclidiennes ne coïncident pas avec celles dont on a l'habitude : les milieux ne sont pas des milieux, les perpendiculaires ne sont pas perpendiculaires, etc. C'est pourquoi<sup>1</sup> on présente ici des plongements de ces espaces qui conservent, au moins partiellement, les propriétés usuelles de la géométrie euclidienne. On se doute bien cependant qu'on n'y parviendra qu'au prix de renoncements (sinon la géométrie non euclidienne ne mériterait pas son nom). C'est ce que nous discutons maintenant.

### 2.1.1 Les divers objectifs

Les géométries non euclidiennes, vues en notre sens, font intervenir plusieurs types d'objets : d'abord le plan  $\mathbf{P}(E)$  lui-même, avec ses points et ses droites, une notion d'orthogonalité qui permet de définir des droites perpendiculaires, et, donné dès le début (en tous cas de notre point de vue), un groupe d'isométries  $PO(q)$ . On verra plus loin que c'est la donnée de ce groupe qui permet de définir les invariants de la géométrie<sup>2</sup>. En effet, dans le cas réel, le groupe  $PO(q)$  est transitif sur les points (au moins ceux qui vérifient  $q < 0$  dans le cas hyperbolique) et les droites (au moins celles avec  $q^* > 0$  en hyperbolique), ce qui signifie que ces géométries sont homogènes (tous les points sont pareils, toutes les droites aussi). Cependant, le groupe  $PO(q)$  n'est pas doublement transitif et, comme d'ailleurs dans le cas euclidien<sup>3</sup>, c'est ce qui fonde les notions de longueur et d'angle : deux segments ont même longueur si on peut les transporter l'un sur l'autre par le groupe et de même pour les angles. On dispose donc aussi, dans notre cadre, de ces invariants usuels.

---

1. Il y a une autre raison : ces modèles ont joué un rôle historique essentiel en montrant des réalisations concrètes des géométries non euclidiennes, réglant ainsi le problème de leur existence, ramenée à celle de la géométrie euclidienne.

2. Y compris dans le cas d'un corps quelconque.

3. L'idée que la longueur (ou l'angle) c'est ce qui se conserve quand on effectue un mouvement est implicite dans la preuve qu'Euclide donne du premier cas d'égalité des triangles.

Cela étant posé, l'objectif de notre quête (désespérée) d'un modèle est de satisfaire aux exigences suivantes :

- avoir un “plan” qu'on puisse représenter comme une partie d'un plan ou d'un espace euclidien, le mot sera “représenter” signifiant être “en bijection” avec une partie du plan, voire simplement être muni d'une application à valeurs dans le plan,
- avoir un plan qui ressemble à un plan et, en tous cas, qui soit (une variété) de dimension 2, donc une surface,
- avoir des droites qui ressemblent à des droites, ou au moins qui soient des courbes, simples si possible,
- conserver les propriétés usuelles d'incidence,
- avoir une compatibilité entre les invariants de nos géométries (longueur, angle) et ceux du modèle (issus de sa structure euclidienne), donc avoir une représentation isométrique et/ou conforme, avec, notamment, des cercles qui ressemblent à des cercles,
- enfin, avoir une structure métrique sur le modèle (compatible avec  $g$ , mais pas nécessairement celle du plongement euclidien) telle que les droites apparaissent comme les géodésiques pour cette structure (les lignes de plus court chemin).

## 2.1.2 Les obstacles

En fait, cette recherche de modèle est totalement désespérée si l'on ne réduit pas les exigences.

Dans le cas de la géométrie elliptique, on verra qu'on n'a de modèle conforme qu'avec des arcs de cercles au lieu de droites. De plus, ces modèles ne seront pas vraiment des parties d'un espace euclidien (on devra toujours identifier des points). Cela tient au fait qu'il n'y a pas de plongement de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  dans  $\mathbf{R}^3$ , comme l'exprime le théorème suivant (qui résulte de [Gra71] Ch. VII §1 Th. 2) :

**2.1.1 Théorème.** *Le plan projectif  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  n'est pas orientable donc ne se plonge pas de manière continue comme une surface de  $\mathbf{R}^3$ .*

Dans le cas hyperbolique, on verra que dans certains des modèles les droites seront rectilignes (le modèle  $\mathbf{K}$ ), mais pas dans les autres, que certains seront conformes ( $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$ ), mais pas les autres, et qu'enfin, le seul qui soit isométrique ( $\mathbf{B}$ ) n'est qu'un modèle partiel de la géométrie. Là encore, cela est incontournable et le théorème suivant permet de comprendre pourquoi (cf. [Car76] 5.11 p. 446) :

**2.1.2 Théorème. (Hilbert)**

*Une surface riemannienne complète à courbure négative constante ne se plonge pas isométriquement dans  $\mathbf{R}^3$ .*

En effet, le plan hyperbolique est à courbure constante et égale à  $-1$  et “complet” (i.e. ses géodésiques se prolongent à l’infini, *loc. cit.* p. 431-432).

### 2.1.3 Le principe de conjugaison

**2.1.3 Remarque.** Avec tous les modèles que nous allons étudier, nous allons disposer, pour chacune des géométries non euclidiennes de bijections permettant de passer d’un modèle à l’autre. Cela nous permettra de faire systématiquement des “transports de structure”, définissant les unes à partir des autres.

Ce processus s’applique aussi pour les groupes de transformations. En effet, la donnée d’une bijection  $f : X \rightarrow Y$  permet de transformer un groupe  $G$  de bijections de  $X$  en un groupe  $H$  de bijections de  $Y$  en associant à un élément  $g$  son conjugué  $fgf^{-1}$ . De plus, on peut décrire les propriétés des éléments de  $H$  en utilisant le “**principe de conjugaison**” (cf. [Per96]) :  $fgf^{-1}$  est une transformation du même type que  $g$  (par exemple, si  $g$  est une involution, il en est de même de  $fgf^{-1}$ ) et ses éléments géométriques (par exemple ses points fixes  $A$ ) sont transportés par  $f$  (et deviennent donc  $f(A)$ ). Nous utiliserons systématiquement cette procédure pour passer d’un modèle à un autre.

## 2.2 Rappels sur les variétés riemanniennes

Les espaces qui constituent les modèles des géométries non euclidiennes étant tous des variétés riemanniennes, nous rappelons très brièvement les faits qui nous seront indispensables sur cette notion.

### 2.2.1 Surfaces

Les seules variétés que nous considérerons sont des surfaces. Nous appelons ici **surface** un espace topologique<sup>4</sup> connexe  $S$ , recouvert par un nombre fini d’ouverts  $V_1, \dots, V_n$ , chacun de ces ouverts étant homéomorphe à un ouvert  $U_i$  de  $\mathbf{R}^2$  au moyen d’un paramétrage  $\psi_i : U_i \rightarrow V_i$ . Les divers paramétrages sont appelés **cartes** de  $S$ . On impose une condition de compatibilité entre les cartes : pour tous  $i, j$ , l’application  $\psi_j^{-1} \circ \psi_i$ , là où elle est définie, doit être de classe  $C^1$ , voire  $C^\infty$ . On dira alors qu’une application

---

4. Il sera toujours métrisable.



définie sur  $S$  ou à valeurs dans  $S$  est différentiable si et seulement si elle l'est lorsqu'on la compose avec une carte et il est clair que cela ne dépend pas du choix de la carte.

En réalité, nous n'aurons affaire ici qu'à trois types de surfaces :

- Les ouverts de  $\mathbf{R}^2$ , paramétrés par l'identité.
- Les surfaces lisses de  $\mathbf{R}^3$ . Une telle surface  $S$  est définie localement par un paramétrage  $\psi : U \rightarrow \mathbf{R}^3$  où  $\psi$  est de classe  $C^1$  avec une différentielle partout de rang 2. Le théorème des fonctions implicites montre qu'il est équivalent d'imposer que  $S$  soit définie localement par une équation  $F(x, y, t) = 0$  avec une différentielle partout non nulle.

- Le plan projectif  $S = \mathbf{P}(E)$  associé à un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 3. Si on choisit une base de  $E$ , on peut identifier  $\mathbf{P}(E)$  à  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , et si les coordonnées homogènes sont  $(x, y, t)$  on peut, par exemple, recouvrir  $S$  par les trois ouverts  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $t \neq 0$  que l'on paramétrera respectivement par  $(1, y, t)$ ,  $(x, 1, t)$  et  $(x, y, 1)$ . Plus généralement, on peut recouvrir  $\mathbf{P}(E)$  par des ouverts du type  $D(f) = \{\bar{m} \in \mathbf{P}(E) \mid f(m) \neq 0\}$  où  $f$  est une forme linéaire non nulle et  $m$  un représentant de  $\bar{m}$ . Cet ouvert est en bijection avec le plan affine  $A(f)$  de  $E$  défini par l'équation  $f = 1$ , par l'application qui à  $\bar{m}$  associe  $m/f(m)$  (ce point ne dépend pas du choix du représentant).

## 2.2.2 Plans tangents

### Les cas faciles

Dans les deux premiers cas considérés (un ouvert de  $\mathbf{R}^2$ , une surface de  $\mathbf{R}^3$ ) on peut définir, en chaque point  $m$  de la surface  $S$  le plan tangent  $T_m(S)$  comme l'image de la différentielle  $d\psi_m$  dans  $\mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{R}^3$ . Dans le cas de l'ouvert de  $\mathbf{R}^2$  c'est l'espace ambiant, dans le cas de la surface de  $\mathbf{R}^3$  d'équation  $F = 0$  c'est le noyau de  $dF$ . En effet, comme on a  $F \circ \psi = 0$ , on en déduit  $dF_{\psi(m)} \circ d\psi_m = 0$ , ce qui montre que l'image de  $d\psi$  est contenue dans le noyau de  $dF$  et il y a égalité en vertu des hypothèses faites sur le rang. Un cas particulier important de cette situation est le suivant. On considère un espace vectoriel  $E$  de dimension 3 muni d'une forme quadratique  $q$  non dégénérée et on note  $\varphi$  sa forme polaire. Soit  $\Sigma$  la quadrique affine définie par l'équation  $q(m) = \alpha$  avec  $\alpha \in \mathbf{R}$ . Dans ce cas, comme la différentielle de  $q$  en  $m$  est l'application  $x \mapsto \varphi(m, x)$ , le plan tangent en  $m$  à  $\Sigma$  n'est autre que l'orthogonal  $m^\perp$  de  $m$  (au sens de  $\varphi$ ).

## Le plan projectif

La définition est un peu plus délicate dans le cas de  $\mathbf{P}(E)$ . Voici une façon de faire qui a l'avantage d'être intrinsèque. Soient  $\bar{m}$  un point de  $\mathbf{P}(E)$  et  $m$  un représentant de  $\bar{m}$ . Le sous-espace vectoriel  $m^\perp = \{h \in E^* \mid h(m) = 0\}$  (orthogonal de  $m$  au sens de la dualité) est de dimension 2 et ne dépend que de  $\bar{m}$ . On pose  $T_{\bar{m}}(\mathbf{P}(E)) = m^\perp$ . On retrouve les descriptions précédentes ainsi. Choisissons une forme linéaire  $f$  non nulle en  $m$ . L'ouvert  $D(f)$  de  $\mathbf{P}(E)$  est en bijection avec le plan affine  $A(f)$  comme on l'a vu ci-dessus. Pour le plongement naturel de la surface  $A(f)$  dans  $E \simeq \mathbf{R}^3$  par l'équation  $f = 1$ , on a vu que le plan tangent en un point est le noyau de  $df$ . Comme  $f$  est linéaire, on a  $df = f$  et le plan tangent en tout point de  $A(f)$  est donc l'hyperplan noyau  $V(f)$  et il s'agit d'expliquer comment l'on passe de ce plan tangent à l'ouvert (qui dépend de  $f$ ) au plan tangent intrinsèque. On a vu dans la partie II comment définir les produits extérieurs en se donnant une forme trilinéaire non nulle (par exemple à l'aide d'une base de  $E$ ). Si on prend un point  $\bar{m}$  de  $D(f)$ , on a un isomorphisme de  $V(f)$  sur  $m^\perp$  obtenu de la manière suivante. On appelle  $m$  le représentant de  $\bar{m}$  qui vérifie  $f(m) = 1$ . On associe à  $p \in V(f)$  la forme linéaire  $m \wedge p$ . Il est clair qu'elle est dans  $m^\perp$  et l'isomorphisme réciproque est donné par  $h \mapsto h \wedge f$  comme on le voit en appliquant les formules de II ???. Par exemple, le plan tangent au point  $(x_0, y_0, 1)$  de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  est le plan  $V(T)$  des  $(x, y, 0)$ .

Si  $\bar{m}$  est dans  $D(f) \cap D(g)$ , on passe du plan  $V(f)$  au plan  $V(g)$  par l'application :  $p \mapsto \frac{g(m)}{f(m)}p - \frac{g(p)}{f(m)}m$ . On notera que cette application est aussi régulière que possible.

**2.2.1 Remarques.** 1) Dans tous les cas, si on a une carte  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow V \subset S$  et un point  $m \in V$ , l'application  $\psi$  induit une application  $d\psi : \mathbf{R}^2 \rightarrow T_m(S)$ . Pour les deux premiers cas où  $V$  est contenu dans  $\mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{R}^3$  c'est simplement l'application tangente ordinaire. Pour le projectif c'est l'application  $p \rightarrow m \wedge p$  vue ci-dessus. Par exemple, au point  $(x_0, y_0, 1)$  de l'ouvert  $T \neq 0$  c'est l'application  $(a, b) \rightarrow (b, -a, ay_0 - bx_0)$ .

2) Il est facile maintenant de décrire la différentielle en  $m$  de la projection canonique  $E - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}(E)$ , c'est simplement l'application de  $E$  dans  $m^\perp$  qui à  $p$  associe  $m \wedge p$ .

## Le passage d'une quadrique au plan projectif

**2.2.2 Remarque.** L'un des intérêts de la description précédente, que nous allons retrouver plusieurs fois ci-dessous, est le cas où l'on choisit des représentants des points du projectif (ou d'un ouvert de celui-ci) sur une quadrique

$Q$  d'équation  $q(m) = \alpha$  où  $q$  est une forme quadratique non dégénérée et  $\alpha$  un scalaire. On considère la restriction de la projection  $\pi : E - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}(E)$  à  $\Sigma$ . Si  $m$  est dans  $\Sigma$  et si  $\bar{m}$  est son image<sup>5</sup>, on a un isomorphisme des plans tangents en  $m$  à  $\Sigma$  et en  $\bar{m}$  à  $\mathbf{P}(E)$ . En effet, on a vu qu'ils sont tous deux égaux à  $m^\perp$ , mais dans le cas de  $\Sigma$  il s'agit de l'orthogonal au sens de la forme  $q$  tandis que pour  $\mathbf{P}(E)$  c'est au sens de la dualité. L'isomorphisme entre les deux est donné par la restriction de l'isomorphisme  $\bar{\varphi} : E \rightarrow E^*$ .

### Vecteurs tangents à une courbe

Si on a une courbe de classe  $C^1$  tracée sur une surface  $S$ ,  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow S$ , on peut définir son vecteur tangent en un point. En effet, au voisinage du point on a un paramétrage  $\psi : U \rightarrow S$  et on peut écrire  $\gamma = \psi \circ \gamma_0$  où  $\gamma_0$  est une courbe de l'ouvert des paramètres  $U$ . Le vecteur tangent à la courbe au point  $\gamma(t)$  est alors  $\gamma'(t) = d\psi \circ \gamma_0'(t) \in T_{\gamma(t)}(S)$  où  $d\psi$  est défini en 2.2.1. Si  $u$  et  $v$  sont les coordonnées dans  $U$  et si  $\gamma_0$  est une courbe  $v = \text{constante}$  (resp.  $u = \text{constante}$ ), on obtient les vecteurs  $\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)$  (resp.  $\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)$ ).

### 2.2.3 Structure riemannienne

Une structure riemannienne sur  $S$  consiste en la donnée, en chaque point  $m \in S$ , d'une forme quadratique définie positive (i.e. euclidienne) sur le plan tangent  $T_m(S)$ . De plus, on fait l'hypothèse que cette forme dépend continûment (voire de manière  $C^1$ ) de  $m$ . Pour préciser le sens de cette assertion, disons dans le cas d'une variété plongée, on considère un paramétrage  $\psi : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow S \subset \mathbf{R}^3$ . En le point  $m = \psi(u, v)$ , le plan tangent  $T_m(S)$  est l'image de l'application linéaire  $d\psi(u, v)$ . Si on se donne une forme quadratique  $q_m$  sur  $T_m(S)$ , on en déduit une forme  $q'$  sur  $\mathbf{R}^2$ , ou plutôt  $q'_{u,v}$  car elle dépend du point  $(u, v)$ , par image réciproque de  $q$  par  $d\psi(u, v)$ . Si l'on utilise la notation traditionnelle, qui consiste à noter  $u, v$  les coordonnées de  $\mathbf{R}^2$  vu comme variété et  $du, dv$  celles de  $\mathbf{R}^2$  vu comme son propre espace tangent, on a la formule<sup>6</sup> :  $q'_{u,v}(du, dv) = q(d\psi(u, v)(du, dv))$ . Cette forme s'écrit  $q'_{u,v}(du, dv) = a(u, v)du^2 + 2b(u, v)dudv + c(u, v)dv^2$  et l'hypothèse signifie que les fonctions  $a, b, c$  sont continues. On note traditionnellement  $ds^2$  (sans doute depuis Gauss) la forme  $q'$ .

5. On notera que la fibre du point  $\bar{m}$  par  $\pi|_\Sigma$  contient exactement les deux éléments  $m$  et  $-m$ .

6. On notera que le vecteur  $d\psi(u, v)(du, dv)$  est bien un vecteur de  $\mathbf{R}^3$ , de sorte qu'on peut lui appliquer  $q$ .

## 2.2.4 Longueur, distance, géodésiques

La donnée d'une structure riemannienne sur une surface permet de calculer la norme d'un vecteur ou l'angle de deux vecteurs du plan tangent  $T_m(S)$ . On en déduit la notion d'angle de deux courbes se coupant en un point : c'est l'angle de leurs vecteurs tangents. On peut aussi calculer la longueur d'une courbe  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow S$  : c'est l'intégrale de la longueur de son vecteur tangent :  $l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \|\gamma'(t)\| dt$ .

Cette notion permet de définir une distance sur  $S$  :  $d(a, b)$  est la borne inférieure des longueurs des courbes joignant  $a$  et  $b$ . On a ainsi une notion d'isométrie entre deux variétés riemanniennes : c'est une bijection qui conserve la longueur. Il est clair que si  $g : S \rightarrow S'$  est un difféomorphisme dont la différentielle, en chaque point, transforme la forme quadratique sur  $S$  en celle sur  $S'$ , c'est une isométrie. Nous montrerons ci-dessous en 2.4.19 et 6.9.1 que, pour les géométries non euclidiennes, les isométries au sens riemannien sont exactement les éléments de  $PO(q)$ . En attendant, pour éviter les confusions, nous préciserons "au sens riemannien" pour qualifier les isométries que nous venons de définir.

On appelle géodésique allant de  $a$  à  $b$  une courbe dont la longueur est minimale (donc égale à  $d(a, b)$ ). Il en existe localement et on les détermine avec les équations d'Euler, voir par exemple [Car76] 4.4.

## 2.2.5 Aires

On peut aussi calculer l'aire d'une partie  $A$  de  $S$ . Soit  $\psi : U \rightarrow V$  l'une des cartes de  $S$ , supposons pour simplifier que  $A$  soit contenue dans  $V$  et posons  $A' = \psi^{-1}(A)$ . On note  $u$  et  $v$  les coordonnées de l'ouvert  $U$ . Les vecteurs tangents  $\frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)$  sont dans  $T_{\psi(u, v)}(S)$ . Cet espace vectoriel est muni d'un produit scalaire (le  $ds^2$ ), donc de bases orthonormées. Le déterminant de deux vecteurs tangents  $\alpha, \beta$  par rapport à une base orthonormée sera noté  $\alpha \wedge \beta$ . Sa valeur absolue ne dépend pas du choix de la base orthonormée et elle représente, dans le plan tangent, l'aire du parallélogramme bâti sur les deux vecteurs. On définit alors l'aire de  $A$  comme l'intégrale double :

$$\int_{A'} \left| \frac{\partial \psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \psi}{\partial v} \right| du dv.$$

**2.2.3 Proposition.** *Soit  $\psi : U \rightarrow S$  une carte de la surface  $S$ . On suppose qu'au point  $(u, v) \in U$  le  $ds^2$  s'écrit  $ds^2 = a du^2 + 2b du dv + c dv^2$  où  $a, b, c$  sont des fonctions continues de  $u, v$ . Alors l'élément d'aire au point  $u, v$  est  $dS = \sqrt{ac - b^2} du \wedge dv$ .*

*Démonstration.* La base canonique  $e_1, e_2$  de  $\mathbf{R}^2$  (vu comme espace tangent) s'envoie par  $d\psi(u, v)$  sur la base  $\frac{\partial\psi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial\psi}{\partial v}(u, v)$  et les formes quadratiques  $q$  sur  $T_m(S)$  et  $ds^2$  sont données par la même formule. Le déterminant  $\frac{\partial\psi}{\partial u} \wedge \frac{\partial\psi}{\partial v}$  sur une base orthonormée de  $T_m(S)$  et celui de  $e_1, e_2$  sur une base orthonormée de  $\mathbf{R}^2$  sont donc égaux. On conclut grâce au lemme suivant :

**2.2.4 Lemme.** *Soit  $q$  une forme quadratique sur  $\mathbf{R}^2$  définie sur la base  $e_1, e_2$  par la formule  $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ . On suppose  $q$  euclidienne. Soit  $\epsilon_1, \epsilon_2$  une base orthonormée pour  $q$ . On écrit  $e_1 = \alpha\epsilon_1 + \beta\epsilon_2$  et  $e_2 = \gamma\epsilon_1 + \delta\epsilon_2$ . Alors on a la formule  $ac - b^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ .*

*Démonstration.* Il suffit de calculer  $q(e_1) = a = \alpha^2 + \beta^2$ ,  $q(e_2) = c = \gamma^2 + \delta^2$  et  $\varphi(e_1, e_2) = b = \alpha\gamma + \beta\delta$ .

**2.2.5 Remarque.** Si  $g$  est un  $C^1$ -difféomorphisme d'une surface riemannienne qui conserve les formes  $q_m$ ,  $g$  conserve les distances, les angles et les aires car tous sont définis en termes des formes  $q_m$ . Dans le cas des géométries non euclidiennes, on verra que c'est le cas des éléments de  $PO(q)$  (voir 2.4.19) et qu'en fait toute isométrie vérifie ces conditions, voir 6.9.1.

## 2.2.6 Courbure

L'un des intérêts essentiels de la donnée d'une structure riemannienne est de permettre de définir la notion de courbure. Entrer dans ces considérations nous entraînerait trop loin et nous renvoyons sur ce sujet à [SG93], [Car76], [Spi79], [DL82], etc.

## 2.3 Les modèles de la géométrie elliptique

La géométrie elliptique réelle consiste en la donnée du plan projectif  $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , issu de l'espace vectoriel  $E = \mathbf{R}^3$ , avec les coordonnées  $(x, y, t)$ , muni de la forme quadratique euclidienne (anisotrope)  $x^2 + y^2 + t^2$ . Ce plan, muni de cette forme, sera noté  $\mathbf{E}$  dans ce qui suit. Les droites en sont les droites projectives, elles vérifient l'axiome de base de toutes les géométries usuelles (*par deux points passe une droite et une seule*). Dans ce cas (contrairement au cas hyperbolique) il n'y a donc pas à restreindre le plan. Un modèle de cette géométrie, idéalement, serait une partie de l'espace euclidien de dimension 3, en bijection (continue) avec  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ . Le travail est vite fait : ça n'existe pas (voir 2.1.1). Nous allons donc devoir réviser nos ambitions à la baisse et il y a deux façons de faire cela : soit ne plonger qu'une partie de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , la plus grande possible (c'est le cas du modèle non

conforme), soit procéder à des identifications, le moins possible, à partir de  $\mathbf{R}^3$  ou d'une partie de  $\mathbf{R}^3$  (c'est le cas du modèle conforme).

### 2.3.1 Le modèle non conforme

Ce modèle, le plus proche de notre donnée initiale, est simplement la partie affine de  $\mathbf{E} = \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  associée à la donnée d'une droite à l'infini. Comme d'habitude on prendra la droite  $D_\infty$  définie par  $t = 0$  et donc le plan affine sera celui des  $(x, y, 1)$ . C'est exactement ce que nous avons fait dans la partie I en dessinant dans le plan affine, et les points et les droites sont ici les points et droites ordinaires. Il sera commode de munir ce plan de la structure euclidienne ordinaire définie par la forme quadratique  $x^2 + y^2$ . Nous noterons, si besoin est, **AE** ce modèle elliptique affine.

Attention, la géométrie de la forme  $x^2 + y^2$  qui définit la structure euclidienne ordinaire du plan n'est pas celle de la forme initiale à trois variables  $X^2 + Y^2 + T^2$ . En particulier, les notions d'orthogonalité dans les deux modèles sont différentes comme le montre la figure ci-dessous. Rappelons, voir 1.3.7 que deux droites sont dites perpendiculaires si chacune contient le pôle de l'autre.

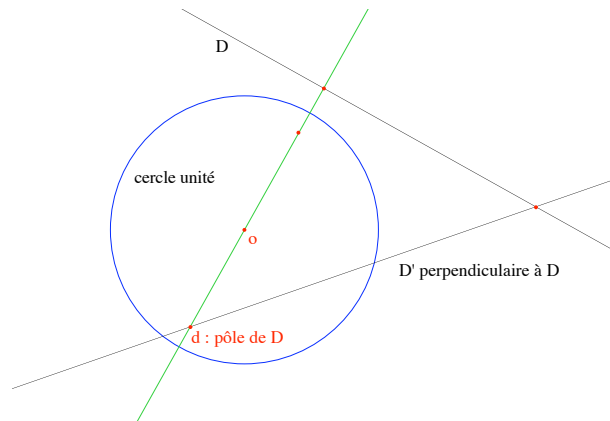


FIGURE 2.1 – Perpendiculaires dans le modèle non conforme du plan elliptique

Comme le pôle de la droite d'équation  $ax + by + ct = 0$  est le point  $(a, b, c)$ , il y a trois cas :

1) Le pôle de la droite de l'infini ( $t = 0$ ) est l'origine  $o = (0, 0, 1)$ . On notera que le choix d'un plan affine, i.e. d'une droite à l'infini, induit aussitôt celui d'une origine grâce à la forme quadratique  $q$  : le pôle de cette droite.

Avec la forme  $x^2 + y^2$ , cela nous permet de définir le cercle unité  $\Gamma$  qui joue un rôle capital pour effectuer les constructions dans ce modèle.

2) Le pôle d'une droite passant par  $o$ ,  $ax + by = 0$  est la direction orthogonale à la droite :  $(a, b, 0)$ , ce qui montre que, pour les droites passant par  $o$ , l'orthogonalité est la même qu'au sens euclidien.

3) Enfin, le pôle  $d$  d'une droite  $D$  ne passant pas par  $o$  s'obtient en prenant d'abord le projeté orthogonal ordinaire  $m$  de  $o$  sur  $D$ ,

$$m = \left( \frac{-ac}{a^2 + b^2}, \frac{-bc}{a^2 + b^2} \right),$$

puis en prenant l'inverse  $d$  de  $m$  dans l'inversion de pôle  $o$  et de puissance  $-1$ . On obtient le point  $d = (a/c, b/c, 1)$  qui est bien équivalent à  $(a, b, c)$ .

Cette remarque permet de construire le pôle d'une droite et donc aussi la perpendiculaire à une droite passant par un point, voir figure 2.1. On peut ainsi implanter toutes les constructions usuelles de la géométrie dans un logiciel de géométrie dynamique. Le lecteur qui souhaite des précisions là-dessus se reportera à l'exercice 2.5.1. Voici deux exemples de constructions réalisées dans ce cadre. Elles illustrent le concours des hauteurs et des médianes dans le plan elliptique. On voit clairement sur ces figures que les propriétés elliptiques (orthogonalité, milieu) n'ont aucun rapport avec leurs homologues euclidiennes. C'est pourquoi on préfère souvent travailler dans le modèle conforme que nous explicitons maintenant.

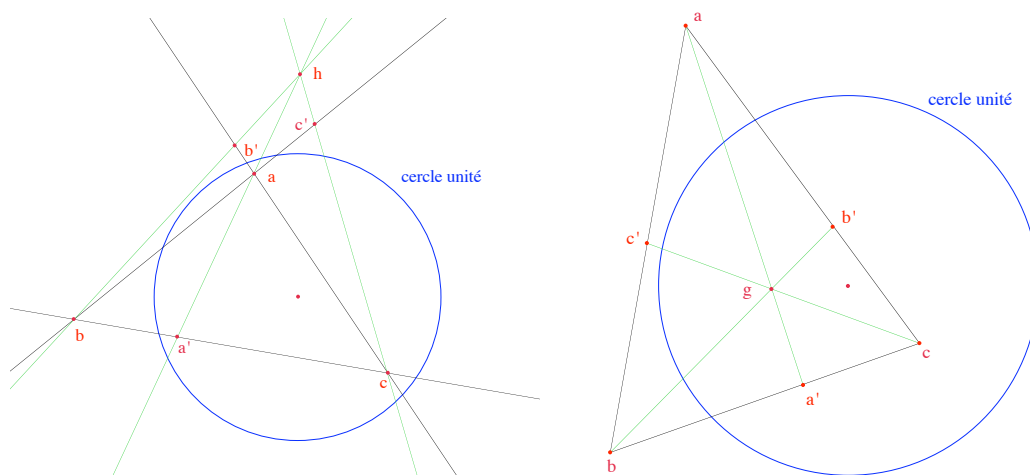


FIGURE 2.2 – Concours des hauteurs (à gauche) et des médianes (à droite) dans le modèle non conforme du plan elliptique

## 2.3.2 Le modèle conforme de Klein

### Introduction

La problématique sous-tendant la construction de ce modèle est celle évoquée plus haut. Le plan projectif est vu naturellement comme quotient de  $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ , avec la projection canonique  $\pi : \mathbf{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , mais comme on souhaite avoir une représentation de ce plan par une variété de dimension 2, on va restreindre  $\pi$  à une partie  $\Sigma$  de dimension 2 de l'espace euclidien. Par ailleurs, on a la forme quadratique  $q(x, y, t) = x^2 + y^2 + t^2$  et son groupe d'isométries  $PO(q)$  dont on souhaite qu'il agisse encore sur  $\Sigma$ . On peut alors se limiter à une partie sur laquelle  $q$  est constante et la plus simple est la sphère unité  $\mathbf{S}^2$  définie par  $q(x, y, t) = x^2 + y^2 + t^2 = 1$ .

La sphère est un excellent modèle de la géométrie elliptique, au sens où sa structure euclidienne naturelle est celle définie par  $q$ . Les “droites” (en notre sens) sur la sphère sont les traces des plans vectoriels (donc passant par l'origine) de  $\mathbf{R}^3$ , ce sont les **grands cercles**. Elles vérifient l'axiome de base de la géométrie euclidienne : *par deux points passe une droite et une seule, sauf* pour deux points antipodes, pour lesquels il y en a une infinité. C'est cette difficulté qui conduit à remplacer la sphère par le plan projectif, quotient de la sphère par antipodie (i.e. par identification des points  $m$  et  $-m$ ). La restriction de la projection  $\pi : \mathbf{S}^2 \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , est surjective mais non injective.

Ce crime de lèse-Euclide des points antipodes est le seul défaut de la sphère. Sinon, nous verrons au chapitre 5 que c'est un modèle à la fois isométrique et conforme, qui est même meilleur que le projectif à bien des égards (par exemple, comme la sphère est le revêtement universel du projectif, elle est simplement connexe). C'est d'ailleurs ce qui explique sans doute que, contrairement au cas hyperbolique, la littérature sur la géométrie elliptique soit très limitée.

Comme on l'a dit, il n'y a pas de représentation du plan projectif dans l'espace euclidien de dimension 3. On peut cependant essayer de faire en sorte qu'il y ait le moins d'identifications possibles. Par exemple, on peut se limiter à l'hémisphère nord  $\mathbf{S}^{2+}$  de  $\mathbf{S}^2$ , équateur compris. Les points de cote  $> 0$  sont alors envoyés injectivement dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  par  $\pi$ . En revanche, il faut encore identifier deux points antipodes de l'équateur. Les “droites” de  $\mathbf{S}^{2+}$  sont les demi grands cercles, avec les extrémités identifiées. Nous allons, à partir de cet hémisphère nord, obtenir un autre modèle de la géométrie elliptique par projection stéréographique. L'avantage de ce nouveau modèle sera d'être plan.



## Rappels sur la projection stéréographique

**2.3.1 Définition.** On appelle **projection stéréographique** de pôle  $s = (0, 0, -1)$  (le pôle sud) de  $\mathbf{S}^2$  sur le plan euclidien  $P$  défini par  $t = 0$  l'application  $p$  qui associe à un point  $m$  de  $\mathbf{S}^2$ , distinct de  $s$ , associe le point de rencontre  $m'$  de la droite  $(sm)$  avec  $P$ .

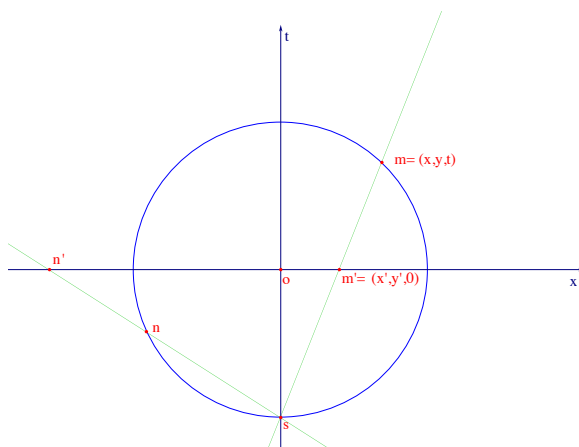


FIGURE 2.3 – La projection stéréographique vue dans le plan des  $x, t$

### 2.3.2 Proposition.

- 1) Si  $m = (x, y, t)$  est un point de la sphère son projeté  $m' = (x', y', 0)$  est donné par les formules  $x' = \frac{x}{t+1}$ ,  $y' = \frac{y}{t+1}$ . L'application  $p$  est une bijection de  $\mathbf{S}^2 - \{s\}$  sur  $\mathbf{R}^2$  identifié au plan  $t = 0$ . Elle induit l'identité sur le cercle unité du plan  $t = 0$  (l'équateur) et envoie l'hémisphère nord de la sphère (défini par  $t \geq 0$ ) sur le disque unité.
- 2) L'application  $p$  n'est autre que la restriction à la sphère de l'inversion de pôle  $s$  et de puissance 2. On la prolonge en une bijection de  $\mathbf{S}^2$  sur la sphère de Riemann<sup>7</sup>  $\widehat{P}$  (obtenue en adjoignant un unique point à l'infini à  $P$ ), en envoyant  $s$  sur ce point à l'infini.
- 3) L'image par  $p$  d'un grand cercle  $C$  de  $\mathbf{S}^2$  (différent de l'équateur) est soit une droite passant par  $o = (0, 0)$  si  $C$  passe par  $s$ , soit un cercle de  $\mathbf{R}^2$  coupant le cercle unité en deux points diamétralement opposés sinon.
- 4) L'application  $p$  est une application conforme (mais non isométrique) de  $\mathbf{S}^2 - \{s\}$  dans  $\mathbf{R}^2$  pour les structures euclidiennes.

7. Que l'on pourra noter aussi  $\widehat{\mathbf{C}}$  en identifiant le plan  $P$  au plan complexe  $\mathbf{C}$ .

*Démonstration.*

1) On calcule  $m'$  en écrivant la relation vectorielle  $\overrightarrow{sm'} = \lambda \overrightarrow{sm}$ . On trouve  $\lambda = \frac{1}{t+1}$  d'où la formule annoncée. Il est clair que  $p$  est l'identité sur les points  $t = 0$ . On a  $x'^2 + y'^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1+t)^2} = \frac{1-t^2}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{1+t}$  et on voit que cette quantité est  $< 1$  si et seulement si  $t$  est  $> 0$ .

La dernière formule permet de calculer  $t$  et on en déduit que la bijection réciproque de  $p$  est donnée par les formules :

$$(x', y') \mapsto \left( \frac{2x'}{1+x'^2+y'^2}, \frac{2y'}{1+x'^2+y'^2}, \frac{1-x'^2-y'^2}{1+x'^2+y'^2} \right).$$

2) L'inversion de pôle  $s$  et de puissance 2 associe à un point  $m = (x, y, t)$  le point  $n$  défini par  $\overrightarrow{sn} = k \overrightarrow{sm}$  avec  $k = 2/\|\overrightarrow{sm}\|^2$ . On en déduit  $n = (kx, ky, k(t+1) - 1)$ . Un calcul immédiat montre que si  $m$  est sur  $\mathbf{S}^2$  on a  $k = \frac{1}{t+1}$ , ce qui montre que le point  $n$  est bien égal à  $p(m)$ .

3) Considérons un grand cercle  $C$  de  $\mathbf{S}^2$ . C'est la trace sur  $\mathbf{S}^2$  d'un plan vectoriel  $ax + by + ct = 0$  de  $\mathbf{R}^3$ . Les points de  $C$  situés sur l'équateur  $t = 0$  sont les points opposés  $m$  et  $m' = -m$  avec :

$$m = \left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Ces points sont invariants par  $p$  donc ils sont sur l'image  $p(C)$ . Pour calculer cette image, distinguons deux cas.

- Si on a  $c = 0$ , on a un cercle vertical (i.e. passant par  $s$ ) défini par  $ax + by = 0$  et son image est la droite passant par  $o$  d'équation  $ax' + by' = 0$ .

- Si on a  $c \neq 0$ , on calcule  $ax' + by' = \frac{ax + by}{t+1} = \frac{-ct}{t+1}$ . On en déduit  $t$  en

fonction de  $x', y'$  :  $\frac{t}{t+1} = -\frac{a}{c}x' - \frac{b}{c}y'$ . En utilisant l'expression de  $x'^2 + y'^2$  trouvée ci-dessus, on obtient l'équation de  $p(C)$  :

$$x'^2 + y'^2 - 2\frac{a}{c}x' - 2\frac{b}{c}y' - 1 = 0.$$

C'est l'équation d'un cercle qui coupe le cercle unité en  $m$  et  $m'$ .

4) L'assertion signifie que la différentielle  $dp$ , restreinte au plan tangent à la sphère au point  $(a, b, c)$ , est une similitude qui envoie ce plan sur le plan des  $(x, y)$ . Or, la matrice de  $dp$  en  $(a, b, c)$  est :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1+c} & 0 & \frac{-a}{(1+c)^2} \\ 0 & \frac{1}{1+c} & \frac{-b}{(1+c)^2} \end{pmatrix}.$$

Si  $(a, b, c)$  est le pôle nord  $(0, 0, 1)$  on vérifie que la différentielle est une homothétie de rapport  $1/2$ .

Sinon, si  $(a, b) \neq (0, 0)$ , on munit le plan tangent  $ax + by + ct = 0$  de la base orthonormée :

$$\left( \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, 0 \right) \quad \left( \frac{-ac}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{-bc}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sqrt{a^2 + b^2} \right),$$

la matrice de  $dp$  est alors  $\frac{1}{\delta(1+c)} \begin{pmatrix} b & -a \\ -a & -b \end{pmatrix}$  avec  $\delta = \sqrt{a^2 + b^2}$  et il s'agit bien de la matrice d'une similitude.

**2.3.3 Remarque.** Une autre méthode consiste à utiliser la transitivité du groupe orthogonal sur la sphère pour se ramener au cas du plan tangent au pôle nord. On notera qu'on a ainsi retrouvé le fait bien connu que l'inversion est une transformation conforme.

**2.3.4 Théorème.** Soit  $H$  un plan vectoriel de  $\mathbf{R}^3$ ,  $\tau_H$  la réflexion orthogonale par rapport à  $H$  et soit  $C$  la trace de  $H$  sur  $\mathbf{S}^2$ . La réflexion  $\tau_H$  induit une involution de  $\mathbf{S}^2$ , qui induit elle-même une réflexion de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  relative à la forme  $q$ . La bijection  $p$  transporte  $\tau_H|_{\mathbf{S}^2}$  par la procédure expliquée en 2.1.3 en sa conjuguée  $p\tau_H p^{-1}$  (bijection de  $\widehat{P}$ ) qui est l'inversion (resp. la symétrie) par rapport au cercle (resp. à la droite)  $p(C)$ .

*Démonstration.* Il y a plusieurs méthodes, mais aucune n'est gratuite. Soit  $h$  un vecteur unitaire orthogonal à  $H$ . On note indifféremment  $\tau_H$  ou  $\tau_h$  la réflexion associée et on rappelle qu'on a  $\tau_h(m) = m - 2(m|h)h$ .

Une première méthode consiste à faire le calcul dans un cas particulier simple, par exemple le cas où le plan  $H$  est le plan vertical  $xOz$ , orthogonal au vecteur  $e = (0, 1, 0)$ . Dans ce cas, il est clair que l'involution de  $\widehat{P}$  est la symétrie par rapport à l'axe des  $x$ . Pour en déduire le cas général, on écrit le vecteur  $h$  sous la forme  $u(e)$  où  $u$  est une isométrie de  $\mathbf{R}^3$ . On a alors  $\tau_h = u\tau_e u^{-1}$  et on en déduit que  $p\tau_h p^{-1}$  est conjuguée de  $p\tau_e p^{-1}$  par  $pup^{-1}$ . Mais, on a vu que  $p$  est une transformation conforme et il en est de même de  $u$  puisque c'est une isométrie, de sorte que  $v = pup^{-1}$  est une transformation conforme de la sphère de Riemann  $\widehat{P}$ . On sait alors, voir par exemple [Car61], que c'est une homographie ou une anti-homographie et on en déduit le résultat (la conjuguée d'une inversion ou d'une symétrie par une homographie est une inversion ou une symétrie dont le cercle ou la droite est l'ensemble des points fixes).

La seconde méthode est analogue, en utilisant cette fois le fait que  $v$  transforme une droite ou un cercle en une droite ou un cercle.

Enfin, la dernière méthode consiste à faire courageusement le calcul. On pose  $h = (a, b, c) \in \mathbf{S}^2$ ,  $m = (x, y, t) \in \mathbf{S}^2$ . On supposera ici  $c \neq 0$ , le lecteur traitera l'autre cas<sup>8</sup>. On considère le cercle  $C_h = H \cap \mathbf{S}^2$  et son image  $\Gamma_h$  par  $p$ . On a donné ci-dessus l'équation de ce cercle et on voit que son centre est le point  $\omega = (\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$  soit  $\omega = \frac{a+ib}{c}$  en identifiant  $P$  et le plan complexe  $\mathbf{C}$ . On voit aussi que son rayon est  $1/c$ . L'inversion  $i_h$  de cercle  $\Gamma_h$  est alors donnée par la formule  $i_h(z) - \omega = \frac{z - \omega}{c^2|z - \omega|^2}$ . On montre alors la formule  $p\tau_h = i_h p$ . On a (en écrivant les points de  $P$  comme des complexes) :

$$p\tau_h(m) = \left( \frac{x - 2la}{1 + t - 2lc} + i \frac{y - 2lb}{1 + t - 2lc} \right)$$

où l'on a posé  $l = (m|h) = ax + by + ct$ . On a par ailleurs :

$$i_h p(m) = \frac{a + ib}{c} + \frac{(cx - at - a + i(cy - bt - b))(t + 1)}{c((cx - at - a)^2 + (cy - bt - b)^2)}.$$

Le résultat vient alors de deux remarques. La première c'est que les quantités  $D_1 = 1 + t - 2lc$  et  $D_2 = (cx - at - a)^2 + (cy - bt - b)^2$  sont liées par la formule  $D_2 = (1 + t)D_1$  (on n'oubliera pas les relations  $x^2 + y^2 + t^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$  qui permettent d'écrire de nombreux termes en fonction des seuls  $t$  et  $c$ ). La deuxième est le calcul de la différence :  $\frac{x - 2la}{1 + t - 2lc} - \frac{a}{c} = \frac{cx - at - a}{c(1 + t - 2lc)}$ .

### Le modèle conforme de la géométrie elliptique

On a vu que la projection stéréographique transforme l'hémisphère nord de  $\mathbf{S}^2$  en le disque unité du plan. Le modèle de la géométrie elliptique que nous considérons est le quotient de ce disque obtenu en identifiant les points opposés du bord :

#### 2.3.5 Proposition-Définition.

1) Soit  $\varepsilon : \widehat{P} \rightarrow \widehat{P}$  l'inversion de pôle  $o$  et de puissance  $-1$  (qu'on appellera **antipodie elliptique**). La projection stéréographique  $p : \mathbf{S}^2 \rightarrow \widehat{P}$  induit une bijection de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  sur le quotient  $\widehat{P}/\mathcal{R}_\varepsilon$  obtenu en identifiant les points  $m$  et  $\varepsilon(m)$ .

2) Soit  $D$  le disque unité de  $P$  et  $j : D \rightarrow P$  l'injection canonique. On désigne par **KE** et on appelle **modèle elliptique de Klein** le quotient de  $D$  obtenu en identifiant les points opposés  $(x, y)$  et  $(-x, -y)$  du cercle unité  $x^2 + y^2 = 1$ .

8. Il n'y a pas de raison qu'il n'y ait que moi qui travaille.

L'application  $j$  induit alors une bijection de  $\mathbf{KE}$  sur  $\widehat{P}/\mathcal{R}_\varepsilon$  et la restriction de la projection stéréographique à l'hémisphère nord induit une bijection de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  sur  $\mathbf{KE}$ .

*Démonstration.* 1) Rappelons qu'on a  $\varepsilon(z) = -z/|z|^2 = -1/\bar{z}$ . Il s'agit de montrer que les images de deux points opposés de la sphère sont deux points inverses. Si on pose  $m = (x, y, t)$  on a  $p(m) = \left(\frac{x}{t+1}, \frac{y}{t+1}\right)$  et  $p(-m) = \left(\frac{-x}{-t+1}, \frac{-y}{-t+1}\right)$ . En identifiant  $P$  et  $\mathbf{C}$  et en posant  $z = \frac{x}{t+1} + i\frac{y}{t+1}$  on voit que le point image de  $-m$  est égal à  $-1/\bar{z}$ , d'où le résultat.

Le point 2) vient du fait que la restriction de  $\varepsilon$  au cercle unité est la symétrie centrale.

La géométrie de  $\mathbf{KE}$  est obtenue en transportant celle de  $\mathbf{E} = \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  via la sphère  $\mathbf{S}^2$ . En particulier, les droites de  $\mathbf{KE}$  sont les images des droites de  $\mathbf{E}$ , elles-mêmes images des grands cercles de  $\mathbf{S}^2$  :

### 2.3.6 Corollaire.

1) Les droites de  $\mathbf{KE}$  sont les images par  $p$  des demi grands cercles de  $\mathbf{S}^{2+}$ . Ce sont des arcs de cercles (ou des diamètres) joignant deux points opposés du cercle unité, les extrémités de ces arcs étant identifiées, ainsi que le cercle unité lui-même, avec ses points opposés identifiés. Le cercle ou la droite qui contient une droite de  $\mathbf{KE}$  sera appelé son support.

2) Soit  $D$  une "droite" de  $\mathbf{KE}$  et soit  $\tau_D$  la réflexion de droite  $D$  (transportée par 2.1.3). Soit  $\widehat{D}$  le support de  $D$  (qui est une droite ou un cercle de  $P$ ) et soit  $\sigma$  l'inversion ou symétrie associée à  $\widehat{D}$  dans  $\widehat{P}$ . Soit  $m \in \mathbf{KE}$ . L'image de  $m$  par  $\tau_D$  est égale à  $\sigma(m)$  si ce point est dans  $\mathbf{KE}$  et à  $\varepsilon\sigma(m)$  sinon où  $\varepsilon$  est l'antipodie elliptique. Si  $D$  est portée par le cercle unité,  $\tau_D$  est la symétrie de centre  $o$ .

3) Les éléments de  $PO(q)$  induisent des transformations conformes de  $\mathbf{KE}$ .

*Démonstration.* Cela résulte de 2.3.2, 2.3.4 et 2.3.5. Le dernier point vient du fait que les inversions sont conformes et que les symétries engendrent  $PO(q)$ .

L'implantation dans Cabri de macros pour la géométrie elliptique dans le modèle  $\mathbf{KE}$  a été effectuée par Yves Martin, voir [Mar02]. C'est d'ailleurs dans ce modèle que l'on représentera le plan elliptique  $\mathbf{E}$  dans ce qui suit (omettant de le nommer  $\mathbf{KE}$ ). On trouvera ci-dessous les figures analogues à celles vues précédemment pour le concours des hauteurs et des médianes. On notera, dans le cas des médianes, la présence de deux milieux pour chaque côté du triangle (par exemple pour  $b, c$ , les points  $a'$  intérieur et  $a''$  extérieur) et le concours de quatre triplets de médianes (les trois intérieures et deux

Dans le modèle elliptique conforme, le plan est un disque fermé dont les points opposés du cercle sont identifiés. La droite joignant  $a$  et  $b$  est l'unique arc de cercle passant par  $a$  et  $b$  dont les extrémités sont diamétralement opposées. On notera l'absence de parallèles dans cette géométrie.

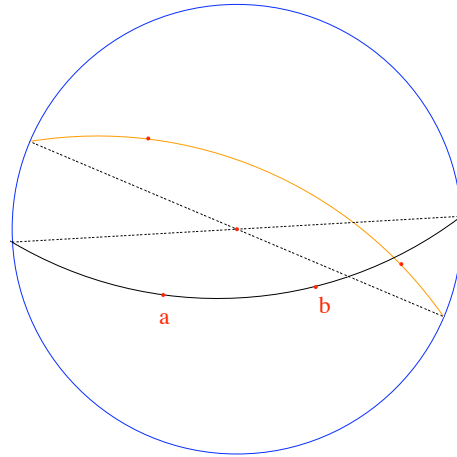


FIGURE 2.4 – Les droites du modèle elliptique conforme

extérieures avec une intérieure). On étudiera cette situation en détail au chapitre suivant.

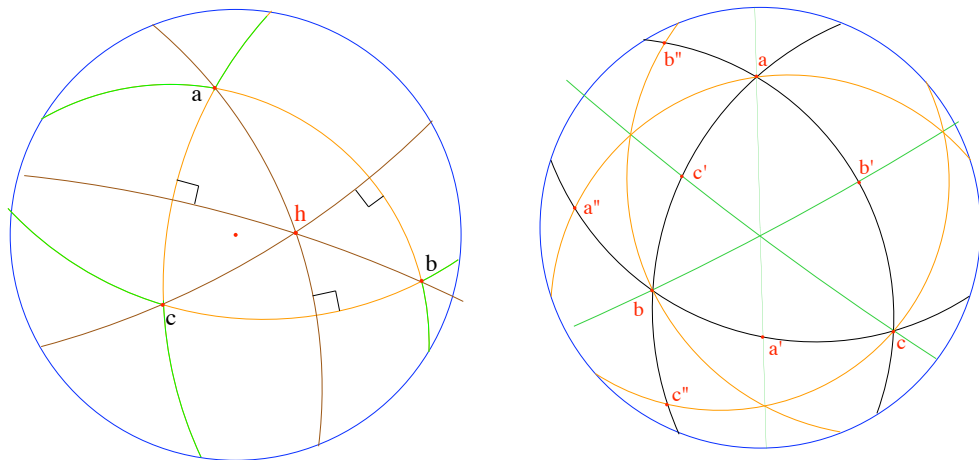


FIGURE 2.5 – Concours des hauteurs (à gauche) et des médianes (à droite) dans le modèle conforme du plan elliptique

### 2.3.3 La structure riemannienne de $\mathbf{E}$

Le plan elliptique  $\mathbf{E}$  est muni d'une structure riemannienne naturelle qui découle de celle de la sphère. On commence donc par préciser celle-ci.

## La sphère comme variété riemannienne

Pour définir la structure riemannienne de la sphère, il suffit de la paramétrer et il y a de multiples façons de le faire. Citons-en trois, définies au voisinage du point  $(1, 0, 0)$ .

1) On peut paramétrer la sphère comme un graphe associé à son équation  $x^2 + y^2 + t^2 = 1$ , en tirant  $x$  en fonction de  $y$  et  $t$ . On a donc le paramétrage  $(y, t) \mapsto (\sqrt{1 - y^2 - t^2}, y, t)$ .

2) On peut utiliser la projection stéréographique et les formules vues dans la preuve de 2.3.2.

3) Enfin, et c'est souvent le plus simple, on a un paramétrage par des fonctions trigonométriques :  $(\theta, \varphi) \mapsto (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi)$ .

La structure riemannienne de la sphère est obtenue en restreignant la forme quadratique euclidienne  $x^2 + y^2 + t^2$  aux différents plans tangents à  $\mathbf{S}^2$ . Comme les plans tangents à la sphère sont contenus dans  $\mathbf{R}^3$ , si on désigne par  $dx, dy, dt$  les coordonnées dans cet espace, le  $ds^2$  de la sphère sera donc donné par  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dt^2$ . Il est évidemment invariant par le groupe orthogonal euclidien, qui est donc un groupe d'isométries de la sphère au sens riemannien. On peut calculer ce  $ds^2$  dans chaque paramétrage. Dans la variante trigonométrique on trouve  $ds^2 = d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2$  et, pour l'élément d'aire,  $|\cos \varphi| d\theta d\varphi$ .

Cela permet de définir les diverses notions riemanniennes (courbure, etc.) et notamment les géodésiques. On montre que les géodésiques sont exactement les grands cercles<sup>9</sup>, donc les candidats à jouer le rôle de droites. Voir par exemple [Car76], [DL82] ou [SG93].

## La structure riemannienne de $\mathbf{E}$

Elle s'obtient à partir de celle de la sphère. En effet, on a vu en 2.2.2 que la projection de la sphère sur le plan projectif induit un isomorphisme sur les plans tangents en  $m_0$  et  $\overline{m_0}$ . De plus, cet isomorphisme est inchangé si on remplace  $m_0$  par  $-m_0$ . On obtient donc la structure riemannienne sur le projectif *via* cet isomorphisme. Les géodésiques sont les images de celles de la sphère. On retrouve donc les droites de  $\mathbf{E}$  et c'est l'une des justifications de la définition de celles-ci. On voit aussi que les éléments de  $PO(q)$  sont des isométries de  $\mathbf{E}$  au sens riemannien.

---

9. C'est bien connu et, si l'on admet leur unicité locale, c'est évident pour des raisons de symétrie.

## 2.4 Les modèles de la géométrie hyperbolique

De notre point de vue, la géométrie hyperbolique réelle consiste en la donnée du plan projectif  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , muni de la forme de Lorentz  $q(x, y, t) = x^2 + y^2 - t^2$ , avec la définition des points et des droites comme éléments non isotropes, voir 1.3.1. Nous avons déjà signalé que cette définition comportait une entorse à Euclide, dans la mesure où l’axiome fondateur de la géométrie (par deux points passe une droite et une seule) n’était pas vérifié. Une façon de remédier à cela consiste à se limiter (dans le cas de  $\mathbf{R}$ ) à la partie définie par  $q < 0$ . C’est ce que nous allons faire ci-dessous en définissant le modèle de Klein  $\mathbf{K}$ . Ce modèle sera notre modèle principal, mais il y a une profusion d’autres modèles de cette géométrie, pour la plupart en bijection avec  $\mathbf{K}$  (à l’exception du modèle de Beltrami  $\mathbf{B}$  où l’on a seulement une flèche de  $\mathbf{K}$  vers  $\mathbf{B}$ ). Pour définir la géométrie de ces modèles, c’est-à-dire essentiellement leurs droites dans un premier temps, nous procéderons par transport de structure à partir de  $\mathbf{K}$  : les “droites” d’un modèle<sup>10</sup> seront les images des droites de  $\mathbf{K}$ .

Par rapport au modèle de Klein, les autres modèles présentent l’avantage d’être conformes (cela signifie que les angles et l’orthogonalité y sont conservés), ce qui est un atout pour tout ce qui concerne la vision (voir les nombreuses figures associées à ce texte). Cependant, ils ont aussi des inconvénients. D’abord, les droites n’y sont plus rectilignes, ce qu’on peut considérer comme un détail, même s’il peut choquer le néophyte ; ensuite et surtout, l’absence du plongement dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  fait perdre certains outils essentiels de la géométrie projective et notamment la polarité. C’est pourquoi nous préférons systématiquement travailler dans le modèle de Klein  $\mathbf{K}$ , ou plutôt dans son élargissement  $\mathbf{P}(E) = \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  comme expliqué plus haut.

Nous présenterons ici, outre le disque de Klein  $\mathbf{K}$ , celui de Poincaré  $\mathbf{D}$ , et quelques autres modèles :  $\mathbf{H}$  (demi-plan de Poincaré),  $\mathbf{M}$  (modèle de Minkowski),  $\mathbf{B}$  (pseudo-sphère de Beltrami). Ces modèles sont tous des surfaces, généralement plongées dans  $\mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{R}^3$ , mais, à l’exception du modèle de Beltrami, elles sont munies d’autres métriques que la métrique euclidienne usuelle. C’est pour formuler clairement les concepts relatifs à ces métriques qu’il est nécessaire de parler de variétés riemanniennes. Comme nous l’avons dit plus haut, nous n’aborderons que superficiellement ce sujet, renvoyant le lecteur à l’abondante littérature. Nous nous contenterons d’explicitier les relations entre ces modèles, en donnant quelques indications sur leurs structures riemanniennes, leurs géodésiques etc.

---

10. Nous utiliserons souvent les guillemets pour indiquer qu’il s’agit des droites, au sens hyperbolique, du modèle considéré.



### 2.4.1 Le modèle de Klein et son élargissement

Choisissons la droite  $t = 0$  comme droite à l'infini,  $D_\infty$ , de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , le plan affine associé étant alors le plan des  $(x, y)$  que l'on peut munir de l'origine  $o = (0, 0)$  et d'une structure euclidienne pour laquelle la base  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  est orthonormée. La conique  $\Gamma$  définie par  $q$  ne rencontre pas la droite de l'infini. Elle est donnée en affine par l'équation  $x^2 + y^2 = 1$ ; c'est donc le cercle unité<sup>11</sup> de centre  $o$ . Cette conique partage le plan en trois parties : le fermé  $\Gamma$  et les deux ouverts définis par  $q < 0$  et  $q > 0$ . La droite  $D_\infty$  est entièrement contenue dans la zone  $q > 0$  tandis que la partie  $q < 0$  est le disque ouvert défini par  $x^2 + y^2 < 1$ .

**2.4.1 Définition.** On note  $\mathbf{K}$  le disque ouvert de  $\mathbf{R}^2$  défini par  $x^2 + y^2 < 1$  : c'est le **modèle de Klein** de la géométrie hyperbolique. Il s'identifie à la partie de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  définie par  $q < 0$ . On note  $\mathbf{T}$  (comme les ténèbres extérieures) la partie de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  définie par  $q > 0$ .

Nous appellerons points hyperboliques les points de  $\mathbf{K}$  et droites hyperboliques les traces (non vides) sur  $\mathbf{K}$  des droites de  $\mathbf{R}^2$ . Ce sont donc des intervalles ouverts non vides, dont les extrémités sont sur  $\Gamma$ . La droite projective qui porte une droite hyperbolique sera appelée son support, voir figure 2.6.

**2.4.2 Remarque.** Les supports des droites hyperboliques sont des droites en notre sens, mais on ne les obtient pas toutes (on a perdu les droites extérieures à  $\Gamma$ ). Parmi les droites projectives, celles qui donnent naissance à des droites hyperboliques sont celles qui rencontrent  $\mathbf{K}$ , ou encore qui coupent  $\Gamma$  en deux points. Elles sont les images des plans vectoriels hyperboliques et ce sont exactement les droites qui vérifient  $q^*(D) > 0$ . En effet, si  $D = (ab)$ , on a  $q^*(D) = q(a \mathbb{A} b) = \varphi(a, b)^2 - q(a)q(b)$ . Ce nombre est l'opposé du discriminant de la forme  $q$  restreinte au plan hyperbolique dont l'image est  $D$ . Il est donc  $> 0$ , voir [Per96] Chapitre VIII.

Dans le modèle de Klein, tout a été fait pour qu'Euclide ne se retourne pas dans sa tombe :

**2.4.3 Proposition.** *Par deux points de  $\mathbf{K}$  passe une unique droite hyperbolique.*

---

11. Nous utiliserons cette structure euclidienne pour représenter  $\Gamma$  comme un cercle, mais ce n'est qu'une facilité de dessin et cela n'a aucune importance dans la mesure où la structure hyperbolique et la structure euclidienne en question ne sont pas compatibles : les perpendiculaires pour l'une ne le sont pas pour l'autre, les angles ne sont pas conservés.

**2.4.4 Définition.** Soient  $D_1, D_2$  deux droites hyperboliques de  $\mathbf{K}$  de supports  $\overline{D_1}$  et  $\overline{D_2}$ . On dit que  $D_1$  et  $D_2$  sont perpendiculaires si leurs supports le sont au sens de 1.3.7.

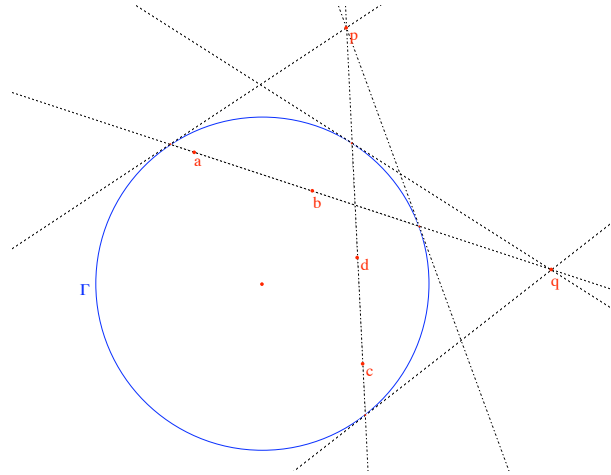


FIGURE 2.6 – Perpendiculaires dans le modèle de Klein : chacune des droites  $(ab)$  et  $(cd)$  passe par le pôle de l'autre

**2.4.5 Remarques.**

- 1) Même si, pour complaire à la tradition, nous nous sommes limités à la partie  $\mathbf{K}$  de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , nous aurons soin de ne jamais oublier les points extérieurs car ils permettent de mieux comprendre ce qui se passe dans  $\mathbf{K}$ .
- 2) **Attention**, dans ce modèle, deux droites perpendiculaires au sens du modèle ne le sont pas au sens euclidien, voir figure 2.6. En effet, pour les droites d'équations  $ax + by + c = 0$  et  $a'x + b'y + c' = 0$  la condition d'orthogonalité hyperbolique est  $aa' + bb' = cc'$ , tandis que la condition euclidienne est  $aa' + bb' = 0$ . Toutefois, on constate que les deux conditions coïncident dès que l'une des deux droites passe par l'origine.

**2.4.6 Remarque.** Il n'est peut-être pas inutile, avant d'aller plus loin, d'énumérer les diverses positions possibles pour des points et des droites de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  vis-à-vis de la forme  $q$ . Pour un point  $a$  il y a trois positions : dans  $\mathbf{K}$ , dans  $\Gamma$ , dans  $\mathbf{T}$ . Pour une droite  $D$ , trois positions aussi : elle peut couper  $\Gamma$  (droite hyperbolique), être tangente, ou extérieure, et ces positions correspondent aux positions du pôle  $d$  de  $D$  : dans  $\mathbf{T}$ , dans  $\Gamma$ , dans  $\mathbf{K}$ .

Considérons maintenant deux points  $a, b$  distincts de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  et soit  $D$  la droite  $(ab)$ . Il y a 9 cas :

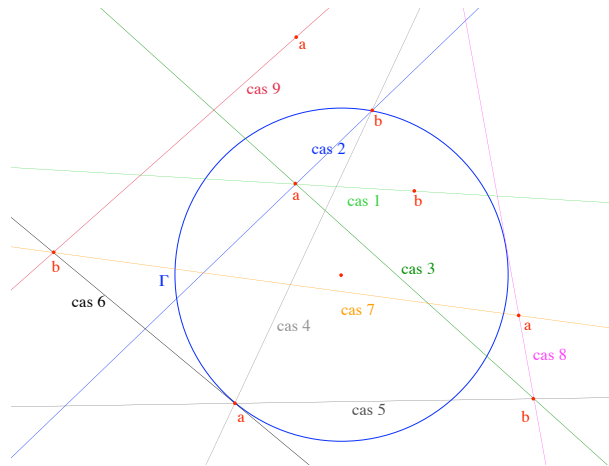


FIGURE 2.7 – Les neuf cas

- 1)  $a, b \in \mathbf{K}$ ,  $D$  est automatiquement hyperbolique,
- 2)  $a \in \mathbf{K}$ ,  $b \in \Gamma$ ,  $D$  est automatiquement hyperbolique,
- 3)  $a \in \mathbf{K}$ ,  $b \in \mathbf{T}$ ,  $D$  est automatiquement hyperbolique,
- 4)  $a, b \in \Gamma$ ,  $D$  est automatiquement hyperbolique,
- 5)  $a \in \Gamma$ ,  $b \in \mathbf{T}$ ,  $D$  peut être hyperbolique,
- 6)  $a \in \Gamma$ ,  $b \in \mathbf{T}$ ,  $D$  peut être tangente,
- 7)  $a, b \in \mathbf{T}$ ,  $D$  peut être hyperbolique,
- 8)  $a, b \in \mathbf{T}$ ,  $D$  peut être tangente,
- 9)  $a, b \in \mathbf{T}$ ,  $D$  peut être extérieure.

Si on se limite aux points et droites en notre sens il reste seulement les cas 1,3,7,9; si on travaille dans le modèle de Klein il y a seulement le cas numéro 1.

Par polarité on en déduit les positions de deux droites  $A, B$  se coupant en  $d$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ . Signalons seulement que, dans le modèle de Klein, contrairement au cas des points, il y a trois cas qu'on retrouve sur la figure ci-dessous :  $A, B_i$  sont des droites hyperboliques et leur point d'intersection peut être dans  $\mathbf{K}$  (droites sécantes, cas de  $B_1$ ) ou dans  $\Gamma$  (droites parallèles,  $B_2$ ) ou dans  $\mathbf{T}$  (droites faiblement parallèles,  $B_3$ ). Dans ce dernier cas, la polaire  $D$  de  $d$  est une droite hyperbolique, qui est la perpendiculaire commune à  $A$  et  $B_3$ . (On notera ici la différence avec le cas euclidien dans lequel le parallélisme coïncide avec l'existence d'une perpendiculaire commune.)

**2.4.7 Remarque.** On notera que deux points (non situés sur  $\Gamma$ ) ne peuvent être conjugués que si l'un d'eux au moins est extérieur. Par polarité, on en

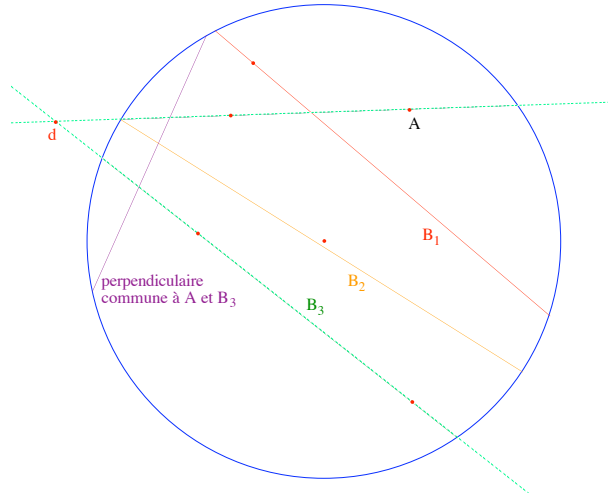


FIGURE 2.8 – Les trois cas pour les paires de droites hyperboliques

déduit que deux droites ne peuvent être perpendiculaires que si l'une au moins est hyperbolique.

### Paramétrisation de $\mathbf{K}$

Nous donnons dans ce paragraphe plusieurs écritures possibles des points de  $\mathbf{K}$ . Rappelons qu'un point  $a = (x, y, t)$  est dans  $\mathbf{K}$  si et seulement si il vérifie  $x^2 + y^2 - t^2 < 0$ . On a donc  $t \neq 0$  et, comme  $x, y, t$  sont des coordonnées homogènes, on peut toujours supposer  $t > 0$  (et même, si besoin est,  $t = 1$ ).

**2.4.8 Convention.** Dans toute la suite, on supposera toujours que les points  $(x, y, t)$  de  $\mathbf{K}$  vérifient  $t > 0$ .

La proposition suivante montre qu'avec cette convention la forme  $\varphi$  est négative sur  $\mathbf{K}$  :

**2.4.9 Proposition.** Soient  $a = (a_1, a_2, a_3)$  et  $b = (b_1, b_2, b_3)$  des points de  $\mathbf{K}$  vérifiant  $a_3 > 0$  et  $b_3 > 0$ . On a  $\varphi(a, b) < 0$ .

*Démonstration.* On a  $\varphi(a, b) = a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3$ . Comme  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbf{K}$  on a  $a_1^2 + a_2^2 < a_3^2$  et  $b_1^2 + b_2^2 < b_3^2$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour la forme euclidienne  $x^2 + y^2$  donne alors, vu les signes de  $a_3$  et  $b_3$ ,

$$a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} < a_3b_3.$$

Par ailleurs, on a des paramétrisations, souvent commodes, de  $\mathbf{K}$  :

**2.4.10 Proposition.** Soit  $a = (x, y, 1) \in \mathbf{K}$ . Il existe des réels  $u, \theta$  avec  $u \geq 0$  et  $0 \leq \theta < 2\pi$ , uniques sauf dans le cas  $x = y = 0$ , tels que  $a$  s'écrive sous la forme :  $a = (\operatorname{th} u \cos \theta, \operatorname{th} u \sin \theta, 1)$ . On peut aussi utiliser le représentant  $a' = (\operatorname{sh} u \cos \theta, \operatorname{sh} u \sin \theta, \operatorname{ch} u)$  qui vérifie  $q(a') = -1$ .

*Démonstration.* Comme  $x^2 + y^2$  est  $< 1$ , il existe un unique  $u \geq 0$  tel que  $x^2 + y^2 = \operatorname{th}^2 u$ . Si  $x$  et  $y$  sont nuls on a  $u = 0$  et on peut prendre  $\theta$  arbitrairement.

Sinon, on a  $\left(\frac{x}{\operatorname{th} u}\right)^2 + \left(\frac{y}{\operatorname{th} u}\right)^2 = 1$  d'où l'existence et l'unicité de  $\theta$ .

## 2.4.2 Le modèle de Minkowski

### Motivation

Une façon assez simple de comprendre le passage du modèle de Klein  $\mathbf{K}$ , que nous venons d'examiner ci-dessus, au modèle  $\mathbf{D}$  (le disque de Poincaré, sans doute, avec son frère jumeau le demi-plan, le plus classique des modèles de la géométrie hyperbolique) est d'utiliser un intermédiaire, à savoir le modèle de Minkowski  $\mathbf{M}$ . En effet, même si  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{D}$  ont tous deux leur support égal au disque unité du plan euclidien, leur géométrie est très différente : les droites sont rectilignes dans  $\mathbf{K}$ , mais pas dans  $\mathbf{D}$ , les angles droits en sont vraiment dans  $\mathbf{D}$ , mais pas dans  $\mathbf{K}$ , etc.

### Définition

Le modèle  $\mathbf{M}$  joue, pour le cas hyperbolique, le rôle de la sphère  $\mathbf{S}^2$  pour le cas elliptique. On dispose de la projection canonique  $\pi : \mathbf{R}^3 - \{0\} \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , mais comme on souhaite avoir une représentation du plan par une surface, on va restreindre  $\pi$  à une partie  $\mathcal{H}$  de dimension 2 de  $\mathbf{R}^3 - \{0\}$ . Par ailleurs, on a la forme quadratique  $q(x, y, t) = x^2 + y^2 - t^2$  et son groupe d'isométries  $PO(q)$  dont on souhaite qu'il agisse encore sur  $\mathcal{H}$ . On peut donc se limiter à une partie sur laquelle  $q$  est constante. Si cette constante est négative (resp. nulle, resp. positive) l'image de  $\mathcal{H}$  par  $\pi$  est  $\mathbf{K}$  (resp.  $\Gamma$ , resp.  $\mathbf{T}$ ). Comme c'est  $\mathbf{K}$  que l'on souhaite obtenir, la variété  $\mathcal{H}$  la plus simple est celle définie par  $q = -1$ , soit  $x^2 + y^2 - t^2 = -1$ , qui est un hyperboloïde à deux nappes. On a donc, comme dans le cas de la sphère, une projection surjective  $\pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{K}$  et  $\mathbf{K}$  est le quotient de l'hyperboloïde par la relation d'antipodie. En fait, dans ce cas, on peut se débarrasser du quotient en choisissant un représentant canonique dans la nappe "du haut" (i.e. celle définie par  $t \geq 1$ ) de l'hyperboloïde<sup>12</sup> :

<sup>12</sup>. Mais l'hyperboloïde entier  $\mathcal{H}$  peut être utile dans certains cas, voir en 2.4.19 ci-dessous la définition du groupe d'isométries ou en 7.4.11 la description des équidistantes.

**2.4.11 Définition.** *Le modèle de Minkowski  $\mathbf{M}$  est l'ensemble des points  $(x, y, t) \in \mathbf{R}^3$  vérifiant  $x^2 + y^2 - t^2 = -1$  et  $t \geq 1$ .*

On a cette fois une bijection  $\Psi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{K}$ , qui n'est autre que la restriction de  $\pi$  et qui est donnée (avec le plongement de  $\mathbf{K}$  dans le plan affine  $\mathbf{R}^2$  défini par  $t = 1$ ) par  $\Psi(x, y, t) = (x/t, y/t)$ .

Géométriquement on peut interpréter  $\Psi$  comme la perspective de centre  $o = (0, 0, 0)$  de  $\mathbf{M}$  sur le plan tangent  $t = 1$  au point  $(0, 0, 1)$  de  $\mathbf{M}$  (voir figure 2.9 ci-dessous). L'application réciproque est donnée par

$$\Psi^{-1}(X, Y) = \left( \frac{X}{\sqrt{1 - R^2}}, \frac{Y}{\sqrt{1 - R^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - R^2}} \right)$$

avec  $R^2 = X^2 + Y^2$ .

Vu la définition géométrique de  $\Psi$ , les droites du modèle  $\mathbf{M}$  sont les sections de  $\mathbf{M}$  par les plans passant par l'origine et ce sont des demi-hyperboles. Précisément, on a vu que les droites de  $\mathbf{K}$  sont les droites hyperboliques du plan  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  qui ont des équations de la forme  $ax + by - ct = 0$  avec  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$  (car leur pôle est dans  $\mathbf{T}$ ). L'image d'une telle droite dans  $\mathbf{M}$  est l'intersection de  $\mathbf{M}$  et du plan<sup>13</sup>  $ax + by - ct = 0$ .

## Paramétrisation

**2.4.12 Proposition.** *Soit  $m = (x, y, t) \in \mathbf{M}$ . Il existe deux nombres réels  $u \geq 0$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$ , uniques sauf dans le cas  $m = (0, 0, 1)$ , tels que l'on ait :  $x = \text{sh } u \cos \theta$ ,  $y = \text{sh } u \sin \theta$ ,  $t = \text{ch } u$ .*

*Démonstration.* Cela résulte de 2.4.10 et de l'expression de  $\Psi^{-1}$ .

## Structure riemannienne

Le parallèle entre la sphère et l'hyperboloïde se poursuit au niveau de la structure riemannienne. En effet, on peut encore munir la variété  $\mathbf{M}$  d'une structure riemannienne induite par la forme  $q$  donnée. Pour cela, on note que le plan tangent  $P$  à  $\mathbf{M}$  en  $m = (a, b, c)$  est donné par  $ax + by - ct = 0$  et que, sur ce plan, la restriction de la forme  $x^2 + y^2 - t^2$  est définie positive. En effet, on a  $q(m) < 0$  et  $P = m^\perp$  de sorte que  $P$  est un plan défini positif en vertu du théorème de Sylvester (voir Partie III, ??). C'est sur ce modèle  $\mathbf{M}$  que la structure riemannienne est la plus simple, puisque son  $ds^2$  est donné par  $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dt^2$ . Avec le paramétrage en  $u, \theta$  on a  $ds^2 = du^2 + \text{sh}^2 u d\theta^2$ .

13. Le signe  $-$  permet de voir ce plan comme l'orthogonal pour  $q$  du vecteur  $(a, b, c)$ .

On verra ci-dessous que les “droites” (i.e. les demi-hyperboles) sont bien les géodésiques pour cette structure.

La structure définie sur  $\mathbf{M}$  permet de définir une structure riemannienne sur  $\mathbf{K}$  comme image par  $\Psi$ . Le calcul est laissé au lecteur. Le principe est d’écrire les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles :  $x = f(X, Y)$ , etc. de calculer  $dx$  et les autres par les formules  $dx = \frac{\partial f}{\partial X}(X, Y)dX + \frac{\partial f}{\partial Y}(X, Y)dY$  et de remplacer dans le  $ds^2$ . Voici le résultat :

$$ds^2 = \frac{(1 - Y^2)dX^2 + 2XYdXdY + (1 - X^2)dY^2}{(1 - X^2 - Y^2)^2}.$$

### 2.4.3 Le disque de Poincaré

#### Définition

Pour passer de  $\mathbf{M}$  au disque de Poincaré  $\mathbf{D}$  on utilise une deuxième perspective, copiée exactement sur le cas de la sphère puisqu’elle a aussi pour centre le point  $s = (0, 0, -1)$  et projette aussi  $\mathbf{M}$  sur le plan  $P$  défini par  $t = 0$ . Comme dans le cas de la sphère, elle est donnée par  $\Psi'(x, y, t) = \left(\frac{x}{t+1}, \frac{y}{t+1}\right)$  et c’est encore une bijection de  $\mathbf{M}$  sur le disque unité (ouvert cette fois), noté  $\mathbf{D}$ . La réciproque est donnée par

$$\Psi'^{-1}(X, Y) = \left(\frac{2X}{1 - R^2}, \frac{2Y}{1 - R^2}, \frac{1 + R^2}{1 - R^2}\right)$$

avec  $R^2 = X^2 + Y^2$ .

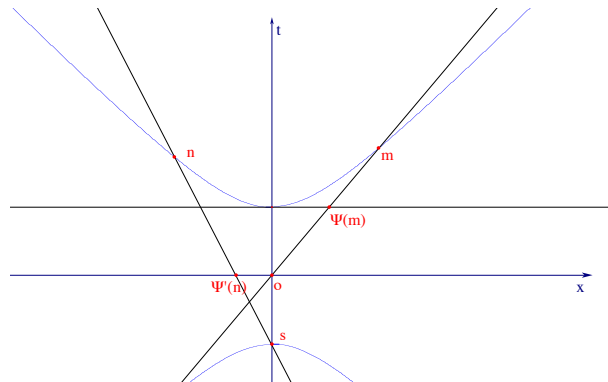


FIGURE 2.9 – Les deux projections stéréographiques de l’hyperboloïde vues dans le plan des  $x, t$

Il en résulte évidemment une bijection  $\Theta = \Psi' \circ \Psi^{-1} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{D}$  définie par  $\Theta(X, Y) = \left( \frac{X}{1 + \sqrt{1 - R^2}}, \frac{Y}{1 + \sqrt{1 - R^2}} \right)$ , avec  $R^2 = X^2 + Y^2$ , de réciproque donnée par  $\Theta^{-1}(x, y) = \left( \frac{2x}{1 + r^2}, \frac{2y}{1 + r^2} \right)$  avec  $r^2 = x^2 + y^2$ .

**2.4.13 Définition.** On note  $\mathbf{D}$  le disque ouvert de  $\mathbf{R}^2$  défini par  $x^2 + y^2 < 1$ ; muni des droites et de la structure riemannienne définies ci-dessous, c'est le modèle du **disque de Poincaré** de la géométrie hyperbolique.

**2.4.14 Remarque.** Le cercle unité joue le rôle d'objet à l'infini dans ce modèle, on le désigne sous le nom d'**horizon**.

**2.4.15 Remarque.** La perspective  $\Psi'$  ressemble vraiment beaucoup à la projection stéréographique d'une sphère, surtout si l'on veut bien la regarder non seulement sur  $\mathbf{M}$ , mais sur  $\mathcal{H}$  tout entier, y compris avec ses points à l'infini. En effet, l'autre nappe de l'hyperboloïde correspond à l'hémisphère sud et s'envoie sur l'extérieur du disque, sauf le point  $s = (0, 0, -1)$  qui va à l'infini. Le cercle unité n'est pas dans l'image, mais il est atteint par les points à l'infini de l'hyperboloïde. Précisément, on considère la variété projective  $\overline{\mathcal{H}}$  (adhérence de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ ) d'équation, en coordonnées homogènes  $(x, y, t, w)$ ,  $x^2 + y^2 - t^2 + w^2 = 0$  et la flèche  $\Psi' : \mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  donnée, en coordonnées homogènes, par  $\psi'(x, y, t, w) = (x, y, t + w)$ . Cette application est définie sauf au point  $s = (0, 0, -1, 1)$ . L'image de  $\overline{\mathcal{H}}$  par  $\psi'$  est contenue dans le plan affine  $t + w \neq 0$  et, en particulier, les points à l'infini  $w = 0$  vont sur le cercle unité  $x^2 + y^2 - t^2 = 0$  ( $x^2 + y^2 - 1 = 0$  en affine). On prolonge  $\Psi'$  en une bijection de  $\overline{\mathcal{H}}$  sur  $\widehat{P}$  (où  $P$  est le plan des  $(x, y)$  et où  $\widehat{P}$ , comme dans le cas elliptique, désigne la sphère de Riemann  $P \cup \{\infty\}$ ) en envoyant  $s$  sur le point  $\infty$ . On passe de  $\widehat{P}$  au disque de Poincaré  $\mathbf{D}$  en identifiant  $\psi'(x, y, t)$  et  $\psi'(-x, -y, -t)$ , c'est-à-dire les points  $m = \left( \frac{x}{t+1}, \frac{y}{t+1} \right)$  et  $m' = \left( \frac{x}{t-1}, \frac{y}{t-1} \right)$ . Un calcul immédiat montre que ces points sont inverses dans l'inversion de pôle  $o = (0, 0)$  et de puissance 1 (inversion par rapport au cercle unité, l'analogue de l'antipodie elliptique). On a ainsi un revêtement de degré 2 de  $\widehat{P}$  sur  $\mathbf{D}$  ramifié le long du cercle unité.

**Attention**, cette description du plan hyperbolique à l'aide de  $\widehat{P}$  n'est pas du tout celle que nous avons vue avec le modèle de Klein et les parties  $\mathbf{K}$ ,  $\Gamma$  et  $\mathbf{T}$ . En effet, ici, l'extérieur du disque n'est qu'une copie<sup>14</sup> de l'intérieur (et elle n'est pas porteuse de sens comme les points de  $\mathbf{T}$ ).

14. Il faut penser à une sorte de crêpe que l'on replierait le long du cercle unité.



## Droites

On peut décrire les “droites” de ce modèle :

**2.4.16 Proposition.** *Les “droites” du modèle  $\mathbf{D}$  sont les traces sur  $\mathbf{D}$  des cercles orthogonaux au cercle unité  $\Gamma$  et des diamètres de  $\Gamma$ .*

*Démonstration.* Rappelons que deux courbes du plan euclidien qui se coupent en  $o$  sont dites orthogonales en  $o$  si leurs tangentes en ce point sont perpendiculaires. Dans le cas d’une droite et d’un cercle cela signifie que la droite est un diamètre du cercle, dans le cas de deux cercles la condition nécessaire et suffisante d’orthogonalité est  $d^2 = R^2 + R'^2$  où  $d$  est la distance des centres et  $R$  et  $R'$  les rayons des cercles (c’est le théorème de Pythagore).

Comme les droites de  $\mathbf{M}$  sont les intersections de  $\mathbf{M}$  avec les plans  $ax + by - ct = 0$  (avec  $a^2 + b^2 - c^2 > 0$ ), leurs images dans  $\mathbf{D}$ , vu la description de la flèche  $\Psi'$ , sont données par les équations  $c(X^2 + Y^2) - 2aX - 2bY + c = 0$ . Si  $c$  est nul on a une droite passant par l’origine du plan des  $(X, Y)$  (donc un diamètre de  $\Gamma$ ). Si  $c$  est non nul on reconnaît un cercle de centre  $(a/c, b/c)$  et de carré du rayon  $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2}$  et on vérifie avec la formule  $d^2 = R^2 + R'^2$  qu’il est orthogonal à  $\Gamma$ , les points d’intersection de ce cercle avec  $\Gamma$  étant les intersections de  $\Gamma$  et de la droite  $aX + bY - c = 0$ .

## Structure riemannienne

La structure riemannienne de  $\mathbf{D}$  s’obtient à partir de celle de  $\mathbf{M}$  en calculant son image par  $\Psi'$ . Le calcul est sans malice. Voici le  $ds^2$  obtenu :

$$ds^2 = 4 \frac{dX^2 + dY^2}{(1 - X^2 - Y^2)^2}.$$

Intuitivement, plus on approche du cercle frontière, plus les distances s’allongent. Nous reviendrons plus loin sur la distance hyperbolique.

## 2.4.4 Le demi-plan de Poincaré et le disque

Un autre modèle traditionnel de la géométrie hyperbolique est le demi-plan de Poincaré.

Le demi-plan de Poincaré  $\mathbf{H}$  est le demi-plan  $y > 0$  de  $\mathbf{R}^2$  (avec les coordonnées  $(x, y)$ ) ou de  $\mathbf{C}$  (avec la coordonnée  $z = x + iy$ ). Le disque de Poincaré peut être vu comme le disque unité de  $\mathbf{C}$  :  $\mathbf{D} = \{z \mid |z| < 1\}$  et on sait qu’entre ces deux ouverts simplement connexes de  $\mathbf{C}$  il y a une bijection

holomorphe  $\Phi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{D}$  définie par  $\Phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$  de réciproque  $\Phi^{-1}(w) = i \frac{1+w}{1-w}$ . En  $(x, y)$  on a la formule  $\Phi(x, y) = \left( \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y+1)^2}, \frac{-2x}{x^2 + (y+1)^2} \right)$ .

**2.4.17 Remarque.** Le cercle  $x^2 + y^2 = 1$ , bord de  $\mathbf{D}$  (l'horizon), s'envoie par  $\Phi^{-1}$  sur l'axe des  $x$ , sauf le point  $w = 1$  qui a pour image le point à l'infini  $\infty$  dans la direction de l'axe imaginaire. La droite projective formée de l'axe des  $x$  et du point  $\infty$  joue donc le rôle d'horizon pour le demi-plan  $\mathbf{H}$ .

## Droites

Les droites de  $\mathbf{H}$  se déduisent de celles de  $\mathbf{D}$  :

**2.4.18 Proposition.** Les “droites” du modèle  $\mathbf{H}$  sont les traces sur  $\mathbf{H}$  des droites perpendiculaires à l'axe réel et des cercles dont le centre est sur l'axe réel.

*Démonstration.* On note d'abord que, comme  $\Phi^{-1}$  est une homographie, elle transforme une droite ou un cercle en une droite ou un cercle (voir Partie VI ou [Ber90]). De plus, elle conserve l'orthogonalité (*loc. cit.*). Comme  $\Phi^{-1}$  envoie le cercle unité sur l'axe réel, les droites du modèle  $\mathbf{D}$  s'envoient donc sur les droites ou cercles orthogonaux à l'axe réel, d'où le résultat.

## Structure riemannienne

Il reste à préciser la structure riemannienne de  $\mathbf{H}$ . Le calcul est assez saumâtre, mais le résultat en vaut la peine car le  $ds^2$  est le plus simple de tous :  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ . Intuitivement cela veut dire que les distances sont de plus en plus longues à mesure qu'on s'approche de l'axe des  $x$ .

On peut expliciter la flèche bijective  $\Theta^{-1}\Phi$  de  $\mathbf{H}$  dans  $\mathbf{K}$  :

$$\Theta^{-1}\Phi(x, y) = \left( \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{-2x}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Pour une approche élémentaire de  $\mathbf{H}$ , voir exercice 2.5.2.

## 2.4.5 Groupe d'isométries

Les variétés riemanniennes (toutes isomorphes) que nous venons de considérer ont la propriété essentielle de posséder un très gros<sup>15</sup> groupe d'isométries, qui n'est autre que  $G = PO(q)$ .

<sup>15</sup>. Au sens où ce groupe est transitif sur les points.

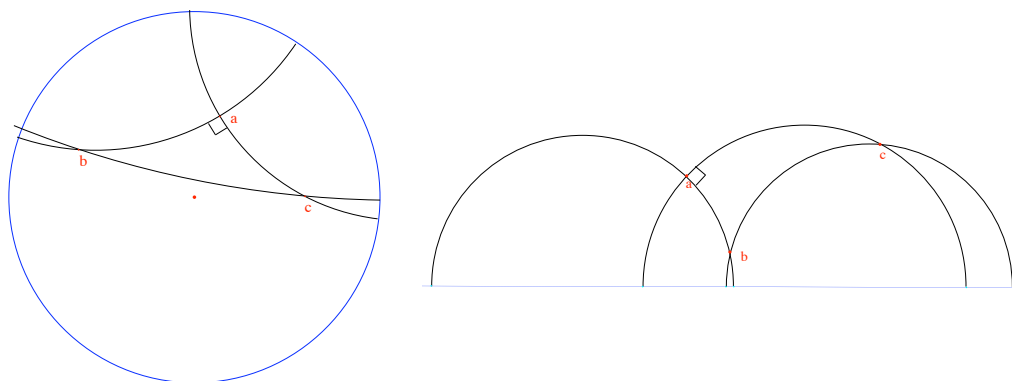


FIGURE 2.10 – Un triangle rectangle (en  $a$ ) dans le disque et le demi-plan de Poincaré

Il y a beaucoup de façons de montrer l'existence de ce groupe d'isométries. Si l'on considère le modèle  $\mathbf{K}$ , muni naturellement de la forme  $q(x, y, t) = x^2 + y^2 - t^2$ , le groupe  $PO(q) \simeq O^+(q)$ , groupe d'isométries pour la forme  $q$ , est constitutif de la structure de  $\mathbf{K}$ . Cependant il n'est pas tout à fait immédiat de montrer qu'il s'agit d'un groupe d'isométries pour la structure riemannienne. C'est facile en revanche avec  $\mathbf{H}$  et très classique, voir par exemple [Bea83] 7.4, pourvu que l'on ait identifié le groupe d'isométries comme le groupe  $PGL(2, \mathbf{R})$  (sous-groupe du groupe  $PGL(2, \mathbf{C})$  des homographies de la droite projective complexe<sup>16</sup>). Voilà une autre façon de faire, qui utilise le modèle  $\mathbf{M}$  et réalise ainsi un compromis entre les deux points de vue :

**2.4.19 Proposition.** *Le groupe orthogonal  $PO(q)$  de la forme  $q = x^2 + y^2 - t^2$  est un groupe d'isométries de la variété riemannienne  $\mathbf{M}$ .*

*Démonstration.* Le groupe  $O(q)$ , dans son opération naturelle sur  $\mathbf{R}^3$ , conserve l'hyperboloïde  $\mathcal{H}$  défini par  $x^2 + y^2 - t^2 = -1$ , mais, attention, pas nécessairement la nappe  $\mathbf{M}$ . En effet, par continuité, les éléments de  $O(q)$  permutent les deux nappes de  $\mathcal{H}$  (définies par  $t > 0$  et  $t < 0$ ) car ce sont ses composantes connexes. Il ne suffit pas de restreindre l'opération au sous-groupe  $O^+(q)$  car le renversement  $(x, y, t) \mapsto (x, -y, -t)$ , par exemple, échange les deux nappes<sup>17</sup>.

16. Qui peut s'appeler aussi groupe anallagmatique, conforme, de Möbius, et j'en passe.

17. Précisément, les isométries positives qui conservent les deux nappes sont celles du sous-groupe des commutateurs  $\Omega(q)$ . En effet, notons  $\sigma_x$  le renversement qui fixe  $x$  et change en leurs opposés les vecteurs orthogonaux à  $x$ . Si  $q(x)$  est  $< 0$ , on peut prendre  $x \in \mathcal{H}$  et  $\sigma_x$  conserve les deux nappes de l'hyperboloïde. En revanche, si  $q(x)$  est  $> 0$ , son orthogonal contient des points de  $\mathcal{H}$ , qui sont changés en leurs opposés, de sorte que les nappes de  $\mathcal{H}$  sont échangées. On conclut en utilisant la norme spinorielle, voir 1.4.16.

On peut toutefois faire opérer  $PO(q) = O^+(q)$  sur  $\mathbf{M}$ . En effet, si  $u$  est dans  $O^+(q)$  et envoie  $\mathbf{M}$  sur l'autre nappe il suffit d'appliquer  $-\text{Id}$  pour revenir dans  $\mathbf{M}$  (cela revient à définir l'opération sur le projectif, bien entendu, ou encore à faire opérer le sous-groupe<sup>18</sup>  $O_c(q)$  qui conserve  $\mathcal{H}$ , en notant qu'il est isomorphe à  $PO(q)$ ). Comme le plan tangent en un point  $m \in \mathbf{M}$  est l'orthogonal de  $m$  pour  $q$ , les plans tangents sont permutés par les éléments de  $O^+(q)$  et comme la structure riemannienne est donnée par la restriction de  $q$  aux plans tangents, elle est bien invariante par  $O^+(q)$ .

On en déduit la propriété analogue pour  $\mathbf{K}$  :

**2.4.20 Corollaire.** *Le groupe projectif  $PO(q)$  est un groupe d'isométries de la variété riemannienne  $\mathbf{K}$ .*

*Démonstration.* C'est clair car la structure riemannienne sur  $\mathbf{K}$  est obtenue à partie de celle de  $\mathbf{M}$  par transport *via* l'application  $\Psi$ .

**2.4.21 Corollaire.** *La variété riemannienne  $\mathbf{K}$  (et cela vaut aussi pour ses avatars  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ) est homogène. Précisément, le groupe d'isométries  $PO(q)$  est transitif sur les points  $a \in \mathbf{K}$ , sur les "droites" (hyperboliques)  $D$  et sur les drapeaux  $(a, D)$  avec  $a \in D$ .*

*Démonstration.* Ce résultat sera prouvé au chapitre 4, voir 4.2.6.

## Involutions

Dans le cas des symétries axiales (c'est-à-dire celles qui ne sont pas dans  $\Omega(q)$ , voir 1.4.15), on a un résultat analogue à celui obtenu dans le cas du modèle elliptique conforme, voir 2.3.4 :

**2.4.22 Théorème.** *Soit  $h = (a, b, c)$  un vecteur de  $\mathbf{R}^3$  vérifiant  $a^2 + b^2 - c^2 = 1$  et soit  $\tau_h$  la réflexion orthogonale (au sens de  $q$ ) par rapport au plan  $P = h^\perp$ . L'intersection de  $P$  avec  $\mathbf{M}$  est non vide (c'est une branche d'hyperbole) et on la note  $H$ . La réflexion  $\tau_h$  induit par restriction une involution de  $\mathbf{M}$ . La bijection  $\Psi' : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{D}$  transporte  $\tau_h|_{\mathbf{M}}$  (voir 2.1.3) en sa conjuguée  $\Psi'\tau_h\Psi'^{-1}$ , qui est une bijection de  $\mathbf{D}$ , et précisément la restriction à  $\mathbf{D}$  de l'inversion (resp. la symétrie) par rapport au cercle (resp. à la droite) qui porte  $\Psi'(H)$ . Le pôle de cette inversion est le point  $(a/c, b/c)$  qui est un point du plan extérieur à  $\mathbf{D}$ .*

*Démonstration.* Comme on a  $q(h) > 0$ , la restriction à  $P$  de la forme  $q$  est de signature  $(1, -1)$  donc hyperbolique et elle prend toutes les valeurs, en

---

18. C'est aussi la composante connexe de l'élément neutre dans  $O(q)$ . Le quotient  $O(q)/\Omega(q)$  est le groupe  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  et il y a donc trois sous-groupes intermédiaires.

particulier  $-1$ , ce qui signifie que  $P$  rencontre  $\mathbf{M}$ . Le calcul de l'inversion est pratiquement identique à celui qui a été mené dans le cas elliptique. On a  $h = (a, b, c)$  avec  $a^2 + b^2 - c^2 = 1$ ,  $m = (x, y, t)$  avec  $m \in \mathbf{M}$  donc  $x^2 + y^2 - t^2 = -1$  et le plan  $P$  est défini par  $ax + by - ct = 0$ , ce qui donne le même cercle que dans le cas elliptique. Comme son centre est  $(a/c, b/c)$ , c'est bien un point extérieur à  $\mathbf{D}$ .

### 2.4.23 Remarques.

- 1) Le théorème précédent ne donne que les symétries axiales. Pour les symétries centrales (dans le demi-plan de Poincaré) voir exercice 2.5.3.
- 2) Le fait que les involutions soient des inversions montre que ce sont des transformations conformes de  $\mathbf{D}$ . Comme elles engendrent  $PO(q)$ , c'est vrai aussi pour toutes les transformations de  $PO(q)$ .

## 2.4.6 Géodésiques

Nous allons vérifier qu'en géométrie hyperbolique comme en géométrie euclidienne, les droites (hyperboliques) sont les géodésiques, c'est-à-dire les lignes de plus court chemin.

Le calcul peut se faire dans l'un quelconque des modèles. Nous avons choisi le modèle de Minkowski. Si  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{M}$  est une courbe de classe  $C^1$  tracée sur  $\mathbf{M}$ , avec  $\gamma(u) = (x(u), y(u), t(u))$  la longueur de  $\gamma$  s'obtient en intégrant la norme (au sens du  $ds^2$  de la structure riemannienne) du vecteur tangent  $\gamma'(u)$  :

$$l(\gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u) - t'^2(u)} du.$$

**2.4.24 Théorème.** *Les "droites" (hyperboliques, donc ici les demi-hyperboles) sont les géodésiques de  $\mathbf{M}$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de montrer que, parmi les courbes  $\gamma$  joignant deux points  $a$  et  $b$  de  $\mathbf{M}$ , le "segment de droite"  $[ab]$  est la plus courte. Comme le groupe  $PO(q)$  est un groupe d'isométries de  $\mathbf{M}$  et qu'il est transitif sur les points (voir 4.2.6), il suffit de montrer l'assertion pour les courbes d'origine  $a = (0, 0, 1)$ . Vu le paramétrage de  $\mathbf{M}$  (voir 2.4.12), on peut écrire  $b = M(\beta, \theta)$  avec  $\theta \in [0, 2\pi[$  (et  $a = M(0, \theta)$ ). La droite  $D$  joignant  $a$  et  $b$  est la trace sur  $\mathbf{M}$  du plan passant par l'origine  $(0, 0, 0)$  et par  $a$  et  $b$ , plan d'équation  $X \sin \theta - Y \cos \theta = 0$ . Le paramétrage de  $\mathbf{M}$  (voir 2.4.12) montre que cette droite est la courbe à  $\theta$  constant tracée sur  $\mathbf{M}$ , i.e. la droite  $D_{\theta}$  donnée par le paramétrage  $u \mapsto (\text{sh } u \cos \theta, \text{sh } u \sin \theta, \text{ch } u)$ .

Un calcul immédiat montre que la longueur du segment  $[ab]$  (autrement dit de la portion de la droite  $D_\theta$  comprise entre ces deux points) est égale à  $\beta$ .

Considérons maintenant une courbe  $\gamma$  quelconque tracée sur  $\mathbf{M}$ , d'origine  $a = \gamma(u_1)$  et d'extrémité  $b = \gamma(u_2)$ . On a donc  $t(u_1) = 1 = \operatorname{ch} 0$  et  $t(u_2) = \operatorname{ch} \beta$ . On a le lemme suivant :

**2.4.25 Lemme.** *Soit  $\gamma$  une courbe de classe  $C^1$  tracée sur  $\mathbf{M}$ , donnée par le paramétrage  $\gamma(u) = (x(u), y(u), t(u))$ . On a l'inégalité :*

$$\sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} \geq \left( \sqrt{x^2(u) + y^2(u)} \right)' = \left( \sqrt{t^2(u) - 1} \right)' = \frac{t(u)t'(u)}{\sqrt{t^2(u) - 1}}.$$

*Démonstration.* L'inégalité signifie  $xx' + yy' \leq \sqrt{x'^2 + y'^2} \sqrt{x^2 + y^2}$  et ce n'est rien d'autre que Cauchy-Schwartz.

On peut alors finir la preuve du théorème. Le lemme nous donne  $\|\gamma'(u)\|^2 = x'^2(u) + y'^2(u) - t'^2(u) \geq \frac{t^2(u)t'^2(u)}{t^2(u) - 1} - t'^2(u) = \frac{t'^2(u)}{t^2(u) - 1}$ . On en déduit  $l(\gamma) \geq \int_{u_1}^{u_2} \frac{t'(u)}{\sqrt{t^2(u) - 1}} du = \operatorname{Argch} t(u_2) - \operatorname{Argch} t(u_1) = \beta$ . Autrement dit, la longueur de  $\gamma$  est plus grande que la longueur du segment  $[ab]$ .

Ce résultat admet aussitôt pour corollaire le résultat analogue pour les autres modèles :

**2.4.26 Corollaire.** *Les géodésiques de  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$  pour leurs structures riemanniennes respectives sont les "droites".*

**2.4.27 Remarque.** On sait que la structure riemannienne permet de définir la distance de deux points  $a$  et  $b$  : c'est le minimum des longueurs des courbes allant de  $a$  à  $b$ . Ici c'est donc la longueur, au sens riemannien, du segment  $[ab]$ . On a vu ci-dessus que pour les points  $a = M(0, \theta) = (0, 0, 1)$  et  $b = M(\beta, \theta) = (\operatorname{sh} \beta \cos \theta, \operatorname{sh} \beta \sin \theta, \operatorname{ch} \beta)$  de  $\mathbf{M}$ , cette distance est égale à  $\beta$  et c'est aussi la distance des images de ces points dans  $\mathbf{K}$ , c'est-à-dire de  $a = (0, 0, 1)$  et  $b = (\operatorname{th} \beta \cos \theta, \operatorname{th} \beta \sin \theta, 1)$ .

On peut aussi faire ce calcul dans  $\mathbf{H}$  : si on a deux points  $a, b$  et si  $a', b'$  sont les points à l'infini sur la droite hyperbolique qui les joint (c'est-à-dire les points de l'axe réel) on a  $d(a, b) = \ln(\|a', a, b, b'\|)$ , voir par exemple [Bea83]. Nous retrouverons cette formule au chapitre 5, voir 5.1.14.

## 2.4.7 Conformité et courbure

Nous définirons plus loin une notion d'angle générale dans le plan hyperbolique et nous verrons (cf. 5.2.10) que les angles sont les mêmes qu'au sens euclidien (c'est-à-dire les angles des tangentes aux "droites" hyperboliques) dans les modèles de Poincaré **D** et **H**, qui sont donc des modèles conformes, mais pas dans le modèle de Klein **K**.

Par ailleurs, on montre qu'avec ces métriques, le plan hyperbolique est une variété riemannienne à courbure constante (ce point est clair avec la transitivité de  $PO(q)$ ) et qu'elle est négative et égale à  $-1$  (il faut faire le calcul dans l'un des modèles et ce n'est jamais complètement évident, voir par exemple [SG93] 3.14 ou [DL82] III 5.10).

## 2.4.8 Aires

La notion générale d'aire définie pour une surface riemannienne se traduit dans le plan hyperbolique et l'élément d'aire se calcule avec la formule 2.2.3 :

**2.4.28 Proposition.** *L'élément d'aire est égal à  $dS = \frac{dx \wedge dy}{y^2}$  dans le demi-plan de Poincaré, à  $dS = \frac{4dx \wedge dy}{(1 - x^2 - y^2)^2}$  dans le disque de Poincaré et à  $dS = \frac{dx \wedge dy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$  dans le disque de Klein.*

**2.4.29 Remarque.** Sur **H**, par exemple, on peut montrer que la mesure associée à cet élément d'aire est la seule mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et invariante par  $PO(q)$ .

## 2.4.9 Le modèle de Beltrami

### Motivation

La problématique de l'introduction de ce dernier modèle est la suivante. Les variétés riemanniennes vues ci-dessus sont toutes plongées dans  $\mathbf{R}^2$  ou  $\mathbf{R}^3$ , mais aucune n'y est plongée de manière isométrique et les métriques riemannienne et euclidienne y sont distinctes. Notre objectif est donc de trouver une variété  $S$  isométrique à **M** et à ses congénères, plongée dans  $\mathbf{R}^3$ , mais dont la structure riemannienne soit induite par celle de  $\mathbf{R}^3$ . Bien entendu, le théorème de Hilbert 2.1.2, interdit qu'un tel plongement soit globalement réalisable, mais nous allons voir qu'il existe localement.

## Construction

Le premier à avoir mené ce calcul est Beltrami<sup>19</sup>, essentiellement à partir de la structure riemannienne de  $\mathbf{K}$ . Dans ce qui suit nous allons procéder plutôt à partir du demi-plan de Poincaré qui a le mérite de posséder le  $ds^2$  le plus simple :  $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ . Par commodité, par analogie avec la sphère, parce qu'ainsi on aura déjà un groupe d'isométries important, on cherche  $S$  sous forme d'une surface de révolution. Le paramétrage de  $S$  est donc du type :

$$\left( f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta, g(t) \right).$$

La forme euclidienne canonique sur  $\mathbf{R}^3$  induit sur cette surface une structure riemannienne dont le  $ds^2$  est donné par  $f(t)^2 d\theta^2 + (f'(t)^2 + g'(t)^2) dt^2$ . Si on prend  $(\theta, t)$  comme coordonnées de  $\mathbf{H}$ , le  $ds^2$  de  $\mathbf{H}$  vaut  $\frac{d\theta^2 + dt^2}{t^2}$ , et pour qu'ils coïncident il faut donc avoir  $f(t) = 1/t$  et  $f'(t)^2 + g'(t)^2 = \frac{1}{t^2}$ , ce qui donne  $g'(t)^2 = \frac{t^2 - 1}{t^4}$ . On voit qu'il faut se limiter à la zone  $t \geq 1$  et on a  $g(t) = \int \frac{\sqrt{t^2 - 1}}{t^2} dt$ , primitive qui se calcule en posant  $t = \operatorname{ch} u$  et qui donne la surface  $S$  sous la forme :

$$\left( \frac{\cos \theta}{\operatorname{ch} u}, \frac{\sin \theta}{\operatorname{ch} u}, u - \operatorname{th} u \right).$$

Appelons demi-plan de Poincaré "réduit" le demi-plan  $\mathbf{H}'$  formé des couples  $(\theta, u)$  avec  $\theta \in \mathbf{R}$  et  $u \geq 0$  et muni de la structure riemannienne définie par  $ds^2 = \left(\frac{d\theta}{\operatorname{ch} u}\right)^2 + (\operatorname{th} u du)^2$ . Ce demi-plan est isomorphe, comme variété riemannienne, à la partie de  $\mathbf{H}$  définie par  $t \geq 1$  au moyen de l'application  $(\theta, u) \mapsto (\theta, \operatorname{ch} u)$ . On a alors une application  $\Lambda : \mathbf{H}' \rightarrow \mathbf{R}^3$  :

$$\Lambda(\theta, u) = \left( \frac{\cos \theta}{\operatorname{ch} u}, \frac{\sin \theta}{\operatorname{ch} u}, u - \operatorname{th} u \right).$$

**2.4.30 Définition.** *L'image de l'application  $\Lambda$  est une surface de révolution de  $\mathbf{R}^3$  appelée pseudosphère et notée  $\mathbf{B}$  (comme Beltrami). Elle est munie de la structure riemannienne induite par la forme euclidienne de  $\mathbf{R}^3$ .*

---

19. Eugenio Beltrami, *Saggio di interpretazione della geometria non euclidea*, traduit en français par Jules Houël, *Essai d'interprétation de la géométrie non euclidienne*, Ann. Scient. E.N.S., 6, p. 251-258, 1859. Le premier chapitre de [Mar02] étudie en détail ce modèle, avec des figures magnifiques.



### 2.4.31 Remarques.

- 1) On appelle généralement pseudosphère la surface de révolution obtenue par la rotation autour de l'axe des  $z$  de la courbe plane dont un paramétrage est  $x = \frac{1}{\operatorname{ch} u}$ ,  $y = u - \operatorname{th} u$ . Cette courbe est une tractrice (développante de la chaînette). La surface  $\mathbf{B}$  que nous considérons est la moitié de la pseudosphère contenue dans le demi-espace  $z \geq 0$ .
- 2) Les points  $u = 0$  s'envoient sur le cercle unité du plan  $z = 0$  qui est la frontière de  $\mathbf{B}$ . Le point  $\infty$  (point à l'infini de l'axe imaginaire de  $\mathbf{H}$  qui correspond à  $u$  infini) a pour image l'unique point à l'infini de  $\mathbf{B}$  (point à l'infini dans la direction de l'axe des  $z$ ).
- 3) Le calcul effectué ci-dessus montre que l'application  $\Lambda$  est (en chaque point) une isométrie pour les structures riemanniennes de  $\mathbf{H}'$  et  $\mathbf{B}$ .

Bien entendu, l'application  $\Lambda$  n'est pas une bijection de  $\mathbf{H}'$  sur  $\mathbf{B}$  à cause de la périodicité des fonctions trigonométriques. Précisément :

**2.4.32 Proposition.** *L'application  $\Lambda$  est un revêtement  $C^\infty$  de  $\mathbf{B}$ , de fibre  $\mathbf{Z}$ . Comme  $\mathbf{H}'$  est simplement connexe c'est le revêtement universel de  $\mathbf{B}$ .*

*Démonstration.* Comme l'application  $u \mapsto u - \operatorname{th} u$  est croissante sur  $\mathbf{R}^+$ , il est clair que  $\Lambda$ , en restriction à une bande  $]\theta - \pi, \theta + \pi[$ , admet un inverse. Les fibres d'un point de  $\mathbf{B}$  sont de la forme  $(\theta + 2\pi\mathbf{Z}, u)$ , donc isomorphes à  $\mathbf{Z}$ .

*On voit que  $\mathbf{B}$ , qui a l'avantage d'être munie, comme surface de  $\mathbf{R}^3$ , de la métrique euclidienne usuelle, présente deux inconvénients par rapport aux autres variantes du plan hyperbolique. En premier lieu, elle ne rend compte que d'une partie du plan (les points  $y \geq 1$  de la variante  $\mathbf{H}$ ). En second lieu, on a seulement une flèche surjective, mais pas du tout injective, de cette partie dans  $\mathbf{B}$ . Cela signifie que vont apparaître les phénomènes classiques des revêtements : enroulement des courbes, feuilles, etc.*

### “Droites”

Bien entendu, les droites hyperboliques de  $\mathbf{H}$  deviennent des géodésiques de  $\mathbf{B}$ . Leurs équations s'obtiennent à partir de celles des demi-cercles de  $\mathbf{H}$  :  $(x + c)^2 + y^2 = k^2$  ou, avec les nouvelles coordonnées,  $(\theta + c)^2 + \operatorname{ch}^2 u = k^2$ . Quant aux demi-droites verticales de  $\mathbf{H}$ , elles correspondent aux génératrices  $\theta = \text{constante}$  de  $\mathbf{B}$ .

*Dans les chapitres suivants, nous utiliserons principalement les modèles évoqués ci-dessus pour  $y$  tracer des figures. En vérité, nous n'emploierons guère que les modèles  $\mathbf{K}$ , le plus proche de nos conceptions générales sur la*

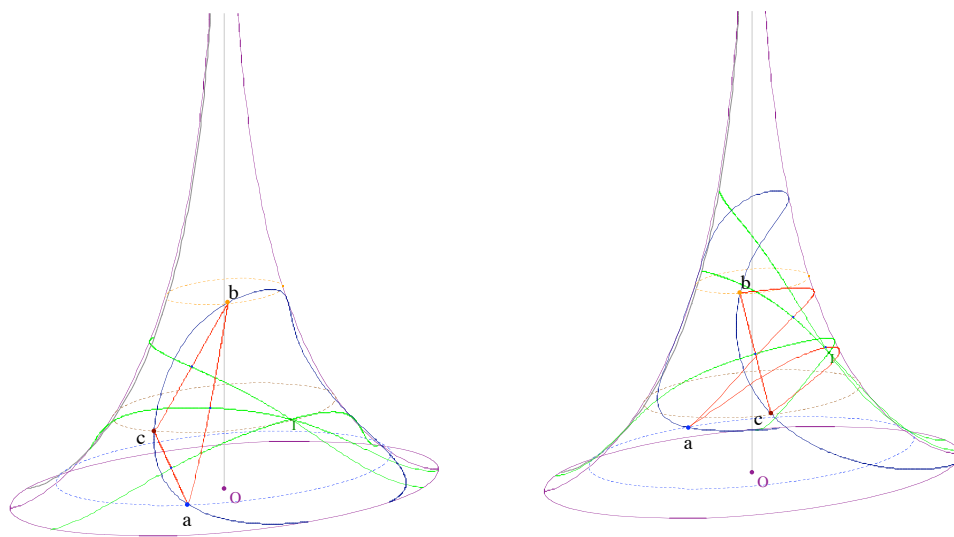


FIGURE 2.11 – Un triangle (rouge), ses médiatrices (vertes) et son cercle circonscrit (noir) dans le modèle de Beltrami

*géométrie hyperbolique, et  $\mathbf{D}$ , pour avoir un modèle conforme. Les modèles  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{B}$  qui sont plongés dans  $\mathbf{R}^3$  sont moins commodes et le modèle  $\mathbf{H}$  (qui peut être le plus commode pour les calculs) est trop proche de  $\mathbf{D}$ .*

## 2.5 Exercices

### 2.5.1 Géométrie elliptique

#### 2.5.1 Exercice. Confection de macros en géométrie elliptique dans le modèle non conforme

L'objectif de cet exercice est de donner quelques pistes au lecteur qui souhaiterait élaborer des macros pour implanter dans un logiciel de géométrie dynamique les outils nécessaires pour travailler dans le modèle non conforme du plan elliptique. Le travail a été fait avec le logiciel Cabri mais peut sans doute se transposer sans difficulté.

On rappelle qu'on dispose dans le plan affine usuel d'une origine  $o$  et du cercle unité euclidien usuel  $\Gamma$ . La construction du pôle d'une droite et celle d'une d'une perpendiculaire ont été données au paragraphe 2.3.2.

1) Soit  $D$  une droite,  $d$  son pôle et  $m$  un point du plan distinct de  $d$ . La droite  $(dm)$  coupe  $D$  en  $d'$ . Montrer que le symétrique elliptique  $m'$  de  $m$  par rapport à  $D$  est le conjugué harmonique de  $m$  par rapport à  $d, d'$  (utiliser le fait que la symétrie induit une involution de  $(dm)$  et utiliser Partie I, ??).

2) Soient  $a, b$  deux points du plan. On se propose de construire le milieu intérieur<sup>20</sup> de  $a, b$ . Pour cela on utilisera 3.1.3 ci-dessous qui montre que si l'on a  $q(a) = q(b)$  ce milieu est le point (projectif)  $a + b$ . En appliquant ce résultat aux points  $a' = \frac{a}{\sqrt{q(a)}}$  et  $b' = \frac{b}{\sqrt{q(b)}}$ , montrer que le milieu est le barycentre des points  $a, b$  affectés des coefficients  $\sqrt{q(b)}$  et  $\sqrt{q(a)}$ . Construire ce point (si  $a = (a_1, a_2)$ , on construira d'abord la racine de  $q(a) = a_1^2 + a_2^2 + 1$  en utilisant le théorème de Pythagore, et de même pour  $q(b)$ , et on finira la construction en utilisant le théorème de Thalès).

Construire l'autre milieu de  $a, b$  (c'est le conjugué harmonique du premier par rapport à  $a, b$ ).

3) On suppose qu'on dispose d'une macro qui construit une conique à partir de cinq de ses points. Construire le cercle (elliptique) de centre  $a$  passant par  $b$  (c'est une conique dans le plan affine euclidien, voir 7.1.10 ci-dessous, et on en construit quatre autres points en prenant les symétriques de  $b$  par rapport à quatre droites arbitraires passant par  $a$ ). Montrer qu'on peut obtenir tous les types de coniques (prendre par exemple  $a = (a_1, 0, 1)$  et  $b = (0, 0, 1)$ ).

4) Utiliser 2) ou 3) pour construire les médiatrices de  $a, b$ .

5) Calculer la distance elliptique de deux points à l'aide de 5.1.7 ci-dessous. (Si le cercle choisi comme cercle unité n'est pas de rayon 1 on n'oubliera pas de normaliser les distances en divisant par le rayon.)

## 2.5.2 Géométrie hyperbolique

Les exercices suivants proposent une approche élémentaire de la géométrie hyperbolique dans le demi-plan de Poincaré.

### 2.5.2 Exercice. Le plan hyperbolique et ses droites

Rappelons qu'on appelle **demi-plan de Poincaré** l'ensemble  $\mathbf{H} = \{x + iy \in \mathbf{C} \mid y > 0\}$  et qu'on appelle **droites hyperboliques** de  $\mathbf{H}$  les demi-droites verticales d'origine située sur l'axe des  $x$  et les demi-cercles centrés sur l'axe des  $x$ .

On appelle **horizon** ou bord de  $\mathbf{H}$ , l'ensemble formé de la droite réelle  $\mathbf{R}$  et d'un unique point à l'infini, noté  $\infty$ . On considérera, par convention, que les droites de  $\mathbf{C}$  passent par  $\infty$ , mais pas les cercles.

---

20. C'est-à-dire celui situé sur le segment ordinaire  $[ab]$ , attention, cette notion n'a de sens qu'en référence à une droite à l'infini fixée.

0) Montrer que les droites hyperboliques satisfont à l'axiome fondateur de la géométrie : *par deux points distincts de  $\mathbf{H}$  passe une droite hyperbolique et une seule.*

1) Soit  $a, b, c \in \mathbf{R}$  vérifiant  $a^2 + bc = 1$  et  $c \geq 0$ .

a) On note  $C_{a,b,c}$  l'ensemble des points  $x + iy$  vérifiant les relations :

$$c(x^2 + y^2) - 2ax - b = 0 \quad \text{et} \quad y > 0.$$

Montrer que  $C_{a,b,c}$  est une droite hyperbolique. Dans le cas où cette droite hyperbolique est un demi-cercle, on précisera son centre et son rayon.

b) Montrer que les droites hyperboliques de  $\mathbf{H}$  sont toutes de la forme précédente.

2) Soient  $D$  et  $D'$  deux droites hyperboliques distinctes d'équations  $c(x^2 + y^2) - 2ax - b = 0$  et  $c'(x^2 + y^2) - 2a'x - b' = 0$  (avec les conditions de 1). On pose  $\varphi(D, D') = aa' + \frac{1}{2}(bc' + b'c)$ . Montrer que  $D$  et  $D'$  ont un point commun dans  $\mathbf{H}$  (resp. sur le bord de  $\mathbf{H}$ ) si et seulement si on a  $|\varphi(D, D')| < 1$  (resp.  $\varphi(D, D') = \pm 1$ ).

On dit que deux droites hyperboliques sont **perpendiculaires** si elles se coupent en un point de  $\mathbf{H}$  et si les tangentes aux deux "droites" en ce point sont perpendiculaires.

3) Montrer que, si ces droites hyperboliques sont des cercles, de centres  $o$  et  $\omega$  et de rayons  $r$  et  $\rho$ , on a  $o\omega^2 = r^2 + \rho^2$ .

4) Soient  $D$  et  $\Delta$  deux droites hyperboliques d'équations  $c(x^2 + y^2) - 2ax - b = 0$  et  $\gamma(x^2 + y^2) - 2\alpha x - \beta = 0$  avec  $a^2 + bc = \alpha^2 + \beta\gamma = 1$ . Montrer que ces droites sont perpendiculaires si et seulement si on a  $\varphi(D, \Delta) = 0$  ou encore  $2a\alpha + b\gamma + c\beta = 0$ .

5) Soient  $D, D'$  deux droites hyperboliques distinctes. Montrer que  $D$  et  $D'$  admettent une perpendiculaire commune (et une seule) si et seulement si elles n'ont pas de point commun ni dans  $\mathbf{H}$ , ni dans le bord de  $\mathbf{H}$ .

### 2.5.3 Exercice. Le groupe des isométries

On reprend les notations de 2.5.2.

Rappelons que les homographies de  $\mathbf{C}$  sont les applications  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbf{C}$  et  $ad - bc \neq 0$ . Une telle application définit une bijection de  $\mathbf{C} - \{-\frac{d}{c}\}$  sur  $\mathbf{C} - \{\frac{a}{c}\}$  (pour  $c \neq 0$ ) et on la prolonge en une bijection de  $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  en posant  $f(-\frac{d}{c}) = \infty$  et  $f(\infty) = \frac{a}{c}$ . Pour  $c = 0$  on a une bijection de  $\mathbf{C}$  que l'on prolonge en posant  $f(\infty) = \infty$ . On considère aussi les anti-homographies :  $f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  et on rappelle que le produit d'une

homographie et d'une anti-homographie est une anti-homographie, que celui de deux anti-homographies est une homographie, etc.

0) a) Montrer qu'une homographie transforme une droite (resp. un cercle) en une droite ou un cercle (on pourra décomposer  $f$  en produit de similitudes et de transformations du type  $z \mapsto 1/z$ ).

b) Montrer qu'une homographie distincte de  $\text{Id}$  admet au plus deux points fixes dans  $\widehat{\mathbf{C}}$ .

1) On considère l'ensemble  $G^+$  des homographies à coefficients  $a, b, c, d$  réels vérifiant  $ad - bc = 1$  et l'ensemble  $G^-$  des anti-homographies à coefficients réels aussi, mais avec  $ad - bc = -1$ . On pose  $G = G^+ \cup G^-$ .

a) Montrer que le produit de deux éléments de  $G^+$  est dans  $G^+$ . Étudier les divers cas mettant en jeu  $G^+$  et  $G^-$ .

b) Montrer que  $G$  est exactement le groupe des homographies et anti-homographies qui vérifient  $f(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ .

## 2) Les involutions de $G^-$

On s'intéresse aux involutions de  $G$ , c'est-à-dire aux éléments qui vérifient  $f \circ f = \text{Id}$ , d'abord dans le cas de  $G^-$ .

a) Soit  $f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$  un élément de  $G^-$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i)  $f$  est une involution.

ii)  $f$  admet un point fixe dans  $\mathbf{H}$ .

iii) On a  $a + d = 0$ .

Montrer qu'on a alors la relation  $a^2 + bc = 1$ .

b) Montrer que l'ensemble des points fixes dans  $\mathbf{H}$  d'une involution de  $G^-$  est une droite hyperbolique.

c) Montrer, réciproquement, que si  $D$  est une droite hyperbolique, il existe une unique involution de  $G^-$  qui admet  $D$  comme ensemble de points fixes. On la note  $\tau_D$  et on l'appelle **symétrie d'axe  $D$**  (au sens hyperbolique).

c) Soit  $D$  une droite hyperbolique et soit  $f \in G$ . Montrer que  $f\tau_D f^{-1}$  est un élément de  $G^-$ , que c'est une involution et que ses points fixes sont exactement ceux de  $f(D)$ .

En déduire que tout élément  $f \in G$  transforme une droite hyperbolique en une droite hyperbolique.

d) Soient  $D, D'$  deux droites de  $\mathbf{H}$ , distinctes. Montrer que  $D$  et  $D'$  sont perpendiculaires si et seulement si on a  $\tau_D \circ \tau_{D'} = \tau_{D'} \circ \tau_D$ . En déduire que tout élément  $f \in G$  transforme deux droites perpendiculaires de  $\mathbf{H}$  en droites perpendiculaires.

e) Montrer que les droites invariantes par  $\tau_D$  et distinctes de  $D$  sont les perpendiculaires à  $D$ .

3) **Les involutions de  $G^+$**

Soit  $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  un élément de  $G^+$ .

a) Montrer que  $f$  est une involution si et seulement si on a  $a + d = 0$ .

b) Montrer qu'une involution de  $G^+$  admet un unique point fixe dans  $\mathbf{H}$  et qu'inversement, tout point  $m$  de  $\mathbf{H}$  est point fixe d'une unique involution de  $G^+$ . Cette involution est la **symétrie de centre  $m$**  (au sens hyperbolique) et on la note  $\sigma_m$ .

c) Montrer que le produit de deux symétries d'axes  $D, D'$  perpendiculaires en  $m$  est la symétrie de centre  $m$ .

d) On considère l'application définie par  $\sigma(z) = \frac{-1}{z}$ . Montrer qu'il s'agit d'une symétrie centrale hyperbolique dont on précisera le centre. Montrer que toute symétrie centrale est conjuguée de  $\sigma$  dans  $G^+$ . En déduire que toute symétrie centrale est composée d'une symétrie axiale et d'une inversion (au sens euclidien).

# Chapitre 3

## Les droites remarquables du triangle

*Ce chapitre anticipe quelque peu sur la suite, puisqu'on y aborde les problèmes de transitivité via l'existence des milieux, médiatrices, bissectrices, etc. En vérité, il s'agit d'un chapitre de propagande, dont l'objectif est de convaincre le lecteur de la pertinence de nos choix et notamment de trois points : l'emploi du cadre algébrique associé à l'espace projectif, l'usage des points extérieurs dans le plan hyperbolique et l'utilisation de la dualité. Il y verra en effet avec quelle facilité se montrent les théorèmes usuels de concours des droites remarquables du triangle, avec des preuves identiques dans le cas hyperbolique et dans le cas elliptique. Il pourra comparer avec les preuves produites à partir d'autres approches (cf. [Bac59], [Lio01], etc.). Bien entendu, dans le cas hyperbolique, si l'on souhaite revenir aux modèles usuels, il est nécessaire de traduire la notion de concours lorsque le point d'intersection des droites est un point extérieur, mais cette traduction, en termes de perpendiculaire commune, est immédiate, voir ci-dessous. Un autre attrait de la méthode est la facilité avec laquelle on passe (par exemple) des milieux aux médiatrices, ou des médiatrices aux bissectrices et inversement.*

Les notations concernant points, droites, triangles, perpendiculaires et involutions sont celles introduites en 1.3.1, 1.3.4, 1.3.7 et 1.4.5.

### 3.1 Médiatrices, milieux, bissectrices, bissecteurs

Les notions classiques de médiatrices, milieux, bissectrices et celle, moins classique, de point bissecteur, sont directement issues de la considération des

involutions du groupe  $PO(q)$  et de leur double écriture  $\tau_D = \sigma_d$ , voir 1.4.5.

### 3.1.1 Médiatrices et milieux

#### Définition

**3.1.1 Définition.** Soient  $a, b$  deux points distincts (on rappelle qu'il s'agit de points en notre sens, donc non isotropes). On appelle **médiatrice** de  $a, b$  une droite  $M$  vérifiant  $\tau_M(a) = b$ ; on appelle **milieu** de  $a, b$  un point  $m$  vérifiant  $\sigma_m(a) = b$ .

#### 3.1.2 Remarques.

1) Médiatrices et milieux au sens de 3.1.1 sont des droites et des points non isotropes puisque les involutions correspondantes existent.

2) Soit  $M$  une droite et  $m = M^\perp$  son pôle. Comme on a  $\tau_M = \sigma_m$ ,  $M$  est une médiatrice de  $a, b$  si et seulement si  $m$  en est un milieu. Cette remarque est évidemment essentielle dans la mesure où elle permet de ne traiter qu'une moitié des problèmes.

3) La formule vectorielle :  $b = \sigma_m(a) = -a + 2 \frac{\varphi(a, m)}{q(m)} m$  montre que tout milieu  $m$  de  $a, b$  est sur la droite<sup>1</sup>  $(ab)$  et que, par conséquent, toute médiatrice  $M$  de  $a, b$  est perpendiculaire à  $(ab)$  (puisque le pôle  $m$  de  $M$  est sur  $(ab)$ , voir 1.3.7).

#### Existence

Sur un corps quelconque, l'existence de médiatrices et de milieux est essentiellement une question arithmétique liée aux carrés (mais sur  $\mathbf{R}$  c'est juste une question de signe, voir 3.1.4) :

**3.1.3 Théorème.** Soient  $a, b$  deux points distincts (non isotropes) de  $\mathbf{P}(E)$ .

1) Les points  $a$  et  $b$  admettent une médiatrice (resp. un milieu) si et seulement si on a  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . On peut alors supposer, quitte à changer de représentants, qu'on a  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*$ .

2) On suppose qu'on a choisi des représentants vérifiant  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*$ .

a) Si  $(ab)$  est non isotrope, les points  $a$  et  $b$  ont deux milieux  $m^+ = a + b$  et  $m^- = a - b$  et deux médiatrices qui sont les polaires  $M^+$  et  $M^-$  des milieux  $m^-$  et  $m^+$  respectivement. La droite  $M^+$  (resp.  $M^-$ ) est la perpendiculaire à  $(ab)$  passant par  $m^+$  (resp.  $m^-$ ). Les deux milieux et les points des deux médiatrices sont fixes dans les deux symétries. Les deux milieux  $m^+$  et  $m^-$

---

1. Comme les points  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  sont distincts on a  $\varphi(a, m) \neq 0$ .



sont orthogonaux (ou conjugués), les deux médiatrices sont perpendiculaires.  
 b) Si  $(ab)$  est isotrope (i.e. tangente à la conique  $\Gamma$  définie par  $q$ ), les points  $a$  et  $b$  ont un seul milieu et une seule médiatrice (qui passe par le point de contact). Dans ce cas on conviendra d'appeler médiatrice généralisée (resp. milieu généralisé) la droite  $(ab)$  elle-même (resp. son pôle qui est le point de contact de  $(ab)$  et de  $\Gamma$ ). Avec cette définition, les milieux et les médiatrices sont encore les points  $a + b$ ,  $a - b$  et leurs polaires.

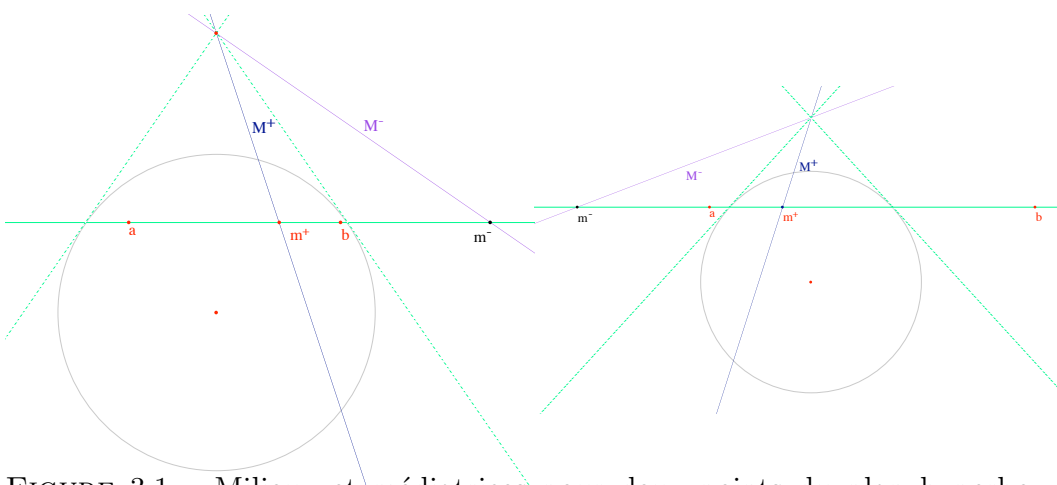


FIGURE 3.1 – Milieux et médiatrices pour deux points du plan hyperbolique (à gauche deux points de  $\mathbf{K}$ , à droite deux points  $a, b$  de  $\mathbf{T}$  avec  $(ab)$  hyperbolique)

*Démonstration.* La condition  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$  est clairement nécessaire, voir 1.4.2. Si elle est réalisée, notons encore  $a, b$  des relèvements de  $a, b$  dans  $E$ . Quitte à changer  $a$  en  $\lambda a$ , on peut supposer  $q(a) = q(b) \neq 0$ . Si  $m$  est milieu de  $a, b$ , on a vu que  $m$  est sur  $(ab)$ . On a donc  $m = \lambda a + \mu b$ . Comme  $\sigma_m$  échange  $a$  et  $b$  dans  $\mathbf{P}(E)$  et que  $q(a)$  et  $q(b)$  sont égaux, on a  $\sigma_m(a) = \epsilon b$  et  $\sigma_m(b) = \epsilon a$  avec  $\epsilon = \pm 1$  (le signe est le même car  $\sigma_m$  provient d'une involution de  $E$ ). La formule  $\sigma_m(m) = m$  impose  $\lambda = \mu \epsilon$  et donc  $m = a + b$  ou  $m = a - b$  dans  $\mathbf{P}(E)$ . Il y a donc au plus deux milieux.

Réciproquement, supposant toujours  $q(a) = q(b) \neq 0$ , on considère les vecteurs  $a + b$  et  $a - b$ . Ils ne sont pas tous les deux isotropes. En effet, on a  $q(a + b) = q(a) + q(b) + 2\varphi(a, b) = 2(q(a) + \varphi(a, b))$  et  $q(a - b) = 2(q(a) - \varphi(a, b))$ . Si tous deux sont nuls, on a  $q(a) = 0$ , ce qui est absurde. De plus, ces vecteurs sont orthogonaux. Si  $a + b$  est non isotrope, le renversement  $\sigma_{a+b}$  fixe  $a + b$  et envoie  $a - b$  sur  $b - a$ , donc il envoie  $a$  sur  $b$ ; si  $a - b$  est non isotrope,  $\sigma_{a-b}$  envoie  $a$  sur  $-b$  (ce qui est la même chose dans  $\mathbf{P}(E)$ ). Si ces deux vecteurs sont non isotropes on a donc deux milieux et deux médiatrices.

Dire que l'un des vecteurs  $a + b$  ou  $a - b$  est isotrope revient à dire que  $\varphi(a, b) = \pm q(a)$  ce qui signifie que le discriminant  $q(a)^2 - \varphi(a, b)^2$  de  $q$  en restriction à  $(ab)$  est nul, donc que la droite  $(ab)$  est isotrope. Réciproquement, si la forme  $q|_{(ab)}$  est dégénérée (et si on suppose toujours  $q(a) = q(b)$ ) le discriminant  $q(a)^2 - \varphi(a, b)^2$  est nul, de sorte que le noyau est  $a - b$  ou  $a + b$  selon que  $\varphi(a, b)$  est égal à  $q(a)$  ou à son opposé.

Dans le cas de deux milieux,  $m^+ = a + b$ ,  $m^- = a - b$ , comme on a  $\varphi(m^+, m^-) = 0$ , les milieux sont orthogonaux, et on a  $m^+ \in M^+ = (m^-)^\perp$  et  $m^- \in M^- = (m^+)^\perp$ , d'où les assertions sur les médiatrices (chacune contient un milieu et elles sont perpendiculaires).

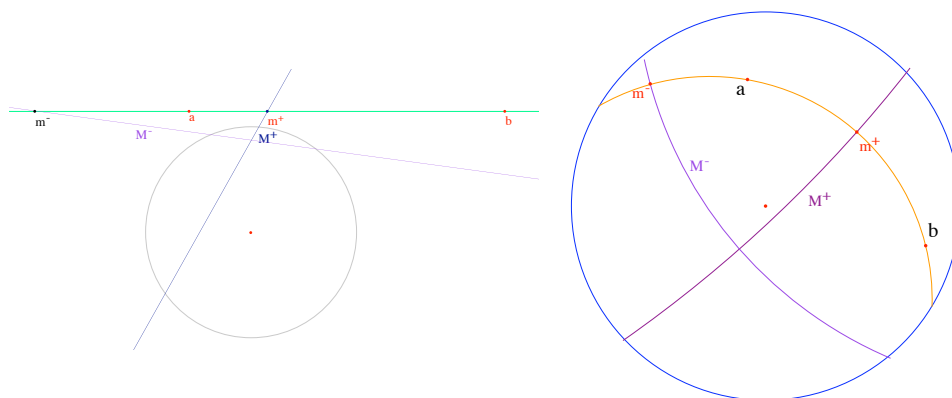


FIGURE 3.2 – Milieux et médiatrices pour deux points  $a, b$  du plan hyperbolique avec  $(ab)$  extérieure (à gauche) et deux points du plan elliptique (à droite)

### 3.1.4 Remarques.

1) Rappelons que, dans le cas où le corps  $k$  est égal à  $\mathbf{R}$ , la condition  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$  signifie simplement que  $q(a)$  et  $q(b)$  sont **de même signe**, condition toujours réalisée dans le plan elliptique et qui signifie que  $a, b$  sont tous deux dans  $\mathbf{K}$  ou tous deux dans  $\mathbf{T}$  dans le cas hyperbolique.

2) **Attention**, les notations  $m^+, m^-$  pour les milieux ne sont pas canoniques : elles dépendent du choix des représentants des points  $a, b$  : si on change  $a$  en  $-a$ , ce qui est possible puisque  $q(a)$  ne change pas,  $m^+$  et  $m^-$  s'échangent. Pour une discussion détaillée dans le cas réel, voir ci-dessous.

3) Si les points  $a, b$  sont isotropes il y a une infinité de symétries axiales ou centrales qui les échangent. En effet, il suffit de considérer le plan vectoriel hyperbolique  $(ab)$  défini par  $a$  et  $b$  et les symétries orthogonales de ce plan<sup>2</sup>,

<sup>2</sup> Plus géométriquement, on considère la droite projective hyperbolique qui joint les deux points de  $\Gamma$  et les symétries par rapport aux perpendiculaires à cette droite.

voir [Per96] p. 188-189, prolongées par l'identité sur  $(ab)^\perp$ . On ne peut donc pas définir milieux et médiatrices comme ci-dessus.

4) Si les points  $a$  et  $b$  sont confondus, il y a une infinité de points  $m$  tels que  $\sigma_m(a) = a$ . En effet, outre  $m = a$  lui-même, il y a tous les points de la polaire de  $a$ . De même, il y a une infinité de droites  $M$  telles que  $\tau_M(a) = a$  (la polaire de  $a$  et les droites passant par  $a$ ).

5) Si  $q$ , en restriction à  $(ab)$ , est dégénérée, elle ne représente que les carrés (ce qui implique  $q(a) = q(b) = 1$  dans  $k^*/k^{*2}$ ). En effet, on est nécessairement dans le cas de la forme de Lorentz  $x^2 + y^2 - t^2$ . De plus, le groupe  $PO(q)$  est transitif sur les droites isotropes par le théorème de Witt, donc aussi sur les plans isotropes et il suffit de vérifier l'assertion pour le plan  $x = t$ .

6) Si l'on a  $q(a) = q(b)$ , la réunion des médiatrices est la conique définie par  $\varphi(a, m)^2 = \varphi(b, m)^2$ , voir exercice 4.7.21.

Le résultat suivant montrent que les milieux divisent harmoniquement les points  $a, b$  :

**3.1.5 Théorème.** *On suppose que  $a, b$  ont deux milieux  $c$  et  $d$ . Alors on a  $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = -1$ . Réciproquement, si  $a, b, c, d$  sont quatre points alignés, si  $c$  et  $d$  sont non isotropes, orthogonaux et vérifient  $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = -1$ ,  $c$  et  $d$  sont les milieux de  $a$  et  $b$ .*

*Démonstration.* Comme l'involution  $\sigma_c$  fixe  $c$  et  $d$  et échange  $a$  et  $b$  on a  $\llbracket c, d, a, b \rrbracket = -1 = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$  en vertu de Partie I ???. Réciproquement, considérons la symétrie  $\sigma_c$ . Elle laisse stable  $(ab)$ , donc induit une involution  $\sigma$  de  $(ab)$ . De plus,  $\sigma_c$  fixe la polaire de  $c$  et en particulier le point  $d$  qui est sur cette polaire. En vertu de Partie I ??? on a  $\llbracket c, d, a, \sigma_c(a) \rrbracket = -1$ . Mais comme  $\llbracket c, d, a, b \rrbracket$  vaut aussi  $-1$  c'est que  $\sigma_c(a)$  est égal à  $b$ , de sorte que  $c$  est un milieu de  $a, b$  l'autre étant évidemment  $d$  par le sens direct.

### 3.1.2 Bissectrices et bissecteurs

La polarité va nous permettre de ramener le cas des bissectrices à celui des médiatrices, avec en prime une notion nouvelle : celle de point bissecteur. Rappelons qu'une droite de  $\mathbf{P}(E)$  peut être vue comme un point de  $\mathbf{P}(E^*)$ . C'est ainsi que nous pourrons écrire  $A + B$  pour deux droites  $A, B$  en identifiant les droites aux formes linéaires qui les définissent.

**3.1.6 Définition.** *Soient  $A, B$  deux droites distinctes (non isotropes). On appelle **bissectrice** de  $A, B$  une droite  $D$  vérifiant  $\tau_D(A) = B$ . On appelle **point bissecteur** (ou plus brièvement **bissecteur**) de  $A, B$  un point  $d$  vérifiant  $\sigma_d(A) = B$ .*

**3.1.7 Remarque.** Le pôle d'une bissectrice est un bissecteur et *vice-versa*.

**3.1.8 Proposition.** *L'existence de bissectrice ou de bissecteur pour  $A, B$  est équivalente à celle de médiatrice ou de milieu pour leurs pôles  $a, b$ . En particulier, il existe une bissectrice si et seulement si on a  $q^*(A) = q^*(B)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Dans ce cas, il existe deux bissectrices  $D^+$  et  $D^-$  (et deux bissecteurs  $d^-$  et  $d^+$  qui sont leurs pôles respectifs) si et seulement si le point d'intersection  $c$  de  $A$  et  $B$  est non isotrope. Dans le cas contraire il y a une seule bissectrice et un seul bissecteur.*

*Démonstration.* Le seul point à prouver est le premier, mais par conservation de l'orthogonalité on a bien  $\tau_D(A) = B \iff \tau_D(a) = b$ .

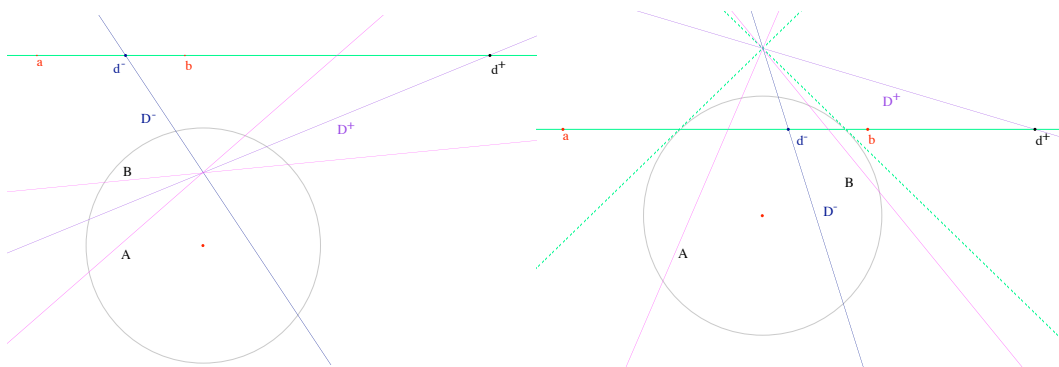


FIGURE 3.3 – Bissectrices et bissecteurs pour deux droites du plan hyperbolique

**3.1.9 Remarques.**

1) Il serait fastidieux de dérouler systématiquement les conséquences de la polarité. Le lecteur se livrera à cet exercice facile et vérifiera que tous les faits suivants sont conséquences de ceux établis dans le cas des milieux et médiatrices : on peut supposer  $q^*(A) = q^*(B)$  ; dans ce cas, les bissectrices  $D^+$  et  $D^-$  sont données par  $A + B$  et  $A - B$ . Elles passent par le point  $c$  (intersection de  $A$  et  $B$ ), elles sont perpendiculaires, les bissecteurs  $d^+$  et  $d^-$  sont sur la polaire de  $c$  et sont orthogonaux,  $D^+$  (resp.  $D^-$ ) contient  $d^+$  (resp.  $d^-$ ), on a  $\llbracket A, B, D^+, D^- \rrbracket = -1$ . Le lecteur définira aussi, dans le cas où  $c$  est isotrope, bissectrice et bissecteur généralisés comme  $c^\perp$  et  $c$ .

2) Dans le cas de deux droites  $(ab)$  et  $(ac)$ , si on suppose qu'on a  $q(a \wedge b) = q(a \wedge c)$ , les points bissecteurs sont  $(a \wedge b) \pm (a \wedge c)$ .

**3.1.10 Remarque.** Comme dans le cas des médiatrices, les notations  $D^+$  et  $D^-$  ne sont pas canoniques (surtout sur un corps quelconque). Il existe

toutefois une façon compatible de noter les unes et les autres. Si  $a, b$  sont deux vecteurs non isotropes et si on note  $A, B$  les formes  $\varphi_a$  et  $\varphi_b$  (qui définissent les polaires des points), on sait qu'on a les relations  $q(a) = q^*(A)$  et  $q(b) = q^*(B)$ . Si on a  $q(a) = q(b)$ , les points  $a, b$  admettent les milieux  $m^+ = a + b$  et  $m^- = a - b$  et les médiatrices correspondantes  $M^+ = (m^-)^\perp$  et  $M^- = (m^+)^\perp$  qui sont aussi points bissecteurs et bissectrices pour les droites  $A, B$ . Précisément, on a  $D^+ = A + B = M^-$  et  $D^- = A - B = M^+$ . En effet,  $M^-$  est caractérisée comme la médiatrice passant par  $m^- = a - b$ , or on a  $(A+B)(a-b) = \varphi_a(a) - \varphi_a(b) + \varphi_b(a) - \varphi_b(b) = q(a) - \varphi(a, b) + \varphi(b, a) - q(b) = 0$ . On notera le renversement du signe des exposants entre médiatrices et bissectrices<sup>3</sup>.

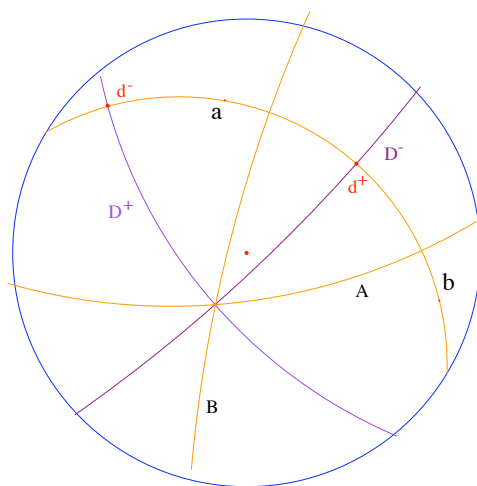


FIGURE 3.4 – Bissectrices et bissecteurs pour deux droites du plan elliptique

## 3.2 Le concours des droites remarquables du triangle

*Voilà la panoplie des théorèmes de notre enfance! Nous les énonçons d'abord dans le cadre le plus général, avec points et droites en notre sens, sur un corps quelconque, et dans l'une ou l'autre des géométries, elliptique ou hyperbolique. La traduction, notamment dans le cas hyperbolique réel, est donnée un peu plus loin.*

3. On peut aussi le vérifier en notant que  $D^+ = A + B = \varphi_a + \varphi_b = \varphi_{a+b}$  est la polaire de  $m^+ = a + b$ . C'est donc bien  $M^-$ .

### 3.2.1 Triangles

Nous complétons les définitions données en 1.3.4 à la lueur de ce qui précède :

**3.2.1 Définition.** *On dit qu'un triangle  $abc$  (resp. un trilatère  $ABC$ ) est strict si on a  $q(a) = q(b) = q(c)$  dans  $k^*/k^{*2}$  (resp.  $q(A) = q(B) = q(C)$  dans  $k^*/k^{*2}$ ).*

**3.2.2 Remarques.**

1) D'après ce qui précède, un triangle strict admet six milieux et six médiatrices (éventuellement généralisées). Un triangle strict dont les côtés forment un trilatère strict admet six milieux, six médiatrices, six bissectrices, six bissecteurs (éventuellement généralisés).

2) Comme on l'a dit, dans le cas réel, la condition d'égalité dans  $k^*/k^{*2}$  est simplement une condition de signe. Dans le cas réel elliptique, tout triangle (resp. tout trilatère) est strict. Dans le cas hyperbolique réel, un triangle généralisé est strict si et seulement si les trois sommets  $a, b, c$  sont non isotropes et de même signe (c'est-à-dire tous dans  $\mathbf{K}$  ou tous dans  $\mathbf{T}$ ), un trilatère généralisé est strict si et seulement si les côtés  $A, B, C$  ne sont pas tangents à  $\Gamma$  et sont de même nature (tous trois extérieurs ou tous trois sécants à  $\Gamma$ ).

### 3.2.2 Le concours des médiatrices

**3.2.3 Théorème.** *Soit  $abc$  un triangle strict. On suppose qu'on a choisi des représentants de  $a, b, c$  tels que l'on ait  $q(a) = q(b) = q(c)$ . On note, comme en 3.1.3,  $a^+ = b + c$ ,  $a^- = b - c$  (et de même  $b^+, b^-$  et  $c^+, c^-$  par permutation circulaire) les milieux (éventuellement généralisés) de  $b, c$ ;  $c, a$ ;  $a, b$  et  $A^+, A^-$ ;  $B^+, B^-$ ;  $C^+, C^-$  leurs médiatrices (éventuellement généralisées). Alors, les triplets de points  $a^+, b^+, c^-$ ;  $a^+, b^-, c^+$ ;  $a^-, b^+, c^+$ ;  $a^-, b^-, c^-$  sont alignés et les triplets de droites  $A^-, B^-, C^+$ ;  $A^-, B^+, C^-$ ;  $A^+, B^-, C^-$ ;  $A^+, B^+, C^+$  sont concourantes.*

*Démonstration.* Montrons par exemple la dernière assertion, les autres sont analogues. On a  $a^- = b - c$ ,  $b^- = c - a$  et  $c^- = a - b$ , d'où  $a^- + b^- + c^- = (b - c) + (c - a) + (a - b) = 0$  et la conclusion est évidente : les points sont alignés puisque leurs représentants sont linéairement dépendants!! Le concours des médiatrices en résulte par polarité.

*Commentaire :* Cette démonstration, d'une simplicité enfantine et qui vaut dans un cadre très général puisqu'on ne distingue ni le corps, ni la nature de la géométrie, est significative de ce qu'apportent d'une part l'approche

vectorielle, par la possibilité de calcul<sup>4</sup>, et d'autre part la polarité, qui permet de ne faire que la moitié du travail. On notera que la relation qui sous-tend ce résultat est une relation “de Chasles” triviale :  $(b-c) + (c-a) + (a-b) = 0$  que l'on reverra maintes fois. Pour d'autres preuves voir 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3, 4.7.21, 5.6.10.

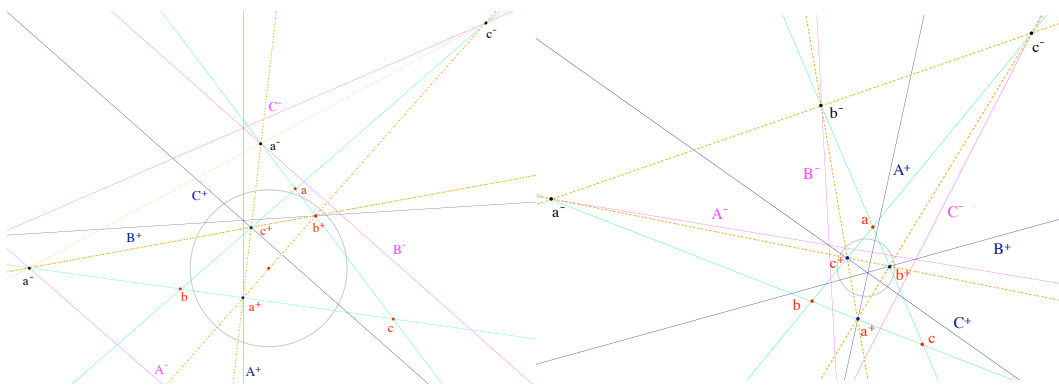


FIGURE 3.5 – Concours des médiatrices et alignement des milieux dans les modèles non conformes, hyperbolique (à gauche) et elliptique (à droite)

### 3.2.4 Remarques.

1) **Attention**, dans le cas hyperbolique réel, si l'on travaille dans les modèles “intérieurs”  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{D}$  ou  $\mathbf{H}$ , le concours des médiatrices peut avoir lieu “à l'extérieur”, voir ci-dessous 3.4.16 pour une traduction.

2) On a immédiatement, avec le produit extérieur, des équations pour les quatre droites joignant les six milieux : pour  $a^+, b^+, c^-$  c'est la droite  $a^+ \wedge b^+ = (b+c) \wedge (c+a) = b \wedge c + c \wedge a - a \wedge b$ . Les deux suivantes sont obtenues par permutation circulaire et la dernière est  $b \wedge c + c \wedge a + a \wedge b$ . On en déduit aussitôt les expressions des quatre points de concours des six médiatrices comme pôles des droites précédentes en remplaçant le produit extérieur par le produit vectoriel, par exemple :  $\gamma = b \wedge c + c \wedge a - a \wedge b$ . On verra au chapitre 7 (cf. 7.1.9) que ces points sont les centres des cercles circonscrits au triangle  $abc$ .

3) Lorsque les côtés sont isotropes le résultat est valable pourvu qu'on parle des médiatrices et des milieux généralisés. Dans le cas où les trois côtés sont isotropes, i.e. tangents à la conique  $\Gamma$  définie par  $q$ , les milieux sont les points de contact des côtés avec  $\Gamma$  et leurs conjugués harmoniques par rapport aux sommets et ils sont trois à trois alignés.

4. Attention tout de même à ne pas dire n'importe quoi, voir par exemple 7.5.3.

### 3.2.3 Le concours des bissectrices

**3.2.5 Théorème.** Soit  $ABC$  un trilatère strict. On suppose qu'on a choisi des équations  $A, B, C$  des côtés vérifiant  $q^*(A) = q^*(B) = q^*(C)$ . On appelle  $A^+ = B + C$ ,  $A^- = B - C$  et de même  $B^+$ ,  $B^-$ ,  $C^+$ ,  $C^-$  les bissectrices des angles du trilatère et  $a^+$ ,  $a^-$ ,  $b^+$ ,  $b^-$ ,  $c^+$ ,  $c^-$  les points bissecteurs (éventuellement généralisés). Alors, les triplets de points  $a^-, b^-, c^+$ ;  $a^-, b^+$ ,  $c^-$ ;  $a^+, b^-, c^-$ ;  $a^+, b^+, c^+$  sont alignés et les triplets de droites  $A^+, B^+, C^-$ ;  $A^+, B^-, C^+$ ;  $A^-, B^+, C^+$ ;  $A^-, B^-, C^-$  sont concourantes.

*Démonstration.* Il y a deux façons de procéder. On peut voir le résultat comme l'analogie de 3.2.3, mais dans  $E^*$ . On peut aussi se ramener à 3.2.3 par polarité. En effet, si  $a, b, c$  sont les pôles de  $A, B, C$ , on sait que les bissectrices de  $A, B, C$  sont les médiatrices de  $a, b, c$ , d'où le fait qu'elles sont concourantes. Attention, voir 3.1.10, il faut prendre garde au changement de signe : la médiatrice  $A_0^+$  de  $b, c$  n'est autre que la bissectrice  $A^-$  de  $B, C$  et le concours des médiatrices  $A_0^+, B_0^+, C_0^+$  équivaut à celui des bissectrices  $A^-, B^-, C^-$ .

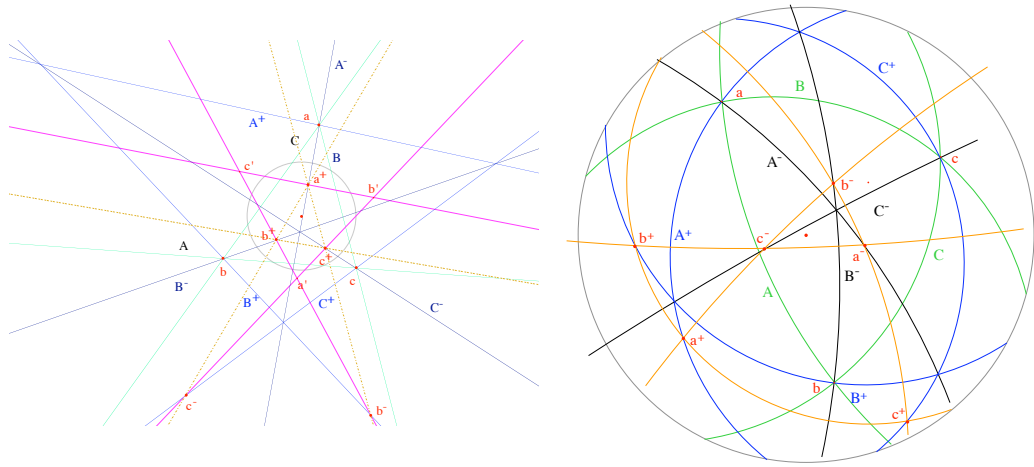


FIGURE 3.6 – Concours des bissectrices et alignement des bissecteurs dans le modèle non conforme hyperbolique (à gauche) et dans le modèle conforme elliptique (à droite)

### 3.2.4 Le concours des médianes

**3.2.6 Théorème.** Soit  $abc$  un triangle strict. On appelle, avec les notations de 3.1.3,  $a^+, a^-, b^+, b^-, c^+, c^-$  les milieux (éventuellement généralisés)



des côtés de  $abc$ . Alors, les droites  $(aa^+), (bb^+), (cc^+); (aa^+), (bb^-), (cc^-); (aa^-), (bb^+), (cc^-); (aa^-), (bb^-), (cc^+)$  sont concourantes.

Nous donnons deux preuves de ce résultat :

*Démonstration 1 (Calcul direct).* On peut supposer  $q(a) = q(b) = q(c)$  et on sait qu'alors les milieux sont les points  $a' = b \pm c, b' = c \pm a$  et  $c' = a \pm b$ . Si l'on prend  $a' = b + c, b' = c + a, c' = b + c$ , le point  $a + b + c = a + a' = b + b' = c + c'$  est à l'intersection des trois droites  $(aa'), (bb'), (cc')$ . De même, si on prend, par exemple,  $a' = b + c, b' = c - a, c' = a - b$ , le point  $b + c - a = a' - a = b + b' = c - c'$  est sur  $(aa'), (bb'), (cc')$ .

*Démonstration 2 (Avec le produit extérieur).* Si  $a'$  est un milieu de  $[bc]$ , la médiane  $(aa')$  a pour équation  $a \wedge a' = a \wedge (b \pm c)$ . Le concours des médianes résulte alors des relations évidentes :

$$\begin{aligned} a \wedge (b+c) + b \wedge (c+a) + c \wedge (a+b) &= 0, & a \wedge (b+c) - b \wedge (c-a) + c \wedge (a-b) &= 0, \\ a \wedge (b-c) + b \wedge (c+a) - c \wedge (a-b) &= 0, & -a \wedge (b-c) + b \wedge (c-a) + c \wedge (a+b) &= 0. \end{aligned}$$

### 3.2.7 Remarques.

- 1) Attention, même si on a un vrai triangle, avec sommets et côtés non isotropes, les médianes ne sont pas, en général, des droites au sens de 1.3.1. On en a un exemple en prenant  $(aa')$  tangente à  $\Gamma$  et  $b, c$  symétriques par rapport à  $a'$ .
- 2) De même, le point de concours des médianes n'est pas nécessairement un point au sens de 1.3.1, voir exercice 3.5.6.

Pour une figure du concours des hauteurs et des médianes dans le modèle non conforme du plan elliptique, voir figure 2.2.

## 3.2.5 Le concours des hauteurs

**3.2.8 Définition.** Soit  $abc$  un triangle généralisé. On suppose que  $a$  n'est pas égal au pôle  $a'$  de  $(bc)$ . On appelle **hauteur** issue de  $a$  la droite projective  $(aa')$ . C'est la perpendiculaire à  $(bc)$  passant par  $a$  (voir 1.3.7).

### 3.2.9 Remarques.

- 1) On notera que l'existence des hauteurs n'est pas soumise à une condition arithmétique comme celle des milieux, médiatrices, etc.
- 2) Comme les médianes, les hauteurs ne sont pas nécessairement des droites au sens de 1.3.1.
- 3) Lorsque  $a$  est le pôle de  $(bc)$  il n'y a plus unicité de la hauteur : toute droite passant par  $a$  est perpendiculaire à  $(bc)$ . On gardera en tête l'image

du pôle nord et des méridiens, tous perpendiculaires à l'équateur. Dans les autres cas on notera une différence essentielle entre les hauteurs et les autres droites remarquables du triangle : il n'y a que trois hauteurs, alors qu'il y a six médiatrices, médianes ou bissectrices.

**3.2.10 Théorème.** *On considère un triangle  $abc$  de  $\mathbf{P}(E)$ . On pose  $A = (bc)$ ,  $B = (ca)$ ,  $C = (ab)$ . On suppose que  $a$  (resp.  $b$ ,  $c$ ) n'est pas le pôle de  $A$  (resp.  $B$ ,  $C$ ). Alors, les hauteurs  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  du triangle sont concourantes.*

*Démonstration.* On peut décrire la situation dans  $\mathbf{P}(E^*)$  (voir Partie I, ch. 1, §6) : les droites  $A, B, C$  ;  $A', B', C'$  sont des points de  $\mathbf{P}(E^*)$  et les droites projectives duales correspondent aux points de  $\mathbf{P}(E)$  :  $a^* = (BC)$  (la droite duale  $a^*$ , ensemble des droites passant par  $a$  est définie par  $B$  et  $C$ ),  $b^* = (CA)$ ,  $c^* = (AB)$ ,  $A' \in a^*$ ,  $B' \in b^*$ ,  $C' \in c^*$ , enfin  $A, A'$  ;  $B, B'$  et  $C, C'$  sont orthogonales.

On a alors, par Jacobi,  $A \wedge (B \wedge C) + B \wedge (C \wedge A) + C \wedge (A \wedge B) = 0$ . Mais, voir 1.2.2.3,  $A \wedge (B \wedge C)$  est une droite orthogonale à  $A$  et située dans  $(BC) = a^*$  : c'est donc (un représentant de)  $A'$ . Jacobi s'écrit ainsi  $A' + B' + C' = 0$ , ce qui signifie que ces droites sont concourantes !

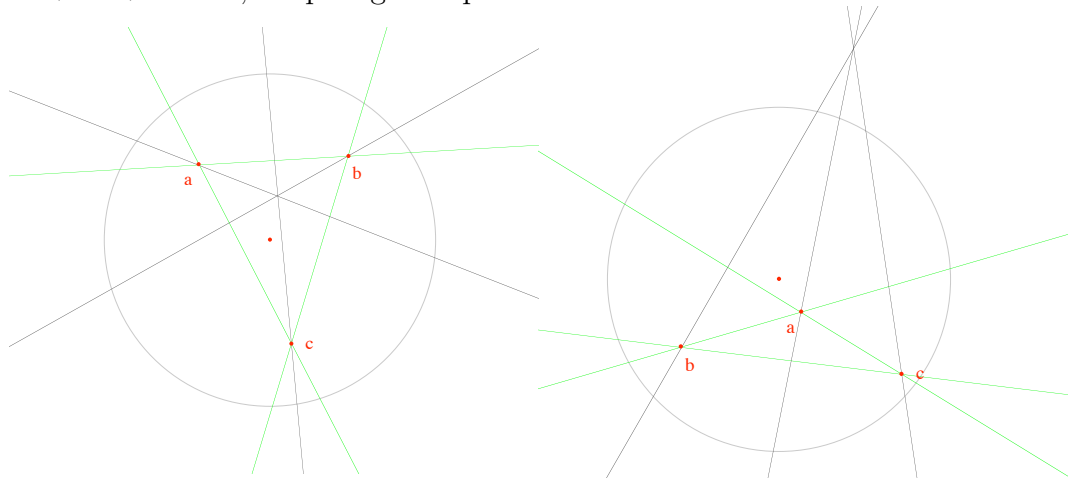


FIGURE 3.7 – Concours des hauteurs dans le modèle non conforme du plan hyperbolique : le point de concours peut être dans  $\mathbf{K}$  ou dans  $\mathbf{T}$

*Une autre preuve*

On note  $A, B, C$  des équations des droites  $(bc)$ ,  $(ca)$ ,  $(ab)$ . Si  $A'$  est une équation de la hauteur  $(aa')$ , elle est combinaison linéaire de  $B$  et  $C$  (car ces trois droites sont concourantes). En écrivant que  $A'$  est orthogonale à  $A$  on trouve  $A' = \varphi^*(C, A)B - \varphi^*(A, B)C$  et, de même,  $B' = \varphi^*(A, B)C - \varphi^*(B, C)A$  et  $C' = \varphi^*(B, C)A - \varphi^*(C, A)B$ . On a alors  $A' + B' + C' = 0$  d'où

le concours des hauteurs. On notera que cette formule est encore un avatar de la relation de Chasles triviale  $(\beta - \gamma) + (\gamma - \alpha) + (\alpha - \beta) = 0$ .

**3.2.11 Remarque.** Attention, dans le plan hyperbolique, même si  $a, b, c$  sont dans  $\mathbf{K}$ , le point de rencontre des trois hauteurs peut être dans  $\mathbf{T}$ , ce qui va nécessiter une traduction dans les modèles usuels, voir ci-dessous 3.4.23.

**3.2.12 Remarque.** On peut donner une autre preuve du théorème, formellement identique, mais utilisant les produits mixtes, cf. 1.5.3 et 1.5.4.

**3.2.13 Remarque.** En toute logique, il y a encore une autre notion, duale de celle de hauteur : si on a un triangle  $abc$  on peut considérer le point d'intersection du côté  $A = (bc)$  avec la polaire  $A'$  de  $a$ . Si  $a', b', c'$  sont ces points, ils sont alignés car ce sont les pôles des hauteurs<sup>5</sup>.

### 3.3 Quelques résultats familiers

*Voici, en prime, quelques résultats autrefois bien connus des lycéens dans le cadre de la géométrie euclidienne. On verra que la plupart d'entre eux subsistent en géométrie non euclidienne.*

#### 3.3.1 Droite des milieux

Le théorème suivant, qui est une conséquence immédiate de 3.2.3, remplace le théorème euclidien de la droite des milieux :

**3.3.1 Théorème.** *Soit  $abc$  un triangle strict de  $\mathbf{P}(E)$  et soient  $b', c'$  des milieux de  $c, a$  et  $a, b$ . Alors, la droite  $(b'c')$  est perpendiculaire à la médiatrice de  $b, c$  (qui est donc la perpendiculaire commune à  $(b'c')$  et  $(bc)$ ).*

**3.3.2 Remarque.** Attention, le fait pour  $(bc)$  et  $(b'c')$  d'avoir une perpendiculaire commune est banal, ce qui est important c'est qu'il s'agit de la médiatrice de  $b$  et  $c$ .

#### 3.3.2 Hauteurs et médiatrices

Dans le cas du plan euclidien, la démonstration la plus classique du concours des hauteurs  $(aa')$ ,  $(bb')$ ,  $(cc')$  d'un triangle  $abc$  consiste à mener les perpendiculaires en  $a, b, c$  aux hauteurs et à montrer que les hauteurs sont les médiatrices du triangle ainsi obtenu, en utilisant le parallélisme de la droite des milieux. Nous allons voir que, si l'argument de parallélisme tombe, le résultat demeure :

---

5. Suivant une suggestion d'Alain Busser, on peut appeler orthopôles ces points.

**3.3.3 Proposition.** Soit  $abc$  un triangle. On suppose que les sommets  $a, b, c$  ne sont pas deux à deux orthogonaux. Soient  $a', b', c'$  les pieds des hauteurs et  $a'', b'', c''$  les pôles des droites  $(aa')$ ,  $(bb')$ ,  $(cc')$  (supposées non isotropes). Soient  $A, B, C$  les droites perpendiculaires à  $(aa')$  (resp.  $(bb')$ , resp.  $(cc')$ ) en  $a$  (resp.  $b$ , resp.  $c$ ) et  $u, v, w$  les points d'intersections de  $B, C$ ;  $C, A$ ;  $A, B$  respectivement. Alors, si  $u, v, w$  sont non isotropes, les points  $a, b, c$ ;  $a'', b'', c''$  sont les milieux des côtés du triangle  $uvw$  ( $a$  et  $a''$  sont les milieux de  $v, w$ ) et les hauteurs  $(aa')$ ,  $(bb')$ ,  $(cc')$  en sont des médiatrices.

*Démonstration.* Nous donnons deux démonstrations de cette proposition, les deux nous paraissant instructives.

*Démonstration géométrique*

Comme  $(aa')$  est perpendiculaire à la fois à  $(bc)$  et à  $(vw)$ , son pôle  $a''$  est à l'intersection de ces droites et de même pour  $b''$  et  $c''$ . De plus,  $a'', b'', c''$  sont alignés (car les hauteurs sont concourantes). Montrons que  $a, a''$  sont les milieux de  $v, w$ . Comme  $a$  et  $a''$  sont orthogonaux, il suffit, en vertu de 3.1.5, de montrer qu'on a  $\llbracket v, w, a, a'' \rrbracket = -1$ . Mais on reconnaît la construction de la polaire de  $a$  par rapport aux droites  $(uv)$ ,  $(uw)$ , voir partie I ???. En effet, on considère les droites  $(ab)$  et  $(ac)$ . Elles coupent respectivement  $(uv)$  en  $c'', c$  et  $(uw)$  en  $b, b''$ . Le point d'intersection de  $(bc)$  et  $(b''c'')$  n'est autre que  $a''$  et il est sur la polaire de  $a$ . Comme  $(aa'')$  coupe  $(uv)$  et  $(uw)$  en  $v$  et  $w$ , on a le résultat.

L'assertion sur les médiatrices en résulte car  $(aa')$  est perpendiculaire à  $(vw)$ .

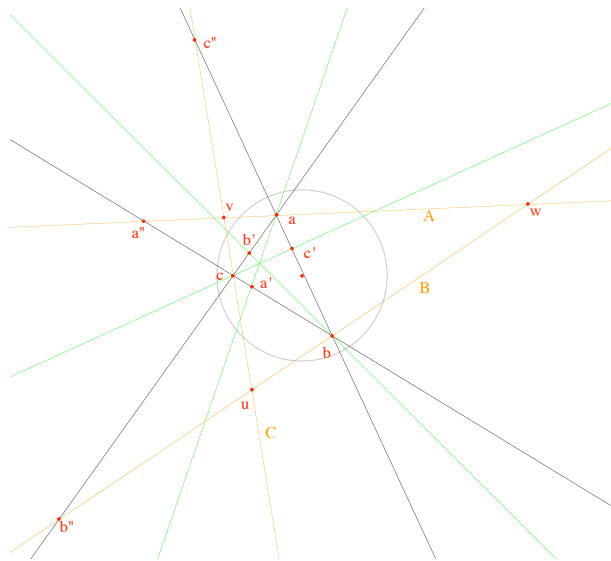


FIGURE 3.8 – Hauteurs ou médiatrices ?

*Démonstration par le calcul*

Cette preuve est révélatrice de l'efficacité des méthodes de calcul introduites ci-dessus. On travaille dans la base  $a, b, c$  formée de relèvements des sommets du triangle. On commence par calculer les points  $a'', b'', c''$ . On sait que  $a''$  est sur  $(bc)$  et qu'il est orthogonal à  $a$ . On pose donc  $a'' = \lambda b + \mu c$  et on écrit que  $\varphi(a, a'')$  est nul, ce qui donne  $a'' = \varphi(c, a)b - \varphi(a, b)c$ . Cela permet de calculer une équation de  $(aa'')$  :  $a \wedge a'' = \varphi(c, a)(a \wedge b) + \varphi(a, b)(c \wedge a)$ . On peut alors calculer  $u = (b \wedge b'') \wedge (c \wedge c'')$  par la formule du double produit (voir Partie II ??) et de même pour  $v, w$  par permutation circulaire. On obtient :

$$u = [a, b, c] \varphi(b, c) [-\varphi(b, c)a + \varphi(c, a)b + \varphi(a, b)c].$$

Comme  $u$  est un point du projectif et que  $\varphi(b, c)$  et  $[a, b, c]$  sont non nuls (en vertu des hypothèses), on peut prendre pour représentant  $u = -\varphi(b, c)a + \varphi(c, a)b + \varphi(a, b)c$ . Les vecteurs  $v$  et  $w$  sont identiques à la place du signe moins près. Il est clair qu'on a  $q(u) = q(v) = q(w)$ , car tous sont égaux à :

$$\varphi(b, c)^2 q(a) + \varphi(c, a)^2 q(b) + \varphi(a, b)^2 q(c) - 2\varphi(b, c)\varphi(c, a)\varphi(a, b),$$

de sorte que leurs milieux existent et ce sont  $v + w = 2\varphi(b, c)a$  qui définit le point  $a$  et  $v - w = -2\varphi(c, a)b + 2\varphi(a, b)c = -2a''$  qui définit le point  $a''$ .

**3.3.4 Remarques.** 1) Si, par exemple,  $b$  et  $c$  sont orthogonaux, le pôle de  $(bb')$  qui est sur  $(ac)$  et orthogonal à  $b$ , n'est autre que  $c$ , et la perpendiculaire à  $(bb')$  passant par  $b$  est  $(bc) = B$ . De même, on a  $C = (bc)$  et le point  $u$  n'existe pas.

2) Attention, il se peut que l'un des points  $u, v, w$  soit isotrope (et alors, le calcul ci-dessus montre que les deux autres le sont aussi). Dans ce cas les milieux n'ont pas de sens (on a encore  $\llbracket v, w, a, a'' \rrbracket = -1$  mais, si  $v, w$  sont isotropes, c'est vrai dès que  $a, a''$  sont orthogonaux). Avec les notations du chapitre 4, la relation  $q(u) = 0$  se traduit par :  $I(b, c) + I(c, a) + I(a, b) - 2S(a, b, c) = 0$ . Dans le cas elliptique, cette relation signifie que le triangle  $abc$  est autopolaire, mais dans le plan hyperbolique, j'ignore ce qu'elle signifie géométriquement<sup>6</sup>, voir cependant 1.5.12. Si l'on se donne un triangle  $uvw$  à sommets isotropes on voit qu'on peut se donner  $b, c$  arbitrairement sur ses côtés et qu'alors  $a$  est bien déterminé.

3) La preuve par le calcul montre que la proposition reste valable lorsque l'on permet aux hauteurs d'être isotropes, à condition d'utiliser milieux et médiatrices généralisés.

---

6. Si on pose  $ab = \operatorname{ch} \gamma$ ,  $ac = \operatorname{ch} \beta$  et  $\widehat{bac} = \theta$ , voir chapitre 5, la relation devient  $\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \gamma \sin \theta = 1$ .

**3.3.5 Commentaire.** Lorsqu'on part de trois points  $a, b, c$ , on peut définir des constructions projectives (comme on l'a vu dans les parties I et II), mais aussi des constructions métriques, qui vont être des concomitants sous le groupe  $PO(q)$ . On montre que sur la base (concomitante)  $a, b, c$ , les coordonnées des points construits sont alors des invariants sous  $PO(q)$ . Comme ces invariants s'expriment avec les quantités  $q(a)$ ,  $\varphi(a, b)$ , etc. (voir chapitre 9) on voit que les points ainsi construits les plus simples (i.e. de plus bas degrés par rapport à  $a, b, c$ ) sont les points  $a'', b'', c''$  et  $u, v, w$  construits ci-dessus.

### 3.3.3 Application 1 : triangles et milieux

La proposition précédente permet de résoudre le classique problème de trouver un triangle  $uvw$  dont les milieux soient trois points  $a, b, c$  donnés.

**3.3.6 Proposition.** *Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{P}(E)$ , non isotropes, non orthogonaux et non alignés.*

1) *S'il existe un triangle strict  $uvw$  tel que  $a, b, c$  soient milieux respectivement de  $b, c$ ;  $c, a$ ;  $a, b$ , ce triangle est obtenu par la construction de 3.3.3 et le point  $v$  est un point fixe de  $g = \sigma_c \sigma_b \sigma_a$ .*

2) *Un tel triangle existe et est unique sauf si l'on a la relation*

$$\varphi(b, c)^2 q(a) + \varphi(c, a)^2 q(b) + \varphi(a, b)^2 q(c) = 2\varphi(b, c)\varphi(c, a)\varphi(a, b),$$

*soit  $I(b, c) + I(c, a) + I(a, b) = 2S(a, b, c)$  avec les notations du chapitre 4.*

*Démonstration.* 1) Il s'agit, par exemple, de montrer que  $(vw)$  est la perpendiculaire en  $a$  à la hauteur  $(aa')$  du triangle  $abc$ . Pour cela on considère le deuxième milieu  $a''$  de  $v, w$  et sa polaire  $D$ . On sait par 3.1.3 que c'est la médiatrice de  $v, w$  passant par  $a$ . Elle est donc perpendiculaire à  $(vw)$ . Mais, voir 3.3.1, les milieux  $b, c$  de  $u, v$  et  $u, w$  sont alignés avec l'un des milieux de  $v, w$  qui ne peut être  $a$  par hypothèse. Le point  $a''$  est donc sur  $(bc)$ , donc sa polaire  $D$  est perpendiculaire à  $(bc)$  et c'est bien la hauteur de  $abc$  issue de  $a$ . La propriété sur  $g$  résulte des formules  $\sigma_a(v) = w$ ,  $\sigma_b(w) = u$  et  $\sigma_c(u) = v$ .

2) La proposition 3.3.3 donne une construction d'un triangle  $uvw$  convenable, sauf dans le cas où  $u, v, w$  sont isotropes. On a vu en 3.3.4 que cela équivaut à la condition donnée ci-dessus. On peut aussi décrire la situation autrement. On considère le produit  $g = \sigma_c \sigma_b \sigma_a$ . Cette isométrie n'est pas une involution (comme  $a, b, c$  sont non alignés, cela résulte du théorème de Bachmann, voir 1.4.11), ni l'identité (car  $a, b, c$  ne sont pas orthogonaux, voir 1.4.9). Sauf si c'est un déplacement parallèle, elle admet un unique point fixe

non isotrope  $v$  (voir 1.4.31). Si l'on pose  $w = \sigma_a(v)$  puis  $u = \sigma_b(w)$ , le triangle  $uvw$  convient.

Si  $g$  est un déplacement parallèle (voir 1.5.12), il admet un unique point fixe isotrope  $v$ , les points  $w$  et  $u$  sont aussi isotropes et on est dans le cas exceptionnel (on retrouve la configuration du problème de Castillon, voir Partie III ??).

### 3.3.7 Remarques.

1) Dans le cas où les points  $a, b, c$  sont alignés, le produit  $\sigma_c \sigma_b \sigma_a$  est une involution dont le point de Frégier  $d$  appartient à la droite  $(ab)$ . Il y a deux solutions car  $\sigma_d$  admet deux points fixes sur cette droite ( $d$  et l'intersection de  $(ab)$  et de sa polaire). On a donc deux triangles aplatis<sup>7</sup> dont les milieux sont  $a, b, c$ .

2) Dans le cas où les points  $a$  et  $b$  sont orthogonaux, le produit  $\sigma_b \sigma_a$  est l'involution  $\sigma_{c'}$  où  $c'$  est le troisième point du triangle autopolaire  $a, b, c'$ . Si  $c$  n'est pas égal à  $c'$ , l'isométrie  $\sigma_c \sigma_{c'}$  admet un unique point fixe  $w$ , comme dans le cas ordinaire, mais comme ce point est fixe par  $\sigma_c$ , le triangle est réduit à deux points. En revanche, si  $a, b, c$  est autopolaire, tout point  $w$  fournit un vrai triangle  $uvw$  solution.

3) Pour la généralisation de ce problème au cas de plus de trois points, voir exercice 3.5.10.

## 3.3.4 Application 2 : retour sur les produits de deux symétries

Nous abordons ici la question de la multiplicité des écritures d'une isométrie comme produit de deux involutions. Notons tout d'abord que la condition  $\sigma_a \sigma_b = \sigma_d \sigma_c$  est équivalente à  $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \text{Id}$  ou encore à  $\sigma_b \sigma_c = \sigma_a \sigma_d$ .

### 3.3.8 Proposition. Soient $a, b, c, d$ quatre points non isotropes de $\mathbf{P}(E)$ .

1) Si les points  $a, b, c, d$  sont alignés et si  $a, c$  et  $b, d$  ont même milieu, on a  $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \text{Id}$ .

2) Inversement, si on a  $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \text{Id}$ , les points  $a, b, c, d$  sont alignés et si  $a, c$  admettent un milieu  $m$ , il est aussi milieu de  $b$  et  $d$ .

*Démonstration.* Montrons déjà que si le produit est l'identité, les points sont alignés. Si  $b$  et  $c$  sont égaux, on a  $\sigma_a \sigma_d = \text{Id}$  donc  $a = d$  et le résultat est évident. Sinon, on a  $\sigma_a \sigma_b \sigma_c = \sigma_d$  et  $\sigma_a = \sigma_b \sigma_c \sigma_d$ , donc  $a$  (resp.  $d$ ) est sur la droite  $(bc)$  en vertu du lemme des trois involutions 1.4.11.

---

7. On reverra cette configuration du "parallélogramme aplati" en 4.3.14.

On peut donc désormais supposer que  $a, b, c, d$  sont alignés sur une droite  $\Delta$  et que  $a$  et  $c$  admettent un milieu  $m$ . On pose  $d' = \sigma_m(b)$ . On a alors, par conjugaison,  $\sigma_a\sigma_m = \sigma_m\sigma_c$  et  $\sigma_m\sigma_b = \sigma_{d'}\sigma_m$ . En multipliant on obtient :  $\sigma_a\sigma_b = \sigma_m\sigma_c\sigma_{d'}\sigma_m$  et, comme la conjugaison par  $\sigma_m$  coïncide avec le passage à l'inverse en vertu de 1.4.23 ou 1.4.30, on en déduit  $\sigma_a\sigma_b = \sigma_{d'}\sigma_c$ , soit  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_{d'} = \text{Id}$ . On voit que l'on a  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = \text{Id}$  si et seulement si  $d$  et  $d'$  coïncident, i.e. si  $m$  est milieu de  $b, d$ .

**3.3.9 Remarques.** 1) Si  $A, B, C, D$  sont les polaires de  $a, b, c, d$  (qui sont les axes des réflexions associées :  $\tau_A = \sigma_a$ , etc.), on obtient aussitôt par dualité le fait que le produit des quatre réflexions est l'identité si et seulement si les droites  $A, B, C, D$  sont concourantes et si  $A, C$  et  $B, D$  ont même bissectrice.

2) Attention, la droite  $\Delta = (abcd)$  (resp. le point commun à  $A, B, C, D$ ) peut être isotrope (il suffit de prendre  $a, b, c$  non isotropes alignés sur une droite isotrope, et le point  $d$  donné par  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_d$ ). Dans ce cas, on sait qu'il existe un milieu unique pour  $a, c$  car  $q$  prend la même valeur en tous les points non isotropes de  $\Delta$ .

3) En revanche, il se peut qu'on ait  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = \text{Id}$  sans que  $a$  et  $c$  admettent un milieu. Ainsi, dans le plan hyperbolique réel, on peut simplement dire que les produits  $q(a)q(c)$  et  $q(b)q(d)$  sont de même signe (voir 4.3.13), mais ils peuvent être négatifs comme le montre l'exemple suivant :  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (1/2, 0, 1)$ ,  $c = (2, 0, 1)$  et  $d = (1, 0, 0)$ . Le produit des quatre symétries est bien l'identité, mais comme  $a$  est dans  $\mathbf{K}$  et  $c$  dans  $\mathbf{T}$ , ils n'ont pas de milieu et la proposition ne s'applique pas. Nous donnerons un autre critère qui vaudra (presque) dans tous les cas au chapitre suivant avec la notion de parallélogramme aplati, voir 4.3.12.

**3.3.10 Remarque.** Dans le plan euclidien, les résultats sont un peu différents :

a) Si  $a, b, c, d$  sont quatre points du plan, on a  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = \text{Id}$  si et seulement si on a l'égalité vectorielle  $\vec{ab} = \vec{dc}$ , autrement dit si  $abcd$  est un parallélogramme.

b) Si  $A, B, C, D$  sont quatre droites du plan on a  $\tau_A\tau_B\tau_C\tau_D = \text{Id}$  si et seulement si les droites  $A, B, C, D$  sont **concourantes ou parallèles** et si, de plus,

- dans le cas concourant, on a l'égalité d'angles orientés de droites  $2(A, B) = 2(D, C)$ ,

- dans le cas parallèle, toute translation qui transforme  $A$  en  $B$  transforme aussi  $D$  en  $C$ .

On notera la différence fondamentale pour les symétries centrales entre le cas euclidien dans lequel les points  $a, b, c, d$  ne sont pas nécessairement alignés, et le cas non euclidien.



### 3.3.5 Application 3 : trois symétries réduites à deux

Lorsqu'on a trois symétries de points de Frégier  $a, b, c$  non alignés, on sait que leur produit  $f = \sigma_c \sigma_b \sigma_a$  est en réalité produit de deux symétries, voir 1.4.9, mais il s'agit de construire explicitement ces symétries. Pour cela, la première chose à faire est de déterminer un point fixe  $v$  du produit (isotrope ou non), ce qui se fait au moyen de 3.3.6 et 3.3.3. Ensuite, on prend une droite  $D$  quelconque (non isotrope) passant par  $v$ . On sait alors que  $f$  s'écrit  $\tau_{D'} \tau_D$  avec  $D'$  passant par  $v$  (voir 1.4.23 et 1.4.29). Pour trouver  $D'$ , on construit, à partir d'un point  $m$  non orthogonal à  $v$ , son transformé  $m'$  par  $f$ , puis le symétrique  $m''$  de  $m'$  par rapport à  $D$ . Une des médiatrices de  $f(m)$  et  $m''$  passe par  $v$  (une seule car  $v$  n'est pas orthogonal à  $m$ ), on l'appelle  $D'$  et on a alors  $f = \tau_{D'} \tau_D$ .

### 3.3.6 Le triangle orthique

**3.3.11 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle,  $a', b', c'$  les pieds des hauteurs. Alors les bissectrices du triangle "orthique"  $a'b'c'$  sont les côtés et les hauteurs de  $abc$ .*

*Démonstration.* On note  $a_1, b_1, c_1$  les pôles des côtés de  $abc$  et  $a'', b'', c''$  les pôles des hauteurs. Les polaires des points  $a', b'$  et  $c'$  sont alors respectivement les droites  $A = (a_1 a'')$ ,  $B = (b_1 b'')$  et  $C = (c_1 c'')$ . Soient  $u, v, w$  les points d'intersection de  $B, C; C, A; A, B$  respectivement. Comme ces points sont les pôles des droites  $(b'c')$ ,  $(c'a')$  et  $(a'b')$ , l'assertion signifie exactement, à polarité près, que  $a_1, b_1, c_1; a'', b'', c''$  sont les milieux des côtés du triangle  $uvw$ .

Mais, les hauteurs de  $abc$  sont aussi hauteurs du triangle  $a_1 b_1 c_1$ . En effet, comme  $(aa')$  est perpendiculaire à  $(bc)$  elle passe par son pôle  $a_1$ . De plus, elle est perpendiculaire à  $(b_1 c_1)$  car elle passe par son pôle  $a$ . On peut donc appliquer 3.3.3 au triangle  $a_1 b_1 c_1$ . Comme les droites perpendiculaires aux hauteurs de ce triangle en  $a_1, b_1, c_1$  sont les droites  $A, B, C$  (par exemple  $A$  passe par  $a_1$  et elle est perpendiculaire à  $(aa')$  puisqu'elle passe par son pôle  $a''$ ), on a le résultat.

**3.3.12 Remarques.** 1) En toute rigueur, la proposition ci-dessus n'est valable que si les points  $a, b, c$  sont assez généraux (le triangle ne doit pas être rectangle, ses hauteurs ne doivent pas être isotropes, etc.). Le lecteur précisera les hypothèses nécessaires.

2) En géométrie euclidienne, ce résultat est prouvé en général en utilisant le théorème de l'angle inscrit, qui n'est plus valable en géométrie non euclidienne. On notera, encore une fois, l'efficacité de la polarité (il n'était pas

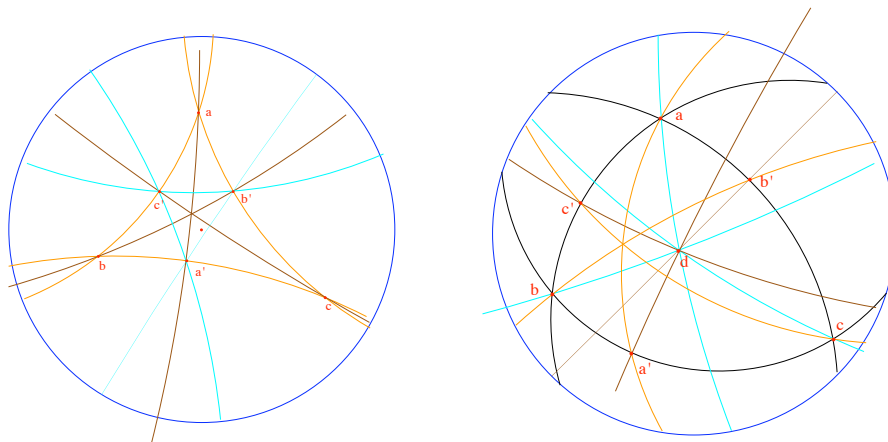


FIGURE 3.9 – Le triangle orthique dans le disque de Poincaré (à gauche) et le point de Gergonne dans le modèle conforme elliptique (à droite)

évident *a priori*, que le résultat était le dual de 3.3.3). Pour une preuve par le calcul voir 3.5.12.

### 3.3.7 Gergonne et Nagel

**3.3.13 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle strict. Soient  $a^-, b^-, c^-$  trois des six milieux des côtés, que l'on suppose alignés sur une droite  $D$  (voir 3.2.3). Soient  $a', b', c'$  les points d'intersections de  $D$  et des polaires de  $a, b, c$  et  $a'', b'', c''$  les intersections respectives des droites  $(aa')$  et  $(bc)$ ,  $(bb')$  et  $(ca)$ ,  $(cc')$  et  $(ab)$ . Alors, les points  $a'', b'', c''$  sont alignés.*

*Démonstration.* On peut supposer qu'on a choisi des représentants  $a, b, c$  vérifiant  $q(a) = q(b) = q(c)$  et que les milieux sont  $a^- = b - c$ ,  $b^- = c - a$  et  $c^- = a - b$ . Un calcul immédiat donne  $a' = (q(a) - \varphi(a, c))(a - b) + (q(a) - \varphi(a, b))(c - a)$ , d'où  $a' \wedge a = (q(a) - \varphi(a, c))(a \wedge b) + (q(a) - \varphi(a, b))(c \wedge a)$  et, on obtient, avec la formule du double produit :

$$a'' = (a' \wedge a) \wedge (b \wedge c) = [a, b, c] [(q(a) - \varphi(a, c))b - (q(a) - \varphi(a, b))c]$$

et de même pour les autres par permutation circulaire. Comme la somme de ces trois quantités est nulle, on a le résultat.

**3.3.14 Corollaire. (Points de Gergonne et de Nagel)** *Soit  $ABC$  un trilatère strict,  $a, b, c$  ses sommets,  $d$  le point d'intersection de trois de ses bissectrices (voir 3.2.5) et soient  $a', b', c'$  les projetés orthogonaux de  $d$  sur les côtés. Alors les droites  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  sont concourantes<sup>8</sup>.*

8. En géométrie euclidienne, le point de concours est appelé point de Gergonne si  $d$  est l'intersection des bissectrices intérieures et de Nagel sinon.

*Démonstration.* C'est le dual du précédent !

## 3.4 Le cas des géométries réelles

Dans toute cette section,  $k$  est le corps des réels.

### 3.4.1 Problématique

Nous examinons maintenant les notions de milieux, médiatrices, bissectrices, etc. et leurs propriétés de concours et d'alignement dans le cas des modèles usuels des deux géométries non euclidiennes réelles (notamment les modèles conformes). Plusieurs questions surgissent :

- Étant donnés deux points (resp. deux droites) ont-ils toujours des milieux et des médiatrices (resp. des bissectrices et des points bissecteurs) et, si oui, combien dans le modèle considéré ? Les théorèmes de concours énoncés ci-dessus sont-ils valables sans restriction ?

- Lorsqu'il y a deux milieux, deux médiatrices, deux bissectrices, etc. est-il possible de les distinguer, de manière intrinsèque ou non ?

Nous verrons que la réponse à la première question est un oui franc et massif dans le cas de la géométrie elliptique<sup>9</sup>, mais qu'en géométrie hyperbolique une traduction sera nécessaire.

En ce qui concerne la deuxième question, nous constaterons qu'il n'y a que rarement des réponses intrinsèques (et cela doit donc nous inciter à la prudence), mais que des distinctions même imparfaites peuvent être utiles, notamment pour décrire les figures.

### 3.4.2 Distinguer les milieux et les médiatrices : la voie non intrinsèque

#### Milieux et médiatrices intérieurs

Nous commençons par le cas des milieux qui va induire les autres. On a vu ci-dessus que deux points  $a, b$  de  $\mathbf{P}(E)$  admettent en général deux milieux  $m^+ = a + b$  et  $m^- = a - b$ , mais que les signes  $+$  et  $-$  n'ont pas *a priori* de sens géométrique puisqu'il suffit de changer les représentants de  $a, b$  pour les échanger (voir 3.1.4). Cela indique bien que la difficulté provient du fait que l'on travaille en projectif. Une autre manière de le comprendre est la suivante. En projectif, la droite  $(ab)$  est topologiquement un cercle (voir Partie I ??) et les deux composantes du complémentaire de  $a, b$  sont toutes deux

---

9. La géométrie elliptique c'est le paradis des mathématiciens !

homéomorphes à des intervalles et il n'y a pas lieu d'en privilégier une. Une façon de rompre cette symétrie est de choisir une droite à l'infini. C'est ce que réalise la définition suivante, valable à la fois en géométrie elliptique et en géométrie hyperbolique :

**3.4.1 Définition.** *On se donne une forme linéaire non nulle  $l \in E^*$  et on utilise la droite  $D_\infty$  d'équation  $l = 0$  comme droite à l'infini de  $\mathbf{P}(E)$ . Soient  $a, b \in \mathbf{P}(E)$ ,  $a, b \notin D_\infty$ . On peut choisir les représentants  $a$  et  $b$  de sorte qu'ils vérifient  $l(a) > 0$  et  $l(b) > 0$ . On définit alors l'intervalle  $]ab[$  (relativement à  $l$ ) comme l'ensemble des  $m$  de  $\mathbf{P}(E)$  qui sont images de vecteurs  $\widehat{m} = \lambda a + \mu b$  avec  $\lambda, \mu > 0$  et on appelle **segment intérieur** (relativement à  $l$ ) l'ensemble  $]ab[ = ]ab[ \cup \{a, b\}$ . Le complémentaire de  $]ab[$  est appelé **segment extérieur**.*

*Si les points  $a, b$  admettent des milieux, on appelle **milieu intérieur** (relativement à  $l$ ) celui des deux milieux qui appartient au segment intérieur et milieu extérieur l'autre. On appelle **médiatrice intérieure** (resp. **extérieure**) la médiatrice qui passe par le milieu intérieur (resp. extérieur).*

**3.4.2 Remarques.** 0) Parmi les deux intervalles  $]ab[$  complémentaires des points  $a$  et  $b$  dans la droite projective  $(ab)$ , on appelle donc intérieur celui des deux qui ne contient pas le point d'intersection de  $D_\infty$  et  $(ab)$ , c'est-à-dire le point à l'infini de  $(ab)$ .

1) Si on a  $q(a) = q(b)$  et  $l(a), l(b) > 0$ , le milieu intérieur est le point  $m^+ = a + b$  et le milieu extérieur le point  $m^- = a - b$  et  $M^+ = (m^-)^\perp$  (resp.  $M^-$ ) est la médiatrice intérieure (resp. extérieure). Plus généralement, si  $q(a)$  et  $q(b)$  sont de même signe, le milieu intérieur (resp. extérieur) sera de la forme  $\lambda a + \mu b$  avec  $\lambda, \mu$  de même signe (resp. de signes contraires).

2) Nous verrons ci-dessous que les notions de milieu et de segment intérieurs ont un sens géométrique intrinsèque dans le cas de deux points (intérieurs) du modèle de Klein  $\mathbf{K}$  ou de Poincaré  $\mathbf{D}$ .

3) **Attention**, en revanche, dans tous les autres cas (en elliptique ou pour les points extérieurs du plan hyperbolique), la distinction entre segments intérieur et extérieur n'a pas vraiment de sens géométrique. Le lecteur se convaincra notamment qu'une isométrie (par exemple une involution) peut transformer segment intérieur en segment extérieur.

4) Nous donnerons plus loin des définitions de segment et de milieu intrinsèques (voir 5.4.6 et 5.4.13) et nous examinerons les théorèmes de concours et d'alignement à la lueur de ces définitions, voir 5.4.15.

Le lemme suivant (qui est une sorte de "lemme de Pasch"), explicite les alignements possibles des points situés sur les côtés d'un triangle :

**3.4.3 Lemme.** 1) Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{P}(E)$ . Il existe une droite  $D$  ne contenant pas  $a, b, c$ . Si  $l$  est une équation de  $D$ , on peut supposer, quitte à changer les représentants des points, que  $l(a), l(b)$  et  $l(c)$  sont  $> 0$ .

2) Soit  $abc$  un triangle et soit  $l$  une forme linéaire positive en  $a, b, c$ . Si  $a', b', c'$  sont trois points, distincts de  $a, b, c$ , alignés, situés respectivement sur les droites  $(bc), (ca), (ab)$  il y a deux possibilités :

- les points  $a', b', c'$  sont tous dans les segments extérieurs relativement à  $l$ ,
- deux des points sont intérieurs et un est extérieur.

*Démonstration.* 1) On considère la droite  $(ab)$  et un point  $d$  de cette droite, distinct de  $a$  et  $b$ . Toute droite passant par  $d$  et distincte de  $(ab)$  et  $(dc)$  convient<sup>10</sup>. Pour ajuster les signes on change en leurs opposés les représentants sur qui la forme est négative.

2) On écrit  $a' = \lambda b + \lambda'c$ ,  $b' = \mu c + \mu'a$ ,  $c' = \nu a + \nu'b$  avec tous les coefficients  $\neq 0$ . L'alignement donne une relation  $\alpha a' + \beta b' + \gamma c' = 0$  avec  $\alpha, \beta, \gamma$  non tous nuls. On en déduit  $\beta\mu' + \gamma\nu = \gamma\nu' + \alpha\lambda = \alpha\lambda' + \beta\mu = 0$ . On voit aussitôt que si l'un des coefficients  $\alpha, \beta, \gamma$  est nul les autres le sont aussi et c'est absurde. On obtient alors  $\frac{\lambda}{\lambda'} \frac{\mu}{\mu'} \frac{\nu}{\nu'} = -1$  ce qui montre que ces trois rapports sont négatifs ou que deux sont positifs et le troisième négatif.

### La géométrie elliptique

On est dans la situation de 3.4.1 dans les deux modèles usuels de la géométrie elliptique évoqués au chapitre précédent. Dans le modèle affine elliptique **AE**, on a choisi une droite de l'infini  $t = 0$ , et on peut prendre la forme  $l$  égale à  $t$ . Comme on a pris les représentants sous la forme  $(x, y, 1)$ , ce qui précède s'applique et les segments intérieurs sont les segments usuels du plan affine des  $(x, y)$ . Dans le modèle de Klein **KE**, la forme linéaire  $l$  est encore égale à  $t$  et comme **KE** est la projection de la demi-sphère  $t > 0$ , les points des segments intérieurs vérifient  $t > 0$  et ils sont donc tous dans la demi-sphère positive, donc le segment intérieur, en projection, s'envoie sur l'arc  $ab$  qui est entièrement contenu dans le disque. Parmi les points du segment extérieur, en revanche, il y a un point qui vérifie  $t = 0$ , donc qui est sur le bord du disque. Le segment extérieur est donc constitué de deux arcs disjoints, voir figure 3.2.

### La géométrie hyperbolique

On travaille dans le plan  $\mathbf{P}(E)$ , avec la forme  $x^2 + y^2 - t^2$ , et on reprend les notations du paragraphe 2.4.1, notamment pour les deux parties intérieures

10. On voit que le résultat vaut sur n'importe quel corps de cardinal  $\geq 3$ .

et extérieures  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{T}$ . On peut encore définir des segments intérieurs et extérieurs comme en 3.4.1. Il suffit pour cela de choisir une forme linéaire  $l$ . On prendra ici la forme  $t$  comme équation de  $D_\infty$  (ou une forme correspondant à une droite sur laquelle  $q$  est  $> 0$ ). Si  $a$  et  $b$  sont dans le plan affine  $t \neq 0$ , le segment intérieur  $[ab]$  est alors le segment au sens affine, voir figures 3.1 et 3.2. Comme on l'a dit, il n'a pas un sens intrinsèque en général, mais c'est le cas pour deux points de  $\mathbf{K}$  (voir aussi 5.4.15) :

**3.4.4 Proposition.** *On choisit la droite  $t = 0$  comme droite à l'infini de  $\mathbf{P}(E)$ . Si  $a, b$  sont deux points distincts de  $\mathbf{K}$ , le segment intérieur  $[ab]$  est le segment au sens affine. Le segment ouvert  $]ab[$  est la composante connexe de  $(ab) - \{a, b\}$  qui est entièrement contenue dans  $\mathbf{K}$ .*

*Démonstration.* Les quantités  $q(a)$  et  $q(b)$  sont négatives. De plus, comme indiqué en 2.4.8, on peut supposer les coordonnées  $t$  de  $a$  et  $b$  positives. On sait alors, en vertu de 2.4.9, qu'on a  $\varphi(a, b) < 0$  et donc  $q(\lambda a + \mu b) < 0$  si  $\lambda$  et  $\mu$  sont positifs. Inversement, si par exemple  $\lambda$  est positif mais  $\mu$  très négatif, le point  $\lambda a + \mu b$  est dans  $\mathbf{T}$ .

### 3.4.3 Le cas des bissectrices

Pour les bissectrices, la situation se complique, car il y a deux manières, non équivalentes, de définir des bissectrices intérieures et extérieures. L'une, qui concerne les droites, utilise la dualité, l'autre, plus proche des notions euclidiennes usuelles, met en jeu les demi-droites, ou les triangles.

#### Bissectrices intérieures de droites

**3.4.5 Définition.** *On reprend les notations de 3.4.1. Soient  $A, B$  deux droites non isotropes et soient  $a, b$  leurs pôles. On suppose que  $a, b$  admettent des milieux et on note respectivement  $m^+$  et  $m^-$  les milieux intérieur et extérieur de  $a, b$ . On appelle **bissectrice intérieure au sens des droites** la droite  $D^-$ , polaire de  $m^-$ , qui passe par  $m^+$  (resp. bissectrice extérieure la droite  $D^+$ , polaire de  $m^+$ , qui passe par  $m^-$ ).*

**3.4.6 Remarques.** 1) On a donc  $D^+ = M^-$  et  $D^- = M^+$  : la bissectrice intérieure est la médiatrice intérieure des pôles, voir 3.1.10.

2) **Attention**, cette notion n'est pas intrinsèque. De plus, elle n'a pas de rapport avec celle de bissectrice intérieure d'un triangle (ou de deux demi-droites) que nous allons définir ci-dessous. Elle est donc à utiliser avec la plus grande prudence mais elle nous permettra de formuler le théorème 3.4.20 et de décrire les figures associées.

3) Dans le cas de droites du disque de Klein  $\mathbf{K}$  se coupant en  $a \in \mathbf{K}$ , la bissectrice intérieure est celle qui est située dans l'angle qui contient le centre  $o$  de  $\Gamma$ .

### Bissectrices intérieures d'un triangle

Nous définissons maintenant les notions de bissectrice intérieure ou extérieure pour un triangle :

**3.4.7 Proposition-Définition.** Soient  $a, b, c$  trois points (non isotropes et non alignés) de  $\mathbf{P}(E)$ . On suppose que le triangle  $abc$  et le trilatère  $(bc)$ ,  $(ca)$ ,  $(ab)$  sont stricts et on choisit une forme linéaire  $l$  et des représentants  $a, b, c$  des points, tels que  $l(a), l(b)$  et  $l(c)$  soient  $> 0$  (voir 3.4.3). Les notions de segments et milieux intérieurs seront désormais pris par rapport à cette forme.

1) Il existe des nombres positifs  $\lambda, \mu, \nu$  tels que, si l'on remplace  $a, b, c$  par  $\lambda a, \mu b, \nu c$ , les droites  $A = b \wedge c$ ,  $B = c \wedge a$  et  $C = a \wedge b$  vérifient  $q^*(A) = q^*(B) = q^*(C)$ .

2) Les bissectrices des côtés du triangle sont  $A^+ = B+C$  et  $A^- = B-C$  et les droites obtenues par permutation circulaire. La bissectrice  $A^-$  (resp.  $A^+$ ) coupe la droite  $(bc)$  en un point du segment intérieur  $]bc[$  (resp. en un point extérieur à  $]bc[$ ) et on a des résultats analogues pour les autres bissectrices.

Les bissectrices  $A^-, B^-, C^-$  (resp.  $A^+, B^+, C^+$ ) sont appelées **bissectrices intérieures du triangle** (resp. **extérieures**).

*Démonstration.* 1) Comme le trilatère est strict, les nombres  $q^*(A)$ ,  $q^*(B)$  et  $q^*(C)$  sont de même signe. Si l'on remplace  $a, b, c$  par  $\lambda a, \mu b, \nu c$ , la quantité  $q^*(A)$ , par exemple, est multipliée par  $\mu^2\nu^2$ . On a donc le résultat en posant  $\lambda^2 = |q^*(A)|$ ,  $\mu^2 = |q^*(B)|$ ,  $\nu^2 = |q^*(C)|$ .

2) Le point d'intersection  $\beta b + \gamma c$  de  $(bc)$  et de  $A^-$  est donné par la relation  $[(c \wedge a) - (a \wedge b)](\beta b + \gamma c) = 0$ , soit  $(\beta - \gamma)[a, b, c] = 0$  (où le crochet désigne le déterminant). On a donc  $\beta = \gamma$  (et on peut supposer  $\beta > 0$ ) et c'est bien un point intérieur au segment (voir 3.4.1). Les autres cas sont analogues.

**3.4.8 Remarques.** 1) Dans le cas d'un triangle de  $\mathbf{K}$ , ces notions sont intrinsèques car la notion de segment intérieur l'est, voir 3.4.4.

2) **Attention**, la bissectrice intérieure des droites  $B, C$  au sens du triangle n'est pas nécessairement la bissectrice intérieure au sens des droites (voir 3.4.5) comme le montre l'exemple suivant. On travaille dans  $\mathbf{K}$ , la forme linéaire  $l$  n'est autre que  $T$ , on considère les trois points  $a = (0, 1/2, 1)$ ,  $b = (\beta, 0, 1)$  et  $c = (1/2, 0, 1)$  et on fait varier  $\beta$  de  $-1$  à  $1/2$ . Le côté  $B = a \wedge c$  du triangle a pour coordonnées  $(1/2, 1/2, -1/4)$  ou encore  $(2, 2, -1)$  de sorte

que son pôle  $b'$  est  $(2, 2, 1)$  (attention au signe, voir 1.2.5). De même,  $C = a \wedge b$  a pour coordonnées  $(1/2, \beta, -\beta/2)$  et pour le pôle on a  $c' = (1/\beta, 2, 1)$ . On voit que lorsque  $\beta$  change de signe, le point  $c'$  change de côté par rapport à  $b'$  sur la droite  $y = 2$  et les bissectrices intérieures au sens des droites s'échangent.

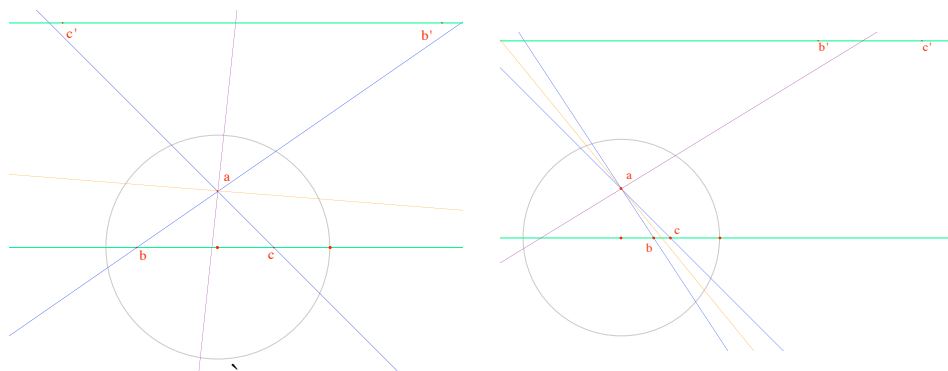


FIGURE 3.10 – À gauche les bissectrices intérieures sont les mêmes au sens des droites et des demi-droites, à droite, non

3) Nous verrons au chapitre 5 qu'on peut définir segments et milieux intrinsèques, et donc, par les mêmes méthodes que ci-dessus, des bissectrices intérieures et extérieures intrinsèques. Les choses n'en sont pas moins compliquées pour autant, voir 5.6.11 et 5.6.12.

### 3.4.4 Existence des milieux, médiatrices et autres animaux familiers

#### La géométrie elliptique

Dans le cas de la géométrie elliptique, les formes  $q$  et  $q^*$  sont définies positives et on a donc  $q(a) = q^*(A) = 1$  dans  $k^*/k^{*2}$  pour tout  $a \in \mathbf{P}(E)$  et tout  $A \in \mathbf{P}(E^*)$ . De plus, il n'y a pas d'isotropes. Deux points distincts ont donc toujours exactement deux milieux et deux médiatrices, deux droites distinctes ont toujours exactement deux bissectrices et deux points bissecteurs <sup>11</sup>.

#### La géométrie hyperbolique

Dans ce paragraphe on travaille dans  $\mathbf{P}(E)$  muni de la forme  $x^2 + y^2 - t^2$  avec les notations du paragraphe 2.4.1. L'existence des milieux et médiatrices est donnée par la proposition suivante :

11. Le paradis, vous dis-je!



**3.4.9 Proposition.** Soient  $a$  et  $b$  deux points (non isotropes) de  $\mathbf{P}(E)$ .

- 1) Si  $a$  est dans  $\mathbf{K}$  et  $b$  dans  $\mathbf{T}$ , les points  $a, b$  n'ont ni milieu, ni médiatrice.
- 2) Si  $a$  et  $b$  sont tous deux dans  $\mathbf{K}$ , on peut supposer  $q(a) = q(b) < 0$  et  $t > 0$  pour  $a$  et  $b$  (selon la convention<sup>12</sup> 2.4.8). Les points  $a$  et  $b$  admettent un milieu intérieur  $m^+ = a + b \in \mathbf{K}$  et un milieu extérieur  $m^- = a - b \in \mathbf{T}$ . Ils admettent aussi deux médiatrices  $M^+$  (polaire de  $m^-$ ) qui est une droite hyperbolique et  $M^-$  (polaire de  $m^+$ ) qui est une droite extérieure.
- 3) Si  $a$  et  $b$  sont tous deux dans  $\mathbf{T}$ , on peut supposer  $q(a) = q(b) > 0$ . Il y a deux milieux et deux médiatrices<sup>13</sup>, sauf si la droite  $(ab)$  est tangente à la conique. Précisément, si la droite  $(ab)$  est extérieure à  $\Gamma$ , les milieux sont tous deux dans  $\mathbf{T}$ , si elle coupe  $\Gamma$ , l'un des milieux<sup>14</sup> est dans  $\mathbf{K}$  et l'autre dans  $\mathbf{T}$ .

*Démonstration.* L'assertion 1) est évidente car  $q(a)$  et  $q(b)$  sont distincts dans  $k^*/k^{*2}$ . Le point 2) résulte de 3.1.3. En effet, la droite  $(ab)$  n'est pas tangente à la conique (donc elle n'est pas isotrope) et il y a deux milieux et deux médiatrices dans  $\mathbf{P}(E)$ . On a vu en 3.4.4 que le segment intérieur  $[ab]$  est contenu dans  $\mathbf{K}$ , donc aussi le milieu intérieur  $a + b$ . En revanche, le milieu  $a - b$  est  $> 0$ . En effet, comme  $a + b$  et  $a - b$  sont orthogonaux, la signature  $+, +, -$  empêche qu'ils soient tous deux  $< 0$ . Dans le point 3) le seul cas non évident est celui où  $(ab)$  rencontre  $\Gamma$  en deux points. Dans ce cas, la forme  $q$  en restriction à  $(ab)$  est hyperbolique et, comme  $m^+$  et  $m^-$  sont orthogonaux, les valeurs de  $q$  en ces points sont nécessairement de signes contraires.

Pour les bissectrices, même en se limitant aux droites hyperboliques (celles qui coupent  $\mathbf{K}$ ), les choses sont plus délicates car il faut distinguer selon leurs positions, voir 2.4.6, qui correspondent à celles de leurs pôles (qui sont des points de  $\mathbf{T}$ ). La proposition suivante n'est qu'une traduction de résultats antérieurs :

**3.4.10 Proposition.** On considère deux droites  $A, B$  hyperboliques, se coupant en  $c \in \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ , leurs pôles  $a, b$  et la droite  $C = (ab) = c^\perp$ . Il y a trois cas :

- 1) Le point  $c$  est dans  $\mathbf{K}$ , ce qui signifie que la droite  $C = (ab)$  est extérieure. Les deux milieux de  $a, b$  (qui sont les bissecteurs de  $A, B$ ) sont alors extérieurs et les deux médiatrices (les bissectrices de  $A, B$ ) sont hyperboliques. Autrement dit, dans  $\mathbf{K}$ , les droites admettent deux bissectrices qui sont perpendiculaires en  $c$  et pas de point bissecteur.

12. On ne peut à la fois imposer  $q(a) = q(b)$  et  $t = 1$ , bien entendu.

13. Si les points  $a, b$  ne sont pas à l'infini on peut distinguer les milieux à l'aide de 3.4.1 en prenant  $t = 0$  comme droite à l'infini, avec les réserves d'usage.

14. Attention, ce n'est pas nécessairement le milieu intérieur au sens de 3.4.1.

2) Le point  $c$  est sur  $\Gamma$  (les droites  $A$  et  $B$  sont “parallèles”), ce qui signifie que  $C = (ab)$  est tangente à  $\Gamma$  en  $c$ . Les points  $a, b$  admettent un unique milieu  $m$  qui est sur  $C$ , donc dans  $\mathbf{T}$ , et une unique médiatrice  $m^\perp$ , passant par  $c$ , donc hyperbolique. Les droites  $A, B$  ont une unique bissectrice et pas de point bissecteur dans  $\mathbf{K}$ .

3) Le point  $c$  est dans  $\mathbf{T}$  donc la droite  $C$  est hyperbolique. Les points  $a, b$  ont deux milieux, l’un dans  $\mathbf{K}$ , l’autre extérieur et deux médiatrices, l’une hyperbolique, l’autre extérieure. Les droites  $A, B$  admettent donc, dans  $\mathbf{K}$ , une unique bissectrice et un unique point bissecteur, situé sur la bissectrice<sup>15</sup>.

### 3.4.5 Retour aux triangles : les théorèmes de concours

#### Positions

Il s’agit de décrire ce que deviennent les théorèmes d’alignement et de concours dans les géométries réelles.

Il y a deux niveaux à considérer. L’un, qui n’intervient que dans le cas hyperbolique, est intrinsèque et consiste à se demander si les concours et alignements annoncés ont lieu dans  $\mathbf{K}$  ou dans  $\mathbf{T}$  et quelles en sont les conséquences géométriques, nous l’aborderons au paragraphe suivant. L’autre est contingent, mais utile pour la description des figures, et concerne les notions de segments, de milieux, etc. intérieurs et extérieurs. Il nécessite de choisir une forme linéaire  $l$ , voir 3.4.1. Dans ce cas, le lemme 3.4.3 permet de préciser les alignements des milieux des côtés d’un triangle et les concours des médiatrices en termes d’intérieur et extérieur, indépendamment de la nature (elliptique ou hyperbolique) de la géométrie :

**3.4.11 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle strict. On choisit une droite à l’infini d’équation  $l$  ne contenant aucun des points  $a, b, c$  et on utilise les notions d’intérieur et d’extérieur au sens de 3.4.1. Alors, les trois milieux extérieurs (resp. deux milieux intérieurs et le milieu extérieur du troisième côté) de  $abc$  sont alignés ; les trois médiatrices intérieures sont concourantes (resp. deux extérieures et une intérieure).*

Pour les bissectrices on a le résultat suivant qui montre que les bissectrices intérieures sont toujours concourantes, quel que soit le sens qu’on donne au mot intérieure :

**3.4.12 Proposition.** *1) Soit  $ABC$  un trilatère strict. Les bissectrices intérieures au sens des droites, voir 3.4.5, sont concourantes. Il en est de même de deux bissectrices extérieures et une intérieure.*

<sup>15</sup>. On notera que ce cas est sensiblement différent de nos habitudes euclidiennes.

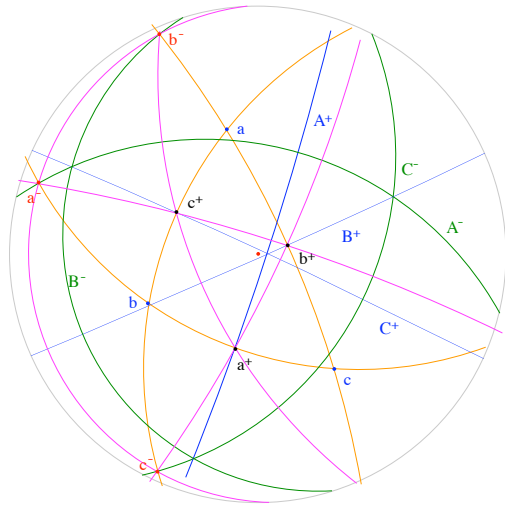


FIGURE 3.11 – Le concours des médiatrices et l’alignement des milieux dans le plan elliptique

2) Soit  $abc$  un triangle strict dont les côtés forment un trilatère strict. Les bissectrices intérieures au sens des triangles, voir 3.4.7, sont concourantes. Il en est de même de deux bissectrices extérieures et une intérieure.

*Démonstration.* Par dualité, le point 1) est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Pour le point 2), il résulte de 3.4.7 que les bissectrices intérieures, après normalisation, sont  $A^- = B - C$ ,  $B^- = C - A$  et  $C^- = A - B$  et on a  $A^- + B^- + C^- = 0$ , d’où le résultat.

### Le cas elliptique

Comme on l’a dit, la géométrie elliptique est le paradis des mathématiciens et il n’y a rien à changer par rapport à la situation générale décrite ci-dessus. On a effectivement tous les milieux, médiatrices, etc. possibles, avec tous les concours et tous les alignements annoncés, voir les figures 2.5, 3.6, 3.11. Pour le concours des bissectrices intrinsèques, voir l’exercice 5.6.12.

### 3.4.6 Concours : le cas hyperbolique

Le cas hyperbolique nécessite plus de soin. On suppose dans ce paragraphe qu’on est dans  $\mathbf{P}(E)$  muni de la forme de Lorentz  $x^2 + y^2 - t^2$  et on reprend les notations du paragraphe 2.4.1.

Si l'on considère le plan projectif tout entier, sans frapper d'ostracisme les points de  $\mathbf{T}$ , les résultats prouvés ci-dessus sont parfaitement valables, voir figures 3.5, 3.6, 3.7. Si l'on souhaite absolument se conformer aux traditions et retrouver le cas hyperbolique usuel sur  $\mathbf{R}$ , par exemple dans le modèle  $\mathbf{D}$  du disque de Poincaré, il faut opérer quelques modifications et surtout établir un dictionnaire qui nous permettra d'interpréter les résultats précédents. La satisfaction de **comprendre** des phénomènes jusque là épars vaut bien ce petit effort.

### Pinceaux

La différence essentielle entre la situation examinée ci-dessus et celle du plan hyperbolique usuel réside dans le concours des droites. Les droites concourantes dans  $\mathbf{P}(E)$  ne le sont plus nécessairement dans  $\mathbf{K}$ , précisément, en se souvenant de 2.4.6, on a :

**3.4.13 Proposition-Définition.** *Soient  $A, B, C$  trois droites hyperboliques (i.e. des droites de  $\mathbf{P}(E)$  qui rencontrent  $\mathbf{K}$ ), concourantes en un point  $u \in \mathbf{P}(E)$ . Il y a trois cas :*

- 1) *si  $u$  est dans  $\mathbf{K}$ , les droites sont **concourantes dans  $\mathbf{K}$** ,*
- 2) *si  $u$  est dans  $\mathbf{T}$ , les droites **admettent une perpendiculaire commune**, la droite  $U = u^\perp$ , qui est une droite de  $\mathbf{K}$ ,*
- 3) *si  $u$  est sur  $\Gamma$ , les droites sont **parallèles**.*

*Dans les trois cas on dit que ces droites sont **en pinceau** et on parle, selon le cas, de pinceau de centre  $u$ , d'axe  $U$ , ou sans support.*

**3.4.14 Remarque.** On notera qu'en revanche il n'y a pas de problème pour les alignements de points de  $\mathbf{K}$  puisque toute droite projective passant par deux points de  $\mathbf{K}$  est une droite de  $\mathbf{K}$ .

### Traductions

Rappelons que nous écrirons toujours les points de  $\mathbf{K}$  sous la forme  $a = (x, y, t)$  avec  $t > 0$  (voir 2.4.8). Le segment intérieur  $]a, b[$  (au sens de la forme linéaire  $t$ , voir 3.4.1), qui est l'ensemble des points  $\lambda a + \mu b$  avec  $\lambda, \mu > 0$ , est entièrement contenu dans  $\mathbf{K}$  (voir 3.4.4).

On peut expliciter ce que deviennent les objets définis ci-dessus dans le cas d'un triangle :

**3.4.15 Proposition.**

- 1) *Soit  $T = abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ . Alors,  $T$  est un triangle strict. Il admet, dans  $\mathbf{K}$ , trois milieux de côtés (donc trois médianes), trois médiatrices et*

trois hauteurs (qui sont des droites hyperboliques).

2) Si  $U = (ABC)$  est un trilatère de  $\mathbf{K}$  (i.e. la donnée de trois droites de  $\mathbf{K}$ , ne se coupant pas nécessairement dans  $\mathbf{K}$ ),  $U$  admet au moins trois et au plus six bissectrices. Précisément, si  $n$  est le nombre de points d'intersection des côtés  $A, B, C$  dans  $\mathbf{K}$  il y a  $3 + n$  bissectrices et  $3 - n$  points bissecteurs.

*Démonstration.* Rappelons, cf. 3.4.9, que  $a, b$  sont dans  $\mathbf{K}$  ils ont un unique milieu dans  $\mathbf{K}$ , le point  $c^+ = a + b$ , et une unique médiatrice, la droite  $C^+ = (a - b)^\perp$ . On en déduit l'assertion 1).

Si  $A, B$  sont deux droites de  $\mathbf{K}$  on a plusieurs cas, voir 3.4.10. Si  $A$  et  $B$  se coupent dans  $\mathbf{K}$ , elles admettent deux bissectrices dans  $\mathbf{K}$ . Si elles se coupent sur  $\Gamma$  ou à l'extérieur elles en ont une seule. Si elles se coupent à l'extérieur elles ont une bissectrice et, de plus, un point bissecteur. On en déduit l'assertion 2).

## Les résultats

On peut maintenant énoncer :

**3.4.16 Théorème. (Concours des médiatrices)** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ . Les trois médiatrices de  $abc$  sont en pinceau.*

*Démonstration.* Les médiatrices de  $abc$  sont les polaires des milieux extérieurs de  $abc$ ,  $a^- = b - c$ ,  $b^- = c - a$ ,  $c^- = a - b$ . Comme ces milieux sont alignés sur une droite  $D$  de  $\mathbf{P}(E)$ , cf. 3.2.3, les médiatrices sont concourantes dans  $\mathbf{P}(E)$ , donc en pinceau dans  $\mathbf{K}$ .

**3.4.17 Remarque.** Les trois cas de figure (pinceaux à centre, à axe, sans support) sont possibles selon la position de  $D$  par rapport à  $\Gamma$ , voir une discussion en 3.5.13. Pour des précisions sur cercle circonscrit, horocycle et équidistante, voir chapitre 7.

Dans le cas des bissectrices, on a d'abord le théorème pour les triangles, proche du cas euclidien :

**3.4.18 Théorème. (Concours des bissectrices)** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ . On appelle, avec les notations de 3.4.7,  $A^-, B^-, C^-$  (resp.  $A^+, B^+, C^+$ ) les bissectrices intérieures (resp. extérieures) du triangle. Alors, les droites  $A^-, B^-, C^-$  sont concourantes et les triplets de droites  $A^+, B^+, C^-$ ;  $A^+, B^-, C^+$ ;  $A^-, B^+, C^+$  sont en pinceau.*

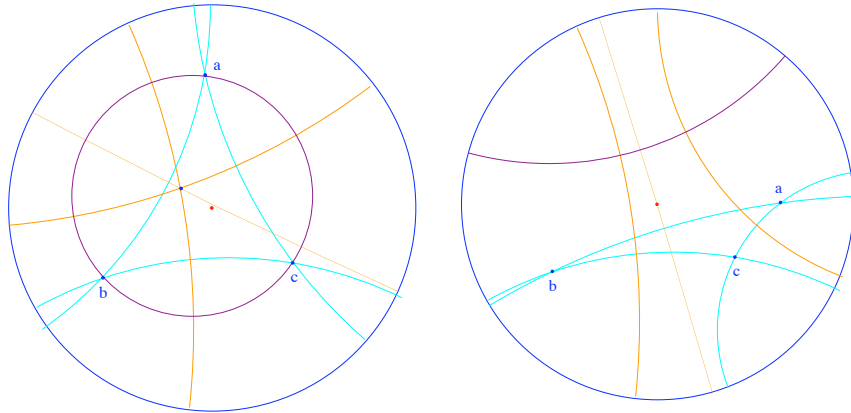


FIGURE 3.12 – Concours des médiatrices et cercle circonscrit à gauche, perpendiculaire commune à droite

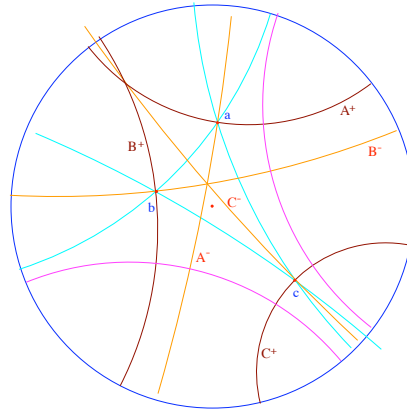


FIGURE 3.13 – Concours des bissectrices intérieures, concours ou pinceau pour deux extérieures et une intérieure (perpendiculaires communes en rose)

*Démonstration.* Cela résulte de 3.2.5 et de 3.4.7. Le seul point non évident est que le point de concours des bissectrices intérieures soit dans  $\mathbf{K}$ . Pour le voir, normalisons le triangle comme en 3.4.7. Les bissectrices intérieures sont alors les droites d'équations  $c \wedge a - a \wedge b$ ,  $a \wedge b - b \wedge c$  et  $b \wedge c - c \wedge a$ . On vérifie que leur point d'intersection est  $a + b + c$ . En effet, on a, par exemple,  $(a \wedge b - b \wedge c)(a + b + c) = [a, b, c] - [b, c, a] = 0$ . Mais, comme les valeurs de  $q(a)$ ,  $q(b)$ ,  $q(c)$  sont négatives (car  $a, b, c$  sont dans  $\mathbf{K}$ ), de même que celles de  $\varphi(b, c)$ ,  $\varphi(c, a)$ ,  $\varphi(a, b)$  (car les points  $a, b, c$  sont normalisés par  $t > 0$ , voir 2.4.9), le point  $a + b + c$  est bien dans  $\mathbf{K}$ .

**3.4.19 Remarque.** Dans le cas d'une bissectrice intérieure et deux extérieures, on peut obtenir les trois types de pinceaux, voir figure 3.13.

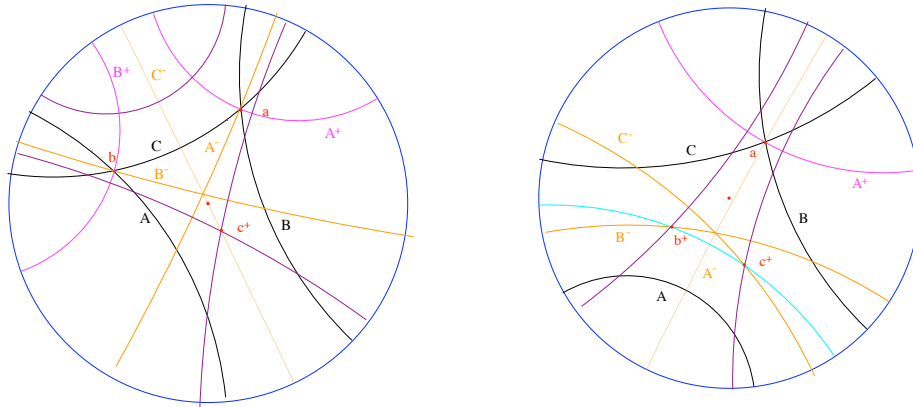


FIGURE 3.14 – Les deux premiers cas de trilatères

Dans le cas des trilatères, il faut revenir aux notions (non intrinsèques) de bissectrices intérieure et extérieure au sens de 3.4.5 pour formuler le théorème suivant :

**3.4.20 Théorème.** *Soit  $ABC$  un trilatère de  $\mathbf{K}$ .*

1) *On suppose que  $B$  et  $C$  concourent en  $a$ ,  $C$  et  $A$  en  $b$ , mais que  $A$  et  $B$  ne sont pas concourantes. On appelle  $A^-, B^-$  (resp.  $A^+, B^+$ ) les bissectrices intérieures (resp. extérieures) de  $B, C$  et  $C, A$  (au sens de 3.4.5)  $C^-$  (resp.  $c^+$ ) la bissectrice<sup>16</sup> (resp. le bissecteur) de  $A, B$ . Alors, les droites  $A^-, B^-, C^-$  (resp.  $A^+, B^+, C^-$ ) sont en pinceau et le point  $c^+$  est l'intersection des perpendiculaires communes à  $A^-$  et  $B^+$  et à  $A^+$  et  $B^-$ .*

2) *On suppose que  $B$  et  $C$  concourent en  $a$ , mais que les autres droites ne sont pas concourantes. On appelle  $A^+, A^-$  les bissectrices de  $B, C$ ,  $B^-, C^-$   $b^+, c^+$  les bissectrices et bissecteurs des autres paires de droites. Alors, les droites  $A^-, B^-, C^-$  sont en pinceau,  $A^-$  est perpendiculaire à  $(b^+c^+)$  et la perpendiculaire commune à  $A^+$  et  $C^-$  (resp.  $A^+$  et  $B^-$ ) passe par  $b^+$  (resp.  $c^+$ ).*

3) *On suppose que les côtés du trilatère ne sont pas concourants. On appelle  $A^-, B^-, C^-$  (resp.  $a^+, b^+, c^+$ ) les bissectrices (resp. bissecteurs) des paires de côtés. Alors, les droites  $A^-, B^-, C^-$  sont en pinceau et ce sont précisément les hauteurs du triangle  $a^+b^+c^+$  ( $A^-$  passe par  $a^+$  et est perpendiculaire à  $(b^+c^+)$ ).*

*Démonstration.* Le lecteur vérifiera sans peine ce théorème (il résulte de 3.2.5). La manipulation des figures Cabri montre que tous les cas de pinceaux sont possibles (la figure ci-dessous en est un exemple).

16. Pour construire la bissectrice de deux droites  $A, B$  non concourantes dans le modèle

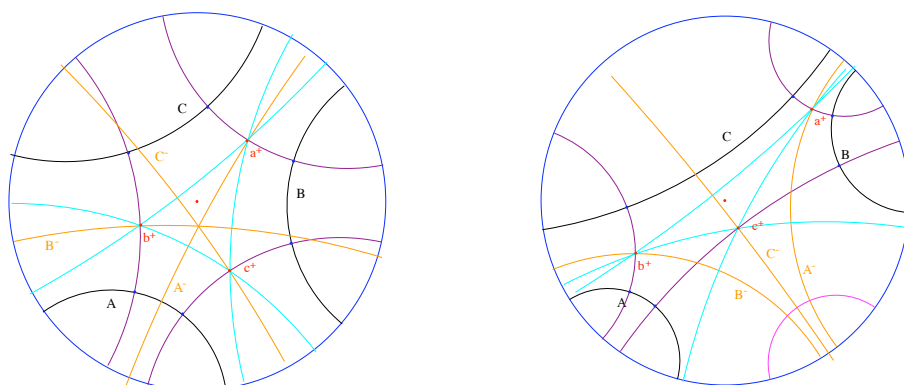


FIGURE 3.15 – Le dernier cas de trilatère, avec concours des bissectrices, ou existence de perpendiculaire commune

**3.4.21 Théorème. (Concours des médianes)** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$  et soient  $a', b', c'$  les milieux (intérieurs) des côtés. Alors les droites  $(aa')$ ,  $(bb')$ ,  $(cc')$  sont concourantes dans  $\mathbf{K}$ .

*Démonstration.* On suppose  $q(a) = q(b) = q(c)$ . La démonstration de 3.2.6 par le calcul direct montre que l'intersection des médianes est le point  $a+b+c$  qui est dans  $\mathbf{K}$  (voir la preuve du concours des bissectrices intérieures<sup>17</sup>).

**3.4.22 Remarque.** On notera que, dans le cas des médianes, il y a vraiment concours, et pas seulement pinceau.

**3.4.23 Théorème. (Concours des hauteurs).** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$  et soient  $A', B', C'$  les hauteurs (qui sont des droites de  $\mathbf{K}$ ). Alors,  $A', B', C'$  sont en pinceau.

*Démonstration.* C'est 3.2.10.

**3.4.24 Remarque.** L'examen des différentes figures montre que tous les types de pinceaux sont possibles.

**3.4.25 Remarque.** On peut montrer que les pieds des hauteurs d'un triangle de  $\mathbf{K}$  sont encore dans  $\mathbf{K}$ , voir 3.5.9 ou 4.7.6.

---

de Poincaré, on trace d'abord la perpendiculaire commune aux deux droites, qui les coupe en  $a'$  et  $b'$ . La bissectrice (resp. le bissecteur) cherché est alors la médiatrice (resp. le milieu) de  $a', b'$ .

17. Attention, sous prétexte que le point de concours des bissectrices et celui des médianes peuvent tous deux s'écrire  $a + b + c$  il ne faut pas croire qu'ils sont égaux. Dans le premier cas  $a, b, c$  sont normalisés par  $q^*(b \wedge c) = q^*(c \wedge a) = q^*(a \wedge b)$ , dans le second ils le sont par  $q(a) = q(b) = q(c)$  et c'est totalement différent, voir 1.2.3, sauf si le triangle est équilatéral, voir 4.6.7.



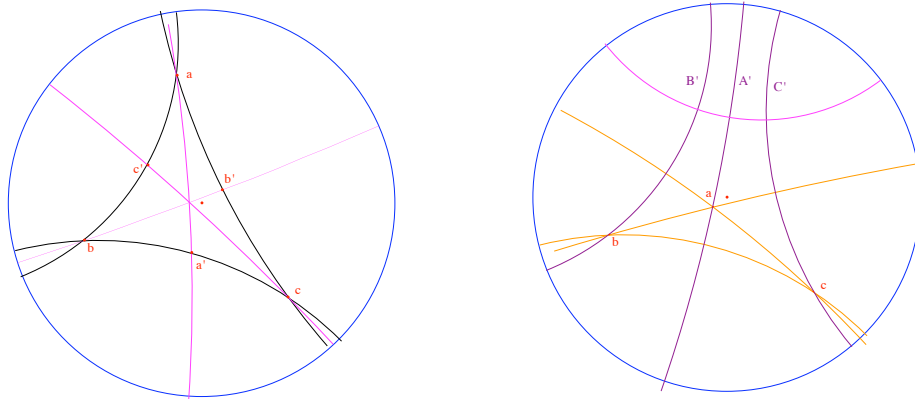


FIGURE 3.16 – Concours des médianes et perpendiculaire commune aux hauteurs dans le disque de Poincaré

## 3.5 Exercices

### 3.5.1 D'autres preuves des théorèmes de concours

#### Les médiatrices

**3.5.1 Exercice.** Soient  $a, b$  deux points distincts et non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ . On suppose qu'on a  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Montrer qu'un point  $m$  est sur l'une des médiatrices de  $a, b$  si et seulement si il vérifie  $\varphi(m, a) = \pm\varphi(m, b)$ .

En déduire une nouvelle preuve du concours des médiatrices d'un triangle strict (on pourra comparer cette preuve à la celle de 4.7.21 et à la preuve euclidienne usuelle).

#### 3.5.2 Exercice. (Équations des médiatrices)

Soient  $a, b$  deux points distincts et non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ . On suppose qu'on a  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*$ . Montrer que les médiatrices de  $a, b$  sont les droites d'équations (dans  $E^*$ ) :

$$\varphi(c, b - \epsilon a)(a \wedge b) + \varphi(a, b - \epsilon a)(b \wedge c) - \epsilon\varphi(a, b - \epsilon a)(c \wedge a),$$

avec  $\epsilon = \pm 1$ . (On écrira que la médiatrice passe par le point  $a + \epsilon b$  et est perpendiculaire à  $a \wedge b$ .)

En déduire une nouvelle preuve du concours des médiatrices d'un triangle.

**3.5.3 Exercice.** Soient  $a, b, c$  trois points (non isotropes) non alignés de  $\mathbf{P}(E)$ . On suppose que  $a, b$  et  $a, c$  admettent des médiatrices  $C^+$  et  $B^+$  et que les droites  $(ab)$ ,  $(ac)$  et  $(bc)$  sont non isotropes.

1) Montrer que  $b, c$  admettent une médiatrice.

2) a) Montrer que  $B^+$  et  $C^+$  sont distinctes. On appelle  $a'$  leur point d'intersection. Montrer que  $a'$  est distinct de  $a$ . Soit  $A'$  la droite  $(aa')$ .

b) Montrer que  $A'$  n'est pas isotrope. (Sinon, en appliquant  $\tau_{B^+}$  et  $\tau_{C^+}$  il en serait de même de  $(ca')$  et  $(ba')$  et, comme il y a au plus deux isotropes en un point, deux de ces droites seraient égales et  $abc$  aurait un côté isotrope.)

c) Montrer que  $\tau_{B^+}\tau_{A'}\tau_{C^+}$  est une involution  $\tau_{A^+}$  (utiliser le théorème de Bachmann 1.4.11). Montrer que  $A^+$  est une médiatrice de  $b, c$  et que les droites  $A^+, B^+, C^+$  sont concourantes (utiliser encore 1.4.11).

## Les médianes

**3.5.4 Exercice.** Soient  $a, b, c$  trois points non alignés de  $\mathbf{P}(E)$  et soient  $a', b', c'$  respectivement sur  $(bc), (ca), (ab)$ , distincts de  $a, b, c$ . On suppose que les conjugués harmoniques de  $a', b', c'$  par rapport à  $b, c; c, a; a, b$  respectivement sont alignés. Le but de l'exercice est de montrer que les trois droites  $(aa'), (bb'), (cc')$  sont concourantes.

1) Prouver le résultat en choisissant comme droite de l'infini la droite qui contient les conjugués de  $a', b', c'$ .

2) Prouver le résultat par le calcul en écrivant  $a' = b + \lambda c, b' = c + \mu a, c' = a + \nu b$  et en calculant les conjugués harmoniques (on trouve  $a'' = b - \lambda c, b'' = c - \mu a, c'' = a - \nu b$ ). Traduire l'alignement de ces points et conclure.

3) Prouver le résultat en utilisant le théorème à quatre points (voir Partie I ??).

4) Prouver le résultat en utilisant la version projective du théorème de Céva (voir Partie I ??).

**3.5.5 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle,  $a'$  et  $b'$  des milieux de  $b, c$  et  $c, a$ . Montrer qu'il existe un milieu  $c'$  de  $a, b$  tel que les médianes  $(aa'), (bb'), (cc')$  soient concourantes dans  $\mathbf{P}(E)$ . (Utiliser l'exercice précédent, 3.2.3 et 3.1.5.)

**3.5.6 Exercice. (Centre de gravité isotrope)** On suppose qu'on est sur le corps des réels et en géométrie hyperbolique. On se donne deux points distincts  $a, b \in \mathbf{T}$  tels que la droite  $(ab)$  ne coupe pas  $\Gamma$ . Montrer qu'il existe des points  $c \in \mathbf{T}$  tels que le centre de gravité de  $abc$  soit sur  $\Gamma$ . (On peut supposer  $q(a) = q(b) = 1$ . Il s'agit alors de résoudre simultanément les équations  $q(c) = 1$  et  $q(a + b + c) = 0$ . Les solutions forment une conique. On peut par exemple mener ce calcul en prenant  $a = (1, 0, 0), b = (\alpha, \beta, 0)$  avec  $\beta \neq 0$  et  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$  et chercher  $c$  sous la forme  $(x, y, t)$ . En éliminant  $y$  on se ramène à résoudre une équation en  $x$  qui dépend du paramètre  $t$  et qui a des solutions pour  $t$  assez grand.)

## Les hauteurs

**3.5.7 Exercice.** Soit  $a, b, c, d$  un repère de  $\mathbf{P}(E)$  et soient  $e$  et  $f$  les intersections :  $e = (ab) \cap (cd)$ ,  $f = (bc) \cap (da)$ . On suppose que  $a, c$  (resp.  $b, d$ ) sont conjugués par rapport à une forme quadratique  $q$  quelconque. Montrer que  $e$  et  $f$  sont conjugués par rapport à  $q$  (on pourra écrire  $d = a + b + c$ ; on a alors  $e = a + b$  et  $f = b + c$ ).

**3.5.8 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle,  $a', b', c'$  les pôles de  $(bc)$ ,  $(ca)$ ,  $(ab)$ . On suppose  $a \neq a'$ ,  $b \neq b'$ ,  $c \neq c'$ . Montrer que les hauteurs  $(aa')$ ,  $(bb')$ ,  $(cc')$  sont concourantes. (On note  $h$  le point d'intersection de  $(bb')$  et  $(cc')$  et on pose  $A = (ab)$ ,  $B = (bb')$ ,  $C = (cc')$ ,  $D = (ac)$ ,  $E = (bc)$  et  $F = (ah)$ . On appliquera l'exercice précédent aux points  $A, B, C, D, E, F$  de  $\mathbf{P}(E^*)$  et à la forme  $q^*$ .)

## 3.5.2 D'autres exercices

### De quoi sont les pieds ?

**3.5.9 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ . Montrer que les pieds des hauteurs  $a', b', c'$  sont encore dans  $\mathbf{K}$ . (La polaire de  $a$  est extérieure, donc en particulier le point  $a''$ , intersection de cette polaire et de  $(bc)$  et  $a'$  est orthogonal à  $a''$  sur la droite hyperbolique  $(bc)$ .)

## Polygones et milieux

**3.5.10 Exercice.**

1) Soient  $a, b, c, d$  quatre points non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$  tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés. Montrer qu'il existe en général un quadrilatère  $uvwx$ , formé de points non isotropes, dont les points  $a, b, c, d$  soient des milieux des côtés. (Considérer le produit  $f = \sigma_d \sigma_c \sigma_b \sigma_a$  et noter qu'il a un point fixe non isotrope, sauf si c'est un déplacement parallèle. On précisera à quelle condition les points  $u, v, w, x$  sont distincts.) Montrer que ce quadrilatère est unique, sauf dans un cas particulier que l'on précisera.

2) Étudier la même question avec  $n$  points  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**3.5.11 Exercice. Isogonalité** 1) Soit  $abc$  un triangle strict de  $\mathbf{P}(E)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma$  les milieux de  $b, c$ ;  $c, a$ ;  $a, b$ , supposés alignés. Soient  $a', b', c'$  des points de  $(bc)$ ,  $(ca)$ ,  $(ab)$ , respectivement, et  $a'', b'', c''$  leurs symétriques par rapport à  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Montrer que  $a', b', c'$  sont alignés si et seulement si  $a'', b'', c''$  le sont (utiliser le lemme "pré-Ménélaus" ?? de Partie I).

2) Soient  $A, B, C$  trois droites de  $\mathbf{P}(E)$  formant un trilatère strict,  $a, b, c$  les intersections de  $B, C$ ;  $C, A$ ;  $A, B$ . Soient  $A', B', C'$  trois droites passant respectivement par  $a, b, c$  et  $A'', B'', C''$  les symétriques de ces droites par rapport aux bissectrices (concourantes) de  $abc$ . Montrer que  $A'B', C'$  sont concourantes si et seulement si  $A'', B'', C''$  le sont.

### 3.5.12 Exercice. Le triangle orthique par le calcul

Soit  $abc$  un triangle. On se propose de montrer 3.3.11 par le calcul. On note  $A, B, C$  des équations des côtés. En utilisant l'écriture des hauteurs vue dans la preuve de 3.2.10 (par exemple, la hauteur issue de  $a$  a pour équation  $A' = \varphi^*(C, A)B - \varphi^*(A, B)C$ ), montrer que  $(a'b')$  a pour équation :  $\varphi^*(C, A)B - \varphi^*(A, B)C + \varphi^*(B, C)A$  et de même pour les autres par permutation circulaire. En déduire que les valeurs de  $q^*$  sur ces droites sont égales (et non nulles sauf si l'on a la condition  $I^*(B, C) + I^*(C, A) + I^*(A, B) = 2S(A, B, C)$ ). Conclure. (On comparera cette preuve et celle de 3.3.3.)

### 3.5.13 Exercice. ¶ Concourantes ou non ?

Le but de l'exercice est de préciser dans quel cas les médiatrices d'un triangle de  $\mathbf{K}$  se coupent dans  $\mathbf{K}$  et dans quel cas elles se coupent dans  $\mathbf{T}$ . On reprend les notations de 2.4.1 et notamment la convention 2.4.8.

On considère deux points distincts  $a, b$  de  $\mathbf{K}$ . Leur médiatrice (intérieure)  $D$  coupe  $\Gamma$  en  $e$  et  $f$ . On considère les horicycles  $H_e$  et  $H_f$  de centres  $e$  et  $f$  passant par  $a$  (et par  $b$ ), voir 7.3.1. Ce sont des ellipses tangentes (et même surosculatrices) à  $\Gamma$  en  $e$  et  $f$  respectivement et on appelle  $E_1$  et  $E_2$  leurs intérieurs respectifs. Si  $c$  est un point de  $\mathbf{K}$  distinct de  $a$  et de  $b$ , on se propose de montrer que la médiatrice de  $a, c$  (et donc aussi celle de  $b, c$ ) coupe  $D$  dans  $\mathbf{K}$  (resp. la coupe sur  $\Gamma$ , resp. dans  $\mathbf{T}$ ) si  $c$  est dans la différence symétrique  $E_1 \Delta E_2 = (E_1 \cup E_2) - (E_1 \cap E_2)$  (resp. sur  $H_1 \cup H_2$ , resp. si  $c$  n'est dans aucun des  $E_i$  ou dans les deux).

1) Montrer que le point de concours  $o$  des médiatrices est dans  $\mathbf{K}$  si et seulement si la quantité suivante (notée  $K(a, b, c)$ ) est  $> 0$  :

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{q(a)^2q(b)q(c)}\varphi(b, c) + 2\sqrt{q(a)q(b)^2q(c)}\varphi(c, a) + 2\sqrt{q(a)q(b)q(c)^2}\varphi(a, b) \\ & + 2\sqrt{q(b)q(c)}\varphi(c, a)\varphi(a, b) + 2\sqrt{q(c)q(a)}\varphi(a, b)\varphi(b, c) + 2\sqrt{q(a)q(b)}\varphi(b, c)\varphi(c, a) \\ & + q(a)\varphi(b, c)^2 + q(b)\varphi(c, a)^2 + q(c)\varphi(a, b)^2 - 3q(a)q(b)q(c). \end{aligned}$$

Indication : Il y a deux méthodes : l'une consiste à écrire  $o$  sous la forme  $o = b' \wedge c' + c' \wedge a' + a' \wedge b'$  (en ayant remplacé  $a, b, c$  par  $a' = a/\sqrt{-q(a)}$  etc., voir 3.2.4) et à appliquer 1.2.3 ; l'autre à écrire que la droite qui passe par les pôles des médiatrices est extérieure, donc que le discriminant de  $q$  y

est  $> 0$  :  $\Delta = q(a' - b')q(b' - c') - \varphi(a' - b', b' - c')^2$ , avec les points  $a', b', c'$  comme ci-dessus.

2) a) Montrer qu'on peut supposer que les points  $a, b$  et  $c$  ont des représentants de la forme suivante :  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (\alpha, 0, \gamma)$  avec  $\alpha > 0$ ,  $\gamma > 0$  et  $\alpha^2 - \gamma^2 = -1$ ,  $c = (x, y, t)$  avec  $x^2 + y^2 - t^2 = -1$  et  $t > 0$ .

b) Montrer que les points  $c = (x, y, t) \in \mathbf{R}^3$  qui vérifient  $K(a, b, c) = 0$  et  $x^2 + y^2 - t^2 = -1$  sont à l'intersection de deux quadriques. Ils décrivent donc une quartique  $Q$  (courbe de degré 4).

c) Montrer que les points  $e$  et  $f$  sont les points de coordonnées

$$(\gamma - 1, \pm\sqrt{2}\sqrt{\gamma - 1}, \alpha).$$

Montrer que le point  $c$  est sur l'un des horicycles  $H_e$  ou  $H_f$  s'il vérifie les équations  $x^2 + y^2 - t^2 = -1$  et

$$(\gamma - 1)x + \epsilon\sqrt{2(\gamma - 1)}y - \alpha t = -\alpha$$

avec  $\epsilon = \pm 1$ . (Le signe du second membre vient de 2.4.9.) On obtient ainsi deux coniques de  $\mathbf{R}^3$ .

c) Montrer les deux coniques précédentes sont contenues dans  $Q$ , donc que  $Q$  en est la réunion, et conclure.

3) Traduire la condition obtenue dans le cas du modèle  $\mathbf{D}$  (les horicycles sont alors les cercles circonscrits à  $a, b, e$  et  $a, b, f$ ).

### 3.5.3 Utilisation des deux bases

**3.5.14 Exercice.** Lorsqu'on a une base  $a, b, c$  de  $E$ , on peut lui associer la base  $b \wedge c, c \wedge a, a \wedge b$  et le jeu entre les deux permet d'écrire un certain nombre de points tantôt sur l'une et tantôt sur l'autre (voir 1.2.7). Ainsi, lorsque les points sont normalisés par  $q(a) = q(b) = q(c)$ , les centres de gravité sont faciles à écrire sur la base  $a, b, c$  car ce sont  $a + b + c, b + c - a, c + a - b, a + b - c$ , voir 3.2.6 tandis que les centres des cercles circonscrits sont faciles avec l'autre car ce sont (voir 3.2.4)

$$\delta = b \wedge c + c \wedge a + a \wedge b, \quad \gamma = b \wedge c - c \wedge a + a \wedge b,$$

$$\beta = -b \wedge c + c \wedge a + a \wedge b, \quad \alpha = b \wedge c + c \wedge a - a \wedge b.$$

1) Montrer que les pieds des hauteurs du triangle  $abc$  s'écrivent sous la forme  $a' = \varphi(b \wedge c, c \wedge a)b + \varphi(a \wedge b, b \wedge c)c$  et de même pour les autres par permutation circulaire. En déduire une nouvelle preuve du concours des hauteurs du triangle.

2) Montrer que l'orthocentre du triangle  $abc$  est le point  $h$  donné par :

$$h = \varphi(a, b)\varphi(a, c)(b \wedge c) + \varphi(b, c)\varphi(b, a)(c \wedge a) + \varphi(c, a)\varphi(c, b)(a \wedge b).$$

(On montrera que, si  $h$  est le point défini par cette formule, la droite  $(ah)$  est perpendiculaire à  $(bc)$ , c'est-à-dire qu'elle contient son pôle  $b \wedge c$ .)

3) a) Montrer que le théorème de la droite d'Euler est faux en géométrie non euclidienne : pour un triangle strict général, l'orthocentre, un des centres de gravité et un des centres des cercles circonscrits ne sont pas alignés. (Supposer  $q(a) = q(b) = q(c) := \alpha$ , poser  $x = \varphi(b, c)$ ,  $y = \varphi(c, a)$ ,  $z = \varphi(a, b)$  et calculer dans la base  $b \wedge c, c \wedge a, a \wedge b$ .)

b) On considère plus précisément le centre de gravité  $g = a + b + c$  et le centre du cercle circonscrit  $o = b \wedge c + c \wedge a + a \wedge b$ . Montrer que  $h, g, o$  sont alignés si et seulement si le triangle  $abc$  est isocèle (voir 4.6.1). Explication?

c) Cette fois, on conserve le même  $g$ , mais on prend  $o = b \wedge c + c \wedge a - a \wedge b$ . Avec les notations de a), montrer que les points  $o, g, h$  sont alignés si et seulement si  $abc$  est isocèle en  $c$  ou s'il vérifie la relation<sup>18</sup>  $z^2 + xz + yz + 2\alpha z - xy = 0$ .

### 3.5.4 Le concours des médiatrices dans le demi-plan de Poincaré

**3.5.15 Exercice.** Le but de l'exercice est de montrer le théorème 3.4.16 par un calcul direct dans le demi-plan de Poincaré. On reprend les notations et les résultats des exercices 2.5.2 et 2.5.3.

1) Soient  $D, D'$  deux droites hyperboliques distinctes et  $s = \tau_D \circ \tau_{D'}$ . Montrer que l'on a les trois cas suivants :

a) Si  $D$  et  $D'$  se coupent en un point  $o \in \mathbf{H}$ ,  $s$  admet un unique point fixe dans  $\mathbf{H}$  qui est le point  $o$  (et un autre dans le demi-plan  $y < 0$ ).

b) Si  $D$  et  $D'$  ne se coupent ni dans  $\mathbf{H}$ , ni sur le bord,  $s$  a deux points fixes distincts sur le bord de  $\mathbf{H}$ .

c) Si  $D$  et  $D'$  se coupent sur le bord de  $\mathbf{H}$  en  $o$ ,  $s$  a un unique point fixe dans  $\widehat{\mathbf{C}}$ , qui est le point  $o$ .

2) Dans le cas a),  $s$  est une **rotation hyperbolique** (voir 1.4.25). On montrera que  $s$  n'admet aucune droite hyperbolique invariante sauf dans un cas particulier que l'on précisera. Dans le cas b),  $s$  est une **translation hyperbolique**. On montrera qu'elle admet une unique droite invariante  $\Delta$  qui est la perpendiculaire commune à  $D$  et  $D'$  (voir 1.4.25). Dans le cas c),  $s$  est un **déplacement parallèle** (voir 1.4.28).

18. Je ne sais pas interpréter géométriquement cette condition.

3) Soient  $A, B, C$  trois droites hyperboliques. Montrer<sup>19</sup> que le produit  $u = \tau_A \circ \tau_B \circ \tau_C$  est une involution si et seulement si les trois droites sont en pinceau (voir 3.4.13).

4) Soient  $z, w$  deux points distincts de  $\mathbf{H}$ . Une droite hyperbolique  $D$  est médiatrice de  $z, w$  si l'on a  $\tau_D(z) = w$ .

a) Soient  $z, w$  deux points distincts de  $\mathbf{H}$ . Montrer qu'il existe une unique médiatrice de  $z, w$ .

b) Montrer que les médiatrices d'un triangle  $abc$  sont en pinceau.

---

19. Directement, i.e. sans utiliser 1.4.11.





# Chapitre 4

## Propriétés de transitivité : le cas d'un corps quelconque

*Dans ce chapitre, nous abordons la question de la transitivité du groupe  $PO(q)$  sur différents objets : les points, les droites, les drapeaux point-droite, les couples de points ou de droites, les triangles. L'objectif est de retrouver les invariants usuels (distance, angle, etc.) et d'énoncer les "cas d'égalité des triangles" d'Euclide. Dans ce chapitre, nous définissons les invariants sur un corps quelconque, la traduction des notions introduites au cas du corps des réels est donnée au chapitre suivant.*

Les notations sont celles du chapitre 1, le corps  $k$  est quelconque.

### 4.1 La problématique et les outils

#### 4.1.1 Le principe

On reprend les notations de la Partie II (et notamment ??) : on a un groupe  $G$  qui opère sur un ensemble  $X$  et il s'agit de décrire l'ensemble<sup>1</sup> des orbites  $X/G$  sous l'action du groupe, ensemble quotient de  $X$  par la relation d'équivalence  $\sim$  associée à l'opération :

$$x \sim x' \iff \exists g \in G, g.x = x'.$$

La stratégie pour décrire  $X/G$  a été décrite au chapitre 7 de la partie II et elle consiste à le paramétrer, c'est la procédure suivante (on peut penser

---

1. Ou plus si affinité.

au cas où  $X$  est l'ensemble des triangles, dans le cas d'une géométrie réelle, pour en comprendre les diverses étapes) :

1) On repère des **invariants** de  $X$  sous  $G$ , autrement dit on construit une application  $\Phi : X \rightarrow Y$  (avec, pour  $Y$  un espace "numérique", c'est-à-dire contenu dans  $k$ , ou dans certains de ses avatars, par exemple  $k^*/k^{*2}$ , ou encore dans un espace associé du type  $k^n$ ) qui soit telle que  $x' = g.x$  (c'est-à-dire  $x \sim x'$ ) implique  $\Phi(x) = \Phi(x')$ . Dans le cas des triangles, les invariants en question devront en tous cas permettre de récupérer les longueurs et les angles<sup>2</sup>. L'application  $\Phi$  induit alors  $\bar{\Phi} : X/G \rightarrow Y$  définie par  $\bar{\Phi}(\bar{x}) = \Phi(x)$ .

2) On veut que  $\bar{\Phi}$  soit un **système complet d'invariants**, ce qui signifie qu'on a l'équivalence  $x \sim x' \iff \Phi(x) = \Phi(x')$  ou encore que  $\bar{\Phi}$  est injective. Lorsqu'on a un tel système on peut formuler ainsi les résultats de transitivité<sup>3</sup> :

*On peut échanger  $x$  et  $x'$  par un élément de  $G$  si et seulement si leurs invariants (repérés par  $\Phi(x)$  et  $\Phi(x')$ ) sont les mêmes.*

Le prototype de ce genre de résultats, ce sont les fameux "cas d'isométrie" des triangles, avec diverses variantes, décrites grâce à des formules de type Al-Kashi.

3) Il reste enfin à préciser **l'image** de  $\Phi$  ou de  $\bar{\Phi}$ , c'est-à-dire à déterminer quels sont les invariants possibles. Le cas général, sur un corps comme le corps des rationnels, est inabordable, surtout dans le cas elliptique<sup>4</sup>. On se contentera donc essentiellement du cas réel ou complexe. Ce travail présente *a priori* deux volets. Le premier consiste à décrire les relations éventuelles entre les divers invariants. On représente alors l'image comme un fermé de l'espace  $Y$ . Dans le cas des triangles on trouvera notamment une relation entre longueurs et spin, voir 4.7.12. Le second précise (dans le cas réel) des conditions définies par des inégalités (inégalité triangulaire, somme des angles, etc.).

Si on a réalisé ces trois opérations,  $X/G$  est connu<sup>5</sup>.

**4.1.1 Commentaire.** Dans notre cas, le groupe considéré est  $PO(q) \simeq O^+(q)$  et il opère sur divers ensembles  $X$  associés à  $\mathbf{P}(E)$  :  $\mathbf{P}(E)$  lui-même, les droites de  $\mathbf{P}(E)$ , c'est-à-dire  $\mathbf{P}(E^*)$ , les drapeaux (i.e. les couples point-droite  $(a, D)$  avec  $a \in D$ ), les couples de points, de droites, les triangles, plus généralement des objets  $(a_1, \dots, a_r; D_1, \dots, D_s) \in \mathbf{P}(E)^r \times \mathbf{P}(E^*)^s$ .

2. On verra aussi apparaître un autre invariant : le spin.

3. Pour plagier Lebesgue (cf. [Leb75], page 60) on peut proposer une formule imagée : *On peut échanger  $x$  et  $x'$  par un élément de  $G$  si et seulement si  $x$  et  $x'$  ont même taraboutzim.*

4. Pour le cas hyperbolique, voir 4.7.2.

5. Au moins ensemblistement, car on espère pouvoir le munir de structures additionnelles, notamment de variété, voire de schéma, analogues à celles de  $X$ .

Il est bien naturel d'imposer aux invariants de dépendre des données  $(a_1, \dots, a_r; D_1, \dots, D_s)$  de manière "régulière". Dans le cas où le corps de base est  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , ce mot peut avoir le sens de continu, voire différentiable, mais sur un corps quelconque, les seules fonctions régulières dignes de ce nom sur les espaces projectifs sont les fonctions rationnelles. La recherche des invariants de transitivité va donc peu ou prou se ramener à la recherche algébrique des invariants rationnels sous l'action du groupe  $PO(q)$ . On est alors proche d'un problème classique de théorie des invariants qui consiste à chercher les invariants polynomiaux du groupe  $O(q)$ . Attention toutefois, même si elles sont proches, les opérations de  $O(q)$  sur  $E$  et de  $PO(q)$  sur  $\mathbf{P}(E)$  ne sont pas équivalentes<sup>6</sup> et les invariants polynomiaux de  $O(q)$ , comme  $q(a)$  ou  $\varphi(a, b)$ , "ne passent pas au quotient", c'est-à-dire n'ont pas de sens en projectif<sup>7</sup>. Pour obtenir des invariants projectifs, il va falloir utiliser des invariants rationnels, quotients des invariants polynomiaux, comme  $I(a, b)$  voir ci-dessous. Une situation analogue a d'ailleurs été vue dans la partie II pour passer de l'invariant vectoriel "crochet" à l'invariant projectif "birapport". Nous verrons que ces quotients apparaissent naturellement comme invariants de transitivité et nous montrerons au chapitre 9 qu'on les trouve bien tous ainsi.

**4.1.2 Remarque.** Dans toutes ces questions, la notion de dimension des variétés (différentiables ou algébriques) guide les calculs de quotient. En effet, l'espace  $X$  sur lequel le groupe  $PO(q)$  opère a en général une dimension facile à calculer. Par exemple, pour  $n$  points de  $\mathbf{P}(E)$ ,  $X$  est égal à  $\mathbf{P}(E)^n$  ou à un de ses ouverts, et sa dimension est  $2n$ . Par ailleurs, on sait que  $PO(q)$  est de dimension 3 (voir 1.4.3). Si les stabilisateurs des points de  $X$  sont réduits à l'identité ou finis, la dimension du quotient, s'il existe, est donc égale à  $\dim X - 3$  (c'est un théorème classique de dimension, analogue au théorème noyau-image de l'algèbre linéaire : la dimension de l'espace est égale à celle de l'image augmentée de celle des fibres, voir par exemple [Per95] IV 3.7) et le nombre d'invariants nécessaires pour décrire le quotient est donc au moins égal à  $\dim X - 3$ . Nous utiliserons souvent implicitement cette remarque.

---

6. En vérité, si l'on veut une action linéaire, le groupe pertinent n'est pas  $O(q)$ , mais  $GO(q)$ , groupe des similitudes associé à  $q$ , sous-groupe de  $GL(E)$  engendré par les isométries et les homothéties. Le fait que les invariants de  $O^+(q) = PO(q)$  dans son action sur  $\mathbf{P}(E)$  et ceux de  $GO(q)$  dans son action sur  $E$  sont les mêmes vient de l'isomorphisme canonique  $E - \{0\}/GO(q) \rightarrow \mathbf{P}(E)/O^+(q)$ .

7. Dans le cas de  $q(a)$  on a toutefois un succédané qui consiste à regarder  $q(a)$  dans  $k^*/k^{*2}$  au lieu de le regarder dans  $k$ , comme on l'a vu.

## 4.1.2 Un outil fondamental : le théorème de Witt

Il s'agit d'un des résultats fondamentaux de la théorie des formes quadratiques, voir par exemple [Per96], [Die70], [Ser70]. Dans le cas particulier de la dimension 3, la démonstration se simplifie notablement.

**4.1.3 Théorème.** *On suppose que  $q$  est une forme quadratique non dégénérée sur un espace vectoriel  $E$  de dimension 3.*

1) *Soient  $a, b, c$  (resp.  $a', b', c'$ ) des vecteurs indépendants de  $E$ . On suppose qu'on a les relations  $q(a) = q(a')$ ,  $q(b) = q(b')$ ,  $q(c) = q(c')$ ,  $\varphi(b, c) = \varphi(b', c')$ ,  $\varphi(c, a) = \varphi(c', a')$ ,  $\varphi(a, b) = \varphi(a', b')$ . Alors il existe  $u \in O(q)$  tel que  $u(a) = a'$ ,  $u(b) = b'$ ,  $u(c) = c'$ .*

2) *Soient  $a, b$  (resp.  $a', b'$ ) des vecteurs indépendants de  $E$ . On suppose qu'on a les relations  $q(a) = q(a')$ ,  $q(b) = q(b')$ ,  $\varphi(a, b) = \varphi(a', b')$ . Alors il existe  $u \in O(q)$  tel que  $u(a) = a'$ ,  $u(b) = b'$ .*

3) *Soient  $a, a' \in E$  des vecteurs non nuls. On suppose qu'on a  $q(a) = q(a')$ . Alors il existe  $u \in O(q)$  tel que  $u(a) = a'$ .*

*Démonstration.* La première assertion est évidente. En effet, il existe une application linéaire  $u$  qui envoie  $a$  sur  $a'$ ,  $b$  sur  $b'$  et  $c$  sur  $c'$  et le calcul de  $q$  dans ces bases montre que c'est une isométrie<sup>8</sup>.

Prouvons le point 3). Si  $a$  et  $a'$  sont colinéaires on a  $a' = \lambda a$  avec  $\lambda \neq 0$ . On a donc  $q(a') = \lambda^2 q(a)$ . Si  $a$  et  $a'$  sont non isotropes, cela impose  $\lambda = \pm 1$  et on utilise  $\pm \text{Id}_E$ . S'ils sont isotropes, il existe un vecteur isotrope  $b$  tel que  $P = (a, b)$  soit un plan hyperbolique (c'est-à-dire vérifie  $q(a) = q(b) = 0$  et  $\varphi(a, b) = 1$ , voir [Per96] Ch. VIII). Soit  $c$  orthogonal à  $P$ . On pose alors  $u(a) = \lambda a$ ,  $u(b) = (1/\lambda)b$  et  $u(c) = c$  et on conclut par 1).

Supposons maintenant  $a, a'$  non colinéaires. Les vecteurs  $a + a'$  et  $a - a'$  ne sont pas tous les deux isotropes, sinon on a  $q(a) = q(a') = \varphi(a, a') = 0$  et le plan  $(a, a')$  est totalement isotrope, ce qui est impossible puisque  $q$  est non dégénérée et que la dimension est 3. Si le vecteur  $a + a'$  est non isotrope, le renversement  $\sigma_{a+a'}$  envoie  $a$  sur  $a'$  (appliquer la formule  $\sigma_m(a) = -a + 2 \frac{\varphi(a, m)}{q(m)} m$ ). Si  $a + a'$  est isotrope, le renversement  $\sigma_{a-a'}$  envoie  $a$  sur  $-a'$  et il suffit d'utiliser  $-\sigma_{a-a'}$ . On notera que cette preuve vaut *a fortiori* en dimension 2.

Pour le point 2), notons d'abord que, comme le plan  $(a, b)$  n'est pas totalement isotrope, quitte à remplacer  $a$  par  $b$  ou par  $a + b$  (et  $a'$  par  $b'$  ou  $a' + b'$ ), on peut supposer  $a$  non isotrope. On peut alors supposer  $\varphi(a, b) = 0$ ,

8. Comme  $q$  est non dégénérée, on notera que  $u$  est nécessairement bijective, ce qui prouve que  $a', b', c'$  sont indépendants sans qu'il soit besoin de le supposer.

quitte à remplacer  $b$  par  $b - \frac{\varphi(a, b)}{q(a)}a$ . En utilisant le point 3), on trouve une isométrie qui envoie  $a$  sur  $a'$  et on est ainsi ramené au cas où  $a = a'$  et où  $b$  et  $b'$  sont tous deux dans le plan  $P$  orthogonal à  $a$ . Comme  $P$  est non dégénéré, on peut y appliquer le point 3), on trouve une isométrie  $u$  de  $P$  qui envoie  $b$  sur  $b'$  et il suffit de la prolonger par l'identité sur  $a$ .

**4.1.4 Remarque.** Attention, si l'on ne suppose pas les vecteurs indépendants, il peut y avoir de petits pièges, comme le suivant. On prend la forme  $q = x^2 + y^2 - t^2$  sur  $k^3$  et, si  $e_1, e_2, e_3$  désigne la base canonique, on prend  $a = b = e_1$  et  $a' = e_1, b' = e_1 + e_2 - e_3$ . Le point 2) du théorème est en défaut.

## 4.2 Transitivité sur les points, les droites et les drapeaux

**4.2.1 Proposition.** *Pour les points de  $\mathbf{P}(E)$ , l'invariant de transitivité sous  $PO(q)$  est le nombre  $q(a)$  vu modulo les carrés. Autrement dit : étant donnés  $a, a' \in \mathbf{P}(E)$ , il existe  $g \in G$  tel que  $g(a) = a'$  si et seulement si on a  $q(a) = q(a')$  dans  $k^*/k^{*2}$  ou  $q(a) = q(a') = 0$ .*

*Démonstration.* Dans le cas non isotrope, cela résulte de l'existence d'un milieu de  $a, a'$ , voir 3.1.3. Pour le cas isotrope c'est Witt, voir 4.1.3.

**4.2.2 Remarque.** En théorie, il reste un travail à faire : préciser quels sont les invariants possibles, c'est-à-dire quels sont les nombres de  $k$  qui sont de la forme  $q(a)$ . Dans le cas hyperbolique ce sont tous les éléments de  $k$ , voir par exemple [Per96] Ch. VIII, §1, Ex. 2. En revanche dans le cas elliptique la réponse n'est pas évidente, sauf dans le cas réel où l'on trouve tous les nombres  $> 0$ . Pour le cas de  $\mathbf{Q}$ , voir [Ser70] ou ci-dessus 1.5.1. La difficulté rencontrée sur ce type de corps est telle qu'on ne se posera plus la question de l'image pour les autres invariants, par exemple  $I(a, b)$ .

**4.2.3 Proposition.** *Pour les droites  $D$  de  $\mathbf{P}(E)$ , l'invariant de transitivité sous  $PO(q)$  est le nombre  $q^*(D)$  vu modulo les carrés. Si la droite  $D$  est définie par deux points distincts  $a, b$ , cet invariant n'est autre que  $q(a \mathbb{A} b)$  qui est égal (à  $\Delta(q)$  près, donc au signe près avec la convention 1.1.3) à  $q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2 = \Delta(q|_D)$ .*

*Démonstration.* La première assertion vient de Witt appliqué dans le dual ou de l'existence de bissectrices. Pour l'autre, voir 1.2.3.

**4.2.4 Corollaire.** *Les classes de conjugaison des involutions de  $PO(q)$  sont en bijection avec l'image de  $q$  (qui est aussi celle de  $q^*$ ) dans  $k^*/k^{*2}$ . En particulier, il y a une unique classe de conjugaison si  $k$  est algébriquement clos, ou encore dans le cas elliptique réel, deux si le corps est fini, ou dans le cas hyperbolique réel et une infinité si le corps de base est le corps des rationnels.*

*Démonstration.* On sait qu'une involution peut s'écrire sous la forme  $\tau_D$  où  $D$  est une droite non isotrope. Si  $u$  est une isométrie, on a  $u\tau_D u^{-1} = \tau_{u(D)}$ , de sorte que les classes de conjugaison correspondent aux orbites de  $PO(q)$  dans l'espace des droites non isotropes. On conclut avec 4.2.3.

Les classes de conjugaison des autres isométries (produits de deux involutions) seront étudiées au chapitre 8 (voir 8.6.1 et 8.6.2).

**4.2.5 Proposition.** *Pour les drapeaux  $(a, D)$ , avec  $a \in D$ , tous deux non isotropes, l'invariant de transitivité est le couple  $(q(a), q^*(D))$  dans  $k^*/k^{*2} \times k^*/k^{*2}$ .*

*Démonstration.* Soient  $(a, D), (a', D')$  deux drapeaux vérifiant  $q(a) = q(a')$  et  $q^*(D) = q^*(D')$ . En vertu de 4.2.3 on peut envoyer  $D$  sur  $D'$  par une isométrie. On est ainsi ramené au cas  $D = D'$  et il reste à voir que l'on peut envoyer  $a$  sur  $a'$  par une isométrie qui stabilise  $D$ . En vertu de 3.1.3 les points  $a, a'$  ont au moins un milieu et la symétrie par rapport à ce milieu convient.

**4.2.6 Remarque.** Le groupe  $PO(q)$  est transitif sur les points, les droites et les drapeaux dans le cas elliptique réel. Dans le cas hyperbolique réel, le groupe a trois orbites sur les points qui sont  $\mathbf{K}, \mathbf{T}$  et  $\Gamma$ , qui correspondent respectivement à  $q(a)$  négatif, positif ou nul et trois sur les droites : les droites extérieures, sécantes ou tangentes à  $\Gamma$ , qui correspondent à  $q^*(D)$  négatif, positif ou nul. En particulier, dans le modèle de Klein  $\mathbf{K}$  le groupe est transitif sur les points, les droites et les drapeaux.

Pour une discussion dans le cas d'un corps quelconque, voir les exercices.

### 4.3 Transitivité sur les couples : “longueurs”

*Cette fois, nous entrons dans le vif du sujet. En effet, jusqu'ici, les invariants que nous avons rencontrés reflètent essentiellement les propriétés arithmétiques du corps de base (notamment ses carrés) et ils sont triviaux sur  $\mathbf{R}$  où le groupe est transitif sur les points, droites et drapeaux pourvu que les signes soient les mêmes. En revanche, même sur  $\mathbf{R}$ , le groupe  $PO(q)$  ne va être doublement transitif ni sur les points, ni sur les droites. Les géométries*

non euclidiennes, à cet égard, ne diffèrent pas de la géométrie euclidienne et il va y avoir des conditions de “longueur” et “d’angle” pour qu’on puisse envoyer deux points ou deux droites sur deux autres.

### 4.3.1 Introduction et définition

Si l’on y réfléchit bien, la définition de la longueur est toujours tributaire de l’action d’un groupe. En effet, quand dit-on que deux bâtons ont même longueur ? Simplement lorsque, déplaçant l’un pour amener l’une de ses extrémités sur une extrémité de l’autre, on peut aussi faire coïncider les deux autres extrémités. Qu’on appelle déplacement, mouvement, superposition ... l’action ainsi effectuée, il s’agit toujours finalement de faire agir un groupe sur un ensemble et d’étudier sa double transitivité. C’est ce que nous faisons dans le cas des géométries non euclidiennes. Le tout est de trouver un invariant convenable. Il y a bien entendu les invariants vectoriels,  $q(a), q(b), \varphi(a, b)$  dont Witt assure qu’ils suffisent à caractériser le couple  $(a, b)$ . Il s’agit de les transformer en invariants projectifs et on sait bien depuis la partie II qu’il suffit pour cela de faire des rapports<sup>9</sup> :

**4.3.1 Définition.** Soient  $a$  et  $b$  deux points non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ . On note  $I(a, b)$  l’élément de  $k$  défini par la formule :

$$I(a, b) = \frac{\varphi(a, b)^2}{q(a)q(b)}.$$

Il est indépendant du choix des représentants de  $a$  et  $b$ .

**4.3.2 Proposition.** Pour les couples de points  $(a, b)$  (distincts et non isotropes<sup>10</sup>) un système complet d’invariants de transitivité est donné par :  $q(a), q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$  et l’invariant  $I(a, b) = \frac{\varphi(a, b)^2}{q(a)q(b)}$  dans  $k$ . Cela signifie qu’il existe  $g \in G$  tel que  $g(a) = a'$  et  $g(b) = b'$  si et seulement si on a  $q(a) = q(a')$  et  $q(b) = q(b')$  dans  $k^*/k^{*2}$  et  $I(a, b) = I(a', b')$  dans  $k$ .

*Démonstration.* Il est clair que les conditions sont nécessaires. Réciproquement, quitte à changer de représentants, on peut supposer  $q(a) = q(a')$ ,  $q(b) = q(b')$  dans  $k$ . On a alors  $\varphi(a, b) = \pm\varphi(a', b')$  et on peut supposer que le signe est +, quitte à changer  $b'$  en  $-b'$ . La conclusion vient alors de Witt, voir 4.1.3.

9. De plus, le théorème 9.1.18 montre qu’il n’y a guère le choix !

10. Dans le cas où l’un des points est isotrope, le groupe est presque deux fois transitif, voir 4.7.4. Encore une raison de nous réjouir d’avoir banni les points isotropes !

### 4.3.3 Remarques.

1) Comme son nom l'indique,  $I(a, b)$  est invariant sous l'action du groupe  $PO(q)$  et on a maintenant un *taraboutzim* pour les couples de points, formé de  $q(a), q(b)$  et  $I(a, b)$ .

2) Le lecteur qui a fréquenté la géométrie anallagmatique (celle de l'inversion) ne manquera pas de repérer l'analogie de l'invariant  $I$  avec l'invariant anallagmatique (cf. [RD89] §283).

3) Si  $q(a)$  et  $q(b)$  sont fixés et égaux dans  $k^*/k^{*2}$  (par exemple, sur  $\mathbf{R}$ , en elliptique où on peut les supposer égaux à 1 ou en hyperbolique dans  $\mathbf{K}$ , où on peut les supposer égaux à  $-1$ ), on peut se contenter de regarder<sup>11</sup>  $\varphi(a, b)^2$  ou le discriminant  $q(a \wedge b) = q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$ . Lorsque le groupe est déjà transitif sur les points, comme dans les cas précédents, c'est cet invariant (sous diverses formes  $I(a, b), \varphi(a, b)^2$ , etc.) qui est le *taraboutzim* pour le défaut de double transitivité.

4) On notera aussi que cet invariant  $I$  (toujours dans le cas où  $q(a)$  et  $q(b)$  sont égaux) est à la fois l'invariant pour le couple  $(a, b)$  et pour la **paire**  $\{a, b\}$ . En effet, comme on a  $I(a, b) = I(b, a)$ , on voit que c'est un invariant de la paire. Que ce soit aussi un invariant du couple vient du fait que, sous réserve de la relation  $q(a) = q(b)$ , on peut échanger  $a$  et  $b$  (par symétrie centrale ou axiale, voir 3.1.3).

5) En réalité, l'invariant le plus naturel est sans doute la variante projective de  $I$ , c'est-à-dire  $\widehat{I}(a, b) = (\varphi(a, b)^2, q(a)q(b))$ , vu comme un élément de  $\mathbf{P}^1(k)$ , voir paragraphe 4.7.5 ci-dessous.

**4.3.4 Commentaire.** L'invariant  $I(a, b)$  joue donc le rôle<sup>12</sup> qu'on attribue d'habitude à la **distance** de  $a$  à  $b$  ou encore à la **longueur**  $ab$ . Nous expliciterons cet invariant dans le cas des deux géométries usuelles sur  $\mathbf{R}$  au chapitre suivant et nous verrons qu'effectivement il donne naissance à une vraie distance dans ce cas (précisément, il constitue une sorte de variante multiplicative du carré de la longueur).

Il est clair que l'invariant  $I(a, b)$  est nul si et seulement si  $a$  et  $b$  sont orthogonaux. Un autre cas est important, celui où  $I(a, b)$  vaut 1 (c'est l'analogie du cas de distance nulle). Comme cette condition équivaut à  $q(a \wedge b) = 0$ , on obtient :

**4.3.5 Proposition.** *Soient  $a, b$  des points non isotropes. L'invariant  $I(a, b)$  vaut 1 dans deux cas :*

---

11. Mais attention, pas  $\varphi(a, b)$  : même si on a  $q(a) = q(b) = 1$  on peut changer  $b$  en  $-b$  et  $\varphi(a, b)$  est changé en son opposé.

12. D'ailleurs, lorsque nous serons sûr qu'Euclide ne nous écoute pas, nous utiliserons ces mots sans crainte.



- 1) si  $a$  et  $b$  sont confondus,
- 2) si la droite  $(ab)$  est tangente à  $\Gamma$ .

### 4.3.2 Distance et milieux

**4.3.6 Proposition.** Soient  $a, b$  des points distincts non isotropes. On suppose que la droite  $(ab)$  est non isotrope. Soit  $m$  un point non isotrope de  $(ab)$ . On a  $I(m, a) = I(m, b)$  si et seulement si  $m$  est un milieu de  $a, b$ .

*Démonstration.* Si  $m$  est un milieu de  $a, b$ , la symétrie  $\sigma_m$  fixe  $m$  et échange  $a$  et  $b$ , de sorte qu'on a  $I(m, a) = I(m, b)$  par conservation de  $I$ . Réciproquement, l'égalité implique qu'on a  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . On peut donc supposer  $q(a) = q(b)$  et on sait alors que les milieux de  $a, b$  sont  $a+b$  et  $a-b$ . L'égalité  $I(m, a) = I(m, b)$  donne  $\varphi(m, a) = \pm\varphi(m, b)$ , ce qui implique que  $m$  est orthogonal à  $a-b$  ou  $a+b$ , donc égal à  $a+b$  ou  $a-b$ .

### 4.3.3 Le théorème de Pythagore

Nous énonçons maintenant un analogue non euclidien du théorème de Pythagore. Le lecteur ne s'étonnera pas d'en trouver une variante multiplicative :

**4.3.7 Théorème. (Pythagore<sup>13</sup>)** Soient  $a, b, c$  des points non isotropes. On suppose le triangle  $abc$  rectangle en  $a$ . On a la formule :

$$I(b, c) = I(c, a)I(a, b).$$

*Démonstration.* On sait, voir 1.3.10, que  $abc$  est rectangle en  $a$  si et seulement si on a  $q(a)\varphi(b, c) = \varphi(a, b)\varphi(a, c)$ . La conclusion est immédiate en calculant les valeurs de  $I$ .

**4.3.8 Remarque. Attention,** la réciproque de Pythagore n'est pas vraie telle quelle. En effet, la relation  $I(b, c) = I(c, a)I(a, b)$  implique  $q(a)\varphi(b, c) = \pm\varphi(a, b)\varphi(a, c)$  et le triangle n'est rectangle que si le signe est  $+$ . Il y a donc des pseudo-triangles rectangles, notamment en géométrie elliptique. Nous verrons que, dans ce cas, la réciproque est vraie si et seulement si le triangle est de  $\text{spin} > 0$ , voir 6.5.8.

---

13. Inutile de dire que Pythagore n'est pour rien dans ce résultat, mais je n'hésiterai jamais à affubler les théorèmes de noms évocateurs.

### 4.3.4 La formule de Laguerre

Lorsque l'on est dans le cas hyperbolique, l'invariant  $I(a, b)$  a une description simple<sup>14</sup> en termes du birapport des points  $a, b$  et des points isotropes de la droite  $a, b$ . On commence par un lemme sur les plans vectoriels hyperboliques :

**4.3.9 Lemme.** *Soit  $k$  un corps,  $E$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension 2,  $D$  la droite projective associée,  $q$  une forme hyperbolique sur  $E$ . Soient  $i, j$  les points isotropes de  $D$  pour  $q$  et  $a, b$  deux points non isotropes de  $D$ . On pose  $r(a, b) = \llbracket a, b, i, j \rrbracket$ . On a la formule :*

$$4I(a, b) = 4 \frac{\varphi(a, b)^2}{q(a)q(b)} = r(a, b) + r(a, b)^{-1} + 2.$$

*Démonstration.* On choisit des représentants de  $i, j$  pour base :  $i = (1, 0)$ ,  $j = (0, 1)$  et on peut prendre (avec un abus de notations manifeste!)  $a = (a, 1)$  et  $b = (b, 1)$  avec  $a, b \neq 0$ . La forme s'écrit alors  $q(x, y) = 2xy$  et  $\varphi((x, y), (x', y')) = xy' + x'y$  et on a  $r(a, b) = b/a$ ,  $q(a) = 2a$ ,  $q(b) = 2b$ ,  $\varphi(a, b) = a + b$ , d'où le résultat.

On en déduit aussitôt le résultat suivant :

**4.3.10 Corollaire. (Formule de Laguerre)** *On suppose que  $q$  est la forme de Lorentz  $x^2 + y^2 - t^2$ . Soient  $a, b \in \mathbf{P}(E)$  des points non isotropes distincts. On suppose que la droite  $(ab)$  coupe la conique  $\Gamma$  en deux points  $i, j$ . Posons  $r(a, b) = \llbracket a, b, i, j \rrbracket$ . On a la formule  $4I(a, b) = r(a, b) + r(a, b)^{-1} + 2$ .*

**4.3.11 Remarques.**

1) La proposition précédente montre que la donnée de  $I(a, b)$  et celle de  $r(a, b) + r(a, b)^{-1}$  sont équivalentes. Comme on connaît aussi  $r \times r^{-1} = 1$ , la donnée de  $I$  est encore équivalente à celle de la **paire**  $\{r, r^{-1}\}$  (mais, attention, en général, on ne peut pas distinguer  $r$  et  $r^{-1}$ ).

2) En général, même dans le cas hyperbolique, la droite  $(ab)$  peut ne pas rencontrer  $\Gamma$ , ou lui être tangente. Toutefois, dans le cas de  $\mathbf{R}$  et d'une droite hyperbolique il y a bien deux points d'intersection. Dans le cas général, si  $(ab)$  est une droite en notre sens elle n'est pas tangente et, quitte à étendre les scalaires de  $k$  à une clôture algébrique (voire seulement à une extension quadratique), on peut se ramener au cas où il y a bien deux points d'intersection  $i, j$  (et ce, même dans le cas elliptique). C'est le cas si le corps de base est  $\mathbf{R}$ , les points  $i$  et  $j$  pouvant alors être des points complexes imaginaires conjugués. On retrouve alors une formule qui ressemble à la "vraie" formule de Laguerre.

---

14. De même, j'appelle cette relation formule de Laguerre, mais c'est seulement par analogie avec la formule euclidienne usuelle, voir Partie V. On ne prête qu'aux riches.

### 4.3.5 Une application : produit de deux involutions et parallélogramme aplati

Nous poursuivons l'étude des produits de deux involutions entreprise en 3.3.8. On a vu que si le produit  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d$  est l'identité, les points  $a, b, c, d$  sont alignés. Dans le cas où ils sont sur une droite non isotrope, nous allons préciser leur configuration en termes de l'invariant  $I$ . Pour une caractérisation en termes de vecteurs, voir 8.8.8.

**4.3.12 Définition.** Soient  $a, b, c, d$  quatre points non isotropes, alignés sur une droite  $\Delta$  non isotrope. On dit que le quadrilatère  $abcd$  est un **parallélogramme aplati** si on a les égalités de longueurs  $I(a, b) = I(d, c)$  et  $I(a, d) = I(b, c)$ .

**4.3.13 Remarque.** Si  $abcd$  est un parallélogramme aplati, les relations sur  $I$  montrent que  $q(a)q(b)q(c)q(d)$  est un carré. En particulier, sur  $\mathbf{R}$ ,  $q(a)q(c)$  et  $q(b)q(d)$  ont même signe.

Le théorème est alors le suivant :

**4.3.14 Théorème.** Soient  $a, b, c, d$  quatre points non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ , distincts et alignés sur une droite  $\Delta$  non isotrope. On suppose que les points  $b$  et  $d$  ou les points  $a$  et  $c$  sont non orthogonaux. Alors, on a  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = \text{Id}$  si et seulement si  $abcd$  est un parallélogramme aplati.

*Démonstration.* Nous donnons deux preuves de ce théorème.

1) En utilisant l'exercice 1.5.11. Si on a  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = \text{Id}$ , on a aussi  $\sigma_a\sigma_b = \sigma_d\sigma_c$  et  $\sigma_d\sigma_a = \sigma_c\sigma_b$ , donc  $I(a, b) = I(d, c)$  et  $I(a, d) = I(b, c)$  par 1.5.11.

Inversement, toujours par 1.5.11, si l'on a  $I(a, b) = I(d, c)$ , on a soit  $\sigma_a\sigma_b = \sigma_d\sigma_c$ , et on a fini, soit  $\sigma_a\sigma_b = \sigma_c\sigma_d$ . Dans ce dernier cas, l'autre égalité sur les invariants donne  $\sigma_b\sigma_c = \sigma_a\sigma_d$  (cas 1) ou  $\sigma_d\sigma_a$  (cas 2). Le cas 1) conduit à  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_a\sigma_a\sigma_d = \sigma_d = \sigma_c\sigma_d\sigma_c$ . Cela signifie que  $\sigma_c$  et  $\sigma_d$  commutent et on obtient ce qu'on voulait. Le cas 2) mène à  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c = \sigma_a\sigma_d\sigma_a = \sigma_c\sigma_d\sigma_c$  et le principe de conjugaison montre que les images du point  $d$  par  $\sigma_a$  et  $\sigma_c$  sont les mêmes, ou encore, sur les vecteurs, qu'on a  $\sigma_a\sigma_c(d) = \pm d$ . Le signe  $+$  donne  $a = c$  et le signe  $-$  impose  $a$  orthogonal à  $c$ , mais les deux sont interdits.

2) En utilisant la caractérisation 3.3.8. Quitte à le plonger dans une clôture algébrique, on peut supposer le corps  $k$  algébriquement clos. En effet, cela n'altère ni les valeurs des invariants, ni le fait que la composée des symétries est l'identité. On a alors  $k^*/k^{*2} = \{1\}$ , de sorte que deux points non isotropes ont toujours un milieu. Si on a  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = \text{Id}$ , les points  $a, c$  et  $b, d$  ont un même milieu  $m$  et on a donc  $\sigma_m(a) = c$  et  $\sigma_m(b) = d$  (resp.

$\sigma_m(d) = b$  d'où  $I(a, b) = I(c, d)$  (resp.  $I(a, d) = I(c, b)$ ) par conservation de l'invariant  $I$ .

Inversement, si l'on a  $I(a, b) = I(c, d)$ , soit  $m$  un milieu de  $a, c$  et posons  $d' = \sigma_m(b)$ . On a donc  $I(a, b) = I(c, d') = I(c, d)$ . Si  $d$  et  $d'$  sont égaux, on conclut avec 3.3.8. Sinon, c'est que  $c$  est milieu de  $d, d'$  en vertu de 4.3.6. Mais alors, on a  $\sigma_{d'} = \sigma_c \sigma_d \sigma_c$  par conjugaison, et comme on a  $\sigma_a \sigma_b = \sigma_{d'} \sigma_c$  à cause du milieu commun, on trouve  $\sigma_a \sigma_b = \sigma_c \sigma_d$ . On finit alors la démonstration comme dans la version précédente.

**4.3.15 Remarques.** 1) Si la droite  $\Delta$  est isotrope (i.e. tangente à  $\Gamma$ ), les valeurs de  $I(a, b)$ , etc. sont toutes égales à 1. Le sens direct du théorème est donc trivialement vrai, mais la réciproque est fausse. Toutefois, dans ce cas, la proposition 3.3.8 s'applique.

2) Pour guider son intuition, le lecteur aura toujours intérêt à penser au cas où  $abcd$  est un parallélogramme ordinaire et à l'aplatir ensuite. En particulier, la proposition 3.3.8 est l'analogue du fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux, si elles en ont.

3) Il se peut que  $b$  et  $d$  soient orthogonaux sans que  $a$  et  $c$  le soient comme le montre la figure 4.1. On est en géométrie elliptique réelle,  $b$  et  $d$  sont orthogonaux,  $a$  est quelconque sur  $(bd)$  et  $c$  est symétrique de  $a$  par rapport à un milieu<sup>15</sup> de  $b, d$ .

4) Le théorème n'est plus vrai si l'on ne suppose pas  $b, d$  ou  $a, c$  non orthogonaux. Travaillons par exemple en géométrie elliptique, comme sur la partie droite de la figure 4.1. Soient  $b, d$  deux points orthogonaux de  $\Delta$  (de sorte qu'on a  $\sigma_b \sigma_d = \sigma_d \sigma_b = \sigma_\delta$  car le triangle  $b, d, \delta$  est autopolaire) et soit  $c$  un point de  $\Delta$  distinct de  $b$  et  $d$ . Comme  $b, c, d$  sont alignés, le produit  $\sigma_b \sigma_c \sigma_d$  est une involution de point de Frégier  $a' \in \Delta$  en vertu de 1.4.11. Soit  $a = \sigma_b(a') = \sigma_d(a')$ . On a les relations  $I(a', b) = I(d, c)$  et  $I(a', d) = I(b, c)$  par le sens direct du théorème et on en déduit, par symétrie,  $I(a, b) = I(d, c)$  et  $I(a, d) = I(b, c)$ , de sorte que  $abcd$  est un parallélogramme aplati. Cependant, comme  $a'$  est distinct de  $a$  (car  $a' \neq b, d$ ), on n'a pas la relation  $\sigma_a \sigma_b \sigma_c \sigma_d = \text{Id}$ . On notera que  $a$  est aussi orthogonal à  $c$ . En effet, il suffit de voir que  $c$  est fixe par  $\sigma_a = \sigma_b \sigma_{a'} \sigma_b = \sigma_c \sigma_d \sigma_b$ . On conclut avec la formule  $\sigma_d \sigma_b = \sigma_\delta$ .

5) On verra en 8.8.9 une autre preuve du théorème utilisant les vecteurs.

---

15. La macro milieu dont je dispose ne fonctionne pas pour des points orthogonaux. Le milieu est construit ici en utilisant le concours des médianes.

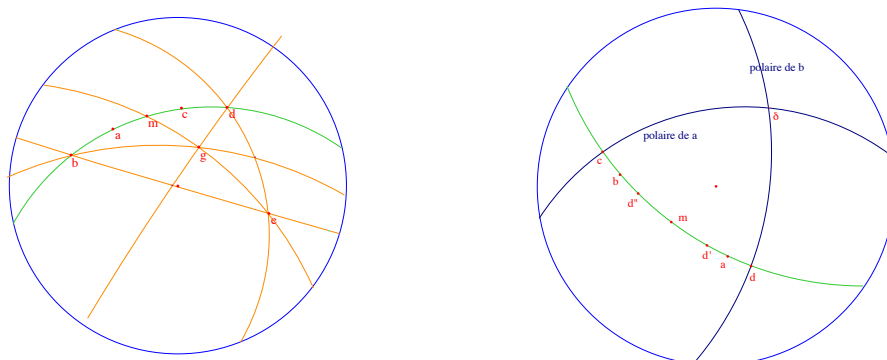


FIGURE 4.1 – À gauche un parallélogramme aplati avec  $b, d$  orthogonaux mais pas  $a, c$ , à droite un parallélogramme aplati avec à la fois  $b, d$  et  $a, c$  orthogonaux.

## 4.4 Transitivité sur les couples : angles

### 4.4.1 Angles de droites

Dans le cas d'un corps quelconque (non ordonné), on ne peut espérer avoir des angles de demi-droites (et pour cause : il n'y a pas de demi-droites !). On va donc se contenter ici des angles non orientés de droites. Pour la définition d'angles non orientés de demi-droites sur  $\mathbf{R}$ , voir 5.5.7. On verra qu'il y a encore de sérieuses difficultés dans certains cas. En ce qui concerne les angles orientés, il existe une notion sur un corps quelconque, au moins pour les angles de sommet donné, voir 8.2.4, mais elle est loin d'avoir les qualités de la notion euclidienne.

S'agissant des angles non orientés de droites, inutile de se fatiguer beaucoup pour les obtenir : ils se ramènent aux longueurs par polarité ! En particulier, la proposition suivante est la même que 4.3.2 en remplaçant  $q$  par  $q^*$ . Attention, cet invariant n'est défini que si les droites sont non isotropes, c'est-à-dire non tangentes à la conique  $\Gamma$ .

**4.4.1 Proposition.** Pour les couples de droites  $(A, B)$  non isotropes un système complet d'invariants de transitivité est donné par  $q^*(A)$ ,  $q^*(B)$  (dans  $k^*/k^{*2}$ ) et  $I^*(A, B) = \frac{\varphi^*(A, B)^2}{q^*(A)q^*(B)}$  dans  $k$ .

**4.4.2 Remarque.** Comme dans le cas des longueurs, lorsque les valeurs de  $q(A)$  et  $q(B)$  sont fixées dans  $k^*/k^{*2}$  (par exemple dans le cas des géométries réelles), l'invariant<sup>16</sup> de double transitivité se résume à  $I^*(A, B)$  qu'on peut

16. C'en est un, bien sûr !

appeler **angle** de  $A$  et  $B$ . On notera que c'est en fait un invariant de la paire  $\{A, B\}$ . On notera aussi que l'abus de langage qui nous permet de remplacer les droites  $A, B$  par leurs représentants (i.e. leurs équations)  $A, B \in E^*$  est justifié par le fait que les invariants ne dépendent pas du choix des représentants.

L'invariant  $I^*(A, B)$  est nul si et seulement si les droites  $A$  et  $B$  sont perpendiculaires. Comme dans le cas des longueurs on a aussi une caractérisation de  $I^* = 1$  :

**4.4.3 Proposition.** *Soient  $A, B$  deux droites non isotropes. L'invariant  $I^*(A, B)$  est égal à 1 dans deux cas :*

- 1) *si les droites sont égales,*
- 2) *si elles se coupent en un point  $c \in \Gamma$  (autrement dit si elles sont parallèles).*

*Démonstration.* En effet,  $I^*(A, B) = 1$  équivaut à  $\varphi^*(A, B)^2 - q^*(A)q^*(B) = 0$ , ce qui, si les droites ne sont pas égales, signifie que le sous-espace vectoriel  $(A, B)$  est isotrope. Mais ce sous-espace est l'orthogonal de  $c$  au sens de la dualité, de sorte que  $c$  est isotrope.

Le résultat suivant est trivial mais spectaculaire :

**4.4.4 Proposition.** *Soient  $a, b$  deux points et  $A, B$  leurs polaires. Alors on a  $I(a, b) = I^*(A, B)$  (autrement dit : la distance de  $a$  à  $b$  c'est l'angle de  $A$  à  $B$ !).*

*Démonstration.* C'est essentiellement la même que celle de 1.1.8.

*Ce qui précède est une nouvelle illustration de la puissance de la polarité. Toute assertion concernant les longueurs aura désormais une traduction en termes d'angles et réciproquement.*

**4.4.5 Proposition.** *Soient  $A, B$  deux droites admettant une bissectrice  $D$ . On a l'égalité d'angles  $I^*(A, D) = I^*(B, D)$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer la symétrie  $\tau_D$ .

## 4.4.2 Angles d'un triangle

Si une droite  $A$  est donnée par deux points  $a, a'$ , on a  $A = a \wedge a'$  (produit extérieur), mais comme les valeurs de  $q^*$  et  $\varphi^*$  sur les produits extérieurs sont les mêmes que celles de  $q, \varphi$  sur les produits vectoriels (voir 1.2.3.4), cela permet une traduction des invariants en termes de points. Dans le cas d'un triangle cela donne la formule suivante :

**4.4.6 Proposition.** Soit  $abc$  un triangle et posons  $B = (ca)$ ,  $C = (ab)$ . On a la formule :

$$I^*(B, C) = \frac{\varphi(c \wedge a, a \wedge b)^2}{q(a \wedge b)q(c \wedge a)}.$$

*Démonstration.* On peut prendre  $B = a \wedge b$  et  $C = c \wedge a$  (le sens est ici sans importance).

**4.4.7 Remarque.** Pour calculer les angles on dispose des formules prouvées en 1.2.3, par exemple  $q(a \wedge b) = q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$  et  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = q(a)\varphi(b, c) - \varphi(a, b)\varphi(a, c)$  dans le cas elliptique. Ces formules sont encore valables dans le cas hyperbolique, mais avec les signes opposés. On notera qu'ici le signe est sans importance.

Lorsqu'on dispose de trois points  $a, b, c$  les angles donnent donc de nouveaux invariants de ces points, à côté des longueurs. On verra avec la formule d'Al-Kashi que ces invariants sont – presque – superflus.

### 4.4.3 Les couples mixtes

On peut aussi donner des conditions pour la transitivité sur les couples point-droite  $(a, D)$ . La polarité montre là encore toute son efficacité :

**4.4.8 Proposition.** Pour les couples mixtes  $(a, D)$  avec  $a$  et  $D$  non isotropes, un système complet d'invariants de transitivité est donné par  $q(a)$ ,  $q^*(D)$  (dans  $k^*/k^{*2}$ ) et  $I(a, d) = \frac{\varphi(a, d)^2}{q(a)q(d)}$  (dans  $k$ ), où  $d$  est le pôle de  $D$ .

*Démonstration.* Point n'est besoin de démonstration : c'est clair en appliquant 4.3.2 à  $a, d$ .

**4.4.9 Remarques.**

- 1) Lorsque  $a$  est sur  $D$  on a  $I(a, d) = 0$  et on retrouve la transitivité sur les drapeaux. Lorsque  $a$  est égal à  $d$  on a  $I(a, d) = 1$ .
- 2) La quantité  $I(a, d)$  joue le rôle d'une distance de  $a$  à  $D$  et on pourra la noter  $I(a, D)$ . Lorsque  $a$  est distinct de  $d$ , la donnée de cette distance est équivalente à celle de la distance de  $a$  au "projeté orthogonal" de  $a$  sur  $D$ , c'est-à-dire au point d'intersection  $n$  de la droite  $(ad)$  et de  $D$ , voir 4.5.15.

## 4.5 L'action sur les triangles

Cette section est l'accomplissement du programme annoncé en 4.1.1 dans le cas des triangles. On désigne par  $\mathcal{T}$  l'espace des triangles d'un plan non euclidien  $\mathbf{P}(E)$ . Il s'agit de décrire le quotient de  $\mathcal{T}$  sous l'action du groupe des

isométries  $PO(q)$ . Pour cela, conformément à la procédure évoquée au début du chapitre, nous disposons déjà d'un certain nombre d'invariants (longueurs et angles, sous la forme des invariants  $I$ ). Ces invariants vont devoir être complétés par un nouvel objet : le spin, fondamental notamment en géométrie elliptique réelle. Tous ces invariants permettent de définir des applications  $\Phi$  de  $\mathcal{T}$  dans des espaces numériques et induisent des applications  $\bar{\Phi}$  de  $\mathcal{T}/G$  dans ces mêmes espaces.

L'étape suivante sera de montrer l'injectivité de certaines des applications  $\bar{\Phi}$ . Comme expliqué en 4.1.2, l'idée de dimension est un guide pour cela, au moins dans les cas où l'arithmétique ne vient pas compliquer les problèmes, par exemple sur  $\mathbf{R}$  ou sur un corps algébriquement clos. L'espace  $\mathcal{T}$  est un ouvert de  $\mathbf{P}(E)^3$ , donc de dimension 6, et on sait que le groupe  $PO(q)$  est un groupe algébrique de dimension 3. Si on choisit un triangle générique, son stabilisateur est réduit à l'identité, de sorte que son orbite est isomorphe à  $PO(q)$  donc de dimension 3 (voir 1.4.3). L'espace quotient  $\mathcal{T}/G$  est aussi de dimension 3 et on s'attend à ce qu'on puisse le paramétrer à l'aide de trois quantités. C'est ce que vont montrer les divers cas d'isométrie des triangles. Comme en géométrie euclidienne, il s'agit de savoir à quelle condition trois points peuvent être envoyés sur trois autres par un élément de  $PO(q)$  et là encore il suffira (presque!) de se donner trois paramètres (longueurs ou angles). Le mot "presque" renvoie à la présence du spin. En vérité, dans le cas du corps des nombres réels, les cas d'isométrie peuvent être énoncés sans référence au spin en utilisant les angles de demi-droites, à l'exception du troisième cas d'isométrie, celui qui ne fait intervenir que les longueurs. Les formules d'Al-Kashi permettront de faire le lien entre ces divers résultats.

La dernière étape est le calcul de l'image de  $\Phi$ . Comme on l'a déjà dit, dans le cas d'un corps quelconque, elle est hors de portée. Cependant, nous la mènerons à bien dans le cas réel au chapitre 6. Pour le cas complexe, voir l'exercice 4.7.12.

### 4.5.1 Un nouvel invariant : le spin

Il y a plusieurs façons de comprendre l'origine de cet invariant. On peut considérer que c'est l'invariant le plus simple associé à trois points  $a, b, c$  et on peut d'ailleurs montrer, voir 9.1.18, qu'hormis les invariants  $I(a, b)$ , c'est le seul invariant projectif d'un triangle. Il s'introduit naturellement lorsqu'on essaie de montrer le "troisième cas" d'isométrie des triangles, voir 4.5.3. En effet, on constate que la donnée des longueurs  $I(b, c)$ ,  $I(c, a)$ ,  $I(a, b)$  ne détermine le triangle  $abc$  "qu'au signe près". On peut enfin noter qu'il apparaît de manière naturelle dans le calcul qui mène à la formule d'Al-Kashi, voir ci-dessous.



**4.5.1 Définition.** Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{P}(E)$ , que l'on suppose non isotropes. L'élément  $S(a, b, c) \in k$  défini ci-dessous ne dépend que des points  $a, b, c$  de  $\mathbf{P}(E)$  et pas de leurs représentants :

$$S(a, b, c) = \frac{\varphi(b, c) \varphi(c, a) \varphi(a, b)}{q(a)q(b)q(c)}.$$

On l'appelle le **spin** des points<sup>17</sup>  $a, b, c$ . Pour des droites  $A, B, C \in \mathbf{P}(E^*)$ , non isotropes, on a un invariant analogue obtenu en remplaçant  $\varphi$  par  $\varphi^*$  et noté  $S^*(A, B, C)$ . Dans le cas où ces droites sont les côtés d'un triangle :  $A = (bc)$ ,  $B = (ca)$  et  $C = (ab)$ ,  $S^*(A, B, C)$  sera appelé **spin angulaire** de  $abc$ .

**4.5.2 Remarque.** On a la formule  $S(a, b, c)^2 = I(b, c)I(c, a)I(a, b)$ , de sorte que la donnée des "longueurs" détermine le spin au signe près. L'appellation, qui fait référence au spin des particules en physique, veut justement évoquer cette ambiguïté de signe. Dit savamment, le phénomène, au moins en géométrie elliptique, c'est que l'application qui à un triangle associe les longueurs de ses côtés est un revêtement de degré 2, autrement dit que la donnée des longueurs des côtés ne détermine pas un triangle, mais deux. Le lecteur obtiendra force détails sur cet invariant dans les chapitres suivants. Il verra qu'il est inutile dans le plan hyperbolique intérieur  $\mathbf{K}$ , mais qu'il joue un rôle essentiel en géométrie elliptique et dans le plan extérieur  $\mathbf{T}$ .

## 4.5.2 Le troisième cas d'isométrie, version longueurs

Le troisième cas d'isométrie des triangles permet traditionnellement d'affirmer que deux triangles dont les côtés sont de mêmes longueurs sont isométriques. Dans le cas présent, avec les "longueurs"  $I(b, c)$ ,  $I(c, a)$ ,  $I(a, b)$ , ce théorème n'est pas tout à fait vrai, notamment en géométrie elliptique réelle, ou aussi sur les complexes, voir 4.7.12. En effet, le spin du triangle défini ci-dessus intervient de façon essentielle dans la condition de transitivité :

**4.5.3 Théorème.** Soient  $a, b, c$  des points<sup>18</sup> (non isotropes). Alors, un système complet d'invariants pour ces points est donné par les invariants suivants :

- 1)  $q(a), q(b), q(c)$  dans  $k^*/k^{*2}$ ,
- 2)  $I(b, c), I(c, a), I(a, b)$  dans  $k$ ,
- 3)  $S(a, b, c)$  dans  $k$ .

17. Comme le spin ne dépend pas de l'ordre des points, on parlera, par abus de langage, du spin du triangle  $abc$  (même si les points sont alignés).

18. Le résultat est valable même si les points sont alignés.

*Démonstration.* Il est clair que les quantités ci-dessus ont un sens pour des points de  $\mathbf{P}(E)$  et pas seulement pour leurs représentants et qu'elles sont des invariants sous  $PO(q)$ . Réciproquement, il faut voir que si l'on a  $a, b, c$  (resp.  $a', b', c'$ ) comme ci-dessus, avec les mêmes invariants, on peut envoyer  $a$  sur  $a'$ ,  $b$  sur  $b'$ ,  $c$  sur  $c'$  par un élément de  $PO(q)$ . Comme on a  $q(a) = \lambda^2 q(a')$ ,  $q(b) = \mu^2 q(b')$ ,  $q(c) = \nu^2 q(c')$ , quitte à changer de représentants de  $a, b, c$ , on peut supposer  $q(a) = q(a')$ ,  $q(b) = q(b')$ ,  $q(c) = q(c')$ . On en déduit, avec l'égalité des invariants  $I$ ,  $\varphi(a, b)^2 = \varphi(a', b')^2$  et les relations analogues avec les autres points. Pour pouvoir envoyer les points les uns sur les autres, voir 4.1.3, il suffit de pouvoir choisir les signes pour avoir ces mêmes égalités sans les carrés. C'est évident si les trois produits sont nuls. Sinon, supposons par exemple  $\varphi(a, b) \neq 0$ . Quitte à changer le représentant de  $a$  en son opposé, on peut supposer que le signe de  $\varphi(a, b)$  est correct. Si les deux autres sont nuls on a fini, sinon, si  $\varphi(a, c) \neq 0$ , quitte à changer le relevé de  $c$ , on peut alors ajuster le signe de  $\varphi(a, c)$ . Mais alors l'égalité des spins assure que le signe de  $\varphi(b, c)$  est correct.

*Si l'on fait fi des conditions arithmétiques (par exemple si l'on est sur  $\mathbf{R}$ ), le théorème peut s'exprimer, à la manière d'Euclide, en disant que si deux triangles ont leurs côtés de mêmes longueurs, et même spin, ils sont isométriques.*

#### 4.5.4 Remarques.

- 1) Nous discuterons plus loin de cette condition supplémentaire de spin dans les deux cas usuels des géométries réelles.
- 2) La formule 4.5.2 montre que la troisième longueur  $I(b, c)$  est déterminée par les autres et par  $S(a, b, c)$ , sauf si  $I(a, b)$  (ou  $I(a, c)$ ) est nul, c'est-à-dire si  $a$  et  $b$  (ou  $a$  et  $c$ ) sont orthogonaux.
- 3) Dans ce cas de deux des points orthogonaux on peut oublier l'invariant  $S(a, b, c)$  (qui est nul) et le troisième cas d'égalité vaut sans la condition de spin.
- 4) Rappelons qu'il est tout à fait possible d'avoir des triangles avec  $a, b, c$  deux à deux orthogonaux (ce sont des triangles autopolaires, cf. Partie III ?? ou ci-dessus 6.3.4). On a alors  $\varphi(a, b) = \varphi(b, c) = \varphi(c, a) = 0$ . Cela ne peut pas se produire si  $a, b, c$  sont dans  $\mathbf{K}$  car les valeurs de  $\varphi$  sont  $< 0$ , voir 2.4.9. En revanche, c'est un phénomène important dans le plan elliptique.

### 4.5.3 Le troisième cas d'isométrie côté angles

On obtient sans effort supplémentaire la variante du troisième cas d'isométrie (4.5.3) qui fait intervenir les angles de droites :

**4.5.5 Théorème.** Soient  $A, B, C$  des droites (non isotropes) et non concourantes. Alors, un système complet d'invariants pour ces droites est donné par :

- 1)  $q^*(A), q^*(B), q^*(C)$  dans  $k^*/k^{*2}$ ,
- 2)  $I^*(B, C), I^*(C, A), I^*(A, B)$  dans  $k$ ,
- 3)  $S^*(A, B, C)$  (le spin angulaire) dans  $k$ .

*Démonstration.* Pas de démonstration : c'est 4.5.3 appliqué dans le dual.

**4.5.6 Commentaire.** Autrement dit, on a un cas d'égalité pour deux triangles qui ont trois angles égaux (et même spin) ! Voilà un point fondamentalement différent du cas euclidien où l'on sait bien que la donnée des trois angles d'un triangle ne le détermine qu'à similitude près. De fait, en géométrie euclidienne, comme la somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$ , se donner trois angles n'est rien de plus que s'en donner deux et l'argument de dimension montre que cela ne suffit certainement pas à déterminer un triangle à isométrie près. On n'a plus cette contrainte en géométrie non euclidienne, voir ci-dessous 6.3.2 et 6.4.1. La dissymétrie entre longueurs et angles qui apparaît ainsi en géométrie euclidienne est une nouvelle manifestation de l'absence de polarité qui tient au fait que la forme  $q$  est dégénérée.

**4.5.7 Remarques.**

1) Nous verrons que, dans l'énoncé ci-dessus, la condition de spin angulaire est essentielle en elliptique (c'est évident par polarité), mais aussi lorsque  $A, B, C$  sont les côtés d'un triangle  $abc$  du plan hyperbolique de Klein  $\mathbf{K}$ . On peut toutefois s'en passer en utilisant les angles de demi-droites, voir 6.6.1 et 6.6.6.

2) Rappelons que les quantités du type  $q^*(A)$  se calculent à partir des points par les formules de 1.2.3, par exemple :  $q^*(a \wedge b) = \frac{q(a)q(b)}{\Delta(q)} (1 - I(a, b))$ .

## 4.5.4 La formule d'Al-Kashi

### Problématique

*Avant de passer aux cas d'isométrie "mixtes" qui mettent en jeu à la fois les longueurs et les angles, nous avons besoin d'une formule analogue à celle qui, en géométrie euclidienne, permet de calculer la longueur  $bc$  en fonction de  $ab, ac$  et de l'angle en  $a$ . Je me permets d'appeler encore cette formule du nom d'Al-Kashi<sup>19</sup>. En vérité, ici, on aura plutôt tendance à voir cette formule comme une application du premier théorème fondamental de la théorie*

---

19. Comme je m'en suis déjà expliqué, j'aime bien donner des noms aux formules, fussent-ils parfaitement anachroniques, confirmant ainsi le théorème d'Arnold (!) qui dit qu'un

des invariants (voir 9.1.18) qui affirme que les invariants d'un triangle (et notamment les angles) se calculent (presque) à partir des longueurs des côtés. En géométrie non dégénérée, cette formule ressemble à la "formule fondamentale de la trigonométrie sphérique" (voir [Ber90] ou ci-dessous 6.1.2), mais dans le cas général, elle met en jeu le nouvel invariant vu ci-dessus : le spin. Dans ce paragraphe nous travaillons sur un corps  $k$  quelconque, ce qui nous oblige à travailler avec des angles de droites (encore une fois, il n'y a de demi-droites que si  $k$  est ordonné) et qui complique un peu les formules. D'autres variantes seront données dans le cas réel.

## La formule

Avant d'énoncer la formule, expliquons-en les ingrédients. On a un triangle  $abc$  (formé de points non isotropes, bien entendu) et on note  $A, B, C$  les côtés  $(bc), (ca), (ab)$ .

1) On cherche un succédané de Pythagore, c'est-à-dire de la formule  $I(b, c) = I(a, b)I(a, c)$  lorsque  $abc$  est rectangle en  $a$ . Dans le cas général, on calcule<sup>20</sup> :

$$\Delta = I(b, c) - I(a, b)I(a, c) = \frac{q(a)^2\varphi(b, c)^2 - \varphi(a, b)^2\varphi(a, c)^2}{q(a)^2q(b)q(c)}.$$

2) On veut faire intervenir l'angle  $I^*(B, C)$  et le relier aux longueurs. On a, par définition  $I^*(B, C) = \frac{\varphi(c \wedge a, a \wedge b)^2}{q(a \wedge c)q(a \wedge b)}$ . On sait calculer les termes de cette expression par 1.2.3. On a ainsi  $\Delta(q)\varphi(a \wedge c, a \wedge b) = q(a)\varphi(b, c) - \varphi(a, b)\varphi(a, c)$  et, par exemple,  $\Delta(q)q(a \wedge b) = q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$  qui n'est autre que  $q(a)q(b)(1 - I(a, b))$ . On en déduit :

$$\Xi := [1 - I(a, b)][1 - I(a, c)]I^*(B, C) = \frac{(q(a)\varphi(b, c) - \varphi(a, b)\varphi(a, c))^2}{q(a)^2q(b)q(c)}.$$

On calcule alors la différence  $\Delta - \Xi$  dans laquelle on voit apparaître le spin :  $\Delta - \Xi = -2I(a, b)I(a, c) + 2S(a, b, c)$ .

On a donc prouvé la formule :

---

résultat ne porte jamais le nom de son auteur. J'aimerais bien qu'on s'en souvienne et qu'on pense à moi quand je serai sous la tombe et fantôme sans os ... en donnant mon nom à une formule, même une petite.

20. On pourrait être tenté de calculer le rapport  $I(b, c)/I(a, b)I(a, c)$ , très simple, puisque c'est le carré de  $\varphi(b, c)q(a)/\varphi(a, b)\varphi(a, c)$  et de l'interpréter comme un invariant de l'angle en  $a$ . Le problème c'est que cet invariant ne dépend pas seulement des droites  $B, C$ , mais aussi des points  $b$  et  $c$  choisis sur ces droites (remplacer  $b$  par  $b + \lambda a$  par exemple), sauf dans le cas où le rapport vaut 1, c'est-à-dire quand les droites sont perpendiculaires.

**4.5.8 Théorème. (Formule d'Al-Kashi)** Soient  $a, b, c$  des points distincts et non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ . On appelle  $A, B, C$  les droites  $(bc), (ca), (ab)$  et on suppose  $B, C$  non isotropes. On a la formule suivante :

$$I(b, c) = [1 - I(a, b)] [1 - I(a, c)] I^*(B, C) - I(a, b)I(a, c) + 2S(a, b, c).$$

**4.5.9 Corollaire.** On suppose que le point  $a$  est différent de  $b$  et  $c$  et que les droites  $C = (ab)$  et  $B = (ac)$  ne sont pas isotropes (voir 4.3.5). On a la formule :

$$I^*(B, C) = \frac{I(b, c) + I(a, b)I(a, c) - 2S(a, b, c)}{[1 - I(a, b)] [1 - I(a, c)]}.$$

**4.5.10 Remarques.**

1) En dépit de son importance, la formule d'Al-Kashi n'est pas vraiment une relation entre les invariants comme celles que nous avons rencontrées dans la partie II ou que nous rencontrerons ci-dessous, chapitre 9. C'est plutôt une illustration du théorème ?? de la Partie II, qui affirme que les concomitants peuvent s'écrire à partir des invariants. En effet, dans le cas présent, elle exprime les invariants de droites du type  $q(a \wedge b)$  en termes des invariants des points du type  $q(a)$  et  $\varphi(a, b)$  et elle est pour l'essentiel dans 1.2.3. Elle peut paraître compliquée, mais on verra que, dans le cas elliptique et pour des triangles de spin  $< 0$ , le terme  $S$  est vraiment nécessaire.

2) On voit que l'angle  $I^*(B, C)$  se calcule à partir des longueurs et du spin. On verra en 9.1.18 que c'est le cas de tous les invariants de trois points.

3) On a évidemment une formule d'Al-Kashi duale :

$$I(b, c) = \frac{I^*(B, C) + I^*(A, B)I^*(A, C) - 2S^*(A, B, C)}{[1 - I^*(A, B)] [1 - I^*(A, C)]}.$$

## 4.5.5 Le premier et le deuxième cas d'isométrie

Nous passons maintenant aux cas d'isométrie mixtes qui mettent en jeu à la fois longueurs et angles. Avec les formules d'Al-Kashi on obtient aussitôt les résultats suivants :

**4.5.11 Théorème. (Premier cas d'isométrie)** Soient  $a, b, c$  des points (non isotropes). On suppose  $a, b, c$  non alignés, on pose  $A = (bc), B = (ca), C = (ab)$  et on suppose  $B, C$  non isotropes. Alors, un système complet d'invariants pour ces points est donné par les invariants suivants :

- 1)  $q(a), q(b), q(c)$  dans  $k^*/k^{*2}$ ,
- 2)  $I(c, a), I(a, b), I^*(B, C)$  dans  $k$ ,
- 3)  $S(a, b, c)$  dans  $k$ .

**4.5.12 Théorème. (Second cas d'isométrie)** Soient  $A, B, C$  des droites (non isotropes) et non concourantes. On note  $a, b, c$  les intersections de  $B, C ; C, A$  et  $A, B$  respectivement et on suppose  $b, c$  non isotropes. Alors, un système complet d'invariants pour ces droites est donné par :

- 1)  $q^*(A), q^*(B), q^*(C)$  dans  $k^*/k^{*2}$ ,
- 2)  $I^*(C, A), I^*(A, B), I(b, c)$  dans  $k$ ,
- 3)  $S^*(A, B, C)$  (le spin angulaire) dans  $k$ .

Pour des variantes sur un corps quelconque, voir les exercices, pour des traductions dans le cas réel, où l'usage des angles de demi-droites permet d'éliminer le recours au spin, voir 6.8.1 et 6.8.7.

### 4.5.6 D'autres applications de la formule d'Al-Kashi

Bien entendu, dans le cas particulier où les droites  $B, C$  sont perpendiculaires, i.e.  $I^*(B, C) = 0$ , on retrouve le théorème de Pythagore. En effet, comme on a  $S(a, b, c)^2 = I(b, c)I(c, a)I(a, b)$ , la formule d'Al-Kashi s'écrit  $(I(b, c) - I(a, b)I(a, c))^2 = 0$  ce qui donne la formule de 4.3.7.

À l'opposé, on a le corollaire suivant (à comparer, lorsque  $k = \mathbf{R}$ , avec 5.1.10, 5.1.12, 5.1.16; la formule ci-dessous, d'apparence compliquée, n'est que la formule  $bc = ba + ac$  ou une de ses variantes, à qui l'on a appliqué une fonction trigonométrique ou hyperbolique  $\cos^2$  ou  $\text{ch}^2$ ) :

**4.5.13 Corollaire. (Condition d'alignement)** Soient  $a, b, c$  trois points non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ . Alors,  $a, b, c$  sont alignés si et seulement si on a la relation :

$$2S(a, b, c) = I(b, c) + I(c, a) + I(a, b) - 1.$$

En particulier, si les points sont alignés, on a la formule :

$$4I(b, c)I(c, a)I(a, b) = (I(b, c) + I(c, a) + I(a, b) - 1)^2.$$

*Démonstration.* Avec les notations précédentes,  $a, b, c$  sont alignés si et seulement si les droites  $B$  et  $C$  sont confondues, i.e. si et seulement si <sup>21</sup>  $I^*(B, C)$  est égal à 1 (voir 4.4.3 en tenant compte du fait que  $a$  est non isotrope). En reportant dans Al-Kashi on en déduit la formule.

Dans le cas où deux des points sont orthogonaux, la condition est très simple (et on peut aussi la prouver par un calcul direct) :

**4.5.14 Corollaire.** Si les points  $a, b, c$  sont alignés et non isotropes et si  $b$  et  $c$  sont orthogonaux, on a  $I(a, b) + I(a, c) = 1$ .

---

21. On suppose ici  $B, C$  non isotropes. Voir 4.5.16 sinon.

On en déduit le lien entre la “distance”  $I(a, D)$  d’un point à une droite et la distance à son projeté orthogonal :

**4.5.15 Corollaire.** *Soit  $D$  une droite,  $d$  son pôle et soit  $a$  un point du plan distinct de  $d$ . Rappelons, voir 4.4.9, qu’on a posé  $I(a, D) = I(a, d)$ . On considère le projeté  $n$  de  $a$  sur  $D$ , c’est-à-dire le point d’intersection de  $(ad)$  et de  $D$ . Si  $n$  est non isotrope on a la formule  $I(a, D) + I(a, n) = 1$ .*

**4.5.16 Remarques.** 1) La caractérisation de l’alignement donnée ci-dessus est aussi conséquence d’une autre relation fondamentale entre invariants, celle qui traduit le comportement du discriminant par changement de base, cf. Partie III ?? ou ci-dessus 1.1.6) :

$$[a, b, c]^2 \Delta(q) = q(a)q(b)q(c) [1 + 2S(a, b, c) - I(b, c) - I(c, a) - I(a, b)].$$

2) La relation  $I(a, b) + I(a, c) = 1$  dans le cas où  $b, c$  sont orthogonaux a une interprétation très simple en géométrie elliptique comme on le verra au chapitre suivant. En effet, on a  $I(a, b) = \cos^2 ab$  où  $ab$  désigne la distance. La formule vient alors de trois faits : 1)  $bc = ba + ac$  puisque  $a, b, c$  sont alignés, 2)  $bc = \pi/2$  puisque  $b, c$  sont orthogonaux, 3) les formules de trigonométrie  $\cos(\pi/2 - ac) = \sin ac$  et  $\cos^2 ac + \sin^2 ac = 1$ . En géométrie hyperbolique, si l’on reste dans le plan de Klein  $\mathbf{K}$ , tout cela s’évanouit car il n’y a plus de points orthogonaux ...

3) Dans 4.5.15, il se peut que  $n$  soit isotrope (c’est le cas où  $(ad)$  est isotrope). Dans ce cas,  $I(a, n)$  n’est pas défini et on a  $I(a, d) = 1$ .

4) On a une condition analogue de concours de trois droites, voir 4.7.20.

## 4.6 Annexe : les triangles isocèles

### 4.6.1 Définition

Les invariants introduits ci-dessus permettent de définir et de caractériser les triangles isocèles :

**4.6.1 Proposition-Définition.** *Soient  $a, b, c$  trois points (non isotropes) non alignés. On suppose que  $a$  n’est orthogonal ni à  $b$ , ni à  $c$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe une symétrie  $\tau$  vérifiant  $\tau(a) = a$  et  $\tau(b) = c$ .*

2) *On a  $I(a, b) = I(a, c)$  (deux côtés égaux).*

2’) *Quitte à changer de représentants on peut supposer qu’on a  $q(b) = q(c)$  et  $\varphi(a, b) = \varphi(a, c)$  dans  $k$ .*

Sous ces conditions on dit que le triangle  $abc$  est **isocèle** en  $a$ .

On pose  $A = (bc)$ ,  $B = (ca)$ ,  $C = (ab)$  et on suppose que  $A, B, C$  ne sont pas tangentes à  $\Gamma$ . Les conditions précédentes sont encore équivalentes à la suivante :

3) On a  $I^*(A, B) = I^*(A, C)$  (deux angles égaux).

*Démonstration.* Il est clair que 1) implique 2) et que 2') implique 2). Réciproquement, supposons  $I(a, b) = I(a, c)$  et montrons d'abord 2').

On a  $q(c)\varphi(a, b)^2 = q(b)\varphi(a, c)^2$ . Comme  $\varphi(a, b)$  et  $\varphi(a, c)$  sont non nuls, on a donc  $q(b) = q(c)$  dans  $k^*/k^{*2}$  et, quitte à changer de représentant de  $b$ , on peut supposer  $q(b) = q(c)$  dans  $k$ . On en déduit  $\varphi(a, b)^2 = \varphi(a, c)^2$  et, quitte à changer  $b$  en  $-b$ , on obtient 2').

De plus, le point  $a$  est orthogonal à  $b - c$ . Si  $b - c$  n'est pas isotrope, c'est un milieu de  $b, c$  et la symétrie par rapport à  $b - c$  échange  $b, c$  et fixe  $a$ . Si  $b - c$  est isotrope, on a  $q(b) = q(c) = \varphi(b, c)$ , la droite  $(bc)$  (qui est alors tangente à  $\Gamma$ ) est la polaire de  $b - c$  et  $a$  est sur cette droite contrairement à l'hypothèse de non alignement. On a donc montré 1).

Pour le point 3), il faut supposer  $A, B, C$  non isotropes pour pouvoir calculer les invariants  $I^*$ . Pour le reste, le raisonnement est identique<sup>22</sup> dans le dual. On trouve une involution  $\tau$  qui laisse stable  $A$  et échange  $B, C$ , ce qui montre qu'elle fixe  $a$  et échange  $b, c$ .

**4.6.2 Remarque.** La condition  $a$  non orthogonal à  $b$  et  $c$  est, en général, nécessaire. Par exemple, si le corps de base est  $\mathbf{Q}$  et si  $a, b, c$  sont les images des vecteurs d'une base dans laquelle  $q$  est de la forme  $X^2 + Y^2 + 2T^2$ , on a  $I(a, b) = I(a, c) = 0$ , mais, comme  $q(b) = 1$  et  $q(c) = 2$  ne sont pas égaux dans  $\mathbf{Q}^*/(\mathbf{Q}^*)^2$ , il n'existe pas d'isométrie qui envoie  $b$  sur  $c$ . Le même contre-exemple vaut sur  $\mathbf{R}$  avec la forme  $X^2 + Y^2 - T^2$ . En revanche la condition est automatiquement satisfaite dans le plan elliptique réel. On utilisera parfois des triangles isocèles généralisés pour lesquels  $a$  peut être orthogonal à  $b$  (donc aussi à  $c$ ). Dans ce cas, il faut ajouter à 2) la condition  $q(b) = q(c)$  dans  $k^*/k^{*2}$ .

**4.6.3 Remarque.** Le corollaire d'Al-Kashi 4.5.9 mène à la formule :

$$[1 - I(b, c)][1 - I(c, a)][1 - I(a, b)][I^*(A, B) - I^*(A, C)] = \\ [I(a, b) - I(a, c)][1 + 2S(a, b, c) - I(b, c) - I(c, a) - I(a, b)].$$

---

22. On notera que  $A$  ne peut être orthogonal à  $B$  ou  $C$ . En effet, sinon elle l'est aux deux et son pôle est sur  $B$  et  $C$ . C'est donc  $a$ , qui est orthogonal à  $b$  et  $c$  contrairement à l'hypothèse.



Cela permet, en utilisant 4.3.5 et 4.5.13, de retrouver l'équivalence de l'égalité des longueurs  $I(a, b) = I(a, c)$  et des angles  $I^*(A, B) = I^*(A, C)$  dans un triangle (voir 4.6.1)

## 4.6.2 Hauteurs, médiatrices, etc.

En géométrie euclidienne, une propriété fondamentale du triangle isocèle est la coïncidence des notions de médiane, hauteur, médiatrice et bissectrice (intérieure). En géométrie non dégénérée, les choses sont un peu plus complexes car il y a deux exemplaires de chaque type de droites, sauf des hauteurs. Le résultat est le suivant :

**4.6.4 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle isocèle<sup>23</sup> en  $a$ . On suppose qu'on a choisi les représentants des points de sorte que l'on ait  $q(b) = q(c)$  et  $\varphi(a, b) = \varphi(a, c)$  (voir 4.6.1). Avec les notations de 3.2.3, la médiatrice  $A^+$  de  $b, c$  est aussi hauteur, médiane et bissectrice issue de  $a$ . La médiane et la bissectrice issues de  $a$  qui ne sont pas égales à la hauteur coïncident. Réciproquement, si une médiatrice du triangle est aussi médiane (ou hauteur, ou bissectrice), le triangle est isocèle.*

Le triangle  $abc$  est isocèle en  $a$ , la droite  $A^+$  est à la fois médiatrice, médiane, hauteur et bissectrice. En revanche,  $A^-$  n'est que médiatrice. Les milieux de  $b, c$  sont  $a^+$  et  $a^-$  et les points bissecteurs de  $(ab)$  et  $(ac)$  sont  $a^-$  et  $m$ , distinct de  $a^+$ , mais aligné avec  $a$  et  $a^+$  sur  $A^+$ . La droite  $(aa^-)$  est à la fois médiane et bissectrice.

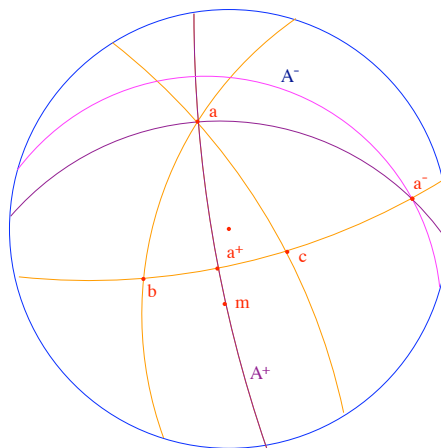


FIGURE 4.2 – Un triangle isocèle dans le plan elliptique

*Démonstration.* On a vu en 4.6.1 que  $b-c$  est non isotrope. Par définition  $A^+$  est la polaire de  $a^- = b - c$ . Il résulte de l'égalité  $\varphi(a, b) = \varphi(a, c)$  que  $a$  est sur  $A^+$  ce qui prouve que  $A^+$  est aussi hauteur (car  $A^+$  est perpendiculaire à  $(bc)$ ) et médiane (car elle passe par le milieu  $a^+$ ). Elle est aussi bissectrice

23. On rappelle que cela suppose que  $a$  n'est pas orthogonal à  $b$  et  $c$ .

car la symétrie d'axe  $A^+$  échange  $b$  et  $c$  et fixe  $a$ , donc échange les droites  $(ab)$  et  $(ac)$ .

Le point  $a^-$ , dont la polaire est  $A^+$ , est un point bissecteur de  $(ab)$  et  $(ac)$  et la droite  $(aa^-)$  est donc à la fois médiane et bissectrice.

La réciproque est immédiate : si une médiatrice de  $b, c$  est médiane ou hauteur ou bissectrice, elle passe par  $a$  et, comme la symétrie par rapport à cette droite échange  $b$  et  $c$ , le triangle est isocèle.

**4.6.5 Remarque.** En revanche la médiatrice  $A^-$  n'est égale à aucune autre des droites remarquables car elle ne passe par aucun sommet, voir figure 4.2. On notera aussi que le second point bissecteur de  $(ab)$  et  $(ac)$  est, en général, distinct de  $a^+$  (mais il est aligné avec  $a$  et  $a^+$ ), voir 4.7.23. Pour comprendre quel est le milieu qui est aussi pied de la hauteur, voir 5.6.9.

Une autre réciproque est la suivante<sup>24</sup> :

**4.6.6 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle. On suppose que  $b$  et  $c$  ont un milieu  $a'$  et que la droite  $(aa')$  est bissectrice de  $(ab), (ac)$ . Alors le triangle est isocèle en  $a$ .*

*Démonstration.* Attention, il y a deux cas de figure. On considère la symétrie  $\sigma$  de centre  $a'$ , qui est aussi la réflexion par rapport à  $A' = (a')^\perp$ . On a  $b = \sigma(c)$  et on pose  $d = \sigma(a)$ . Si  $d$  est égal à  $a$ , le triangle est isocèle, c'est le cas de la figure 4.2 avec  $a' = a^-$ ; la droite  $A' = A^+$  est axe de symétrie du triangle, mais pas  $(aa')$  (car cette droite n'est pas une médiatrice de  $b, c$ ).

Si  $d$  est distinct de  $a$ , voir figure 4.3, on a  $(aa') = (ad)$  et on écrit des égalités d'angles. La symétrie  $\sigma$  donne l'égalité  $I^*((ac), (ad)) = I^*((db), (da))$ . Mais, comme  $(aa') = (ad)$  est bissectrice de l'angle en  $a$ , on a également  $I^*((ac), (ad)) = I^*((ab), (ad))$  (voir 4.4.5) d'où  $I^*((db), (da)) = I^*((ab), (ad))$ . Il en résulte que le triangle  $abd$  est isocèle en  $b$ . On a donc  $I(a, b) = I(b, d)$ , mais, par  $\sigma$ , on a  $I(b, d) = I(c, a)$  et la conclusion.

### 4.6.3 Triangle équilatéral

**4.6.7 Proposition-Définition.** *Un triangle (et trilatère)  $abc$  est dit **équilatéral** s'il est isocèle à la fois en  $a, b, c$ . Un tel triangle vérifie  $I(b, c) = I(c, a) = I(a, b)$ ,  $I^*(B, C) = I^*(C, A) = I^*(A, B)$ , ses hauteurs sont aussi médianes, médiatrices et bissectrices et sont axes de symétrie du triangle.*

---

<sup>24</sup>. La preuve de ce résultat est intéressante car elle nécessite l'usage des invariants.

Ici, l'axe de symétrie de  $abc$  est la droite  $(aa')$ . On notera l'aspect "déplié" (c'est-à-dire de spin négatif) du triangle isocèle  $abd$  (en noir sur la figure).

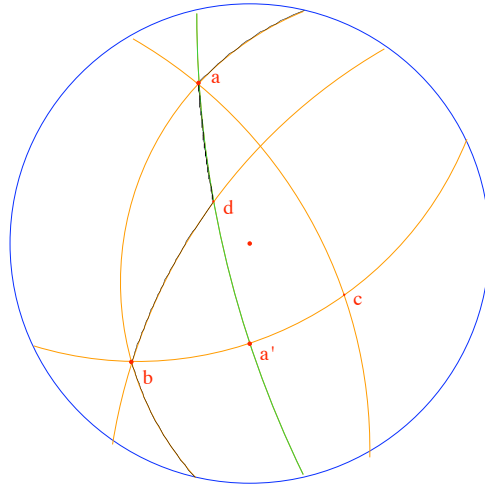


FIGURE 4.3 – Le deuxième cas de figure de 4.6.6

#### 4.6.8 Remarques.

- 1) Attention, les angles d'un triangle équilatéral, en géométrie non euclidienne, ne sont pas fixés, voir 6.7.8.
- 2) Attention, si les hauteurs ont toutes les bonnes propriétés, il n'en est pas de même des autres droites. Les médianes, médiatrices, bissectrices autres que les hauteurs ne cumulent pas (en général) plusieurs mandats, voir exercice 4.7.23.

## 4.7 Exercices

### 4.7.1 Transitivité et corps de base : le cas elliptique

**4.7.1 Exercice.** Dans cet exercice, on suppose la forme  $q$  anisotrope. Le théorème de Sylvester permet d'écrire, dans une base  $e_1, e_2, e_3$  convenable et à un scalaire près,  $q(x, y, t) = x^2 + \alpha y^2 + \beta t^2$ . Le fait que  $q$  est anisotrope impose que  $-\alpha$ ,  $-\beta$  et  $-\alpha\beta$  ne sont pas des carrés (mais la réciproque est inexacte comme le montre l'exemple de  $x^2 + y^2 - 2t^2$  sur  $\mathbf{Q}$ ). Rappelons qu'un corps  $k$  est dit **pythagoricien** si toute somme de deux carrés est encore un carré. Si  $-1$  n'est pas un carré de  $k$ , on note  $K$  le corps obtenu en adjoignant à  $k$  une racine  $i$  de  $-1$  et  $\mathbf{U}$  le groupe des éléments "de norme 1" de  $K$ , i.e. les  $a + ib$  vérifiant  $a^2 + b^2 = 1$ .

- 1) Montrer  $a + ib$  est un carré dans  $\mathbf{U}$  si et seulement si  $\frac{a+1}{2}$  (ou, ce qui revient au même,  $\frac{1-a}{2}$ ) est un carré dans  $k$ .

- 2) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
- i) le groupe  $PO(q)$  est transitif sur les points (resp. sur les droites),
  - ii)  $\alpha$  et  $\beta$  sont des carrés de  $k$  et  $k$  est pythagoricien,
  - iii)  $\alpha$  et  $\beta$  sont des carrés de  $k$  et tout élément du groupe  $\mathbf{U}$  est un carré (dans  $\mathbf{U}$ ).

(Pour l'équivalence de ii) et iii) on utilisera 1) et on pourra penser à la paramétrisation du cercle par la tangente de l'arc moitié.)

3) Montrer que le corps des nombres réels constructibles (à la règle et au compas, voir [Per11]) est pythagoricien. Pour un autre exemple, voir [Lio01].

## 4.7.2 Transitivité et corps de base : le cas hyperbolique

**4.7.2 Exercice.** On suppose que  $q$  est une forme de Lorentz  $q(x, y, t) = x^2 + y^2 - t^2$ .

1) Montrer que  $q$  représente  $k$  tout entier. En déduire que si  $PO(q)$  est transitif sur tous les points (en notre sens, i.e. non isotropes), on a  $k^*/k^{*2} = \{1\}$ . Donner un exemple de corps non algébriquement clos vérifiant cette propriété.

2) On se propose de montrer que l'application  $(a, b) \mapsto I(a, b)$  définie sur les points non isotropes et à valeurs dans  $k$  est surjective.

a) Soit  $\delta \in k^*$ . Montrer qu'il existe un plan  $P \subset E$  tel que la forme  $q|_P$  admette  $\delta$  pour discriminant (considérer  $P^\perp$  et utiliser 1)).

b) Soit  $\lambda \in k$ ,  $\lambda \neq 1$ . On pose  $\delta = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ . Soit  $P = k^2$  un plan muni de la forme  $q(x, y) = x^2 + \delta y^2$ . Montrer qu'il existe  $a, b \in P$  tels que  $I(a, b) = \lambda$  (prendre  $a = (1, 1)$  et  $b = (0, 1)$ ).

c) Conclure.

**4.7.3 Exercice.** On suppose que le corps  $k$  est fini de cardinal  $l$ .

1) Soient  $a, b \in k^*$  et soit  $\lambda \in k$ .

a) Montrer qu'il existe  $x, y \in k$  tels que  $\chi(x, y) := ax^2 + by^2 = \lambda$  (noter qu'il y a  $(l+1)/2$  éléments de la forme  $ax^2$  et  $(l+1)/2$  de la forme  $\lambda - by^2$ , voir aussi [Per96] Ch. V, 6.10 ou [Ser70]).

b) On suppose  $\lambda \neq 0$ . Déterminer selon la nature de la forme  $\chi$  (c'est-à-dire selon que  $-b/a$  est ou non un carré) le nombre de vecteurs  $(x, y)$  vérifiant  $\chi(x, y) = \lambda$  et montrer qu'il y en a au moins deux, sauf si le corps est  $\mathbf{F}_3$  et si  $\chi$  est hyperbolique<sup>25</sup>. (Si  $(x_0, y_0)$  est un de ces vecteurs, on trouvera les autres en coupant la conique définie par  $\chi$  par la droite  $y - y_0 = t(x - x_0)$ ).

---

<sup>25</sup>. On trouve  $(l+1)/2$  (resp.  $(l-1)/2$ ) vecteurs selon que  $\chi$  est anisotrope (resp. hyperbolique).

On trouve :

$$x = -\frac{(a - bt^2)x_0}{a + bt^2} - \frac{2bty_0}{a + bt^2} \quad \text{et} \quad y = -\frac{2atx_0}{a + bt^2} + \frac{(a - bt^2)y_0}{a + bt^2} . )$$

2) On suppose que  $q$  est une forme de Lorentz  $q(x, y, t) = x^2 + y^2 - t^2$ .

a) Soit  $P \subset E$  un plan sur lequel  $q$  est de rang 1. Montrer que  $q|_P$  ne représente que les carrés (on écrira  $P = m^\perp$  avec  $m$  isotrope et on utilisera la transitivité du groupe sur les droites isotropes (voir 4.2.1) pour faire le calcul dans le cas  $m = e_1 - e_3$ ).

b) Soit  $\mathbf{K}$  (resp.  $\mathbf{T}$ ) l'ensemble des points  $m$  de  $\mathbf{P}(E)$  tels que  $q(m)$  ne soit pas un carré (resp. soit un carré). Montrer que le groupe  $PO(q)$  est transitif sur les points de  $\mathbf{K}$  (resp. de  $\mathbf{T}$ ). Montrer que la droite qui joint deux points de  $\mathbf{K}$  n'est pas tangente à  $\Gamma$  (utiliser a)), mais qu'en revanche il existe des couples de points de  $\mathbf{T}$  tels que la droite qui les joint soit tangente à  $\Gamma$ .

c) On appelle droites de  $\mathbf{K}$  les traces sur  $\mathbf{K}$  des droites projectives (non vides). Déterminer le cardinal des droites de  $\mathbf{K}$  (utiliser 1.b). Montrer que, sauf si le corps est égal à  $\mathbf{F}_3$ , il y a deux classes de droites de  $\mathbf{K}$  sous l'action de  $PO(q)$  (car toutes les droites non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$  contiennent au moins deux points non carrés par 1.b).

d) Étudier le cas  $k = \mathbf{F}_3$  (il y a trois points dans  $\mathbf{K}$  :  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$  et  $(-1, 1, 0)$  et trois droites de  $\mathbf{K}$  :  $x = y$ ,  $x = -y$ ,  $t = 0$ , toutes anisotropes).

### 4.7.3 Le cas des isotropes

**4.7.4 Exercice.** Soient  $a, a'$  des points de  $\Gamma$ . Soient  $b, b'$  deux points vérifiant  $q(b) = q(b')$  dans  $k^*/k^{*2}$ . On suppose que les droites  $(ab)$  et  $(a'b')$  sont toutes deux isotropes ou toutes deux non isotropes. Montrer qu'il existe  $g \in PO(q)$  tel que  $g(a) = a'$  et  $g(b) = b'$ . (Quitte à changer les représentants de  $b$  et  $a$ , on se ramènera au cas où l'on a  $q(b) = q(b')$  et  $\varphi(a, b) = \varphi(a', b')$  et on utilisera 4.1.3.)

**4.7.5 Exercice.** Soient  $a, b, c$  (resp.  $a', b', c'$ ) des points distincts de  $\Gamma$  (on désigne parfois le triangle  $abc$  sous le nom de **triangle idéal**). Montrer qu'il existe une unique isométrie  $g$  qui envoie  $a$  sur  $a'$ ,  $b$  sur  $b'$  et  $c$  sur  $c'$ . (On pourra soit appliquer le théorème de Witt, soit utiliser l'isomorphisme de  $PO(q)$  avec  $PGL(2, k)$ , voir Partie III ?? et la triple transitivité de celui-ci, voir Partie I ??.)

### 4.7.4 De quoi sont les pieds ? (bis)

**4.7.6 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ . Montrer que les pieds des hauteurs  $a', b', c'$  sont dans  $\mathbf{K}$  (si  $d$  est le pôle de  $(bc)$  on utilisera la formule  $I(a, a') +$

$$I(a, d) = 1).$$

### 4.7.5 Invariants et quotients : le cas de deux points

Dans les exercices suivants l'objectif est de construire un quotient qui décrive l'action de  $PO(q)$  sur les couples de points  $(a, b)$ , à la manière de Hilbert et Mumford, comme nous l'avons fait Partie II, chapitre 7. On va voir réapparaître les notions introduites à cette occasion et notamment la stabilité.

#### 4.7.7 Exercice. Le morphisme $\widehat{I}$

On note  $\mathbf{V}$  le plan  $\mathbf{P}(E)$  privé de ses points isotropes. On rappelle que l'application  $I$  est définie sur  $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$  et à valeurs dans  $k$  et qu'on a  $I(a, b) = \frac{\varphi(a, b)^2}{q(a)q(b)}$ .

On considère l'invariant  $\widehat{I}(a, b) = (\varphi(a, b)^2, q(a)q(b))$ , vu comme un élément de  $\mathbf{P}^1(k)$ . On désigne par  $F$  le fermé (au sens de la topologie de Zariski) de  $\mathbf{P}(E)^2$  défini par les équations  $\varphi(a, b) = 0$  et  $q(a)q(b) = 0$ , et par  $U$  l'ouvert complémentaire de  $F$ .

1) Montrer que  $F$  est formé des couples  $(a, b)$  de points distincts tels que  $a$  ou  $b$  est sur  $\Gamma$  et que  $(ab)$  est tangente à  $\Gamma$  ainsi que des couples  $(a, a)$  avec  $a$  isotrope et que  $U$  est exactement le domaine de définition<sup>26</sup> de  $\widehat{I}$ .

2) On identifie  $k$  aux points  $(x, 1)$  de  $\mathbf{P}^1(k)$ . Montrer que  $U$  contient l'ouvert  $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$  et que la restriction de  $\widehat{I}$  à  $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$  est égale à  $I$  (de sorte que  $\widehat{I}$  est la variante projective de l'invariant  $I$ ).

3) Montrer que l'ouvert  $U$  contient, en plus de l'ouvert  $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ , les couples  $(a, b)$  formés d'un point isotrope  $a$  et d'un non isotrope  $b$  tels que  $(ab)$  soit non isotrope (on en parlera comme des couples de type 1) ou de deux points isotropes distincts (type 2).

4) Montrer que la proposition 4.3.2 est valable sur  $U$  en remplaçant  $I$  par  $\widehat{I}$ .

5) Montrer que  $\widehat{I}$  induit une application  $\widetilde{I}$  de  $U/PO(q)$  dans  $\mathbf{P}^1(k)$  (resp. que  $I$  induit une application  $\bar{I} : (\mathbf{V} \times \mathbf{V})/PO(q) \rightarrow k$ ) et que cette application est continue si  $k$  est égal à  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

#### 4.7.8 Exercice. On poursuit l'étude des applications $I$ et $\widehat{I}$ .

1) On suppose la forme  $q$  hyperbolique. Montrer que l'application  $I$  est surjective. (On montrera que, pour tout  $\alpha \in k$ , il existe un plan sur lequel la forme  $q$  est équivalente à  $x^2 + \alpha y^2$  et on utilisera les vecteurs  $a = (1, 1)$  et

<sup>26</sup> Les points de  $U$  sont les points semi-stables au sens de Mumford, voir [Mum65]. Si l'on préfère, les points de  $F$  sont les *Nullforms* de Hilbert.

$b = (0, 1)$  de ce plan.) Montrer que  $I$  est encore surjective si on la restreint aux points  $(a, b)$  avec  $a \neq b$ .

À partir de maintenant on suppose  $k = \mathbf{C}$ .

2) Montrer que l'application  $\widehat{I} : U \rightarrow \mathbf{P}^1(k)$  est surjective.

3) Montrer que les fibres de  $\widehat{I}$  sont exactement les orbites des points  $(a, b) \in U$  sauf dans les cas suivants :

- La fibre  $\widehat{I}^{-1}(1, 1)$  qui contient deux orbites : les points  $(a, a)$  diagonaux avec  $a$  non isotrope et les points  $(a, b)$  avec  $a, b$  non isotropes et  $(ab)$  isotrope<sup>27</sup> (voir 4.3.5).

- La fibre  $\widehat{I}^{-1}(1, 0)$  qui contient deux orbites : les points  $(a, b)$  avec  $a, b$  isotropes et distincts (de type 2 au sens de 4.7.7) et les points  $(a, b)$  avec  $a$  ou  $b$  isotrope et la droite  $(ab)$  non isotrope (points de type 1).

4) Dédurre de ce qui précède que l'application de  $U/PO(q)$  sur  $\mathbf{P}^1(k)$  induite par  $\widehat{I}$  est bijective sauf en les points correspondant aux orbites de la question 3).

5) Reprendre la comparaison des fibres de  $\widehat{I}$  et des orbites dans le cas du corps des réels.

**4.7.9 Exercice.** On reprend les notations des deux exercices précédents et on se propose d'étudier la lissité des applications  $I$  et  $\widehat{I}$ .

1) On considère  $I$  comme une application de  $k^3 \times k^3$  (privé des vecteurs isotropes) dans  $k$ . Montrer que la différentielle de  $I$  au point  $(a, b)$  est donnée par la formule :

$$\begin{aligned} dI_{(a,b)}(\alpha, \beta) &= \\ &= \frac{2\varphi(a, b)}{q(a)^2 q(b)^2} \left[ q(a)q(b)(\varphi(a, \beta) + \varphi(b, \alpha)) - \varphi(a, b)(q(a)\varphi(b, \beta) + q(b)\varphi(a, \alpha)) \right] \\ &= \frac{2\varphi(a, b)\Delta(q)}{q(a)^2 q(b)^2} \left[ q(a)\varphi(b \wedge a, b \wedge \beta) + q(b)\varphi(a \wedge b, a \wedge \alpha) \right] \end{aligned}$$

(le plus simple est de calculer  $I(a + \alpha, b + \beta) - I(a, b)$  avec des vecteurs  $\alpha, \beta$  dont les coefficients sont de carré nul, ce qui permet de supprimer tous les termes de la forme  $\varphi(a, \alpha)\varphi(b, \beta)$ , voir par exemple [Per95] ; le lecteur à qui les éléments nilpotents répugneraient peut supposer que le corps de base est  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ ). Montrer que  $dI_{(a,b)}$  est non nulle, sauf si  $a$  et  $b$  sont colinéaires ou orthogonaux.

2) En déduire que la flèche  $I : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow k$  est lisse (voir [Har77] III 10.4) sauf en les couples de points confondus ou orthogonaux.

---

27. Ces couples sont les seuls dont le stabilisateur est réduit à l'identité.

3) Montrer que  $\widehat{I} : U \rightarrow \mathbf{P}^1(k)$  est lisse sauf en les couples  $(a, b)$  suivants :  $a = b$  (non isotrope),  $a$  et  $b$  orthogonaux et non isotropes,  $a$  et  $b$  distincts et isotropes. (Pour obtenir la différentielle au niveau du projectif, on utilisera 2.2.1.)

**4.7.10 Remarque.** Supposons que le corps de base est égal à  $\mathbf{C}$ . Les trois exceptions à la lissité de la flèche  $\widehat{I}$  correspondent toutes à des phénomènes géométriques. En effet, dire que  $\widehat{I}$  est lisse implique en particulier que ses fibres sont lisses et de dimension 3. Or, ces fibres sont, en général, des orbites dans l'action de  $PO(q)$  sur les couples de points (c'est le fait que  $I$  soit un invariant, et essentiellement le seul). Ce sont donc des espaces homogènes sous le groupe  $G = PO(q)$  et précisément les quotients de  $G$  par le stabilisateur du couple  $(a, b)$  et elles sont donc généralement lisses. Avec cette description, voilà l'explication des trois cas d'exception :

1) Le cas de deux points confondus est un cas où le stabilisateur est de dimension 1 (voir 1.4.32) c'est un point non pré-stable au sens de Mumford. La fibre de  $\widehat{I}$  est formée de deux orbites, la diagonale (qui est fermée) et l'ensemble des couples  $(a, b)$  non isotropes tels que  $(ab)$  soit tangente à  $\Gamma$ , orbite dont l'adhérence contient l'autre, voir 4.3.5, cas  $I = 1$ .

On comprend sans peine pourquoi  $\widehat{I}$  n'est pas lisse en les points du type  $(a, a)$ . Sinon, elle admettrait une section définie au voisinage de  $1 = (1, 1) \in \mathbf{P}^1$ , à valeurs dans  $X = \mathbf{P}(E) \times \mathbf{P}(E)$ , avec  $s(1) = (a, a)$ . Mais comme  $\widehat{I}$  est lisse en les points  $(c, d)$  avec  $(cd)$  isotrope on aurait aussi une section  $\sigma$  vérifiant  $\sigma(1) = (c, d)$ . En composant ces sections avec la projection canonique  $\pi : X \rightarrow X/G$  on aurait donc des sections  $\bar{s}$  et  $\bar{\sigma}$  de  $\widehat{I}$ . Mais alors, comme les fibres des points autres que 1 sont égales aux orbites,  $\bar{s}$  et  $\bar{\sigma}$  seraient égales en dehors de 1, donc aussi en 1 par continuité et cela contredit le fait que les orbites de  $(a, a)$  et de  $(c, d)$  sont distinctes.

2) Le cas de deux points isotropes (de type 2 au sens de 4.7.7) est analogue : le stabilisateur est de dimension 1 (voir 1.4.32), c'est un point non pré-stable au sens de Mumford : l'orbite correspondante est dans l'adhérence de celle des points de type 1 (un point isotrope et un point non isotrope non situé sur la tangente).

3) Enfin, le cas des points orthogonaux correspond à un autre type de singularité qui ressemble à la non lissité de l'application  $x \mapsto x^2$  en 0 : une section éventuelle est  $\sqrt{x}$ , qui n'est pas différentiable à l'origine. Dans le cas présent c'est la présence du terme  $\varphi(a, b)$  au carré qui est la source de la singularité au voisinage d'un couple vérifiant  $\varphi(a, b) = 0$ . On notera que ces couples sont aussi ceux en lesquels le morphisme  $I$  est ramifié : si un couple  $(c, d)$  est voisin d'un couple  $(a, b)$  avec  $a, b$  orthogonaux, il est toujours accompagné, dans sa fibre, du couple  $(c, \sigma_c(d))$ , avec  $d' = \sigma_c(d) \neq d$  si  $d$  n'est



pas orthogonal à  $c$ . Mais lorsque  $(c, d)$  tend vers  $(a, b)$ , ces deux “feuilles” coïncident car le stabilisateur de  $(a, b)$  a quatre éléments  $(\text{Id}, \sigma_a, \sigma_b, \tau_{(ab)})$  au lieu de deux en temps normal  $(\text{Id}, \tau_{(ab)})$ .

#### 4.7.6 Invariants et quotients : le cas des triangles

**4.7.11 Exercice.** On note encore  $\mathbf{V}$  le plan  $\mathbf{P}(E)$  privé de ses isotropes. On étudie l’application  $\Phi$  de  $\mathbf{V}^3$  dans  $k^3$  qui à  $(a, b, c)$  associe  $(I(b, c), I(c, a), I(a, b))$ .

1) On considère  $\Phi$  comme une application de  $k^9$  (privé de ses isotropes) dans  $k^3$ . Calculer la différentielle  $d\Phi_{a,b,c}(\alpha, \beta, \gamma)$ . (On utilisera l’exercice 4.7.9.)

2) On se propose de montrer que  $d\Phi_{a,b,c}$  est de rang 3 si et seulement si  $a, b, c$  sont non alignés et non deux à deux orthogonaux.

a) Montrer que  $d\Phi$  est de rang  $\leq 2$  si  $a, b, c$  sont alignés ( $\P$ ) ou si deux des points sont orthogonaux.

b) On suppose  $a, b, c$  ni alignés ni orthogonaux. Montrer que  $d\Phi$  est surjective. (On attrapera, par exemple, un vecteur  $(\lambda, 0, 0)$  avec  $\lambda \neq 0$ . Pour cela on utilisera la forme de la différentielle vue en 4.7.9 qui comprend des termes du type  $q(a)\varphi(b \wedge a, b \wedge \beta) + q(b)\varphi(a \wedge b, a \wedge \alpha)$  et on prendra  $\alpha = \beta = 0$  et  $\gamma = c \wedge a$ .)

3) En déduire que  $\Phi : \mathbf{V}^3 \rightarrow k^3$  est lisse sauf en les triplets de points alignés ou orthogonaux.

#### 4.7.7 L’espace des triangles sur le corps des complexes

**4.7.12 Exercice.** On se propose de décrire l’espace des triangles modulo l’action du groupe des isométries dans le cas où le corps de base est le corps  $\mathbf{C}$  des nombres complexes (ou un corps algébriquement clos). On suppose que la forme quadratique est donnée par  $X^2 + Y^2 + T^2$  (c’est une forme hyperbolique, bien entendu). On note toujours  $\mathbf{V}$  l’ensemble des points non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ . Soient  $a, b, c \in \mathbf{V}$ . On pose  $\alpha = I(b, c)$ ,  $\beta = I(c, a)$ ,  $\gamma = I(a, b)$  et  $s = S(a, b, c)$ .

1) Montrer qu’on a  $s^2 = \alpha\beta\gamma$  (voir 4.5.2). On note  $\Sigma$  l’ensemble des points  $(\alpha, \beta, \gamma; s) \in \mathbf{C}^4$  qui vérifient cette équation.

2) Montrer que les points  $a, b, c$  sont alignés si et seulement si on a  $2s - \alpha - \beta - \gamma + 1 = 0$  (voir 4.5.13). On note  $P$  l’ensemble des points  $(\alpha, \beta, \gamma; s) \in \mathbf{C}^4$  qui vérifient cette équation.

3) Montrer que l’application  $\Psi$  qui à un triplet  $(a, b, c) \in \mathbf{V}^3$  associe le quadruplet  $(\alpha, \beta, \gamma; s)$  induit une bijection  $\bar{\Psi}$  de  $\mathbf{V}^3/PO(q)$  sur  $\Sigma$ . (Pour la surjectivité, on pose  $\alpha = \alpha_0^2$ ,  $\beta = \beta_0^2$ ,  $\gamma = \gamma_0^2$  et on peut supposer  $s = \alpha_0\beta_0\gamma_0$ . Si  $\gamma$  est différent de 1, on cherche les points  $a, b, c$  sous la forme  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (\gamma_0, b_2, 0)$ , avec  $b_2^2 = 1 - \gamma$ ,  $c = (\beta_0, c_2, c_3)$  avec  $\beta_0^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ . Si  $\gamma$  est

égal à 1, la droite  $(ab)$  est tangente à la conique  $\Gamma$  et on cherche  $a, b, c$  sous la forme  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (1, b_2, ib_2)$  (avec  $i^2 = -1$ ) et  $c = (c_1, c_2, c_3)$  avec  $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ .)

4) Montrer que la restriction de  $\Psi$  à l'espace des triangles  $\mathcal{T}$  induit une bijection de  $\mathcal{T}/PO(q)$  sur  $\Sigma - P$ . Montrer que cette flèche est lisse sur l'ouvert des triangles de spin  $\neq 0$  (utiliser 4.7.11) (voir aussi 4.7.13).

**4.7.13 Exercice.** On considère le morphisme  $\widehat{\Psi}$  défini sur  $\mathbf{P}(E)^3$  et à valeurs dans  $\mathbf{P}^4(\mathbf{C})$  qui associe à  $(a, b, c)$  le point de coordonnées homogènes :

$$(q(a)q(b)q(c), q(a)\varphi(b, c)^2, q(b)\varphi(c, a)^2, q(c)\varphi(a, b)^2, \varphi(b, c)\varphi(c, a)\varphi(a, b)).$$

1) Déterminer le domaine de définition de  $\widehat{\Psi}$ , montrer que, dans le cas de points non isotropes, il équivaut à la donnée des invariants  $I$  et du spin, donc du morphisme  $\Psi$  de l'exercice précédent. Préciser les cas où le stabilisateur d'un point est de dimension  $\geq 1$ .

2) ¶ Calculer la différentielle de  $\widehat{\Psi}$  et préciser le lieu de non lissité de  $\widehat{\Psi}$ . Montrer que  $\widehat{\Psi}$  et  $\Psi$  sont lisses en les triangles de spin nul qui ne sont pas rectangles (i.e. tels qu'un seul des nombres  $\varphi(b, c)$ ,  $\varphi(c, a)$ ,  $\varphi(a, b)$  soit nul), ce qui améliore le résultat de 4.7.12.4.

**4.7.14 Remarque.** La différence entre  $\Phi$  et  $\Psi$  du point de vue de la lissité :  $\Phi$  est non lisse en les triangles de spin nul,  $\Psi$  seulement en les triangles rectangles de spin nul s'explique par l'écriture  $\Phi = p \circ \Psi$  où  $p$  est la projection  $(\alpha, \beta, \gamma; s) \mapsto (\alpha, \beta, \gamma)$ . Cette application est un revêtement de degré 2, ramifié au-dessus de la sous-variété  $\alpha\beta\gamma = 0$  qui correspond aux triangles de spin nul. L'application  $p$  n'est pas lisse en ces points (car la fonction  $\sqrt{s}$  n'est pas dérivable en 0) et cette non lissité se répercute sur  $\Phi$ .

## 4.7.8 Le premier et le deuxième cas d'isométrie, variantes

**4.7.15 Exercice.** L'invariant  $J$

On suppose fixée une base  $\mathcal{B}$  de  $E$ . Le produit vectoriel est alors bien défini. Soient  $a, b, c$  des points de  $\mathbf{P}(E)$  supposés non isotropes. On suppose que  $b$  et  $c$  ne sont pas orthogonaux à  $a$ . On pose  $J(a; b, c) = \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\varphi(a, b)\varphi(a, c)}$ .

On a un invariant analogue  $J^*(A; B, C)$  pour des droites non isotropes avec  $B, C$  non perpendiculaires à  $A$ .

1) Montrer que le nombre  $J(a; b, c)$  ne dépend que des points  $a, b, c$  de  $\mathbf{P}(E)$  et pas de leurs représentants. Comment  $J$  varie-t-il si on change  $\mathcal{B}$  en

$\mathcal{B}'$ ? Montrer que  $J$  est nul si et seulement si  $a$  est égal à  $b$  ou  $c$  ou si les droites  $C := (ab)$  et  $B := (ac)$  sont perpendiculaires.

2) Montrer les formules suivantes :

$$J(a; b, c)^2 = I^*(B, C) \frac{(1 - I(a, b))(1 - I(a, c))}{I(a, b)I(a, c)},$$

$$\Delta(q)J(a; b, c) = \frac{q(a)\varphi(b, c)}{\varphi(a, b)\varphi(a, c)} - 1 = \frac{I(b, c)}{S(a, b, c)} - 1.$$

(La première formule, qui n'a de sens que si les droites  $B, C$  sont non isotropes, permet de voir  $J(a; b, c)$  comme une sorte de racine carrée de  $I^*(B, C)$ , la seconde montre que cet invariant n'est pas nouveau puisqu'il se ramène à  $I$  et  $S$ .)

3) Dans cette question, le corps de base est  $\mathbf{R}$  et on utilise les notations du chapitre suivant, voir 5.1.7 et 5.1.14. Soient  $a, b, c$  trois points non alignés de  $\mathbf{E}$  (resp. de  $\mathbf{K}$ ). Dans le cas elliptique, on suppose de plus  $b$  et  $c$  non orthogonaux à  $a$ . On pose  $ab = \gamma$ ,  $ac = \beta$ . Montrer respectivement les formules :

$$J(a; b, c) = \tan \beta \tan \gamma \cos \widehat{bac} \quad \text{et} \quad J(a; b, c) = \text{th } \beta \text{ th } \gamma \cos \widehat{bac}.$$

#### 4.7.16 Exercice. Le premier cas d'isométrie

Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{P}(E)$  supposés non isotropes et non alignés. On suppose  $b$  et  $c$  non orthogonaux à  $a$ . Montrer qu'un système complet d'invariants pour  $a, b, c$  est donné par :  $q(a), q(b), q(c)$  dans  $k^*/k^{*2}$ ,  $I(a, b), I(a, c)$  dans  $k$ ,  $J(a; b, c)$  dans  $k$ . Comparer avec le premier cas d'isométrie usuel<sup>28</sup>.

#### 4.7.17 Exercice. Le second cas d'isométrie

Soient  $A, B, C$  trois droites de  $\mathbf{P}(E)$  supposées non isotropes et non concourantes. On suppose  $B$  et  $C$  non orthogonales à  $A$ . Montrer qu'un système complet d'invariants pour ces droites est donné par  $q^*(A), q^*(B), q^*(C)$  dans  $k^*/k^{*2}$ ,  $I^*(A, B), I^*(A, C)$  dans  $k$ ,  $J^*(A; B, C)$  dans  $k$ . Comparer avec le second cas d'isométrie usuel.

### 4.7.9 Les triangles rectangles ne sont plus ce qu'ils étaient

4.7.18 Exercice. En géométrie euclidienne, lorsqu'on a un triangle  $abc$ , rectangle en  $a$ , et qu'on considère le projeté orthogonal  $h$  de  $a$  sur l'hypoténuse, on a l'égalité d'angles  $\widehat{bah} = \widehat{acb}$ , qui montre que les triangles  $abc, hba$  et  $hac$

28. Ici, on ne suppose plus  $B, C$  non isotropes.

sont semblables et fournit des relations métriques de moyenne proportionnelle, par exemple  $ah^2 = hb \times hc$ . Le but de cet exercice est de montrer que l'égalité angulaire (écrite en termes de  $I^*$ ) ne subsiste pas en géométrie non euclidienne.

1) Soient  $a, b, c, d$  des points non isotropes. On suppose  $b$  orthogonal à  $c$ ,  $d \in (bc)$ ,  $d \neq b$  et  $d$  orthogonal à  $a$ . Montrer que l'on a  $I(a, b) = I(c, d)$  si et seulement si  $a, b, c$  sont alignés. (On montrera que la condition est équivalente à  $I(a, b) + I(a, c) = 1$  et on conclura en utilisant 4.5.13.)

2) Soient  $A, B, C, H$  des droites non isotropes. On suppose  $B$  orthogonale à  $C$ ,  $B, C, H$  concourantes,  $H \neq B$  et  $H$  orthogonale à  $A$ . Montrer que l'on a  $I^*(A, B) = I^*(C, H)$  si et seulement si  $A, B, C$  sont concourantes. Interprétation en termes de triangles rectangles.

#### 4.7.10 Spin et spin angulaire

**4.7.19 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle qui est aussi un trilatère. On pose  $S = S(a, b, c)$ ,  $\alpha = I(b, c)$ ,  $\beta = I(c, a)$ ,  $\gamma = I(a, b)$ ,  $S^* = S^*(b \wedge c, c \wedge a, a \wedge b)$ . On suppose  $S$  non nul. Montrer la formule :

$$S^* = \frac{(S - \alpha)(S - \beta)(S - \gamma)}{S(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma)}.$$

Montrer que si, par exemple,  $\alpha$  est nul on a  $S^* = \frac{\beta\gamma}{(1 - \beta)(1 - \gamma)}$ .

**4.7.20 Exercice.** Soient  $A, B, C$  trois droites non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ . Montrer que  $A, B, C$  sont concourantes si et seulement si on a la relation :

$$1 + 2S^*(A, B, C) - I^*(B, C) - I^*(C, A) - I^*(A, B) = 0.$$

(Utiliser Al-Kashi ou la relation fondamentale avec le crochet  $[A, B, C]$  ou la dualité.)

#### 4.7.11 Médiatrices, etc.

**4.7.21 Exercice.** 1) Soient  $a, b$  deux points distincts et non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ . On suppose qu'on a  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ .

a) Montrer que l'ensemble des points  $m$  non isotropes qui vérifient  $I(a, m) = I(b, m)$  est la réunion des points non isotropes des deux médiatrices (généralisées si la droite  $(ab)$  est isotrope) de  $a, b$ . (On supposera qu'on a  $q(a) = q(b)$  et on utilisera le fait que les médiatrices sont alors les polaires de  $a + b$  et  $a - b$ .)

b) On définit l'invariant  $M(a, b; m) = (\varphi(a, m)^2 q(b), \varphi(b, m)^2 q(a))$  comme un élément de  $k^2$  modulo colinéarité<sup>29</sup>. Montrer que les points  $m$ , isotropes ou non, des médiatrices (généralisées) sont ceux qui vérifient  $M(a, b; m) = (1, 1)$  ou  $(0, 0)$ .

2) Montrer que les médiatrices d'un triangle strict sont concourantes (utiliser la question précédente; la variante a) suffit si l'intersection n'est pas isotrope et sinon on utilise la variante b)).

3) Soient  $A, B$  deux droites non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ . On suppose qu'on a  $q^*(A) = q^*(B)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Montrer que l'ensemble des points  $m$  non isotropes tels que les distances de  $m$  à  $A$  et  $B$  soient égales (au sens des distances aux projetés orthogonaux, voir 4.4.9) est la réunion des deux bissectrices (généralisées) de  $A$  et  $B$ .

4) Soient  $a, b$  deux points distincts et non isotropes de  $E$ . On suppose qu'on a  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Montrer qu'une droite  $D$  non isotrope est équidistante de  $a$  et  $b$  (au sens où l'on a  $I(a, D) = I(b, D)$ , voir 4.4.9) si et seulement si cette droite est perpendiculaire à l'une des médiatrices de  $a$  et  $b$ . (Ce résultat permet de montrer que les trois médiatrices d'un triangle ont une perpendiculaire commune.)

**4.7.22 Exercice.** Dans cet exercice on suppose  $k = \mathbf{R}$ .

1) Soient  $a, b$  deux points distincts du plan elliptique. Montrer que les médiatrices de  $a, b$  partagent le plan en deux parties définies par  $I(a, m) < I(b, m)$   $I(a, m) > I(b, m)$ . Préciser ces parties et montrer qu'elles sont connexes.

2) Étudier la question analogue dans le cas du plan hyperbolique, d'abord dans le disque de Klein, puis dans le plan  $\mathbf{P}(E)$  privé des isotropes.

## 4.7.12 Triangles isocèles et équilatéraux

**4.7.23 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle isocèle en  $a$ . On suppose qu'on a  $q(b) = q(c)$  et  $\varphi(c, a) = \varphi(a, b)$ .

1) Montrer qu'on a  $q(c \wedge a) = q(a \wedge b)$ . Les points bissecteurs de  $(ab)$  et  $(ac)$  sont alors  $c \wedge a - a \wedge b$  et  $c \wedge a + a \wedge b$ , voir 3.1.9.

2) Montrer que le milieu  $b - c$  est égal au point bissecteur  $c \wedge a - a \wedge b$  (utiliser 1.2.7). On retrouve le fait que la médiatrice et la bissectrice qui sont polaires de ces points sont égales.

3) Montrer qu'en revanche le milieu  $b + c$  et le bissecteur  $c \wedge a + a \wedge b$  ne coïncident que si le triangle isocèle est généralisé (i.e. si  $a$  est orthogonal à  $b$  et  $c$ , voir 4.6.2).

---

29. Hormis pour le cas  $(0, 0)$ , il s'agit de la variante projective de  $I(a, m)/I(b, m)$ .

4) On suppose le triangle équilatéral (généralisé). Montrer que les médianes ne sont pas toutes des bissectrices, sauf si le triangle  $abc$  est autopolaire. Discuter selon la nature de la géométrie.

# Chapitre 5

## Longueurs et angles : le cas des géométries réelles

*Ce chapitre est la traduction, dans le cas des géométries elliptique et hyperbolique réelles, des résultats du chapitre précédent. On y interprète l'invariant  $I$  en termes de distance de deux points ou d'angle de deux droites et on retrouve ainsi les notions usuelles. De surcroît, utilisant la structure d'ordre sur  $\mathbf{R}$ , on introduit des notions intrinsèques de demi-droite, de segment, et de milieu, ce qui nous permet de revenir sur les résultats du chapitre 3. Enfin, on introduit les angles et les angles de demi-droites qui vont jouer un rôle crucial au chapitre suivant.*

Dans tout ce chapitre, le corps de base est  $\mathbf{R}$  et la forme est soit elliptique  $x^2 + y^2 + t^2$ , soit hyperbolique  $x^2 + y^2 - t^2$ . Sur les points et les droites, les résultats du chapitre précédent, voir 4.2.6, se traduisent comme suit :

- Dans le cas elliptique, le groupe  $PO(q)$  est transitif sur les points, les droites et les drapeaux.
- Dans le cas hyperbolique, le groupe  $PO(q)$  admet trois orbites sur les points :  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{T}$  et  $\Gamma$ , qui correspondent à  $q < 0$ ,  $q > 0$ ,  $q = 0$  et trois orbites sur les droites : les droites extérieures, sécantes ou tangentes, qui correspondent à  $q^* < 0$ ,  $q^* > 0$  et  $q^* = 0$ .

### 5.1 Longueurs

S'agissant de la transitivité sur les couples de points  $a, b$ , l'invariant  $I$  donne naissance, dans les géométries réelles, à une "vraie" distance<sup>1</sup>  $d(a, b)$ ,

---

1. Dans le cas hyperbolique on doit se limiter aux points de  $\mathbf{K}$ .

avec des formules presque identiques dans les deux cas. Précisément, si l'on pose  $d = d(a, b)$  et  $I = I(a, b)$ , la formule qui lie la distance  $d$  et l'invariant  $I$  est  $I = \cos^2 d$  dans le cas elliptique et  $I = \operatorname{ch}^2 d$  dans le cas hyperbolique. Le lecteur devra attendre d'avoir explicité la formule d'Al-Kashi pour vérifier l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.

### 5.1.1 Les valeurs de l'invariant $I$

La proposition suivante précise à la fois le signe de  $I(a, b)$  et sa position par rapport à 1 :

**5.1.1 Proposition.** *Soient  $a, b$  deux points distincts<sup>2</sup> non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ .*

- 1) *Dans le cas elliptique, on a  $0 \leq I(a, b) < 1$ .*
- 2) *Dans le cas hyperbolique, il faut distinguer trois cas, dont un triple :*
  - a) *si  $a$  et  $b$  sont tous deux dans  $\mathbf{K}$  on a  $I(a, b) > 1$ ,*
  - b) *si l'un des points est dans  $\mathbf{K}$  et l'autre dans  $\mathbf{T}$ , on a  $I(a, b) \leq 0$ ,*
  - c1) *si la droite  $(ab)$  est toute entière dans  $\mathbf{T}$  on a  $0 \leq I(a, b) < 1$ ,*
  - c2) *si  $a$  et  $b$  sont tous deux dans  $\mathbf{T}$  et si la droite  $(ab)$  est tangente on a  $I(a, b) = 1$ ,*
  - c3) *si  $a$  et  $b$  sont tous deux dans  $\mathbf{T}$  et si la droite  $(ab)$  est sécante on a  $I(a, b) > 1$ .*

*Démonstration.* Il suffit d'inspecter les signes de  $q(a), q(b)$  et de  $q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$  qui est le discriminant de  $q$  en restriction à la droite  $(ab)$  (ou plutôt au plan vectoriel associé). Ce discriminant est  $> 0$  pour une droite définie positive ou définie négative, nul pour une droite isotrope et  $< 0$  pour une droite hyperbolique.

**5.1.2 Remarque.** On vérifie qu'on obtient bien, dans chaque cas, tous les nombres  $I(a, b)$  que 5.1.1 permet. Pour cela on utilise en elliptique les points  $a = (1, 0, 0)$  et  $b = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ . En hyperbolique<sup>3</sup> on prend  $a = (0, 0, 1)$  (si  $a$  est dans  $\mathbf{K}$ ) et  $a = (1, 0, 0)$  (si  $a$  est dans  $\mathbf{T}$ ) et, selon les cas,  $b = (x, 0, 1)$  ou  $b = (x, y, 0)$  ou  $b = (1, 1, 1)$ . Cela permet de répondre à la question du calcul du quotient de l'ensemble des couples  $(a, b)$  de  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{K}$  sous l'action de  $PO(q)$ . On a ainsi, *via*  $I$ , une bijection canonique du quotient par  $PO(q)$  de  $\mathbf{E} \times \mathbf{E}$  sur  $[0, 1]$  et de  $\mathbf{K} \times \mathbf{K}$  sur  $[1, +\infty[$ . De plus, voir 4.7.9, l'application  $I$  est lisse sauf si les points sont confondus ou orthogonaux dans le cas elliptique (les cas  $I = 1$  ou 0) et sauf si les points sont confondus dans le cas hyperbolique (le cas  $I = 1$ ). Voir aussi exercice 5.6.1.

2. Rappelons qu'on a  $I(a, a) = 1$  si  $a$  est non isotrope.

3. Voir aussi 4.7.2.



## 5.1.2 Le cas elliptique

On suppose que  $q$  est la forme  $x^2 + y^2 + t^2$  sur  $\mathbf{R}$ . Elle définit donc une structure euclidienne sur  $\mathbf{R}^3$  et la forme  $\varphi$  n'est autre que le produit scalaire usuel. On note  $\|m\|$  la norme associée. Le plan elliptique  $\mathbf{E} = \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  peut être vu comme le quotient de la sphère  $\mathbf{S}^2$  (ensemble des triplets  $(x, y, t)$  vérifiant  $x^2 + y^2 + t^2 = 1$ ) par antipodie, voir 2.3.5. Rappelons qu'on appelle grand cercle une section de  $\mathbf{S}^2$  par un plan passant par son centre  $o = (0, 0, 0)$  et que les droites de  $\mathbf{E}$  sont les images des grands cercles de  $\mathbf{S}^2$ .

### Rappels sur la sphère

Nous rappelons ci-dessous quelques propriétés bien connues de la sphère pour lesquelles nous renvoyons à [Ber90] :

**5.1.3 Proposition.** *La formule  $\delta(a, b) = \text{Arccos } \varphi(a, b)$  définit sur  $\mathbf{S}^2$  une distance (dite intrinsèque). La distance des points  $a, b$  n'est autre que l'angle (non orienté) des demi-droites  $[oa]$  et  $[ob]$ . Cette distance est à valeurs dans  $[0, \pi]$ .*

On notera qu'on a bien  $|\varphi(a, b)| \leq 1$  en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**5.1.4 Remarque.** Il est clair que cette distance est la même que celle qui provient de la structure riemannienne de  $\mathbf{S}^2$ . En effet, comme la structure riemannienne est invariante par  $PO(q)$ , et comme le groupe est transitif sur les drapeaux, on se ramène au cas  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$  avec  $\theta \in [0, \pi]$ . Mais, dans ce cas, on a  $ds = d\theta$ , le calcul de la longueur est immédiat et on trouve bien  $\theta = \text{Arccos } \varphi(a, b)$ .

**5.1.5 Proposition.** *Soient  $a, b$  deux points distincts, non antipodes, de la sphère  $\mathbf{S}^2$  de  $\mathbf{R}^3$ .*

- 1) *Il existe un unique grand cercle passant par  $a, b$ .*
- 2) *Un et un seul des deux arcs de grand cercle joignant  $a$  et  $b$  est de longueur  $< \pi$ . On l'appelle **arc mineur** joignant  $a$  et  $b$  et sa longueur est  $\delta(a, b)$ .*
- 3) *L'arc mineur est l'ensemble des points  $m/\|m\|$  pour  $m \in [ab]$  (segment euclidien).*
- 4) *Si  $a, b$  sont dans un même demi-espace  $F$  défini par  $l > 0$ , où  $l$  est une forme linéaire sur  $\mathbf{R}^3$ , il en est de même de tous les points de l'arc mineur joignant  $a, b$ .*
- 5) *Si  $a, b, c$  sont trois points de  $\mathbf{S}^2$  non situés sur un même grand cercle, il existe une forme linéaire  $l$  telle que  $l(a), l(b), l(c) > 0$ .*

**5.1.6 Remarque.** On notera que les arcs joignant  $a$  et  $b$  admettent des paramétrisations évidentes (par exemple par les fonctions trigonométriques), c'est d'ailleurs ce qui permet de parler de leur longueur.

### La distance elliptique

Il y a deux voies équivalentes pour définir une distance sur  $\mathbf{E}$ , l'une à partir de l'invariant  $I$ , l'autre à partir de  $\delta$  par passage au quotient :

**5.1.7 Proposition-Définition.** Soient  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  deux points de  $\mathbf{P}(E)$ . On en choisit des représentants vérifiant  $q(a) = q(b) = 1$  (autrement dit, des points de la sphère unité de  $\mathbf{R}^3$ ). Alors, les deux nombres suivants sont égaux :

$$1) \quad \text{Arccos}(|\varphi(a, b)|) = \text{Arccos}(\sqrt{I(a, b)}),$$

$$2) \quad \text{Min}(\delta(a, b), \delta(a, -b)) = \text{Min}(\delta(a, b), \pi - \delta(a, b)).$$

Le nombre en question ne dépend pas du choix des représentants  $a, b$ , on le note  $d(\bar{a}, \bar{b})$  et on l'appelle **distance** de  $\bar{a}$  à  $\bar{b}$  dans  $\mathbf{E}$  ou encore **longueur** du segment  $[\bar{a}\bar{b}]$ . On peut encore noter<sup>4</sup>  $\bar{a}\bar{b}$  cette longueur. La longueur est bornée, elle varie dans  $[0, \pi/2]$ . On a  $I(a, b) = \cos^2 d(\bar{a}, \bar{b}) = \cos^2 \bar{a}\bar{b}$  ou encore  $\cos \bar{a}\bar{b} = |\varphi(a, b)|$ .

*Démonstration.* Posons  $d(\bar{a}, \bar{b}) = \text{Arccos}|\varphi(a, b)|$ . Comme on a  $\delta(a, b) = \text{Arccos}\varphi(a, b)$ , on a  $d = \delta$  si  $\varphi(a, b)$  est  $\geq 0$  (c'est-à-dire si  $\delta \leq \pi/2$  ou encore  $\delta \leq \pi - \delta$ ) et  $d = \pi - \delta$  sinon et la conclusion est immédiate.

### 5.1.8 Remarques.

0) La distance dans  $\mathbf{E}$  est celle sur la sphère, mais en choisissant les représentants les plus proches. Cela montre que cette distance est aussi la distance au sens riemannien.

1) La formule  $I(a, b) = \cos^2 d(a, b)$  et l'inégalité  $0 \leq d(a, b) \leq \pi/2$  montrent que la donnée de  $I$  et celle de  $d$  sont équivalentes.

2) La distance  $d(a, b)$  n'est autre que l'angle (au sens euclidien usuel) des **droites**  $(oa)$  et  $(ob)$  de  $\mathbf{R}^3$ .

3) Il est clair que  $d(a, b)$  est symétrique et elle est nulle si et seulement si  $a$  et  $b$  sont confondus (voir 4.3.5). Pour que le mot distance soit pleinement justifié il reste à vérifier l'inégalité triangulaire, ce qui sera fait en 6.1.6.

4) Si  $a, b$  sont des points quelconques de  $\mathbf{E}$  (pas nécessairement sur la sphère

---

4. Bien entendu, dès que la sphère aura le dos tourné, on s'empressera de noter, abusivement,  $d(a, b)$  ou  $ab$  cette distance.

$\mathbf{S}^2$ ), on a  $\cos ab = \frac{|\varphi(a, b)|}{\sqrt{q(a)q(b)}}$ . On en déduit la valeur absolue du spin :  
 $|S(a, b, c)| = \cos bc \cdot \cos ca \cdot \cos ab$ .

Le lemme évident suivant précise le cas d'égalité de  $d$  et  $\delta$  :

**5.1.9 Lemme.** *Soient  $a, b$  deux points de  $\mathbf{S}^2$  et soient  $\bar{a}$  et  $\bar{b}$  leurs images dans  $\mathbf{E}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1)  $\varphi(a, b) \geq 0$ ,
- 2)  $\delta(a, b) \leq \pi/2$ ,
- 3)  $d(\bar{a}, \bar{b}) = \delta(a, b)$ .

### Condition d'alignement

Le corollaire d'Al-Kashi (voir 4.5.13) ou la relation fondamentale (voir Partie III ??) donnent la condition suivante :

**5.1.10 Proposition.** *Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{E}$ . On note  $\alpha = bc$ ,  $\beta = ca$ ,  $\gamma = ab$  les longueurs des segments  $[bc]$ ,  $[ca]$ ,  $[ab]$ . Les points  $a, b, c$  sont alignés si et seulement si on a la relation :*

$$1 + 2\epsilon \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma,$$

où  $\epsilon = \pm 1$  désigne le signe du spin  $S(a, b, c)$ .

*Démonstration.* La condition vue en 4.5.13 est  $2S(a, b, c) = I(b, c) + I(c, a) + I(a, b) - 1$  et on conclut avec  $S(a, b, c)^2 = I(b, c)I(c, a)I(a, b)$ , voir 4.5.2.

**5.1.11 Remarques.**

- 1) Si deux points sont orthogonaux, par exemple  $b$  et  $c$ , le spin est nul, mais aussi  $\cos \alpha$ , de sorte que le signe  $\epsilon$  est sans importance.
- 2) La formule est à comparer avec l'identité trigonométrique :

$$\cos^2(\beta + \gamma) + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 + 2 \cos \beta \cos \gamma \cos(\beta + \gamma).$$

**5.1.12 Corollaire.** *Avec les notations précédentes, les points  $a, b, c$  sont alignés si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :*

- 1) le spin de  $a, b, c$  est positif et l'on a  $\alpha = \beta + \gamma$  ou  $\beta = \gamma + \alpha$  ou  $\gamma = \alpha + \beta$ ,
- 2) le spin de  $a, b, c$  est négatif et l'on a  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

*Si deux des points sont orthogonaux (disons  $b$  et  $c$ ), on a à la fois les deux conditions :  $\alpha = \pi/2 = \beta + \gamma$  et  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .*

*Démonstration.* La relation de 5.1.10 peut se voir comme une équation du second degré en  $\cos \alpha$  qui se résout en :

$$\cos \alpha = \epsilon \cos \beta \cos \gamma \pm \sin \beta \sin \gamma.$$

Si on a  $\epsilon = 1$ , cette relation devient  $\cos \alpha = \cos(\beta + \gamma)$  ou  $\cos \alpha = \cos(\beta - \gamma)$ , ce qui, comme  $\alpha, \beta, \gamma$  sont dans  $[0, \pi/2]$ , conduit à  $\alpha = \beta + \gamma$  ou  $\alpha = |\beta - \gamma|$ .

Si on a  $\epsilon = -1$ , le signe  $-$  est impossible (sauf si  $\cos \alpha$  est nul) et il reste seulement  $\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$ , soit  $\cos(\pi - \alpha) = \cos(\beta + \gamma)$ , donc  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ .

Enfin, si on a  $\cos \alpha = 0$ , donc  $\alpha = \pi/2$ , la relation se réduit à  $\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  qui donne  $\cos \beta = \sin \gamma$ , donc  $\gamma = \pi/2 - \beta$  et la conclusion.

## Pythagore

Le théorème de Pythagore multiplicatif 4.3.7 se traduit ici sous la forme suivante (comme les angles sont dans  $[0, \pi/2]$  leurs cosinus sont positifs) :

**5.1.13 Proposition. (Pythagore)** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ , rectangle en  $a$  et posons  $\alpha = bc, \beta = ca, \gamma = ab$ . On a la relation  $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$ .*

## 5.1.3 Le cas hyperbolique

### La formule de Laguerre et les longueurs

Dans le cas du corps des réels et des points du disque de Klein, nous allons définir une distance, en utilisant la formule de Laguerre, voir 4.3.10 :

**5.1.14 Proposition-Définition.** *Soient  $a, b \in \mathbf{K}$  deux points distincts, soient  $i, j$  les points d'intersection de  $(ab)$  et de  $\Gamma$  et posons<sup>5</sup>  $r(a, b) = \llbracket a, b, i, j \rrbracket$ .*

0) *Le birapport  $r$  est  $> 0$ .*

1) *On a la relation  $I(a, b) \geq 1$ .*

2) *On a l'égalité  $\text{Argch} \sqrt{I(a, b)} = \frac{1}{2} |\ln(r(a, b))| = \frac{1}{2} |\ln(r(a, b)^{-1})|$ . Cette quantité est notée  $d(a, b)$  et appelée **distance** de  $a$  à  $b$  ou encore **longueur** du segment  $[ab]$  et parfois notée  $ab$ . On a  $I(a, b) = \text{ch}^2 d(a, b) = \text{ch}^2 ab$ . Avec*

*la convention 2.4.8 on a  $\text{ch} ab = \frac{-\varphi(a, b)}{\sqrt{q(a)q(b)}}$ .*

*Démonstration.*

---

5. Si l'on échange  $i$  et  $j$  le birapport est changé en son inverse et la distance ne change pas.

Le birapport est positif car les points  $a, b$  sont strictement entre  $i$  et  $j$ . Le point 1) a été vu en 5.1.1. (On peut aussi noter que  $r + r^{-1}$  est  $\geq 2$  et utiliser 4.3.10.) Pour le point 2), posons  $r = r(a, b)$  et  $d = \frac{1}{2} |\ln(r)|$ . On a donc  $r = e^{2d}$  ou  $r^{-1} = e^{2d}$  et, dans les deux cas, en vertu de 4.3.10,  $I(a, b) = \frac{r + r^{-1}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{\text{ch } 2d + 1}{2} = \text{ch}^2 d$ . Comme  $d$  est  $> 0$  on a la formule annoncée.

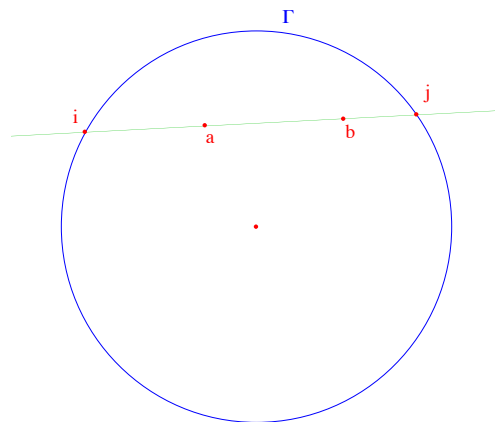


FIGURE 5.1 – Les points  $a, b, i, j$

**5.1.15 Remarque.** La distance ainsi définie est symétrique et n'est nulle que si les points coïncident (voir 4.3.5). Comme dans le cas elliptique il reste à montrer qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire, ce qui sera fait en 6.1.12. Pour le spin, voir 6.4.3.

### Condition d'alignement

**5.1.16 Proposition.** Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{K}$ . On pose  $\alpha = bc$ ,  $\beta = ca$ ,  $\gamma = ab$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) Les points  $a, b, c$  sont alignés.
- 2) On a la relation  $1 + 2\text{ch } \alpha \text{ch } \beta \text{ch } \gamma - \text{ch}^2 \alpha - \text{ch}^2 \beta - \text{ch}^2 \gamma = 0$ .
- 3) On a  $\alpha = \beta + \gamma$  ou  $\beta = \gamma + \alpha$  ou  $\gamma = \alpha + \beta$ .

Plus précisément, si  $a, b, c$  sont alignés et si  $b$  est entre  $a$  et  $c$  on a  $\beta = \alpha + \gamma$ .

*Démonstration.* L'équivalence de 1) et 2) vient du corollaire d'Al-Kashi 4.5.13 (ou de la relation fondamentale, voir Partie III ??). En effet, dans le cas de trois points de  $\mathbf{K}$ , le spin est  $> 0$  et on a  $S(a, b, c) = \text{ch } \alpha \text{ch } \beta \text{ch } \gamma$ . Pour établir le point 3) il suffit de résoudre en  $\text{ch } \alpha$  l'équation fournie par 2) et d'utiliser la trigonométrie hyperbolique.

Enfin, pour l'assertion de position, on peut, par transitivité sur les drapeaux, se ramener au cas où l'on a  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (x, 0, 1)$  et  $c = (y, 0, 1)$  avec  $0 < x < y < 1$ . On calcule alors facilement le birapport  $r(a, b)$  et les autres (on a  $i = (-1, 0, 1)$  et  $j = (1, 0, 1)$ ). On trouve  $r(a, b) = \frac{1-x}{1+x}$ ,  $r(a, c) = \frac{1-y}{1+y}$  et  $r(b, c) = \frac{1+x}{1+y} \times \frac{1-y}{1-x}$ , d'où  $r(a, c) = r(a, b) r(b, c)$  et on

a le résultat en prenant les logarithmes<sup>6</sup>.

## Pythagore

Comme dans le cas elliptique on a une traduction du théorème de Pythagore multiplicatif 4.3.7 :

**5.1.17 Proposition. (Pythagore)** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ , rectangle en  $a$ . On pose  $\alpha = bc, \beta = ca, \gamma = ab$ . On a la formule  $\operatorname{ch} \alpha = \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \gamma$ .*

**5.1.18 Remarque.** Avec la distance définie ci-dessus, on n'a pas le théorème de Pythagore usuel :  $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ , comme on le vérifie par un petit calcul (prendre par exemple :  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (1/2, 0, 1)$ ,  $c = (0, 1/2, 1)$ ). On peut cependant, voir exercice 5.6.3, trouver une distance, invariante par isométrie, qui vérifie le théorème de Pythagore sous la forme euclidienne, mais cette distance ne vérifie plus la propriété d'additivité pour les segments vue en 5.1.16.

## Distance et géodésiques

La définition de  $d(a, b)$  donnée en 5.1.14 peut paraître mystérieuse. Elle est cependant assez naturelle, pour plusieurs raisons. D'abord, on a vu que l'invariant  $I(a, b)$  décrit le défaut de double transitivité du groupe  $PO(q)$  sur les points, ce qui est aussi la propriété fondamentale d'une distance (voir la discussion qui précède 4.3.1). Comme  $d(a, b)$  est liée à  $I$  par la relation  $I = \operatorname{ch}^2 d$ , elle a aussi cette propriété. Ensuite, la distance ci-dessus est la même que celle associée aux structures riemanniennes vues au chapitre 2. En effet, quitte à faire agir le groupe, on se ramène à calculer la distance des points  $a = (0, 0, 1)$  et  $b = (\operatorname{th} \beta \cos \theta, \operatorname{th} \beta \sin \theta, 1)$  (avec  $\beta > 0$ ) de  $\mathbf{K}$ . Or nous avons montré (voir remarque 2.4.27) que la distance au sens riemannien de ces points est égale à  $\beta$ . Comme on a  $I(a, b) = \frac{1}{1 - \operatorname{th}^2 \beta} = \operatorname{ch}^2 \beta$ , on voit que cette distance est bien égale à celle définie ci-dessus.

Comme les géodésiques sont les droites dans tous les modèles, cela justifie de définir la distance dans le modèle du disque de Poincaré par la même formule :

**5.1.19 Définition.** *Soient  $a, b \in \mathbf{D}$  deux points distincts. La droite  $(ab)$  (au sens hyperbolique, c'est-à-dire l'arc de cercle orthogonal au bord  $\Gamma$  de  $\mathbf{D}$  et passant par  $a, b$ ) coupe  $\Gamma$  en  $i$  et  $j$ . On pose  $d(a, b) = \frac{1}{2} |\ln(\llbracket a, b, i, j \rrbracket)|$ .*

---

6. On notera que tous les birapports sont  $< 1$ .

## Un théorème d'unicité

En fait, le théorème suivant montre qu'il n'y a pas le choix pour définir une distance raisonnable dans le plan hyperbolique :

**5.1.20 Théorème.** *À un scalaire près, la distance  $d$  définie ci-dessus est la seule distance sur  $\mathbf{K}$  qui soit invariante par isométrie et qui vérifie la propriété d'additivité vue en 5.1.16.*

*Démonstration.* On note  $d$  la distance définie en 5.1.14 et on suppose donnée une autre distance  $\delta$  vérifiant les conditions du théorème. On considère les points  $o = (0, 0, 1)$ ,  $u = (1/2, 0, 1)$  et  $j = (1, 0, 1)$ . Quitte à multiplier  $d$  et  $\delta$  par un scalaire, on peut supposer qu'on a  $\delta(o, u) = d(o, u) = 1$  et il s'agit alors de montrer qu'on a  $\delta(a, b) = d(a, b)$  pour deux points quelconques  $a, b$  de  $\mathbf{K}$ . Il est clair qu'on peut, par transitivité sur les drapeaux, se ramener au cas où  $a$  est égal à  $o$  et où  $b$  est dans l'intervalle  $[o, j[$ . Pour deux points  $b, c$  de cet intervalle, avec  $b$  entre  $o$  et  $c$ , on a alors la propriété d'additivité  $d(o, c) = d(o, b) + d(b, c)$  et  $\delta(o, c) = \delta(o, b) + \delta(b, c)$ .

Nous allons définir une application bijective croissante  $\Phi : \mathbf{R}^+ \rightarrow [o, j[$  qui vérifie pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}^+$ ,  $d(o, \Phi(\lambda)) = \delta(o, \Phi(\lambda)) = \lambda$ , ce qui donnera le résultat.

On commence par définir, par récurrence sur  $p \in \mathbf{N}$ , les points  $\Phi(p)$ . On pose  $\Phi(0) = o$  et  $\Phi(1) = u$  et, pour  $p \geq 1$ , on définit le point  $\Phi(p+1)$  comme le symétrique (au sens hyperbolique) de  $\Phi(p-1)$  par rapport à  $\Phi(p)$ . On montre par récurrence, grâce aux propriétés d'additivité et d'invariance de  $d$  et  $\delta$ , qu'on a  $d(o, \Phi(p)) = \delta(o, \Phi(p)) = p$ .

On définit ensuite, par récurrence sur  $q \in \mathbf{N}$ , le point  $\Phi(p/2^{q+1})$  comme le milieu (au sens hyperbolique) de  $o$  et de  $\Phi(p/2^q)$ . On note que, sur les nombres dyadiques  $\frac{p}{2^q}$ , l'application  $\Phi$  est croissante et on montre par récurrence, en utilisant les propriétés d'additivité et d'invariance, qu'on a  $d(o, \Phi(p/2^q)) = \delta(o, \Phi(p/2^q)) = p/2^q$ .

Si  $x$  est un réel quelconque, il existe deux suites adjacentes  $a_n \leq x \leq b_n$  de nombres dyadiques tendant vers  $x$  et on définit  $\Phi(x)$  comme la limite commune des suites adjacentes  $\Phi(a_n)$  et  $\Phi(b_n)$ . Il est clair que  $\Phi$  est croissante et qu'on a la formule  $d(o, \Phi(x)) = \delta(o, \Phi(x)) = x$ . Cette dernière formule montre que  $\Phi$  est surjective et qu'on a  $d(o, b) = \delta(o, b)$  pour tout  $b \in [o, j[$ .

### 5.1.21 Remarques.

1) Il n'y a pas de bonne notion de distance pour les points de  $\mathbf{T}$ . On pourrait être tenté de poser  $d(a, b) = \text{Arccos} \sqrt{I(a, b)}$  comme dans le cas elliptique (au moins lorsque  $I$  est inférieur ou égal<sup>7</sup> à 1). Mais on voit aussitôt que

7. On sait que ce n'est pas toujours vrai. Dans ce cas, cette quantité a un sens géométrique comme angle des polaires, voir ci-dessous.

l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée (prendre  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (0, 1, 0)$  et  $c = (x, y, 1)$  avec  $x, y > 1$  mais proches de 1, par exemple  $x = y = 1, 1$ , on a alors  $d(a, b) = \pi/2 > d(a, c) + d(b, c)$ ).

2) On peut définir une notion de mesure algébrique pour deux points  $a, b$  d'une droite hyperbolique  $D$ . Pour cela, on considère les deux points isotropes de  $D$  et on choisit lequel on appelle  $i$  et lequel on appelle  $j$  (on oriente donc la droite  $D$ ). Si  $a$  et  $b$  sont deux points de  $D$  on pose alors  $r(a, b) = \llbracket a, b, i, j \rrbracket = \llbracket i, j, a, b \rrbracket$  et  $\overline{ab} = -\frac{1}{2} \ln r(a, b)$ . On vérifie (comme dans la preuve de 5.1.16) que la mesure algébrique est positive si et seulement si les points sont dans l'ordre  $i, a, b, j$  sur  $D$  (c'est-à-dire si  $a$  est entre  $i$  et  $b$ ). On verra en 8.8.5 que la mesure algébrique est invariante par les translations et les symétries glissées de  $D$ , mais changée en son opposée par les symétries par rapport aux points de  $D$ .

## 5.2 Angles de droites

### 5.2.1 Définition

La proposition 5.1.1 donne aussitôt par polarité le corollaire suivant :

**5.2.1 Corollaire.** Soient  $A, B$  deux droites non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ .

1) Dans le cas elliptique, on a  $0 \leq I^*(A, B) \leq 1$ .

2) Dans le cas hyperbolique, il faut distinguer trois cas, dont un triple :

a) si  $A$  et  $B$  sont toutes deux extérieures on a  $I^*(A, B) \geq 1$ ,

b) si l'une des droites est sécante et l'autre extérieure, on a  $I^*(A, B) \leq 0$ ,

c1) si  $A$  et  $B$  se coupent dans  $\mathbf{K}$  (droites hyperboliques du modèle de Klein) on a  $0 \leq I^*(A, B) < 1$ ,

c2) si  $A$  et  $B$  se coupent sur  $\Gamma$  on a  $I^*(A, B) = 1$ ,

c3) si  $A$  et  $B$  sont toutes deux sécantes à  $\Gamma$  et si elles se coupent dans  $\mathbf{T}$ , on a  $I^*(A, B) > 1$ .

**5.2.2 Définition.** Dans le cas elliptique comme dans le cas des droites sécantes du modèle hyperbolique de Klein on pose  $I^*(A, B) = \cos^2 \theta$  avec  $\theta \in [0, \pi/2]$ . Le nombre  $\theta$  est l'angle (non orienté) des droites  $A, B$ . On le note  $|A, B|$ .

**5.2.3 Remarque.** Dans les deux cas, l'angle des droites  $A, B$  est égal à  $\pi/2$  si et seulement si elles sont perpendiculaires et il est nul si et seulement si les droites sont égales.

On a une condition de concours de trois droites, analogue à la condition d'alignement de trois points, voir 5.6.13.



## 5.2.2 Formule de Laguerre pour les angles

Le lecteur qui connaît la vraie formule de Laguerre trouvera sans doute qu'elle ressemble plus à celle qui suit et qui concerne les angles qu'à celle que nous avons donnée plus haut avec les distances. Qu'il n'oublie pas qu'avec la polarité angles et distances sont une seule et même chose ...

On suppose que  $A, B$  sont, soit deux droites du modèle elliptique, soit deux droites hyperboliques du modèle de Klein se coupant dans  $\mathbf{K}$ . On note  $o$  le point d'intersection de  $A, B$ . Bien entendu, il n'y a pas de droites isotropes (i.e. tangentes à  $\Gamma$ ) issues de  $o$  sur  $\mathbf{R}$ . En revanche, sur  $\mathbf{C}$ , il y a deux telles droites (voir Partie III ??) que l'on note  $I$  et  $J$ . On a alors la proposition suivante :

**5.2.4 Proposition.** *Avec les notations précédentes, posons  $I^*(A, B) = \cos^2 \theta$ , avec  $\theta \in [0, \pi/2]$  et  $r = \llbracket A, B, I, J \rrbracket$ . On a la formule :  $r = e^{\pm 2i\theta}$ , soit  $\frac{1}{2} |\ln r| = \theta$ .*

*Démonstration.* En vertu de la formule de Laguerre 4.3.10, on a  $4I^*(A, B) = 4 \cos^2 \theta = r + r^{-1} + 2$ . On en déduit  $2 \cos 2\theta = r + r^{-1}$ . En résolvant l'équation du second degré on a  $r = e^{\pm 2i\theta}$ , d'où le résultat (en prenant la partie imaginaire du logarithme complexe entre  $-\pi$  et  $\pi$ ).

## 5.2.3 Calcul de l'angle de droites : le cas elliptique

On reprend les notations du début du chapitre et notamment celles de 5.1.3 et 5.1.7. On commence par calculer l'angle des droites  $(ab)$  et  $(ac)$  dans un cas particulier :

**5.2.5 Lemme.** *On considère trois points  $a, b, c$  de la sphère unité :  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (1, 0, 0)$  et  $c = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ , avec  $\theta \in [0, \pi/2]$ , et leurs images dans  $\mathbf{E}$ , notées encore  $a, b, c$ . On a  $I^*((ab), (ac)) = \cos^2 \theta$  et  $((ab), (ac)) = \theta$ .*

*Démonstration.* C'est un calcul évident avec la définition de l'angle, celle de  $I^*$  et la remarque 4.4.6.

Le cas général se déduit du cas particulier par transitivité :

**5.2.6 Corollaire.** *Soient  $B$  et  $C$  deux droites de  $\mathbf{E}$ , concourantes en  $\bar{a}$  et soient  $\bar{b} \in B$  et  $\bar{c} \in C$  les points orthogonaux à  $\bar{a}$ . On choisit des relèvements  $a, b, c$  de ces points sur la sphère  $\mathbf{S}^2$  de centre  $o$  qui vérifient  $\varphi(b, c) \geq 0$  (donc  $d(b, c) = \delta(b, c)$ ). On a alors  $|B, C| = \text{Arccos } \varphi(b, c)$  et cet angle est aussi :*

- 1) l'angle (euclidien) des demi-droites  $[ob)$  et  $[oc)$ ,
- 2) l'angle (euclidien) des tangentes en  $a$  aux arcs mineurs  $\widehat{ab}$  et  $\widehat{ac}$  (voir 5.1.5),
- 3) la distance (elliptique) des pôles de  $B$  et  $C$ .

*Démonstration.* Posons  $a_0 = (0, 0, 1)$ ,  $b_0 = (1, 0, 0)$ . Comme on a  $\varphi(a, b) = \varphi(a_0, b_0) = 0$ , le théorème de Witt montre qu'il existe une isométrie  $u \in O(q)$  qui envoie  $a$  sur  $a_0$  et  $b$  sur  $b_0$  et elle envoie  $c$  sur un point  $c_0 \in \mathbf{S}^2$ , orthogonal à  $a$ , donc de la forme  $(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ . On a alors  $\varphi(b, c) = \varphi(b_0, c_0) = \cos \theta \geq 0$  et on peut donc supposer  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Posons  $B_0 = (a_0 b_0)$  et  $C_0 = (a_0 c_0)$ . Comme  $I^*$  est un invariant sous  $PO(q)$ , on a  $I^*(B, C) = I^*(B_0, C_0) = \cos^2 \theta$ .

On vérifie que, dans le cas de  $a_0, b_0, c_0$ ,  $\theta$  est bien à la fois l'angle euclidien des rayons et celui des tangentes en  $a_0$  (car les tangentes sont parallèles au plan  $xy$ , voir figure ci-contre). Comme  $u$  est une isométrie euclidienne de  $E = \mathbf{R}^3$ , la même propriété vaut en  $a$  et  $b$  et on a le résultat.

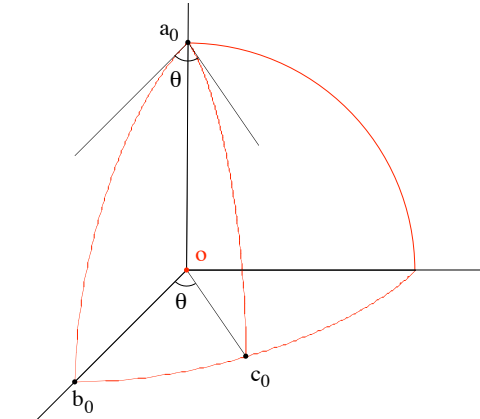


FIGURE 5.2 – Angle sur la sphère

Le point 3) est un résultat général, voir 4.4.4.

**5.2.7 Remarque.** Comme la projection stéréographique est conforme, dans le cas du modèle **KE**, l'angle des droites  $B, C$  sécantes en  $a$  est l'angle (de droites, au sens euclidien) des tangentes en  $a$  aux arcs qui représentent  $B$  et  $C$ .

## 5.2.4 Calcul de l'angle de droites : le cas hyperbolique

Dans le modèle de Klein, on sait que les droites hyperboliques sont aussi des droites au sens euclidien. La proposition suivante montre que les angles de droites "à l'origine" sont des angles à la fois au sens euclidien et au sens hyperbolique :

**5.2.8 Proposition.** Soient  $A$  et  $B$  deux droites hyperboliques de **K**, passant par  $o = (0, 0, 1)$ . On choisit deux vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  directeurs (au sens euclidien) de  $A$  et  $B$ . Soit  $\theta$  l'angle non orienté de  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  au sens euclidien, c'est-à-dire le nombre  $\text{Arccos} \left( \frac{(\vec{a}|\vec{b})}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \right) \in [0, \pi]$ . On a  $I^*(A, B) = \cos^2 \theta$  et l'angle de droites  $|A, B|$  au sens hyperbolique est égal à  $\text{Min}(\theta, \pi - \theta)$  et c'est aussi l'angle de droites  $|A, B|$  au sens euclidien.

*Démonstration.* On peut écrire les équations des droites sous la forme  $A = a_1X + a_2Y$  et  $B = b_1X + b_2Y$ . On obtient :  $I^*(A, B) = \frac{(a_1b_1 + a_2b_2)^2}{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$ .

Par ailleurs, on peut prendre  $\vec{a} = (a_2, -a_1)$  et  $\vec{b} = (b_2, -b_1)$ . On en déduit  $(\vec{a}|\vec{b}) = a_1b_1 + a_2b_2$ ,  $\|\vec{a}\|^2 = a_1^2 + a_2^2$  et  $\|\vec{b}\|^2 = b_1^2 + b_2^2$ , d'où le résultat annoncé.

### 5.2.9 Remarques.

1) On rappelle qu'il s'agit d'angles de droites non orientés. Pour une variante avec des angles de demi-droites, voir 5.5.14.

2) Attention, la proposition précédente n'est valable qu'à l'origine dans le modèle  $\mathbf{K}$ . Par exemple, si on prend une droite hyperbolique  $D$  ne passant pas par  $o$ , on considère son pôle  $d$  (qui est dans  $\mathbf{T}$ , mais à distance finie). Alors, toutes les droites  $\Delta$  passant par  $d$  sont perpendiculaires à  $D$  au sens hyperbolique, mais pas au sens euclidien ! Dans le modèle de Poincaré, en revanche, on a la proposition suivante, valable en tout point :

**5.2.10 Proposition.** *Si  $A$  et  $B$  sont deux droites du modèle de Poincaré  $\mathbf{D}$ , se coupant en  $a \in \mathbf{D}$ , et si  $\theta \in [0, \pi/2]$  est l'angle euclidien de  $A$  et  $B$ , i.e. l'angle (de droites) des tangentes en  $a$  aux arcs de cercles  $A$  et  $B$ , on a  $I^*(A, B) = \cos^2 \theta$  et  $|A, B| = \theta$ .*

*Démonstration.* La propriété est vraie en  $o$  car les droites sont rectilignes donc les mêmes que dans le modèle de Klein. Comme les éléments de  $PO(q)$  sont des transformations conformes de  $\mathbf{D}$  et que  $PO(q)$  est transitif sur les points, elle est vraie partout.

## 5.3 Distance d'un point à une droite

Soit  $D$  une droite (non isotrope) de  $\mathbf{P}(E)$ ,  $d$  son pôle et  $a$  un point (non isotrope). On rappelle que, si  $a$  est distinct de  $d$ , le projeté orthogonal  $n$  de  $a$  sur  $D$  est le point d'intersection de  $D$  et de  $(ad)$ . Si  $a$  et  $D$  sont dans  $\mathbf{K}$ , le projeté de  $a$  sur  $D$  est aussi dans  $\mathbf{K}$  (car le triangle  $a, d, n$  est autopolaire). On a vu, cf. 4.4.8, que l'invariant de transitivité pour un couple point-droite  $(a, D)$  n'est autre que  $I(a, d)$ . Il revient au même de considérer  $I(a, n)$  en vertu de la formule  $I(a, d) + I(a, n) = 1$ , voir 4.5.15. Dans le cas réel, nous allons montrer que cet invariant correspond au minimum des distances de  $a$  aux points de  $D$ .

**5.3.1 Proposition.** *Soit  $D$  une droite (non isotrope),  $d$  son pôle,  $a$  un point non isotrope distinct de  $d$  et tel que  $(ad)$  ne soit pas isotrope. Soit  $n$  le projeté orthogonal de  $a$  sur  $D$  et soit  $m$  un point non isotrope de  $D$ .*

- 1) On a  $I(a, m) \leq I(a, n)$  dans le cas elliptique.
- 2) Dans le cas hyperbolique on a  $I(a, m) \geq I(a, n)$  lorsque  $D$  est une droite hyperbolique et lorsque les points  $a$  et  $m$  sont de même nature (i.e. tous deux dans  $\mathbf{K}$  ou tous deux dans  $\mathbf{T}$ ), ou encore lorsque  $D$  est une droite extérieure et  $a$  un point de  $\mathbf{K}$ . Dans les autres cas on a  $I(a, m) \leq I(a, n)$ .

Dans tous les cas, l'égalité n'a lieu que si les points  $m$  et  $n$  sont égaux.

*Démonstration.* Comme  $(ad)$  est non isotrope,  $n$  ne l'est pas non plus. Les points  $d$  et  $n$  sont orthogonaux. On les complète en une base orthogonale  $d, n, e$ . Comme  $a$  est sur  $(nd)$ , on peut écrire  $a = xd + yn$ . Le point  $e$  est orthogonal à  $d$  donc il est sur  $D$  et, comme  $m$  est un point de  $D$ , on a  $m = zn + te$ . Un calcul immédiat donne  $I(a, n) = \frac{y^2 q(n)}{q(a)}$  et  $I(a, m) = \frac{y^2 z^2 q(n)^2}{q(a)q(m)}$ , d'où  $I(a, n) - I(a, m) = \frac{q(n)q(e)y^2 t^2}{q(a)q(m)}$ . Le résultat est alors évident dans le cas elliptique où tous les nombres  $q(n)$ ,  $q(e)$ ,  $q(a)$ ,  $q(m)$  sont positifs et il s'obtient en distinguant les signes possibles dans le cas hyperbolique (on notera que  $q(n)q(d)$  est le discriminant de  $q|_D$ ).

L'assertion sur le cas d'égalité est évidente avec la formule.

**5.3.2 Corollaire.** Avec les notations de la proposition précédente, on a  $d(a, n) \leq d(a, m)$  :

- 1) pour tout  $m \in D$  dans le cas elliptique,
- 2) pour tout  $m \in D \cap \mathbf{K}$ , dans le cas hyperbolique, lorsque  $a$  est un point de  $\mathbf{K}$  et  $D$  une droite hyperbolique.

L'égalité n'a lieu que si les points  $m$  et  $n$  sont égaux.

*Démonstration.* En effet, on a  $I(a, n) = \cos^2 d(a, n)$  dans le cas elliptique et  $I(a, n) = \operatorname{ch}^2 d(a, n)$  dans le cas hyperbolique et la conclusion vient de la décroissance (resp. la croissance) de la fonction  $\cos$  (resp.  $\operatorname{ch}$ ). (Dans le cas hyperbolique, comme  $d$  est extérieur, on vérifie que le point  $n$  est bien dans  $\mathbf{K}$ .)

Le résultat suivant montre que l'intuition des parallèles vues comme équidistantes est fautive en géométrie hyperbolique, contrairement à ce que croyait notamment Proclus :

**5.3.3 Proposition.** On travaille dans le plan hyperbolique  $\mathbf{K}$ . Soient  $D_1$  et  $D_2$  deux droites qui ne se coupent pas et soit  $\Delta$  leur perpendiculaire commune, qui coupe  $D_i$  en  $a_i$ . Alors, si  $b_i$  est un point de  $D_i$  on a  $d(b_1, b_2) \geq d(a_1, a_2)$  et l'égalité n'a lieu que pour  $b_1 = a_1$  et  $b_2 = a_2$ .

*Démonstration.* Une manière de faire est de calculer en utilisant une situation particulière grâce à la transitivité. Pour une preuve utilisant Al-Kashi, voir

6.10.2. On peut prendre par exemple pour  $D_1$  la droite  $y = 0$ , avec  $a_1 = (0, 0, 1)$  et  $b_1 = (x, 0, 1)$ . La perpendiculaire à  $D_1$  en  $a_1$  est alors la droite  $x = 0$  sur laquelle on prend  $a_2 = (0, \beta, 1)$ , la perpendiculaire  $D_2$  est la droite  $y = \beta$  et on peut écrire  $b_2 = (u, \beta, 1)$ , avec des nombres  $x, u$  et  $\beta$  compris entre  $-1$  et  $1$ . Il s'agit de montrer qu'on a :

$$I(b_1, b_2) = \frac{(ux - 1)^2}{(1 - x^2)(1 - u^2 - \beta^2)} \geq I(a_1, a_2) = \frac{1}{1 - \beta^2}.$$

Mais cette inégalité est équivalente à :

$$x^2 + u^2 - 2ux \geq \beta^2(x^2 + u^2 - 2ux)$$

et celle-ci résulte de  $x^2 \leq 1$  et  $\beta^2 \leq 1$ .

Sur la figure ci-contre, le minimum de la distance entre les droites non sécantes  $D_1$  et  $D_2$  n'est atteint qu'en les points d'intersection  $a_1$  et  $a_2$  avec la perpendiculaire commune.

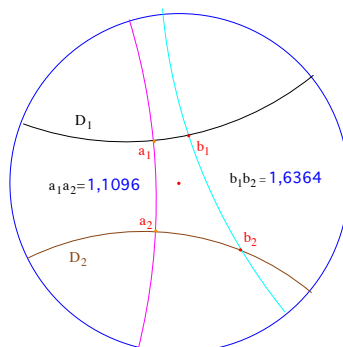


FIGURE 5.3 – Les parallèles ne sont pas équidistantes

## 5.4 Demi-droites et segments

Le fait que  $\mathbf{R}$  soit un corps ordonné va nous permettre de définir des demi-droites et des segments. Notons que dans le cas du modèle de Klein hyperbolique  $\mathbf{K}$  on peut aussi parler de demi-plans (ce sont simplement les traces sur  $\mathbf{K}$  des demi-plans affines). En revanche, il n'y a de demi-plans ni dans  $\mathbf{E}$ , ni dans  $\mathbf{T}$  (le complémentaire d'une droite extérieure est connexe comme on le voit en regardant la droite de l'infini).

### 5.4.1 Demi-droites et segments d'une droite projective isolée

#### Demi-droites

Soit  $D$  une droite projective sur  $\mathbf{R}$  et soient  $a$  et  $b$  deux points distincts de  $D$ . Comme  $D$  est homéomorphe à un cercle, l'ensemble  $D - \{a, b\}$  admet deux composantes connexes qui sont homéomorphes à des intervalles ouverts de  $\mathbf{R}$  (et on les appellera ainsi). Elles sont décrites par le lemme suivant :

**5.4.1 Lemme.** *Deux points  $c$  et  $d$ , distincts de  $a$  et  $b$ , sont dans le même intervalle limité par  $a$  et  $b$  si et seulement si on a  $\llbracket a, b, c, d \rrbracket > 0$ .*

*Démonstration.* On peut supposer  $D = \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ ,  $a = \infty$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$ , les deux composantes sont  $] -\infty, 0[$  et  $]0, \infty[$  et on a  $d = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$  et le résultat.

**5.4.2 Remarque.** Si on a quatre points distincts  $a, b, c, d$  sur la droite  $D$ , le signe de  $\llbracket a, b, c, d \rrbracket$  ne dépend que de la paire de paires  $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ . On dira que les paires sont **entrelacées** si ce birapport est  $< 0$ . Cela signifie que les points  $c$  et  $d$  sont dans deux intervalles  $]a, b[$  différents et inversement. Autrement dit, chacun des points d'une paire est voisin des points de l'autre paire, mais pas de son "com-paire".

En l'absence de donnée supplémentaire, il n'y a pas de raison de privilégier l'un de ces intervalles et la notion de point situé entre  $a$  et  $b$  n'a donc pas de sens et avec elle les notions de demi-droites, etc. En revanche, avec une forme quadratique, les choses prennent un sens :

**5.4.3 Définition.** *Soit  $V$  un plan vectoriel réel, muni d'une forme  $q$  non dégénérée et soit  $D = \mathbf{P}(V)$  la droite projective associée. Soient  $a, b$  deux points de  $D$ . On suppose  $a$  non isotrope,  $b$  distinct de  $a$  et non orthogonal à  $a$ . Soit  $a'$  l'orthogonal de  $a$ . La **demi-droite**  $[ab)$  est, par définition, celui des deux intervalles ouverts limités par  $a$  et  $a'$  qui contient  $b$ , c'est-à-dire l'ensemble des points  $m$  vérifiant  $\llbracket a, a', b, m \rrbracket > 0$ , auquel on ajoute le point  $a$ . Si on écrit  $b = \lambda a + \mu a'$  et  $m = x a + y a'$ , avec  $\lambda, \mu, x, y \in \mathbf{R}^*$ , il revient au même de dire que  $\lambda\mu$  et  $xy$  sont de même signe.*

#### 5.4.4 Remarques.

1) Il est essentiel de garder à l'esprit que la notion de demi-droite  $[ab)$  n'est définie qu'à trois conditions : que la forme  $q$  soit non dégénérée sur la droite  $(ab)$ , que  $a$  soit non isotrope et que  $b$  soit non orthogonal<sup>8</sup> à  $a$ . On supposera

2) Il y a deux demi-droites (dites opposées) d'origine  $a$  sur  $D$  qui correspondent aux deux intervalles ouverts limités par  $a$  et  $a'$  (une demi-droite issue de  $a$  va donc jusqu'à l'orthogonal de  $a$ ). Pour les points différents de  $a$  et  $a'$ , être dans la même demi-droite est évidemment une relation d'équivalence.

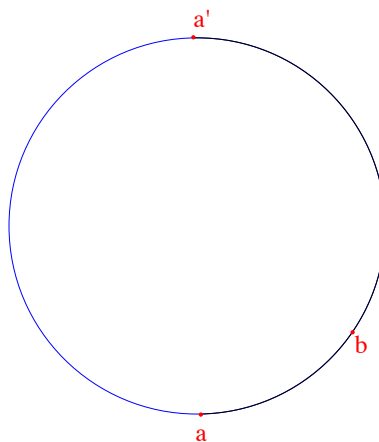


FIGURE 5.4 – La demi-droite  $[ab)$  est l'arc  $\widehat{aa'}$  contenant  $b$

toujours implicitement ces conditions réalisées quand on parlera de demi-droites.

3) Si la forme  $q$  est hyperbolique et si  $i, j$  sont les points isotropes de  $D$ , deux points  $a$  et  $b$  sont dans le même intervalle limité par  $i, j$  si et seulement si  $q(a)$  et  $q(b)$  sont de même signe.

## Segments

La notion de segment est plus délicate à préciser. On commence par un lemme :

**5.4.5 Lemme.** *Soit  $V$  un plan vectoriel réel, muni d'une forme  $q$  non dégénérée et soit  $D = \mathbf{P}(V)$  la droite projective associée. Soient  $a, b$  deux points de  $D$ . On suppose  $a$  et  $b$  distincts, non isotropes, et non orthogonaux. On appelle  $a', b'$  les orthogonaux de  $a, b$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe un intervalle  $]a, b[$  au sens de 5.4.1 qui est contenu dans les deux demi-droites  $[ab)$  et  $[ba)$ .*

2) *Les paires  $\{a, b\}$  et  $\{a', b'\}$  ne sont pas entrelacées (autrement dit on a  $\llbracket a, b, a', b' \rrbracket > 0$ ).*

3) *Les nombres  $q(a)$  et  $q(b)$  sont de même signe*<sup>9</sup>.

8. Si les points sont orthogonaux, il n'y a aucun moyen de choisir l'une des deux demi-droites qui les joignent.

9. On dira pour abrégé que deux points  $a$  et  $b$  sont "de même signe" pour exprimer que  $q(a)$  et  $q(b)$  sont de même signe.

*Démonstration.* La condition 2) signifie que l'un des intervalles  $]a, b[$  contient  $a'$  et  $b'$  et c'est alors l'autre intervalle qui vérifie la condition 1).

Pour l'équivalence avec 3) le mieux est de calculer en posant  $a = \infty = (1, 0)$ ,  $a' = 0 = (0, 1)$ , de sorte que la forme quadratique peut s'écrire  $q(x, t) = \alpha x^2 + \beta t^2$ , puis  $b = 1 = (1, 1)$  et  $b'$  est alors égal à  $(\beta, -\alpha) = -\beta/\alpha$ . Avec les formules  $\llbracket a, b, a', b' \rrbracket = \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$ ,  $q(a) = \alpha$  et  $q(b) = \alpha + \beta$  on a le résultat.

**5.4.6 Proposition-Définition.** *On reprend les notations de 5.4.5 et on suppose  $q(a)q(b) > 0$ . Le segment intrinsèque<sup>10</sup>  $[ab]$  est alors celui des deux intervalles  $]a, b[$  qui est inclus dans  $[ab)$  et  $[ba)$ , ou encore celui qui ne contient pas  $a'$  (donc pas non plus  $b'$ ), auquel on ajoute les points  $a$  et  $b$ .*

*Un point  $m$  distinct de  $a, b$  est dans  $[ab]$  si et seulement s'il vérifie l'une des inégalités  $\llbracket a, b, a', m \rrbracket < 0$  ou  $\llbracket a, b, b', m \rrbracket < 0$ .*

**5.4.7 Remarques.**

1) **Attention**, contrairement au cas euclidien, le segment intrinsèque n'est pas en général égal à l'intersection des demi-droites  $[ab)$  et  $[ba)$ , voir 5.6.4.

2) La notion de segment intrinsèque n'est pas définie pour des points "de signe contraire" :  $q(a)q(b) < 0$ . Comme elle sera surtout utile pour définir une notion de milieu intrinsèque de deux points et que les milieux n'existent que si  $q(a)$  et  $q(b)$  sont de même signe, c'est sans importance.

La caractérisation suivante est essentielle :

**5.4.8 Proposition.** *Soit  $V$  un plan vectoriel muni d'une forme  $q$  non dégénérée et soit  $D = \mathbf{P}(V)$  la droite projective associée. Soient  $\bar{a}, \bar{b}$  deux points distincts, non isotropes et non orthogonaux de  $D$ . On relève ces points en  $a, b \in E$  et on suppose  $q(a)$  et  $q(b)$  de même signe et  $q(a)\varphi(a, b) > 0$  (resp.  $q(a)\varphi(a, b) < 0$ ). Alors, le segment intrinsèque  $[ab]$  est l'image des vecteurs  $m = ua + vb$  avec  $u, v$  de même signe (resp. de signes contraires).*

*Démonstration.* On appelle  $a'$  l'orthogonal de  $a$ , de sorte que  $a, a'$  est une base orthogonale, on écrit les vecteurs dans cette base :  $a = (1, 0)$ ,  $a' = (0, 1)$ ,  $b = (\lambda, 1)$ ,  $m = (\mu, 1)$  et on a  $q(x, t) = \alpha x^2 + \beta t^2$ . En particulier, on a  $q(a)\varphi(a, b) = \alpha^2 \lambda$  et cette quantité est du signe de  $\lambda$ . Le birapport  $\llbracket a, b, a', m \rrbracket$  est égal à  $1 - \frac{\mu}{\lambda}$ . Dire que  $m$  est dans le segment  $[ab]$  c'est dire que ce birapport est  $< 0$ . Si  $\lambda$  est positif (resp. négatif) cela signifie  $\mu > \lambda$  (resp.  $\mu < \lambda$ ). Par ailleurs, on a  $m = ua + vb$  avec  $v = 1$  et  $u = \mu - \lambda$ . La conclusion est maintenant évidente.

---

10. On dira parfois segment tout court par abus de langage.



## 5.4.2 Demi-droites et segments du plan

### Demi-droites

On suppose maintenant qu'on est dans le plan  $\mathbf{P}(E)$  muni de la forme  $q$  non dégénérée. La notion de demi-droite définie ci-dessus a donc un sens sur toutes les droites non isotropes du plan et la propriété suivante montre que les symétries centrales échangent les demi-droites :

**5.4.9 Proposition.** *Soient  $a, b \in \mathbf{P}(E)$  et soit  $\sigma_a$  l'involution de point de Frézier  $a$ . Alors l'image par  $\sigma_a$  de la demi-droite  $[ab)$  est la demi-droite opposée à  $[ab)$  sur la droite  $(ab)$ .*

*Démonstration.* Comme  $\sigma_a$  fixe  $a$  et  $a'$  (son orthogonal sur la droite  $(ab)$ ), cela vient de l'égalité de birapports  $[[a, a', b, \sigma_a(b)]] = -1$  qui vaut pour toute involution, (voir Partie I ??).

Dans le cas hyperbolique on a la proposition suivante :

**5.4.10 Proposition-Définition.** *Soient  $a, b \in \mathbf{K}$  et soient  $i, j$  les points d'intersection de la droite  $D = (ab)$  avec  $\Gamma$ . On suppose qu'on a  $[[a, j, b, i]] < 0$  (c'est-à-dire encore que " $i$  est voisin de  $a$  et  $j$  voisin de  $b$ ", au sens de 5.4.2). La trace sur  $\mathbf{K}$  de la demi-droite  $[ab)$  est l'intervalle semi-ouvert  $[aj[$  du plan affine. Dans le modèle de Klein  $\mathbf{K}$  c'est cet intervalle qu'on appelle demi-droite.*

*Démonstration.* Soit  $a'$  l'orthogonal de  $a$  sur  $(ab)$ . On a la formule<sup>11</sup> :

$$[[a, a', i, j]] \times [[a, j, b, i]] = [[a, a', b, j]] \times [[i, b, j, a']].$$

Les points  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbf{K}$ , donc  $a'$  est dans  $\mathbf{T}$ . Il résulte de 5.4.4.3 que  $r = [[i, j, b, a']]$  est négatif, de sorte que  $1 - r = [[i, b, j, a']]$  est positif. De plus, on a  $[[a, a', i, j]] = -1$  (voir Partie III ??). Dire que les demi-droites  $[ab)$  et  $[aj)$  sont égales c'est dire que le birapport  $[[a, a', b, j]]$  est positif et, vu la relation, c'est bien équivalent à dire que  $[[a, j, b, i]]$  est négatif.

**5.4.11 Remarque.** On notera que, dans le cas elliptique, les demi-droites sont bien des "moitiés de droites" au sens où l'on a  $d(a, a') = \pi/2$  si  $a$  et  $a'$  sont orthogonaux (moitié de la longueur d'un grand cercle passant par  $a$  et  $a'$ ). La demi-droite  $[ab)$  est celle qui correspond au plus court chemin pour aller de  $a$  à  $b$ .

---

11. On peut la vérifier par un calcul direct, mais c'est une conséquence de la "relation de Chasles des birapports" :  $[[b, c, d, e]] \times [[c, a, d, e]] = [[b, a, d, e]]$ , voir Partie I ??.

## Demi-points

Il n'y a évidemment pas de raison qu'il y ait des demi-droites et pas de demi-points ! Un demi-point c'est une demi-droite vue dans le dual, voir 5.6.6.

## Segments

Le résultat suivant précise les segments dans deux cas : la géométrie elliptique et le modèle de Klein  $\mathbf{K}$ . Pour les autres, voir exercice 5.6.5.

### 5.4.12 Proposition.

1) Soient  $\bar{a}, \bar{b}$  deux points de  $\mathbf{E}$ , non orthogonaux. Il existe des représentants  $a, b$  de ces points, situés sur  $\mathbf{S}^2$ , et tels que l'on ait  $\varphi(a, b) > 0$  (ou encore  $\delta(a, b) < \pi/2$  ou encore  $d(a, b) = \delta(a, b)$ , voir 5.1.9). Le segment intrinsèque  $[ab]$  est alors l'image du segment euclidien  $[ab]$  de  $\mathbf{R}^3$  ou de l'arc mineur joignant  $a$  et  $b$  (voir 5.1.5).

2) Soient  $\bar{a}, \bar{b}$  deux points de  $\mathbf{K}$  relevés en  $a, b$  selon la convention 2.4.8 :  $t > 0$ . On a alors  $\varphi(a, b) < 0$  en vertu de 2.4.9. Le segment intrinsèque  $[ab]$  au sens hyperbolique coïncide avec le segment  $[ab]$  du plan affine des  $x, y$ . C'est donc le segment intérieur au sens de 3.4.1 ou 3.4.4.

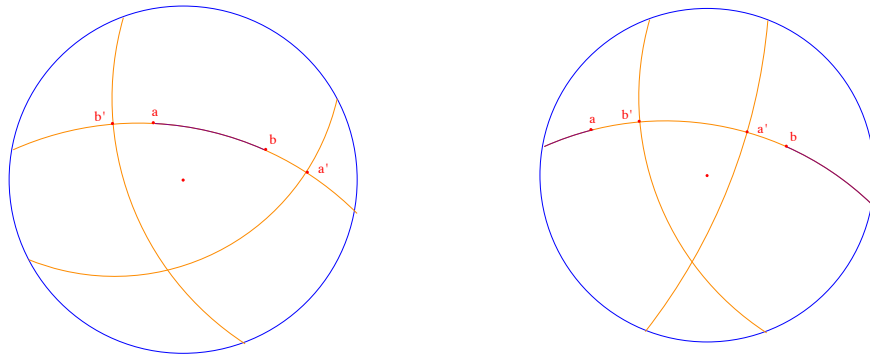


FIGURE 5.5 – Segments intrinsèques (en gras) en géométrie elliptique

*Démonstration.* 1) L'existence des relèvements est claire : il suffit de changer  $b$  en  $-b$  pour ajuster le signe de  $\varphi(a, b)$ . On peut alors appliquer 5.4.8 : le segment intrinsèque est l'image du segment euclidien  $[ab]$  de  $\mathbf{R}^3$ , ou encore l'image de l'arc mineur  $\widehat{ab}$  en vertu de 5.1.5.

2) Cela résulte directement de 5.4.8. Cela résulte aussi de 5.4.10. En effet, la trace de la demi-droite hyperbolique  $[ab]$  est la trace sur  $\mathbf{K}$  de la demi-droite affine ordinaire.

### 5.4.3 Retour sur le chapitre 3

Grâce à la notion de segment intrinsèque, on peut maintenant définir des notions de milieu et médiatrice intrinsèques :

**5.4.13 Proposition-Définition.** *Soient  $a, b$  deux points distincts, non isotropes et non orthogonaux de  $\mathbf{P}(E)$ . On suppose  $q(a)$  et  $q(b)$  de même signe, de sorte que  $a, b$  admettent deux milieux et on suppose enfin la droite  $(ab)$  non isotrope. Alors un et un seul de ces milieux est dans le segment intrinsèque  $[ab]$  (au sens de 5.4.6). On l'appelle **milieu intrinsèque** de  $a$  et  $b$ . L'autre milieu sera dit **extrinsèque**. La **médiatrice intrinsèque** est la polaire du milieu extrinsèque ; elle passe par le milieu extrinsèque.*

**5.4.14 Proposition.** *Soient  $\bar{a}, \bar{b}$  deux points distincts, non isotropes et non orthogonaux de  $\mathbf{P}(E)$  vérifiant  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . On choisit des relèvements  $a, b \in E$  tels que l'on ait  $q(a) = q(b)$ . Si  $q(a)\varphi(a, b)$  est positif (resp. négatif) le milieu intrinsèque de  $\bar{a}, \bar{b}$  est l'image de  $a + b$  (resp.  $a - b$ ).*

*Démonstration.* Cela résulte de 5.4.8.

On peut alors préciser le théorème<sup>12</sup> d'alignement des milieux et de concours des médiatrices :

**5.4.15 Théorème.** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{P}(E)$ , formé de points non isotropes et non orthogonaux.*

1) *On suppose qu'on est en géométrie hyperbolique avec  $a, b, c \in \mathbf{K}$ . Les notions de milieux et de médiatrices intérieurs (au sens de 3.4.1) et intrinsèques coïncident. Les milieux extrinsèques de  $abc$  sont alignés et les médiatrices intrinsèques sont concourantes<sup>13</sup> dans  $\mathbf{P}(E)$ .*

2) *On suppose qu'on est soit en géométrie elliptique, soit en géométrie hyperbolique, mais avec  $a, b, c \in \mathbf{T}$ . Alors, si le spin de  $abc$  est  $> 0$  (resp.  $< 0$ ) les milieux extrinsèques (resp. intrinsèques) sont alignés et les médiatrices intrinsèques (resp. extrinsèques) concourantes.*

*Démonstration.* 1) Comme les termes du type  $q(a)$  et  $\varphi(a, b)$  sont tous négatifs, il résulte de 5.4.14 que les milieux extrinsèques sont  $b - c, c - a, a - b$  et ils sont alors alignés en vertu de 3.2.3.

2) Dans le cas de spin  $> 0$  on peut supposer  $\varphi(b, c)$ ,  $\varphi(c, a)$  et  $\varphi(a, b)$  positifs et les milieux extrinsèques sont  $b - c, c - a$  et  $a - b$  qui sont alignés. Dans le cas de spin  $< 0$  on peut supposer  $\varphi(b, c)$  et  $\varphi(c, a)$  positifs, mais

12. Le lecteur se penchera sur les autres résultats du chapitre 3 avec le même point de vue.

13. Donc en pinceau dans  $\mathbf{K}$ .

$\varphi(a, b)$  négatif. Les milieux intrinsèques sont alors  $b + c$ ,  $c + a$  et  $a - b$  et ils sont alignés, voir 3.2.3.

Les assertions sur les médiatrices s'en déduisent par polarité.

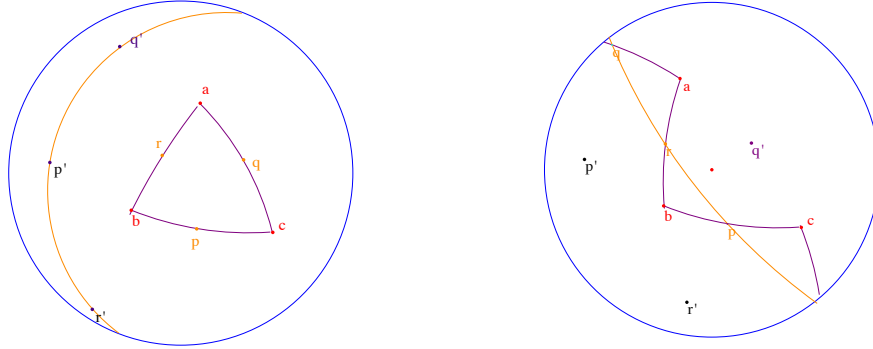


FIGURE 5.6 – Alignements des milieux en géométrie elliptique, à gauche cas de spin positif, à droite de spin négatif

Pour le concours des bissectrices, voir l'exercice 5.6.12, pour les médianes voir 5.6.8.

#### 5.4.4 Repères orthogonaux et orientation du plan hyperbolique

**5.4.16 Proposition-Définition.** *On appelle repère orthogonal de  $\mathbf{K}$  la donnée d'un point  $a \in \mathbf{K}$  et de deux demi-droites  $[a, b)$  et  $[a, c)$  orthogonales. On note  $\mathcal{R} = (a; b, c)$ . Le groupe  $PO(q) \simeq O^+(q)$  (resp.  $\Omega(q)$ ) est transitif (resp. admet deux orbites) sur les repères orthogonaux. Si on fixe un tel repère  $\mathcal{R}$  comme étalon, on dit qu'un repère  $\mathcal{R}'$  est **direct** (resp. **indirect**) s'il est l'image de  $\mathcal{R}$  par un élément de  $\Omega(q)$  (resp. de  $O^+(q) - \Omega(q)$ ). On dit qu'on a ainsi **orienté** le plan  $\mathbf{K}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{R} = (a; b, c)$  et  $\mathcal{R}' = (a'; b', c')$  deux repères. La transitivité de  $PO(q)$  sur les drapeaux et la conservation de l'orthogonalité montrent qu'il existe  $u \in PO(q)$  qui envoie  $a$  sur  $a'$ ,  $(ab)$  sur  $(a'b')$  et  $(ac)$  sur  $(a'c')$ . Quitte à appliquer  $\sigma_a$  on peut supposer qu'on a  $u([a, b)) = [a', b')$  et il n'y a plus qu'à appliquer, au besoin, la réflexion d'axe  $(a'b')$ . Il est clair qu'il y a au plus deux orbites sous  $\Omega(q)$ , celles de  $(a; b, c)$  et celle de  $(a; b, \tau_{(ab)}(c))$ . Pour voir qu'elles sont distinctes, on note que si  $u$  fixe  $a$  et laisse stable la droite  $(ab)$  c'est nécessairement l'identité ou la symétrie  $\tau_{(ab)}$ . Comme celle-ci n'est pas dans  $\Omega(q)$  (voir 1.4.14), on a le résultat.

**5.4.17 Remarque.** Dans le cas où  $q$  est anisotrope, le groupe  $PO(q) \simeq O^+(q) \simeq O^+(3, \mathbf{R})$  est simple et il n'y a pas d'orientation possible. En particulier, il y a un chemin continu dans le groupe qui joint l'identité à une réflexion  $\tau_D = \sigma_d$  en passant par les rotations d'axe  $d$  et d'angle  $\theta \in [0, \pi]$ .

## 5.5 Angles de demi-droites

### 5.5.1 L'invariant $I^+$

Nous avons donné en 4.4.6 une formule pour l'angle de deux côtés d'un triangle, vus comme droites :

$$I^*((ab), (ac)) = \frac{\varphi(a \wedge b, c \wedge a)^2}{q(a \wedge b)q(c \wedge a)}.$$

Notre objectif ici est d'en donner une variante en termes de demi-droites, ce qui revient essentiellement à préciser les signes dans cette formule. Pour cela on utilisera la convention suivante :

**5.5.1 Convention.** *Lorsqu'on parlera de l'angle de deux demi-droites<sup>14</sup>  $[ab]$  et  $[ac]$  on supposera toujours que  $\varphi(a, b)$  et  $\varphi(a, c)$  sont de même signe.*

**5.5.2 Remarque.**

1) Lorsqu'on a deux demi-droites  $[ab]$  et  $[ac]$ , on peut toujours, quitte à changer  $b$  en  $-b$  ou  $c$  en  $-c$ , choisir les représentants des points de telle sorte que  $\varphi(a, b)$  et  $\varphi(a, c)$  soient de même signe, ce qui légitime la convention.

2) Dans le cas hyperbolique, si on écrit  $a, b \in \mathbf{K}$  sous la forme  $(x, y, t)$  avec  $t > 0$ , par exemple  $t = 1$  (convention 2.4.8), on a  $\varphi(a, b) < 0$  (voir 2.4.9), de sorte que la convention est automatiquement réalisée si  $a, b, c$  sont des points de  $\mathbf{K}$ .

3) Dans le cas elliptique, si on a trois points  $a, b, c$ , on peut choisir des représentants tels que  $\varphi(a, b)$  et  $\varphi(a, c)$  soient  $> 0$ , ce qui signifie qu'on a  $d(a, b) = \delta(a, b)$  et  $d(a, c) = \delta(a, c)$ , voir 5.1.9. Attention, en revanche,  $\varphi(b, c)$  peut alors être positif, négatif ou nul. En particulier, si on a un triangle  $\overline{abc}$  de  $\mathbf{P}(E)$ , de spin négatif, c'est-à-dire tel que  $\varphi(b, c)\varphi(c, a)\varphi(a, b)$  soit négatif, on ne peut pas trouver des représentants  $a, b, c$  des points tels que la convention soit réalisée en chaque sommet du triangle.

On a alors :

---

14. Rappelons que la définition d'une demi-droite  $[ab]$  sous-entend que  $a$  et  $(ab)$  sont non isotropes et que  $b$  n'est pas orthogonal à  $a$ .

**5.5.3 Lemme.** Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{P}(E)$  avec  $b, c$  non orthogonaux à  $a$ . On suppose que les représentants de ces points sont choisis selon la convention 5.5.1. Alors, le signe de  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c)$  est indépendant du choix des représentants.

*Démonstration.* Si on change  $a$  en  $\lambda a$ ,  $b$  en  $\mu b$ ,  $c$  en  $\nu c$ ,  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c)$  est multiplié par  $\lambda^2 \mu \nu$  comme  $\varphi(a, b)\varphi(a, c)$ . Avec la convention 5.5.1, ce nombre est  $> 0$ .

**5.5.4 Remarque.** Cela revient à noter que le rapport  $J(a; b, c) = \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\varphi(a, b)\varphi(a, c)}$  est un invariant, voir 4.7.15.

**5.5.5 Proposition.** Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{P}(E)$  non isotropes et tels que  $a$  n'est orthogonal ni à  $b$  ni à  $c$ . On considère les demi-droites  $[ab], [ac]$ . On suppose que les représentants  $a, b, c$  ont été choisis selon la convention 5.5.1. Alors, un système complet d'invariants de transitivité pour le couple  $([ab], [ac])$  est donné par :

- 1) les signes des nombres  $q(a \wedge b)$  et  $q(a \wedge c)$ ,
- 2) le nombre  $I^+([ab], [ac]) = \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\sqrt{|q(a \wedge b)q(a \wedge c)|}}$ .

*Démonstration.* Si l'on se donne  $abc$  et  $a'b'c'$  avec les mêmes invariants, on peut envoyer les droites  $(ab)$  et  $(ac)$  sur  $(a'b')$  et  $(a'c')$ . En effet, on a  $|I^*((ab), (ac))| = (I^+([ab], [ac]))^2$  et la condition 1) assure que  $I^*((ab), (ac))$  et  $I^*((a'b'), (a'c'))$  sont de même signe. On peut donc appliquer 4.4.1. Quitte à composer par la symétrie de centre  $a'$  on peut même envoyer  $[ab]$  sur  $[a'b']$  (voir 5.4.9). On est ainsi ramené au cas  $a = a'$ ,  $b = b'$  et  $a, c, c'$  alignés. Soit  $e$  l'orthogonal de  $a$  sur la droite  $(ac)$ . On écrit  $c = \lambda a + \mu e$  et  $c' = \lambda' a + \mu' e$ . La convention 5.5.1 impose que  $\lambda$  et  $\lambda'$  sont de même signe. La condition sur  $I^+$  montre que  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = \mu \varphi(a \wedge b, a \wedge e)$  et  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c') = \mu' \varphi(a \wedge b, a \wedge e)$  sont de même signe, donc aussi  $\mu$  et  $\mu'$  (sauf si  $(ab)$  et  $(ac)$  sont perpendiculaires). Il en résulte que  $c'$  est dans la demi-droite  $[ac]$ , voir 5.4.3. Si les droites sont perpendiculaires, il suffit d'appliquer, éventuellement, la symétrie par rapport à  $(ab)$ .

**5.5.6 Remarques.**

- 1) La condition 1) permet d'envoyer les droites  $(ab)$  et  $(ac)$  sur  $(a'b')$  et  $(a'c')$ , donc  $a$  sur  $a'$ . Cela montre que  $q(a)$  et  $q(a')$  sont de même signe, ce qu'on retrouve avec la formule du double produit vectoriel qui donne  $[a, b, c]a = \Delta(q)((a \wedge b) \wedge (a \wedge c))$  et avec 1.2.3.
- 2) Dans le cas elliptique, la condition 1) est inutile (toutes les quantités sont  $> 0$ ) et les valeurs absolues sont inutiles dans  $I^+$ .

3) Il en est de même, dans le cas hyperbolique, si on se limite aux points de  $\mathbf{K}$ , car on a  $q(a \wedge b)$  et  $q(a \wedge c) > 0$ .

4) On notera que l'invariant  $I^+$  (angle de demi-droites) est une racine carrée de la valeur absolue de l'invariant  $I^*$  (angle de droites). Dans le cas elliptique, comme dans le cas où  $a, b, c$  sont dans  $\mathbf{K}$ ,  $I^+$  est une racine carrée de  $I^*$ .

5) La proposition est valable dans les cas "mixtes", par exemple si  $a$  est dans  $\mathbf{T}$ ,  $b$  dans  $\mathbf{K}$  et  $c$  dans  $\mathbf{T}$  avec  $(ac)$  extérieure.

## 5.5.2 Définition de l'angle de demi-droites

Nous nous contenterons de définir l'angle dans les deux cas essentiels du plan elliptique et du plan de Klein :

**5.5.7 Proposition-Définition.** *Soient  $a, b, c$  trois points distincts situés, soit dans le plan elliptique  $\mathbf{E}$ , soit dans le plan hyperbolique de Klein  $\mathbf{K}$ . Dans le cas elliptique, on suppose de plus que  $b$  et  $c$  ne sont pas orthogonaux à  $a$ . Alors, le nombre réel<sup>15</sup>  $I^+([ab], [ac])$  est dans  $[-1, 1]$ . **L'angle (non orienté) des demi-droites**  $[ab]$  et  $[ac]$  est par définition le réel  $\theta = \text{Arccos}(I^+([ab], [ac]))$ . C'est un élément de  $[0, \pi]$ . On le note  $\widehat{bac}$ . On a :*

$$\cos \widehat{bac} = I^+([ab], [ac]) = \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\sqrt{q(a \wedge b)q(a \wedge c)}}.$$

On dit que l'angle est aigu (resp. droit, resp. obtus) si  $\theta$  est plus petit que  $\pi/2$  (resp. égal à  $\pi/2$ , resp. plus grand que  $\pi/2$ ).

*Démonstration.* Cela résulte de 5.2.1 : on a  $I^*((ab), (ac)) = I^+([ab], [ac])^2 \in [0, 1]$ .

**5.5.8 Remarques.** 1) On a  $|\cos \widehat{bac}| = \cos((ab), (ac))$ , de sorte que l'angle des droites  $(ab)$  et  $(ac)$  est le minimum entre  $\theta$  et  $\pi - \theta$  où  $\theta$  est l'angle des demi-droites  $[ab]$  et  $[ac]$ .

2) Si l'on remplace  $b$  par un point de la demi-droite opposée à  $[ab]$  on vérifie que  $I^+$  change de signe, donc l'angle  $\widehat{a}$  est changé en  $\pi - \widehat{a}$ .

3) Pour une application au calcul du spin angulaire voir 6.4.5.

**5.5.9 Proposition.** *On conserve les notations et les hypothèses de 5.5.7.*

1) *L'angle  $\widehat{bac}$  vaut  $\pi/2$  si et seulement si  $(ab)$  et  $(ac)$  sont perpendiculaires.*

2) *L'angle  $\widehat{bac}$  est nul (resp. égal à  $\pi$ ) si et seulement si les demi-droites  $[ab]$  et  $[ac]$  sont égales (resp. opposées). Cette dernière condition est équivalente*

---

15. Rappelons que, pour définir  $I^+([ab], [ac])$ , on suppose les représentants  $a, b, c$  choisis selon la convention 5.5.1.

à dire que  $a, b, c$  sont alignés et que  $b$  et  $c$  sont orthogonaux<sup>16</sup> ou que  $a$  est dans le segment intrinsèque  $[bc]$ .

*Démonstration.* Le point 1) est clair. Dire que l'angle vaut 0 ou  $\pi$ , c'est dire qu'on a  $I^*((ab), (ac)) = 1$ , de sorte que les points  $a, b, c$  sont alignés en vertu de 4.4.3. Soit  $a'$  l'orthogonal de  $a$  sur cette droite. On écrit  $b = \lambda a + \lambda' a'$ ,  $c = \mu a + \mu' a'$ . On en déduit que  $\cos \widehat{bac}$  est égal à 1 (resp.  $-1$ ) si  $\lambda' \mu' q(a \wedge a')$  est  $> 0$  (resp.  $< 0$ ). Avec les hypothèses faites,  $q(a \wedge a')$  est  $> 0$  (c'est clair si on est dans  $\mathbf{E}$  et si on est dans  $\mathbf{K}$  cela résulte du fait que la droite  $(aa')$  est hyperbolique). Par ailleurs, dire que les demi-droites  $[ab]$  et  $[ac]$  sont égales (resp. opposées) signifie que le birapport  $[[a, a', b, c]]$  est  $> 0$  (resp.  $< 0$ ). Or ce birapport est du signe de  $\lambda \mu \lambda' \mu'$ . Comme  $\lambda$  et  $\mu$  sont de même signe en vertu de la convention 5.5.1, on a le résultat.

**5.5.10 Remarque.** Dans le cas elliptique, lorsque  $c$  varie sur la droite  $(ab)$ , l'angle  $\widehat{bac}$  n'est pas défini pour  $c = a'$  (le point orthogonal à  $a$ ) et il passe de 0 à  $\pi$  au franchissement de ce point. Malgré cela, il est commode de prolonger la définition de 5.5.7 au cas où  $b$  ou  $c$  est orthogonal à  $a$ , ce que nous faisons ci-dessous. Attention, il y a deux choix possibles qui consistent à prendre systématiquement l'angle aigu ou l'angle obtus et pas d'argument décisif pour les départager : dans un cas comme dans l'autre l'angle n'est pas une fonction continue.

**5.5.11 Convention.** Dans le plan elliptique, lorsque  $b$  ou  $c$  est orthogonal à  $a$  on définit l'angle de demi-droites  $\widehat{bac}$  comme l'angle de droites  $|(ab), (ac)| \in [0, \pi/2]$ .

Dans le cas d'un triangle de spin nul, cette convention permet de choisir entre les côtés :

**5.5.12 Proposition-Définition.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ . On suppose que  $a$  est orthogonal à  $b$  mais que  $c$  n'est orthogonal ni à  $a$  ni à  $b$ . La droite  $(ab)$  privée de  $a, b$  est réunion de deux intervalles  $I$  et  $J$  tels que pour tout point  $m$  de  $I$  (resp. de  $J$ ) les angles  $\widehat{mac}$  et  $\widehat{mbc}$  soient tous deux aigus (resp. tous deux obtus). Par convention, on choisit  $I \cup \{a, b\}$  (le côté où les angles sont aigus) comme côté (intrinsèque)  $[ab]$  du triangle.

*Démonstration.* On relève  $a, b, c$  en des points de  $\mathbf{S}^2$  tels que  $\varphi(a, c)$  et  $\varphi(b, c)$  soient positifs. Si  $m$  est de la forme  $\lambda a + \mu b$  avec  $\lambda, \mu$  positifs on vérifie que les cosinus des angles sont du signe de  $\lambda \varphi(a, c)$  et  $\mu \varphi(b, c)$  donc positifs et les deux angles sont aigus. Si on a  $m = \lambda a + \mu b$  avec  $\lambda > 0$  mais  $\mu < 0$  on vérifie que les deux angles sont obtus (attention pour le second à la condition  $\varphi(b, m) \varphi(b, c) > 0$  qui oblige à changer  $c$  en  $-c$ ).

16. Cela n'est possible que dans le cas elliptique.



**5.5.13 Remarque.** Si  $a$  est orthogonal à  $b$  et  $c$ , les angles du triangle en  $b$  et  $c$  sont droits et il y a deux choix de côtés  $[ab]$  et  $[ac]$  pour lesquels l'angle en  $a$  est aigu. Si les trois points sont deux à deux orthogonaux (triangle autopolaire), les huit choix de côtés des triangles sont absolument indiscernables.

### 5.5.3 Comparaison avec les angles euclidiens

La proposition suivante compare les angles que nous venons de définir et les angles euclidiens “à l'origine” :

**5.5.14 Proposition.** *On travaille dans le plan  $\mathbf{P}(E)$  avec la forme  $x^2 + y^2 \pm t^2$ . On choisit comme droite à l'infini la droite  $t = 0$ . Les points à distance finie sont les points  $m = (x, y, 1)$ . Ils constituent un plan affine que l'on munit du produit scalaire euclidien usuel donné par  $(m|m') = xx' + yy'$ . Alors, les angles (non orientés) de demi-droites à l'origine  $(0, 0, 1)$  sont les mêmes aux trois sens euclidien, elliptique et hyperbolique.*

*Démonstration.* On prend  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (b_1, b_2, 1)$ ,  $c = (c_1, c_2, 1)$  et on calcule l'invariant  $I^+([ab], [ac])$ . On a  $a \wedge b = (-b_2, b_1, 0)$ ,  $a \wedge c = (-c_2, c_1, 0)$  d'où, à la fois pour la forme elliptique et la forme hyperbolique,  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = b_1 c_1 + b_2 c_2 = (b|c)$ ,  $q(a \wedge b) = b_1^2 + b_2^2 = (b|b) = \|b\|^2$  et  $q(a \wedge c) = c_1^2 + c_2^2 = (c|c) = \|c\|^2$ . On a donc la formule  $\cos \widehat{bac} = I^+([ab], [ac]) = \frac{(b|c)}{\|b\| \|c\|}$  et on retrouve bien le cosinus de l'angle euclidien usuel.

**5.5.15 Remarque.** Comme dans le cas des angles de droites, le résultat précédent n'est valable qu'à l'origine dans les modèles  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{E}$ . En revanche, dans les modèles conformes  $\mathbf{D}$  ou  $\mathbf{KE}$  on a identité entre les angles au sens ordinaire et au sens hyperbolique :

**5.5.16 Proposition.** *Soient  $a, b, c \in \mathbf{D}$  (resp.  $\mathbf{KE}$ ). L'angle  $\widehat{bac}$  au sens hyperbolique (resp. elliptique) est égal à l'angle euclidien (non orienté) des vecteurs tangents aux arcs  $\widehat{ab}$  et  $\widehat{ac}$ .*

*Démonstration.* La propriété est vraie à l'origine car les droites de  $\mathbf{D}$  ou  $\mathbf{KE}$  passant par  $o$  sont les mêmes que celles des modèles  $\mathbf{K}$  ou  $\mathbf{E}$  (voir 2.4.16 et 2.3.6.1). Comme les éléments de  $PO(q)$  sont des transformations conformes de  $\mathbf{D}$  ou  $\mathbf{KE}$  (voir 2.3.6.3 et 2.4.23) et que  $PO(q)$  est transitif sur les points, elle est vraie partout.

## 5.6 Exercices

### 5.6.1 Longueurs et quotients

**5.6.1 Exercice.** Montrer que l'application  $I$  induit un homéomorphisme de  $\mathbf{E}^2/PO(q)$  sur  $[0, 1]$  (resp. de  $\mathbf{K}^2/PO(q)$  sur  $[1, +\infty[$ ). (On pourra exhiber une réciproque à l'aide des points  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$  (resp.  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (\operatorname{sh} u, 0, \operatorname{ch} u)$ ).

### 5.6.2 Calcul de la distance dans le modèle KE

**5.6.2 Exercice.** On travaille dans le modèle **KE** (le disque unité avec les points diamétralement opposés du cercle unité identifiés). Soient  $m = (x, y)$  et  $m' = (x', y')$  des points de **KE**. On note  $(m|m')$  le produit scalaire euclidien canonique et on pose  $r = \|m\|$  et  $r' = \|m'\|$ . On renvoie à 2.3.2 pour les formules permettant de passer de la sphère  $\mathbf{S}^2$  à ce modèle. On rappelle en particulier que le point  $m$  provient du point  $\widehat{m} \in \mathbf{S}^2$  donné par :

$$\widehat{m} = \left( \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2} \right).$$

1) Montrer que l'on a :

$$\varphi(\widehat{m}, \widehat{m}') = \frac{4(m|m') + (1-r^2)(1-r'^2)}{(1+r^2)(1+r'^2)}.$$

2) En déduire la valeur de  $d(m, m')$ .

### 5.6.3 Pythagore

**5.6.3 Exercice.** On se propose de montrer l'existence sur  $\mathbf{K}$  d'une distance invariante par isométrie pour laquelle on ait le théorème de Pythagore sous la forme usuelle.

1) Soit  $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  une fonction dérivable, strictement croissante, nulle en 0 et concave. Soient  $a, b, c \in \mathbf{R}^+$  vérifiant  $a \leq b + c$ . Montrer qu'on a  $f(a) \leq f(b) + f(c)$ .

En déduire que si  $d$  est une distance sur un ensemble  $X$ ,  $f \circ d$  est encore une distance sur  $X$ .

2) On prend pour  $d$  la distance hyperbolique sur  $\mathbf{K}$  définie par  $\operatorname{ch}(d(a, b))^2 = I(a, b)$  et pour  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{\ln \operatorname{ch}(x)}$ . Montrer que la fonction  $f \circ d$  est une distance sur  $\mathbf{K}$ , invariante par isométrie, et que, muni

de cette distance,  $\mathbf{K}$  vérifie le théorème de Pythagore sous sa forme euclidienne : dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal, si je ne m'abuse, à la somme des carrés des deux autres côtés. Vérifier que cette distance n'est pas additive pour les triplets de points alignés, conformément à 5.1.20.

### 5.6.4 Segments

**5.6.4 Exercice.** Soit  $V$  un plan vectoriel réel muni d'une forme quadratique  $q$  et soit  $D$  la droite projective associée. Soient  $a, b$  deux points de  $D$ . On suppose  $a$  et  $b$  non isotropes, distincts et non orthogonaux. On note  $a', b'$  leurs orthogonaux. Soit  $c$  un point non isotrope de  $D$ , distinct de  $a$  et  $b$ .

1) Montrer qu'on peut supposer  $a = (1, 0)$ ,  $a' = (0, 1)$ ,  $b = (1, 1)$ ,  $c = (\gamma, 1)$ , que la forme  $q$  est alors donnée par  $q(x, t) = \alpha x^2 + \beta t^2$  et qu'on a  $b' = (-\frac{\beta}{\alpha}, 1)$ .

2) Montrer  $c$  est dans la demi-droite  $[ab]$  si et seulement s'il vérifie  $\gamma \geq 0$  et dans  $[ba]$  s'il vérifie  $(\alpha\gamma + \beta)\alpha(\gamma - 1) \geq 0$ .

3) On suppose que  $q(a)$  et  $q(b)$  sont de même signe. Montrer que  $c$  est dans le segment intrinsèque  $[ab]$  si et seulement si l'on a  $\gamma > 1$ . Vérifier que  $c$  est alors dans les deux demi-droites  $[ab]$  et  $[ba]$  et que la réciproque est vraie si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de même signe. Montrer que si  $\alpha\beta$  est négatif l'intersection  $[ab] \cap [ba]$  contient d'autres points que ceux du segment  $[ab]$ .

**5.6.5 Exercice.** On suppose qu'on est dans le plan hyperbolique  $\mathbf{P}(E)$  et que  $a, b$  sont deux points de  $\mathbf{T}$ . On suppose de plus que la droite  $(ab)$  n'est pas isotrope.

1) On suppose que  $(ab)$  coupe  $\Gamma$  en  $i, j$ . Montrer que  $i, j$  sont dans la même composante connexe de  $(ab) - \{a, b\}$  et que le segment intrinsèque  $[ab]$  est égal à l'autre composante. On suppose les points  $a, b$  dans le plan affine  $t \neq 0$ . Montrer que le segment intrinsèque  $[ab]$  est égal au segment affine si et seulement si  $a, b$  sont du même côté de  $i, j$  donc de  $\Gamma$ .

2) On suppose que la droite  $(ab)$  est extérieure et les points  $a, b$  dans le plan affine  $t \neq 0$ . Montrer que le segment intrinsèque  $[ab]$  est égal au segment affine si et seulement si  $b$  est dans la demi-droite affine  $[a'a)$ .

### 5.6.5 Demi-points

**5.6.6 Exercice.** Le plan  $\mathbf{P}(E)$  est muni de la forme  $q$  et on considère un point  $d$  non isotrope. On le regarde comme  $d^*$  c'est-à-dire l'ensemble des droites passant par  $d$ . On choisit deux telles droites  $A, B$  avec  $A$  non isotrope et  $B$

non orthogonale à  $a$ . On peut alors parler du demi-point  $[AB)$  du point  $d$  ! Si  $A'$  est la droite perpendiculaire à  $A$  en  $d$ , c'est simplement l'ensemble des droites  $X$  de  $d$  vérifiant  $[[A, A', B, X]] > 0$ , donc les droites qui sont dans les mêmes quadrants que  $B$  par rapport à  $A$  et  $A'$ .

1) On considère les isométries qui fixent  $d$ . En s'inspirant des résultats analogues concernant les demi-droites, étudier l'effet de ces isométries sur les demi-points de  $d$ .

2) Définir une notion analogue aux angles de demi-droites qu'on pourra appeler distance de demi-points. Montrer que cette notion est inutile dans le plan de Klein (on retrouve la distance des points) et que dans le plan elliptique elle redonne la distance sur la sphère.

### 5.6.6 Demi-droites et isométries

**5.6.7 Exercice.** On reprend les notations de 5.4.3 : un plan vectoriel réel  $V$  et une forme quadratique  $q$  non dégénérée sur  $V$  et on pose  $D = \mathbf{P}(V)$ . Rappelons que, sur  $D$ , les éléments de  $PO^-(q)$  sont les symétries centrales, ceux de  $PO^+(q)$  pouvant être vus selon les cas comme des translations ou des rotations (voir 1.4.26). On se pose la question de la transitivité des groupes  $PO(q)$  et  $PO^+(q)$  sur les demi-droites de  $D$ .

1) Montrer que le groupe  $PO(q)$  est transitif sur l'ensemble des demi-droites  $[ab)$  de  $D$  dont l'origine  $a$  vérifie  $q(a) > 0$  (resp.  $q(a) < 0$ ). (On utilisera le théorème de Witt pour se ramener au cas de même origine, puis, éventuellement, la symétrie  $\sigma$  de centre  $a$ . On rappelle qu'on a  $[a, a', b, \sigma(b)] = -1$ , voir Partie I ??.)

2) Montrer que le groupe des isométries positives  $PO^+(q)$  admet deux orbites dans l'ensemble des demi-droites de  $D$  dont les origines sont de même signe. On dira que deux demi-droites sont **de même sens** si elles sont dans la même orbite, de sens contraires sinon. Si  $a$  et  $b$  sont deux points distincts de même signe, montrer que les demi-droites  $[ab)$  et  $[ba)$  sont de sens contraires. (Pour montrer qu'une isométrie positive  $u$  ne peut échanger deux demi-droites opposées on utilisera 1.4.21 ou [Per96] VIII 6.1.)

3) Montrer qu'une isométrie de  $D$  est une symétrie centrale si et seulement si elle change le sens des demi-droites.

### 5.6.7 Milieux, médianes, médiatrices

**5.6.8 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{P}(E)$ . On appelle **médianes intrinsèques** de  $abc$  les médianes qui joignent les sommets aux milieux intrinsèques des côtés opposés.

Montrer que, dans le cas d'un triangle de  $\mathbf{K}$ , ou d'un triangle de spin positif de  $\mathbf{E}$ , les médianes intrinsèques sont concourantes en un point qu'on appellera **centre de gravité intrinsèque** de  $abc$ .

Étudier les autres cas.

**5.6.9 Exercice.** 1) Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ , isocèle en  $a$  et soit  $a'$  le pied de la hauteur issue de  $a$  (qui est un milieu de  $b, c$ ). Montrer que c'est le milieu intrinsèque de  $b, c$ .

2) Dans le cas d'un triangle de  $\mathbf{E}$ , montrer que la même propriété est vraie si et seulement si le triangle est de spin positif.

**5.6.10 Exercice.** Soient  $a, b$  deux points distincts du plan de Klein  $\mathbf{K}$  et soit  $\Delta$  leur médiatrice (hyperbolique).

1) Montrer qu'un point  $m \in \mathbf{K}$  est sur  $\Delta$  si et seulement si il est équidistant de  $a, b$  (i.e. si  $ma = mb$ ). Étudier le cas d'un point  $m \in \Gamma$ . (On pourra utiliser 4.7.21.)

2) Montrer qu'une droite hyperbolique  $D$  est perpendiculaire à  $\Delta$  si et seulement si  $a$  et  $b$  sont équidistants de  $D$  et du même côté<sup>17</sup> de  $D$ . (On considérera les projetés orthogonaux  $a'$  et  $b'$  de  $a$  et  $b$  sur  $D$  et on montrera que leur médiatrice est égale à  $\Delta$ .)

3) Retrouver le résultat de 3.4.16 : les médiatrices d'un triangle de  $\mathbf{K}$  sont concourantes (dans  $\mathbf{K}$  ou sur le bord  $\Gamma$ ) ou admettent une perpendiculaire commune.

## 5.6.8 Bissectrices

**5.6.11 Exercice.** Dans le plan de Klein  $\mathbf{K}$ , on peut définir grâce aux notions de segment et de milieu intrinsèque, des notions de bissectrices intrinsèque au sens des droites et intrinsèque au sens des triangles : la bissectrice intrinsèque de  $A, B$  au sens des droites est celle qui passe par le milieu intrinsèque de leurs pôles (voir 3.4.5), la bissectrice intrinsèque en  $a$  du triangle  $abc$  est celle qui coupe le segment intrinsèque  $[bc]$  (voir 3.4.7).

On reprend la situation de 3.4.8. Montrer que les bissectrices intérieure et intrinsèque au sens triangle sont les mêmes pour toutes les valeurs de  $\beta$ , mais qu'en revanche au sens des droites la bissectrice intérieure au sens triangle est :

- intérieure et intrinsèque au sens des droites pour  $\beta < -2/3$ ,
- intérieure mais extrinsèque au sens des droites pour  $-2/3 < \beta < 0$ ,
- extérieure et extrinsèque au sens des droites pour  $\beta > 0$ .

---

17. Voir remarque 6.9.2.

**5.6.12 Exercice.** On travaille dans le plan elliptique  $\mathbf{E}$ . Soit  $abc$  un triangle formé de points non orthogonaux. On peut définir des bissectrices (intérieures) intrinsèques de  $abc$  de plusieurs manières :

- La droite  $D$ , bissectrice de  $(ab)$  et  $(ac)$ , sera dite intrinsèque **au sens des segments** si elle coupe le segment intrinsèque  $[bc]$ . L'autre bissectrice sera dite extrinsèque.

- La droite  $D$ , bissectrice de  $(ab)$  et  $(ac)$ , sera dite intrinsèque **au sens des demi-droites** si la symétrie  $\tau_D$  échange les demi-droites  $[ab)$  et  $[ac)$ . L'autre bissectrice sera dite extrinsèque.

1) Le but de cette question est de montrer que les deux notions de bissectrice intrinsèque coïncident si le triangle est de spin positif, mais qu'en spin négatif, intrinsèque au sens des segments est équivalent à extrinsèque au sens des demi-droites.

On écrit les trois côtés du triangle sous la forme  $A = \frac{b \wedge c}{\sqrt{q(b \wedge c)}}$  et de même pour les autres par permutation circulaire. Les bissectrices sont alors de la forme  $B \pm C$ .

a) Montrer que si l'on a  $\varphi(b, c) > 0$ , la bissectrice intrinsèque en  $a$  au sens des segments est  $D = B - C$  (on calculera le point d'intersection avec  $(bc)$  sous la forme  $\beta b + \gamma c$ ).

b) Montrer que les points orthogonaux à  $a$  sur  $(ab)$  et  $(ac)$  sont les points  $a' = \varphi(a, b)a - q(a)b$  et  $a'' = \varphi(a, c)a - q(a)c$ . En déduire qu'on a, en coordonnées homogènes,  $c = -\varphi(a, c)a + a''$  et  $\tau_D(b) = -\varphi(a, b)a + a''$ .

c) Montrer que  $c$  et  $\tau_D(b)$  sont dans la même demi-droite  $[a, a'')$  si et seulement si  $\varphi(c, a)\varphi(a, b)$  est positif et conclure.

2) Montrer que, dans tous les cas, les bissectrices intrinsèques au sens des demi-droites sont concourantes. Étudier les autres concours.

3) Traiter le même problème dans le plan hyperbolique  $\mathbf{K}$ .

## 5.6.9 Conditions de concours

**5.6.13 Exercice.** 1) Soient  $A, B, C$  trois droites de  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{K}$ . On note  $\alpha = |B, C|$ ,  $\beta = |C, A|$  et  $\gamma = |A, B|$  leurs angles. Montrer que  $A, B, C$  sont concourantes si et seulement on a l'une des égalités  $\alpha = \beta + \gamma$  ou  $\alpha = |\beta - \gamma|$  ou  $\alpha = \pi - (\alpha + \beta)$ . (On utilisera 4.7.20 en prenant garde au signe du spin  $S^*(A, B, C)$ ).

2) ¶ On travaille dans  $\mathbf{K}$  ou  $\mathbf{E}$  et on considère un point  $o$  et des points  $a, b, c$  non orthogonaux à  $o$  et alignés sur une droite ne passant pas par  $o$ . On suppose que  $c$  est dans le segment intrinsèque<sup>18</sup>  $[ab]$ . Montrer qu'on a

18. Cela sous-entend que  $a$  et  $b$  ne sont pas orthogonaux.

$\widehat{aob} = \widehat{aoc} + \widehat{cob}$  (**relation de Chasles géométrique**).

(Indication : On peut écrire  $c = \lambda a + \mu b$  avec  $\lambda, \mu > 0$  ce qui permet de supposer que les nombres  $\varphi(o, a)$ ,  $\varphi(o, b)$  et  $\varphi(o, c)$  sont de même signe. On pose  $A = o \wedge a$ ,  $B = o \wedge b$  et  $C = o \wedge c$  et on calcule les cosinus avec la formule de 5.5.7. On en déduit, par exemple,  $\sin^2 \widehat{aoc} = \frac{\mu[oab]^2 q(o)}{\Delta(q^*)q^*(A)q^*(C)}$ .

On conclut avec la formule d'addition du cosinus.)





## Chapitre 6

# L'espace des triangles dans les géométries réelles

*Ce chapitre reprend le travail de classification des triangles entrepris au chapitre 4 dans le cas où le corps de base est  $\mathbf{R}$ , grâce aux invariants introduits aux chapitres précédents (longueurs, angles de demi-droites et spin). On y donne d'abord les variantes réelles des formules d'Al-Kashi, en utilisant les angles de demi-droites. On obtient comme conséquences deux résultats plus proches qu'il n'y paraît : l'inégalité triangulaire et la somme des angles d'un triangle. On élucide ensuite le rôle du spin en géométrie réelle et ses applications à la classification topologique des triangles. On reprend enfin l'étude du quotient  $\mathcal{T}/G$  et de ses divers paramétrages  $\Phi$  en reformulant les divers cas d'isométries en termes de longueurs et d'angles de demi-droites et en précisant à chaque fois l'image de  $\Phi$ .*

*À propos de ce chapitre, je ne peux m'empêcher d'évoquer un aspect à la fois historique et didactique. On sait en effet quelle importance revêtent les cas d'égalité des triangles dans la géométrie d'Euclide et combien ils étaient utiles dans l'enseignement au collège il n'y a pas si longtemps. Je fais partie des gens qui souhaitent ardemment leur réintroduction dans notre enseignement, à ce niveau. Je ne suis pas sûr, toutefois, que je tiendrais le même discours s'il s'agissait d'enseigner aux collégiens la géométrie hyperbolique ou elliptique (mais, à ma connaissance, même Laurent Lafforgue ne propose pas cela). En effet, ces outils y sont beaucoup moins commodes qu'en euclidien, vu l'absence de trois ingrédients essentiels : les parallèles et les égalités d'angles qui vont avec (alternes internes, etc.), le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à  $\pi$ , le théorème de l'angle inscrit. Mais, à rebours, la conclusion que j'en tire du point de vue didactique, s'agissant de la géométrie euclidienne, c'est justement que ces outils y sont d'autant plus essentiels.*

Dans tout ce chapitre, le corps de base est  $\mathbf{R}$  et la forme  $q$  est soit elliptique, soit hyperbolique. On considère un triangle  $abc$ ; il est formé de trois points non isotropes et non alignés.

## 6.1 Variantes d'Al-Kashi : trois longueurs et un angle de demi-droites

Dans cette section, nous étudions les variantes de la formule d'Al-Kashi 4.5.8 qui mettent en jeu, comme la formule euclidienne usuelle, trois longueurs et un angle de demi-droites, en faisant la distinction entre les géométries sphérique, elliptique et hyperbolique.

Pour expliquer en quoi les formules que nous allons donner sont liées à la formule d'Al-Kashi générale, rappelons celle-ci (on pose  $B = (ca)$  et  $C = (ab)$ ) :

$$I(b, c) + I(a, b)I(a, c) - 2S(a, b, c) = [1 - I(a, b)][1 - I(a, c)]I^*(B, C).$$

Dans le cas elliptique (resp. hyperbolique), on sait que les invariants  $I(b, c)$  sont de la forme  $\cos^2 \alpha$  (resp.  $\operatorname{ch}^2 \alpha$ ) et donc les  $1 - I(b, c)$  sont des  $\sin^2 \alpha$  (resp.  $-\operatorname{sh}^2 \alpha$ ). Dans les deux cas,  $I^*(B, C)$  est égal à  $\cos^2 \hat{a}$  (angle des droites  $B, C$ ). Quant au spin, il est égal, au signe  $\epsilon$  près, au produit  $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$  (resp.  $\operatorname{ch} \alpha \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \gamma$ ). Les deux membres de la formule sont alors les carrés respectifs de  $\cos \alpha - \epsilon \cos \beta \cos \gamma$  et de  $\sin \beta \sin \gamma \cos \hat{a}$  ou de leurs variantes hyperboliques et les formules que nous allons donner sont des variantes obtenues en prenant les racines carrées des deux membres<sup>1</sup>. Ce passage aux racines nécessite l'usage des angles de demi-droites.

Dans chacun des cas, l'inégalité triangulaire apparaît comme un sous-produit de ces formules.

### 6.1.1 Variante réelle 1 : géométrie sphérique

**6.1.1 Rappels.** Rappelons la notion d'angle de demi-droites sur la sphère  $\mathbf{S}^2$ . Si  $a, b, c$  sont trois points distincts de la sphère, avec  $b, c \neq -a$ , l'angle  $\widehat{bac}$  des demi-droites  $[ab]$  et  $[ac]$  est l'angle  $\theta$  des vecteurs tangents aux arcs mineurs allant de  $a$  à  $b$  et de  $a$  à  $c$ . On montre qu'on a

$$\theta = \operatorname{Arccos} \left( \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\sqrt{q(a \wedge b)} \sqrt{q(a \wedge c)}} \right).$$

---

1. En vérité, il est souvent plus simple de prouver les formules en revenant à 1.2.4.

Pour cela on se ramène par transitivité au cas où  $a, b, c$  sont les points :

$$a = (1, 0, 0), \quad b = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0), \quad c = (\cos \beta, \cos \theta \sin \beta, \sin \theta \sin \beta).$$

Si les points  $a, b, c$  vérifient  $\varphi(a, b)\varphi(a, c) > 0$ , c'est aussi l'angle des demi-droites images dans le plan elliptique.

L'analogie sphérique d'Al-Kashi est la fameuse formule fondamentale de la trigonométrie sphérique :

**6.1.2 Proposition.** *Soient  $a, b, c$  trois points distincts de la sphère  $\mathbf{S}^2$ , avec  $b, c \neq -a$ . On note respectivement  $\alpha, \beta, \gamma$  les longueurs  $bc, ca, ab$  des côtés du triangle sphérique et  $\widehat{bac}$  (voire  $\widehat{a}$ ) l'angle en  $a$ . On a la formule :*

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \widehat{bac}.$$

*Démonstration.* On a les formules :  $\cos \alpha = \varphi(b, c)$ ,  $\cos \beta = \varphi(a, c)$ ,  $\cos \gamma = \varphi(a, b)$  (voir 5.1.3),  $\cos \widehat{bac} = \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\sqrt{q(a \wedge c)}\sqrt{q(a \wedge b)}}$  (voir 6.1.1). Mais on a, en vertu de 1.2.3,  $q(a \wedge b) = q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2 = 1 - \cos^2 \gamma = \sin^2 \gamma$  et, comme  $\gamma$  est dans  $[0, \pi]$ , on a  $\sin \gamma = \sqrt{q(a \wedge b)}$  et, de même,  $\sin \beta = \sqrt{q(a \wedge c)}$ . On conclut alors avec la formule  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = q(a)\varphi(b, c) - \varphi(a, b)\varphi(a, c)$ .

**6.1.3 Corollaire.** *La distance  $\delta(a, b)$  vérifie l'inégalité triangulaire.*

*Démonstration.* Avec les notations précédentes il s'agit de montrer la formule  $\alpha \leq \beta + \gamma$ . C'est évident si  $\beta + \gamma \geq \pi$  et sinon, comme la fonction cosinus est décroissante sur  $[0, \pi]$ , il suffit de montrer  $\cos \alpha \geq \cos(\beta + \gamma)$ . Avec la formule fondamentale on se ramène à montrer  $\cos \widehat{a} \geq -1$  ce qui est évident.

## 6.1.2 Variante réelle 2 : géométrie elliptique

Nous passons maintenant au plan elliptique :

**6.1.4 Proposition.** *Soient  $a, b, c$  trois points distincts de  $\mathbf{E}$ . On suppose  $b$  et  $c$  non orthogonaux à  $a$ . On note respectivement  $\alpha, \beta, \gamma$  les longueurs  $bc, ca, ab$  et  $\widehat{bac}$  l'angle (de demi-droites) en  $a$ , voir 5.5.7. On a la formule :*

$$\epsilon \cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \widehat{bac}$$

où le signe  $\epsilon = \pm 1$  est celui du spin  $S(a, b, c)$ , c'est-à-dire de  $\varphi(b, c)\varphi(c, a)\varphi(a, b)$  (voir 4.5.1).

*Démonstration.* On relève  $a, b, c$  en des points de la sphère, notés encore  $a, b, c$ , vérifiant la convention 5.5.1 et plus précisément tels que  $\varphi(a, b)$  et  $\varphi(a, c)$  soient  $\geq 0$ . Les formules sont cette fois (voir 5.1.7)  $\cos \gamma = \varphi(a, b)$ ,  $\cos \beta = \varphi(a, c)$ ,  $\cos \alpha = \epsilon \varphi(b, c)$ , où  $\epsilon$  est le signe du spin,  $\sin \gamma = \sqrt{q(a \wedge b)}$ ,  $\sin \beta = \sqrt{q(a \wedge c)}$  et  $\cos \widehat{bac} = \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\sqrt{q(a \wedge c)}\sqrt{q(a \wedge b)}}$  (voir 5.5.7).

On conclut encore avec la formule  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = q(a)\varphi(b, c) - \varphi(a, b)\varphi(a, c)$ .

**6.1.5 Remarque.** Si  $b$  et  $c$  sont orthogonaux, on a  $\varphi(b, c) = S(a, b, c) = \cos \alpha = 0$  et le signe  $\epsilon$  n'a pas de sens.

**6.1.6 Corollaire. (Inégalité triangulaire)** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ . On a l'inégalité  $bc \leq ba + ac$ .

*Démonstration.* On reprend les notations de la proposition précédente et il s'agit de montrer qu'on a  $\alpha \leq \beta + \gamma$ . Rappelons que les nombres  $\alpha, \beta, \gamma$  sont dans  $[0, \pi/2]$ . L'inégalité est évidente lorsque  $b$  ou  $c$  est orthogonal à  $a$  car  $\gamma$  ou  $\beta$  est alors égal à  $\pi/2$ . Sinon, on applique la proposition précédente et il y a deux cas selon le signe du spin. Si  $\epsilon = 1$ , comme la fonction cosinus est décroissante sur  $[0, \pi]$ , il s'agit de montrer qu'on a  $\cos \alpha \geq \cos(\beta + \gamma)$ , ce qui se réduit à  $\cos \widehat{bac} \geq -1$  et c'est clair. Si  $\epsilon = -1$ , la formule de 6.1.4 donne, en tenant compte de  $\cos \widehat{bac} \in [-1, 1]$ ,  $\cos(\beta + \gamma) \leq -\cos \alpha \leq \cos(\beta - \gamma)$ . On en déduit  $\beta + \gamma \geq \pi - \alpha$  et, comme  $\alpha$  est dans  $[0, \pi/2]$ , on a  $\alpha \leq \pi - \alpha$  et le résultat. Notons qu'on a prouvé, au passage, l'inégalité  $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi$  (et même  $> \pi$  si les points ne sont pas alignés), soit :

**6.1.7 Proposition.** Si  $abc$  est un triangle de  $\mathbf{E}$  à spin  $< 0$ , on a  $bc + ca + ab \geq \pi$ .

La proposition suivante élucide le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire et précise 5.1.12 :

**6.1.8 Proposition.** Soient  $a, b, c$  des points de  $\mathbf{E}$ . On a  $bc = ba + ac$  si et seulement si  $a, b, c$  sont alignés et si  $b$  et  $c$  sont orthogonaux ou si  $a$  est dans le segment intrinsèque  $[bc]$ . On a alors  $S(a, b, c) \geq 0$ .

*Démonstration.* Supposons d'abord  $a, b, c$  alignés. Si  $b$  et  $c$  sont orthogonaux, la relation  $bc = ba + ac$  vient de 5.1.12. Si  $a$  est dans le segment  $[bc]$ , on peut supposer  $\varphi(b, c) > 0$  et il résulte de 5.4.8 qu'on a  $a = \lambda b + \mu c$  avec  $\lambda, \mu \geq 0$ . On en déduit  $S(a, b, c) > 0$ . Par ailleurs, on a  $\widehat{bac} = \pi$  en vertu de 5.5.9. La formule d'Al-Kashi 6.1.4 montre alors qu'on a  $\cos \alpha = \cos(\beta + \gamma)$ , d'où la conclusion.

Supposons maintenant  $bc = ba + ac$ . On peut supposer  $a \neq b, c$  sinon le résultat est évident. L'égalité est impossible si  $a$  est orthogonal à  $b$  ou  $c$  (sinon on aurait par exemple  $ab = \pi/2$ ,  $ac > 0$ , donc  $ab + ac > bc$ ). On peut donc appliquer 6.1.4 dont on reprend les notations. Si  $\epsilon$  est égal à  $-1$  on a  $ab + bc + ca \geq \pi$  en vertu de 6.1.7, soit  $2bc \geq \pi$ . Comme les distances sont bornées par  $\pi/2$ , on en déduit  $bc = \pi/2$ , donc  $b, c$  orthogonaux et  $ab + bc + ca = \pi$ , donc  $a, b, c$  alignés en vertu de 5.1.12.2. Si  $\epsilon$  est égal à  $1$ , la formule 6.1.4 montre que  $\alpha = \beta + \gamma$  implique  $\cos \widehat{bac} = -1$ . On conclut par 5.5.9.

**6.1.9 Remarque.** Si  $a, b, c$  sont trois points alignés, deux à deux non orthogonaux, il y a deux cas de figure possible dont un triple. Si le spin  $S(a, b, c)$  est positif, l'un des points est dans le segment défini par les deux autres (disons  $a \in [bc]$ ) et on a une égalité de longueurs (ici  $bc = ab + ac$ ). Si le spin est négatif, aucun des points n'est dans le segment formé par les deux autres et on a  $bc + ca + ab = \pi$ . On notera que les deux cas se traduisent en termes du complémentaire du lacet formé des segments  $[ab], [bc], [ca]$ , voir 6.3.15.

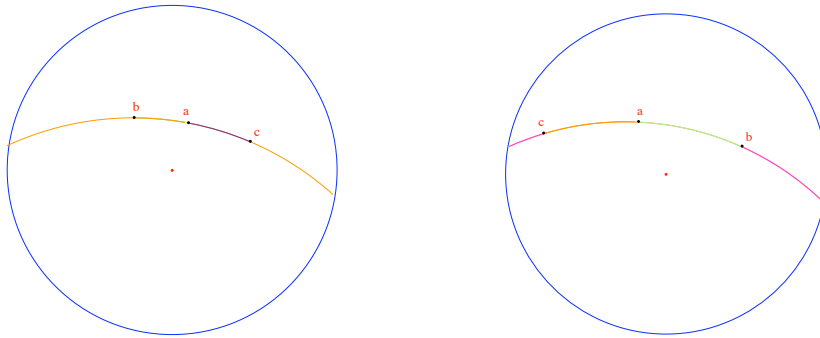


FIGURE 6.1 – Les deux cas de figure de points alignés sur une droite elliptique, à gauche  $bc = ba + ac$ , à droite  $ab + bc + ca = \pi$

### Le cas d'orthogonalité

La formule d'Al-Kashi ne s'applique pas *a priori* lorsque l'un des points  $b$  ou  $c$  est orthogonal à  $a$  car l'angle de demi-droites n'est pas défini. De plus, dans ce cas le spin du triangle est nul et son signe n'est pas défini. Nous allons toutefois étendre la formule grâce à la convention 5.5.11.

**6.1.10 Proposition.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ . On suppose  $b$  ou  $c$  orthogonal à  $a$ . On note respectivement  $\alpha, \beta, \gamma$  les longueurs  $bc, ca, ab$  et  $\widehat{bac}$  l'angle

(de demi-droites) en  $a$ , avec la convention de 5.5.11. La formule d'Al-Kashi devient :

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \widehat{bac}.$$

*Démonstration.* Voir exercice 6.10.1.

### 6.1.3 Variante réelle 3 : géométrie hyperbolique

Rappelons que si on écrit les points du disque de Klein sous la forme  $(x, y, 1)$ , les quantités  $\varphi(a, b)$ , pour  $a, b \in \mathbf{K}$ , sont toutes négatives (voir 2.4.9).

**6.1.11 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ . On note respectivement  $\alpha, \beta, \gamma$  les longueurs des côtés  $bc, ca, ab$  et  $\widehat{bac}$  l'angle des demi-droites  $[ab]$  et  $[ac]$ . On a la formule :*

$$\operatorname{ch} \alpha = \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \gamma - \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \gamma \cos \widehat{bac}.$$

*Démonstration.* Rappelons qu'on a  $I(a, b) = \operatorname{ch}^2 \gamma$  et les formules analogues (voir 5.1.14). En fait, comme les quantités  $\varphi(a, b), q(a)$  et  $q(b)$  sont négatives, on a  $\operatorname{ch} \gamma = \frac{-\varphi(a, b)}{\sqrt{q(a)q(b)}}$  et de même pour les autres côtés. Par ailleurs, on a, voir 5.5.7,  $\cos \widehat{bac} = \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\sqrt{|q(a \wedge b)q(a \wedge c)|}}$ . Les formules de 1.2.4 donnent  $q(a \wedge b) = q(a)q(b) \operatorname{sh}^2 \gamma$  et  $q(a \wedge c) = q(a)q(c) \operatorname{sh}^2 \beta$ . On en déduit :

$$\sqrt{|q(a \wedge b)q(a \wedge c)|} = -q(a) \sqrt{q(b)q(c)} \operatorname{sh} \gamma \operatorname{sh} \beta.$$

La formule annoncée découle alors de  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c) = \varphi(a, b)\varphi(a, c) - q(a)\varphi(b, c)$  (en prenant garde au signe de  $q(a)$ ).

**6.1.12 Corollaire. (Inégalité triangulaire)** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ . On a  $bc \leq ba + ac$  avec égalité si et seulement si  $a, b, c$  sont alignés avec  $a \in [bc]$ .*

*Démonstration.* Avec les notations de la proposition précédente, comme la fonction  $\operatorname{ch}$  est croissante, il s'agit de montrer qu'on a  $\operatorname{ch} \alpha \leq \operatorname{ch}(\beta + \gamma) = \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \gamma$ , ce qui est clair. Il y a égalité si et seulement si  $\cos \widehat{bac} = -1$ . On conclut avec 5.5.9.

## 6.2 Variantes d'Al-Kashi : trois angles de demi-droites et une longueur

Dans cette section, nous opérons un renversement de la formule d'Al-Kashi : la variante considérée lie trois angles (de demi-droites) et une longueur, avec comme conséquence l'étude de la somme des angles d'un triangle. Attention, le fait d'utiliser les angles de demi-droites et non les angles de droites est une rupture de la symétrie avec les longueurs et la dualité va donc être moins efficace qu'à l'accoutumée.

### 6.2.1 Le cas elliptique

**6.2.1 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ . On suppose les points  $a, b, c$  non orthogonaux. On note  $\alpha = bc$ ,  $\beta = ca$ ,  $\gamma = ab$  les longueurs des côtés du triangle et  $\widehat{a}, \widehat{b}$  et  $\widehat{c}$  ses angles de demi-droites. On a la formule :*

$$\cos \widehat{a} + \cos \widehat{b} \cos \widehat{c} = \epsilon \sin \widehat{b} \sin \widehat{c} \cos \alpha,$$

où  $\epsilon = \pm 1$  est le signe du spin de  $abc$  et les deux formules analogues obtenues par permutation circulaire de  $a, b, c$ .

*Démonstration.* Quitte à changer de représentants, on peut supposer  $\varphi(b, c) > 0$  et  $\varphi(a, b) > 0$ . Comme  $\alpha$  est dans  $[0, \pi/2]$ , on a  $\cos \alpha = \frac{\varphi(b, c)}{\sqrt{q(b)q(c)}}$ .

On introduit le triangle polaire  $a'b'c'$  :  $a' = b \wedge c$ ,  $b' = c \wedge a$ ,  $c' = a \wedge b$  et on utilise les formules de double produit vectoriel 1.2.6. On a ainsi :  $\delta b = c' \wedge a'$  et  $\delta c = a' \wedge b'$  avec  $\delta = [a, b, c]$ . Avec 1.2.3, on en déduit :

$$\cos \alpha = \frac{-q(a')\varphi(b', c') + \varphi(a', b')\varphi(c', a')}{\sqrt{(q(c')q(a') - \varphi(c', a')^2)(q(a')q(b') - \varphi(a', b')^2)}}.$$

On divise alors numérateur et dénominateur par  $q(a')\sqrt{q(b')q(c')}$ . Il apparaît un terme :

$$\frac{\varphi(b', c')}{\sqrt{q(b')q(c')}} = \frac{-\varphi(a \wedge c, a \wedge b)}{\sqrt{q(a \wedge c)q(a \wedge b)}}.$$

Cette quantité vaut  $-\cos \widehat{a}$  (resp.  $\cos \widehat{a}$ ) si  $\varphi(a, c)$  est  $> 0$  (resp.  $< 0$ ), autrement dit si  $\epsilon$  vaut 1 (resp.  $-1$ ) (c'est 5.5.7 avec la convention 5.5.1). Il en est de même pour le terme en  $\varphi(a', b')$  (mais il n'y a pas de signe pour le terme en  $\varphi(c', a')$  car  $\varphi(a, b)$  et  $\varphi(b, c)$  sont positifs). Pour le dénominateur, on divise la quantité sous la racine par  $q(a')^2q(b')q(c')$  en divisant le premier terme par  $q(a')q(c')$  et le second par  $q(a')q(b')$ . On obtient ainsi les carrés de  $\sin \widehat{b}$  et  $\sin \widehat{c}$ . En définitive, on a  $\cos \alpha \sin \widehat{b} \sin \widehat{c} = \epsilon(\cos \widehat{a} + \cos \widehat{b} \cos \widehat{c})$  d'où le résultat.

**6.2.2 Remarque.** Il y a bien entendu une preuve plus conceptuelle de la proposition précédente qui consiste à passer au dual. Attention toutefois, il faut pour cela avoir défini l'analogie des demi-droites avec les points (les demi-points) et la distance entre ces demi-points, voir exercice 5.6.6.

### Le cas où deux points sont orthogonaux

Comme dans le cas de la première formule d'Al-Kashi, le résultat précédent n'a de sens que lorsque les points  $a, b, c$  ne sont pas orthogonaux car sinon les angles de demi-droites ne sont pas définis. On en a cependant une variante avec la convention 5.5.11.

**6.2.3 Proposition.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ . On suppose  $b$  et  $c$  orthogonaux de sorte que le triangle est de spin nul et qu'on a  $\alpha = \pi/2$ . Selon la convention 5.5.11, on choisit pour angles de demi-droites  $\widehat{b}$  et  $\widehat{c}$  les angles aigus ou droits :  $\cos \widehat{b} \geq 0$  et  $\cos \widehat{c} \geq 0$ . Le spin angulaire de  $abc$  est positif ou nul et on a les formules suivantes :

- 1)  $\cos \widehat{a} = -\cos \widehat{b} \cos \widehat{c}$ ,
- 2)  $\cos \beta \sin \widehat{a} = \cos \widehat{b} \sin \widehat{c}$ ,
- 3)  $\cos \gamma \sin \widehat{a} = \cos \widehat{c} \sin \widehat{b}$ .

Réciproquement, si un triangle vérifie la relation  $\cos \widehat{a} = -\cos \widehat{b} \cos \widehat{c}$ , son spin est nul.

*Démonstration.* Voir exercice 6.10.1.

### 6.2.2 Le cas hyperbolique

**6.2.4 Proposition.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ . On note  $\alpha = bc$ ,  $\beta = ca$ ,  $\gamma = ab$  les longueurs des côtés du triangle et  $\widehat{a}, \widehat{b}$  et  $\widehat{c}$  ses angles de demi-droites. On a la formule :

$$\cos \widehat{a} + \cos \widehat{b} \cos \widehat{c} = \sin \widehat{b} \sin \widehat{c} \operatorname{ch} \alpha.$$

*Démonstration.* La preuve est identique, *mutatis mutandis*.

## 6.3 Les triangles du plan elliptique

L'objectif de ce paragraphe est de donner une classification des triangles du plan elliptique, à la fois du point de vue des angles et du spin.



### 6.3.1 Les angles d'un triangle

#### Les inégalités fondamentales

**6.3.1 Proposition.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ . On note  $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$  ses angles de demi-droites.

1) Si  $abc$  est de spin positif on a :

$$-\cos \widehat{b} \cos \widehat{c} < \cos \widehat{a} < -\cos \widehat{b} \cos \widehat{c} + \sin \widehat{b} \sin \widehat{c}$$

et les inégalités analogues obtenues par permutation circulaire.

2) Si  $abc$  est de spin nul avec  $b, c$  orthogonaux on a :

$$-\cos \widehat{b} \cos \widehat{c} = \cos \widehat{a}.$$

3) Si  $abc$  est de spin négatif on a :

$$-\cos \widehat{b} \cos \widehat{c} - \sin \widehat{b} \sin \widehat{c} < \cos \widehat{a} < -\cos \widehat{b} \cos \widehat{c}$$

et les inégalités analogues obtenues par permutation circulaire.

*Démonstration.* Dans le cas de spin non nul, cela résulte aussitôt de 6.2.1 en tenant compte du fait que les sinus des angles et les cosinus des longueurs sont positifs. Pour le spin nul c'est 6.2.3.

#### La somme des angles d'un triangle

Dans le plan euclidien, la somme des angles<sup>2</sup> d'un triangle est toujours égale à  $\pi$ . C'est une différence essentielle avec les géométries non euclidiennes puisque cette somme est  $> \pi$  en géométrie elliptique et  $< \pi$  en géométrie hyperbolique.

**6.3.2 Proposition.** Soient  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ . La somme des angles (de demi-droites) du triangle  $abc$  est strictement plus grande que  $\pi$  :  $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} > \pi$ .

*Démonstration.* Comme les sinus des angles sont positifs, les inégalités de 6.3.1 donnent, dans tous les cas :

$$-\cos \widehat{a} > \cos \widehat{b} \cos \widehat{c} - \sin \widehat{b} \sin \widehat{c}$$

ou encore  $\cos(\pi - \widehat{a}) > \cos(\widehat{b} + \widehat{c})$ . Si  $\widehat{b} + \widehat{c}$  est plus grand que  $\pi$  le résultat est évident et sinon il résulte de la décroissance<sup>3</sup> de la fonction cosinus sur  $[0, \pi]$ .

---

2. Il s'agit des angles non orientés de demi-droites, bien entendu.

3. Le lecteur ne manquera pas de noter les similitudes des calculs qui suivent avec ceux qui ont mené à l'inégalité triangulaire.

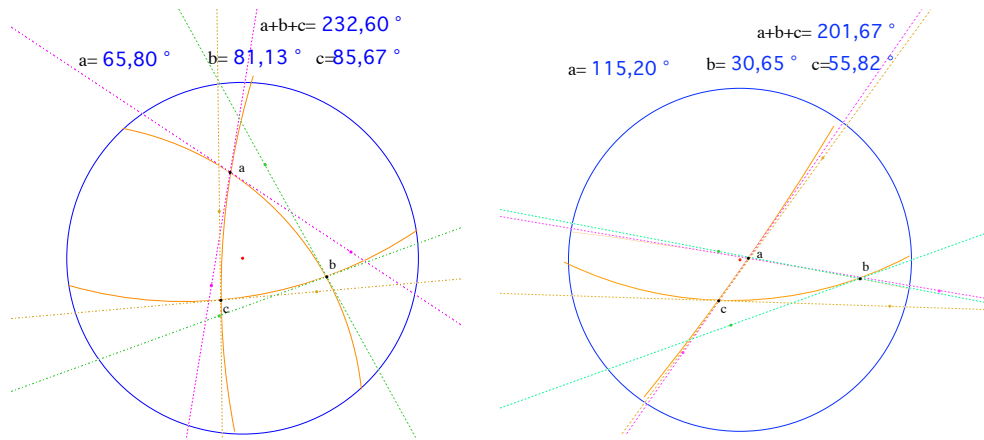


FIGURE 6.2 – Dans le plan elliptique, la somme des angles d’un triangle est plus grande que  $\pi$  (à gauche un triangle de type 1, à droite un triangle de type 2)

### 6.3.2 Classification des triangles

Notons d’abord le lemme suivant :

**6.3.3 Lemme.** *Si un triangle  $abc$  de  $\mathbf{E}$  admet deux angles droits il est de spin nul. Inversement, si un triangle de spin nul admet un angle droit, il en a deux.*

*Démonstration.* On a par exemple  $\hat{a} = \hat{b} = \pi/2$ , donc  $\cos \hat{a} = \cos \hat{b} = 0$ . Si  $abc$  est de spin non nul, cela contredit les inégalités strictes de 6.3.1. La deuxième assertion vient de la formule  $\cos \hat{a} = -\cos \hat{b} \cos \hat{c}$ .

La proposition suivante énumère tous les types possibles de triangles. On trouvera les diverses figures soit ci-dessus en 6.2 pour les types 1 et 2, soit ci-dessous en 6.3 et 6.4 pour les triangles de spin nul ou rectangles ou enfin en 6.7 au paragraphe suivant pour les triangles de type 3 (spin négatif).

**6.3.4 Proposition-Définition.** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ . On note  $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$  ses angles de demi-droites.*

1) *Si  $abc$  est de spin positif, il y a trois cas :*

- *soit les trois angles sont aigus, (**triangle de type 1**),*
- *soit l’un des angles est droit et les deux autres aigus (**triangle rectangle ordinaire**),*
- *soit l’un des angles est obtus et les deux autres aigus, (**triangle de type 2**).*

2) Si  $abc$  est de spin nul, avec  $b, c$  orthogonaux et la convention de 5.5.11, il y a trois possibilités :

- les angles en  $b, c$  sont aigus et l'angle en  $a$  obtus (**triangle de spin nul ordinaire**),
- l'un des angles en  $b, c$  est droit et l'autre aigu, l'angle en  $a$  est droit lui aussi (**triangle birectangle**),
- les trois angles sont droits (**triangle autopolaire**).

3) Si  $abc$  est de spin négatif, ses trois angles sont obtus (**triangle de spin négatif ou de type 3**).

*Démonstration.* 1) Si deux angles, disons  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$ , sont obtus ou droits et si  $\hat{c}$  est aigu, cela contredit l'inégalité  $\cos \hat{a} + \cos \hat{b} \cos \hat{c} > 0$ . Si les trois angles sont obtus ou droits avec  $\pi/2 \leq \hat{c} \leq \hat{b} \leq \hat{a}$ , on a  $\cos \hat{b} \cos \hat{c} \leq |\cos \hat{b}| \leq |\cos \hat{a}|$  et cela contredit encore la même inégalité.

2) Cela résulte de l'égalité  $\cos \hat{a} = -\cos \hat{b} \cos \hat{c}$ .

3) Dans le cas de spin négatif, avec les inégalités du type  $\cos \hat{a} + \cos \hat{b} \cos \hat{c} < 0$  on élimine aussitôt le cas de trois angles aigus et de deux obtus et un aigu. Si on suppose  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  aigus et  $\hat{c}$  obtus, avec, disons,  $\hat{a} \leq \hat{b}$ , on a  $|\cos \hat{b} \cos \hat{c}| < \cos \hat{b} \leq \cos \hat{a}$  et cela contredit encore l'inégalité ci-dessus.

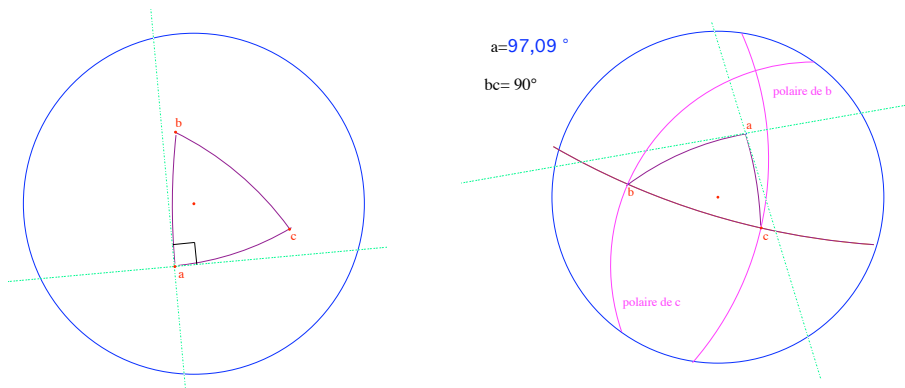


FIGURE 6.3 – Triangle rectangle ordinaire (à gauche) et ordinaire de spin nul (à droite)

## D'autres inégalités

**6.3.5 Proposition.** Soient  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ .

1) Si  $abc$  est de spin  $> 0$ , la somme de deux quelconques des angles du triangle est  $< \pi$ .

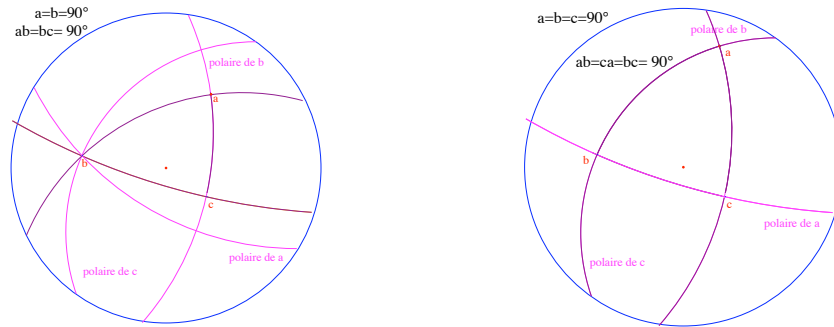


FIGURE 6.4 – Triangle birectangle (à gauche) et autopolaire (à droite)

2) Si  $abc$  est un triangle de spin nul ordinaire, la somme de deux de ses angles est  $< \pi$ .

3) Si  $abc$  est de spin  $< 0$  on a  $\hat{a} + \hat{b} - \hat{c} < \pi$ ,  $\hat{a} - \hat{b} + \hat{c} < \pi$ ,  $-\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} < \pi$ .

*Démonstration.* 1) Le cas d'un triangle de type 1 est évident ainsi que celui d'un triangle rectangle. Pour un triangle de type 2 avec  $\hat{a}$  obtus et  $\hat{b}$  et  $\hat{c}$  aigus, l'inégalité  $\cos \hat{a} > -\cos \hat{b} \cos \hat{c}$  implique  $\cos \hat{a} > -\cos \hat{b}$ , soit  $\hat{a} < \pi - \hat{b}$  et le résultat. Le raisonnement est analogue pour un triangle de spin nul ordinaire en utilisant la relation  $\cos \hat{a} = -\cos \hat{b} \cos \hat{c}$ .

3) Montrons par exemple  $\hat{a} + \hat{b} - \hat{c} < \pi$ . On a, par 6.3.1,  $\cos \hat{b} \cos \hat{c} + \sin \hat{b} \sin \hat{c} > -\cos \hat{a}$  soit  $\cos(\hat{b} - \hat{c}) > \cos(\pi - \hat{a})$  donc, par décroissance du cosinus,  $\hat{b} - \hat{c} < \pi - \hat{a}$  et le résultat.

Les résultats précédents donnent aussitôt une classification des triangles selon la somme de leurs angles :

**6.3.6 Corollaire.** 1) Un triangle  $abc$  est de spin positif, ou de spin nul ordinaire, ou birectangle si et seulement si la somme de ses angles est  $< 3\pi/2$ .

2) Un triangle est autopolaire si et seulement si la somme de ses angles est égale à  $3\pi/2$ .

3) Un triangle est de spin négatif si et seulement si la somme de ses angles est  $> 3\pi/2$ .

### 6.3.3 Triangles, spin et polarité

Dans tout ce paragraphe on désigne par  $T$  un triangle  $abc$  du plan elliptique  $\mathbf{E}$  et  $T'$  son triangle polaire (ou dual)  $a'b'c'$  avec  $a' = b \wedge c$ ,  $b' = c \wedge a$  et  $c' = a \wedge b$ . On sait que les longueurs des côtés de  $abc$  sont les angles de droites de  $a'b'c'$  et vice-versa. La première remarque est donc évidente avec 1.3.10 et 1.2.6 :

- 6.3.7 Proposition.** 1) La somme des longueurs des côtés de  $T$  (resp.  $T'$ ) est égale à la somme des angles (de droites) de  $T'$  (resp.  $T$ ).  
 2) Le dual d'un triangle de spin nul est un triangle rectangle et vice-versa.

Avec les angles de demi-droites, les choses sont un peu plus complexes :

**6.3.8 Proposition.** On reprend les notations de 6.3.4. La dualité échange les triangles de types 1 et 3, elle laisse invariant l'ensemble des triangles de type 2, elle échange les triangles rectangles ordinaires et les triangles de spin nul ordinaires, elle laisse invariant l'ensemble des triangles birectangles et elle laisse invariant chaque triangle autopolaire.

*Démonstration.* Le cas des triangles autopolaires est évident car ils vérifient  $a = a', b = b', c = c'$ . Pour les triangles birectangles, on note qu'ils sont caractérisés par le fait d'être à la fois rectangles et de spin nul, propriétés qui s'échangent par dualité.

Supposons  $T$  de type 1 et montrons que  $T'$  est de spin négatif. Dans  $S(b \wedge c, c \wedge a, a \wedge b)$  interviennent alors les termes  $\varphi(a \wedge b, c \wedge a)$ , etc. qui sont les opposés de ceux qui interviennent dans les angles de demi-droites. Or, ces angles sont aigus, de sorte que  $\varphi(a \wedge b, a \wedge c)$ , par exemple, est  $> 0$ , donc  $\varphi(a \wedge b, c \wedge a) < 0$  et le spin est  $< 0$ . Le même raisonnement donne le cas où le triangle  $T$  est de spin  $< 0$ .

Pour le cas des triangles de type 2, on peut supposer  $\varphi(a, b)$ ,  $\varphi(c, a)$  et  $\varphi(b, c) > 0$  et, par exemple,  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  aigus et  $\hat{c}$  obtus. En vertu de 5.5.7 les trois produits  $\varphi(a', b')$ ,  $\varphi(c', a')$ ,  $\varphi(b', c')$  sont positifs, de sorte que  $T' = a'b'c'$  est de spin  $> 0$ . De plus, on calcule avec la formule du double produit vectoriel (voir 1.2.6)  $a' \wedge b' = \delta c$ ,  $a' \wedge c' = \delta b$  et  $c' \wedge b' = \delta a$  avec  $\delta = [a, b, c]$ . On en déduit que les angles en  $a', b'$  sont aigus et l'angle en  $c'$  obtus.

Le cas des triangles rectangles ou de spin nul ordinaires se déduit des précédents par disjonction des cas.

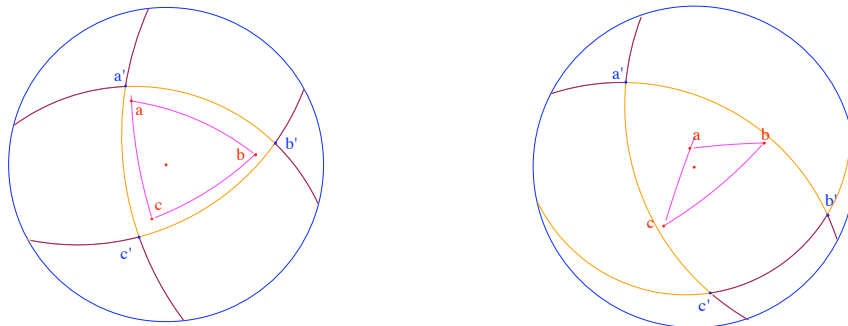


FIGURE 6.5 – Triangles de type 1 (à gauche) et 2 (à droite) et leurs polaires

**6.3.9 Remarque.** Dans le cas des triangles de type 2 on notera que c'est l'angle en le pôle  $c'$  du côté opposé à l'angle obtus  $\widehat{c}$  qui est obtus.

**6.3.10 Remarque.** On retrouve le fait que la somme des angles d'un triangle  $T = abc$  de  $\mathbf{E}$  est  $> \pi$ . En effet, c'est clair si  $T$  est à spin  $< 0$  et la somme  $\Sigma$  est même  $> 3\pi/2$ . Si  $T$  est à spin  $> 0$  avec des angles aigus, les angles de demi-droites de  $T$  sont aussi des angles de droites, donc ce sont les longueurs des côtés de  $T'$ . Comme ce triangle est à spin  $< 0$ , on sait, voir 6.1.7, que la somme de ses longueurs est  $> \pi$ .

Il reste le cas d'un triangle à spin  $> 0$  avec un angle obtus. Notons  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  les angles de droites de  $T$  et  $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$  ses angles de demi-droites et supposons  $\widehat{c}$  obtus. On a donc  $\widehat{c} = \pi - \bar{c}$ , d'où  $\Sigma = \widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \bar{a} + \bar{b} - \bar{c} + \pi$ . Mais, les angles de droites sont les longueurs du triangle dual et on a donc, par l'inégalité triangulaire,  $\bar{c} < \bar{a} + \bar{b}$ , d'où le résultat.

### 6.3.4 Spin et classification topologique des triangles

*Dans ce paragraphe, nous donnons une interprétation topologique de ce nouvel invariant qu'est le spin  $S(a, b, c) = \frac{\varphi(b, c) \varphi(c, a) \varphi(a, b)}{q(a)q(b)q(c)}$ , dans le cas de la géométrie elliptique. Ces explications devraient rendre plus transparentes les figures rencontrées ci-dessus. Tout provient du fait que — pour des raisons de respect pour Euclide peut-être obsolètes — nous travaillons dans le plan projectif et non sur la sphère unité et qu'entre les deux il y a un revêtement de degré 2.*

Rappelons qu'on note  $d(a, b)$  ou encore  $ab$  la distance sur  $\mathbf{E}$ , voir 5.1.7 et  $\delta$  la distance sur la sphère, voir 5.1.3.

#### Rappels de topologie

Nous aurons besoin des deux résultats suivants, qui sont des cas particuliers de théorèmes généraux sur les revêtements qu'on pourra trouver par exemple dans [Gra71]. Le lecteur est supposé avoir une certaine familiarité avec les notions de lacet, d'homotopie et de simple connexité. En particulier on utilisera le fait que la sphère  $\mathbf{S}^2$  est simplement connexe.

On appelle  $p$  la projection de  $\mathbf{S}^2$  dans  $\mathbf{E} = \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$ . On dit qu'une application  $f : X \rightarrow \mathbf{E}$  se relève en  $\widehat{f} : X \rightarrow \mathbf{S}^2$  si on a  $p \circ \widehat{f} = f$ .

**6.3.11 Proposition.** *Tout lacet  $\bar{\gamma}$  d'origine  $\bar{a}$  de  $\mathbf{E}$  se relève dans  $\mathbf{S}^2$ , de manière unique, en un chemin  $\gamma$  d'origine  $a$  et dont l'extrémité est soit  $a$  (auquel cas le relèvement est un lacet), soit  $-a$ .*

**6.3.12 Proposition.** *Si on a un relèvement comme ci-dessus et une homotopie  $\bar{H}$  de  $\mathbf{E}$  joignant  $\bar{\gamma}$  à un lacet  $\bar{\gamma}'$ ,  $\bar{H}$  se relève, de manière unique, en une homotopie  $H$  de  $\mathbf{S}^2$  joignant  $\gamma$  à un chemin  $\gamma'$  qui relève  $\bar{\gamma}'$*

**6.3.13 Corollaire.** *Un lacet  $\bar{\gamma}$  de  $\mathbf{E}$  est homotope à un point si et seulement son relèvement  $\gamma$  est un lacet de  $\mathbf{S}^2$ .*

*Démonstration.* En effet, si c'est le cas, comme  $\mathbf{S}^2$  est simplement connexe,  $\gamma$  est homotope à un point donc aussi son image. En revanche, si  $\bar{\gamma}$  se relève en un chemin  $\gamma$  joignant  $a$  à son antipode, il ne peut être homotope à un point. En effet, on aurait alors une homotopie de lacets  $\bar{H}(t, u)$  (donc vérifiant  $\bar{H}(0, u) = \bar{H}(1, u) = \bar{a}$ ) avec  $\bar{H}(t, 0) = \bar{\gamma}(t)$ ,  $\bar{H}(t, 1) = \bar{\gamma}'(t)$  où  $\bar{\gamma}'$  est un chemin constant égal à  $\bar{a}$ . Si on relève  $\bar{H}$  en  $H$  avec  $H(t, 0) = \gamma(t)$ , les fonctions continues  $H(t, 1)$ ,  $H(0, u)$  et  $H(1, u)$  sont toutes à valeurs dans  $\{\pm a\}$  donc constantes. On a donc  $a = \gamma(0) = H(0, 0) = H(0, u) = H(0, 1) = H(t, 1) = H(1, 1) = H(1, u) = H(1, 0) = \gamma(1) = -a$  et c'est absurde.

## Le résultat

La proposition suivante caractérise les triangles à spin  $> 0$  :

**6.3.14 Proposition.** *Soit  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  un triangle du plan elliptique  $\mathbf{E}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *On a  $S(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0$ .*
- 2) *On peut trouver des représentants  $a, b, c$  des points  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  sur la sphère, tels que les nombres  $\varphi(b, c)$ ,  $\varphi(c, a)$ ,  $\varphi(a, b)$  soient  $> 0$ .*
- 3) *Il existe un triangle sphérique qui se projette sur  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$  et dont les longueurs des côtés (pour la métrique  $\delta$  de la sphère) sont toutes  $< \pi/2$ .*
- 4) *Le lacet  $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{a}$  de  $\mathbf{E}$ , obtenu en parcourant successivement les côtés intrinsèques  $[\bar{a}\bar{b}]$ ,  $[\bar{b}\bar{c}]$ ,  $[\bar{c}\bar{a}]$  du triangle, voir 5.4.6, est homotope à un point.*

*Démonstration.* On note que les conditions assurent que les points ne sont pas orthogonaux. Montrons 1)  $\implies$  2). Quitte à changer de représentants, on peut supposer  $q(a) = q(b) = q(c) = 1$ , et, quitte à changer  $b$  et  $c$  en leurs opposés, supposer que  $\varphi(a, b)$  et  $\varphi(a, c)$  sont  $> 0$ . Comme le triangle est de spin  $> 0$  on a aussi  $\varphi(b, c) > 0$ , ce qui prouve 2). La réciproque est triviale et l'équivalence de 2) et 3) vient de 5.1.9.

Montrons 3)  $\implies$  4). Considérons le lacet  $\gamma = abca$  de la sphère formé des arcs mineurs joignant ces points. En vertu de 5.4.12.1, il se projette sur le lacet intrinsèque  $\bar{\gamma}$  de  $\mathbf{E}$ . Comme la sphère est simplement connexe, le lacet  $\gamma$  est homotope à un point donc aussi son image  $\bar{\gamma}$ .

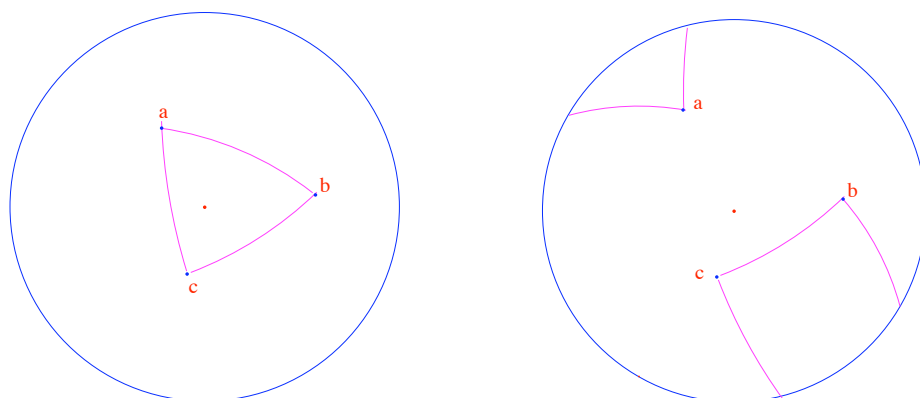


FIGURE 6.6 – Les deux formes des triangles de spin positif du plan elliptique (on n’oubliera pas que les points diamétralement opposés sont identifiés)

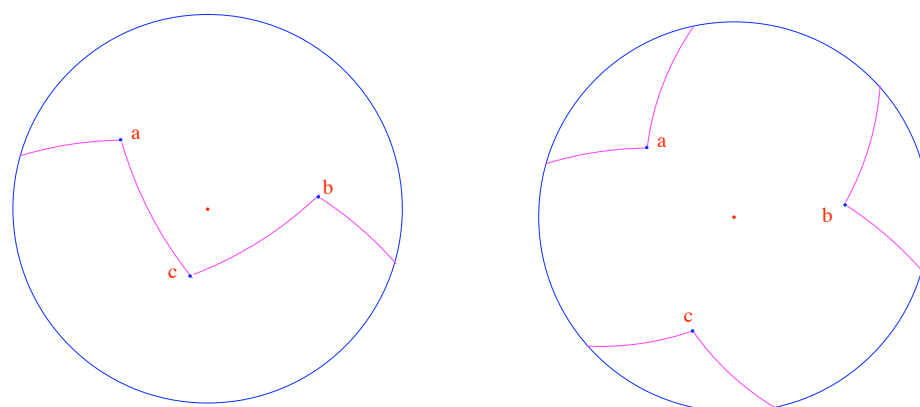


FIGURE 6.7 – Les deux formes des triangles de spin négatif

Montrons enfin  $4) \implies 3)$ . On considère le lacet  $\overline{ab\overline{c}a}$  de  $\mathbf{E}$  formé des segments intrinsèques. On relève ce lacet dans  $\mathbf{S}^2$  et, comme ce relèvement est unique, on peut choisir à chaque étape de relever le segment en un arc mineur. On relève donc  $[\overline{ab}]$  en un arc mineur  $\widehat{ab}$  (une fois choisi le point  $a$ , le point  $b$  est imposé par la condition  $\varphi(a, b) > 0$ , voir 5.4.12.1), puis, à partir de  $b$ , on relève  $[\overline{bc}]$  en l’arc mineur  $\widehat{bc}$  (ce qui impose  $c$  à cause de  $\varphi(b, c) > 0$ ). On doit alors relever  $\overline{ca}$ , donc relever  $\overline{a}$  en  $a' = a$  ou  $a' = -a$ , en imposant que l’arc  $\widehat{ca'}$  soit mineur, donc que  $\varphi(c, a')$  soit positif. Si le spin est positif c’est  $a$  qui convient, s’il est négatif, c’est  $-a$ . Comme on a supposé le lacet homotope à un point, le relèvement du lacet est un lacet (voir 6.3.13), donc le spin est positif.

**6.3.15 Remarque.** On a encore une autre propriété très frappante qui résulte



d'un théorème de Jordan et Schönflies : un lacet de  $\mathbf{E}$  est non homotope à un point (resp. homotope à un point) si et seulement si son complémentaire est connexe (resp. a deux composantes connexes). Il en résulte que le complémentaire d'un triangle de spin  $< 0$  est connexe, tandis que celui d'un triangle de spin  $> 0$  admet deux composantes. C'est cette propriété qui permet de repérer aussitôt sur une figure le signe du spin. On peut encore noter qu'une droite projective coupe le lacet en 0 ou 2 points s'il est homotope à un point et en un seul point sinon.

## 6.4 Les triangles du plan hyperbolique

*Nous étudierons essentiellement les triangles du plan de Klein  $\mathbf{K}$ . Comme annoncé, la somme des angles est cette fois plus petite que  $\pi$ .*

### 6.4.1 La somme des angles

**6.4.1 Proposition.** *La somme des angles (de demi-droites) d'un triangle de  $\mathbf{K}$  est strictement plus petite que  $\pi$ .*

*Démonstration.* On montre d'abord que la somme de deux angles est  $< \pi$  :

**6.4.2 Lemme.** *Si  $abc$  est un triangle de  $\mathbf{K}$  on a  $\widehat{b} + \widehat{c} < \pi$ .*

*Démonstration.* (du lemme) On écrit les formules issues de 6.2.4 :  $\cos \widehat{b} + \cos \widehat{a} \cos \widehat{c} = \sin \widehat{a} \sin \widehat{c} \operatorname{ch} \beta$  et  $\cos \widehat{c} + \cos \widehat{a} \cos \widehat{b} = \sin \widehat{a} \sin \widehat{b} \operatorname{ch} \gamma$  et on les ajoute. On obtient :

$$(\cos \widehat{b} + \cos \widehat{c})(1 + \cos \widehat{a}) = \sin \widehat{a} (\sin \widehat{c} \operatorname{ch} \beta + \sin \widehat{b} \operatorname{ch} \gamma).$$

Comme le triangle n'est pas aplati, le second membre et la quantité  $1 + \cos \widehat{a}$  sont strictement positifs et on en déduit  $\cos \widehat{b} + \cos \widehat{c} > 0$ , soit encore  $\cos \widehat{b} > -\cos \widehat{c} = \cos(\pi - \widehat{c})$  et comme ces quantités sont dans  $[0, \pi]$ , la décroissance de la fonction cosinus donne le résultat.

Revenons à la proposition. La formule de 6.2.4 s'écrit  $-\cos \widehat{a} = \cos \widehat{b} \cos \widehat{c} - \operatorname{ch} \alpha \sin \widehat{b} \sin \widehat{c}$  et, comme on a  $\operatorname{ch} \alpha > 1$ , on en déduit  $-\cos \widehat{a} = \cos(\pi - \widehat{a}) < \cos(\widehat{b} + \widehat{c})$ . Comme  $\pi - \widehat{a}$  et  $\widehat{b} + \widehat{c}$  sont dans  $[0, \pi]$ , on conclut encore grâce à la décroissance du cosinus.

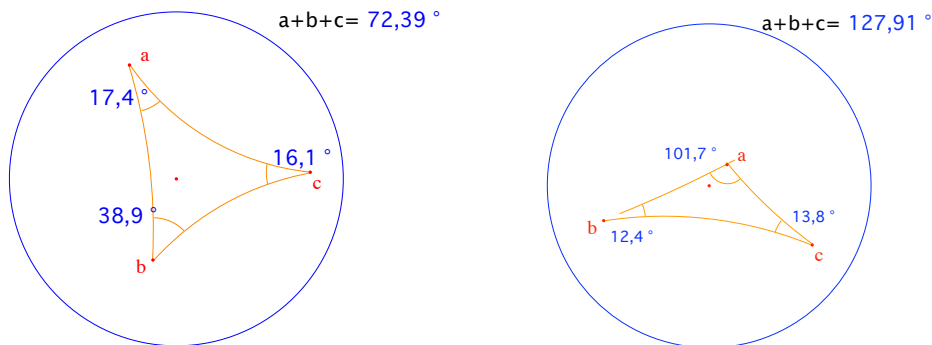


FIGURE 6.8 – Dans le cas hyperbolique la somme des angles d'un triangle est plus petite que  $\pi$

## 6.4.2 Le spin

Dans le cas de la géométrie hyperbolique, si l'on se cantonne au plan de Klein  $\mathbf{K}$ , le spin  $S(a, b, c)$ , qui n'intervient que par son signe, est trivial en vertu de 2.4.9. L'invariant spin n'est toutefois pas dénué d'importance en géométrie hyperbolique. En effet, comme il n'est pas trivial dans la partie extérieure  $\mathbf{T}$ , le spin angulaire garde sa pertinence dans  $\mathbf{K}$ , par polarité.

**6.4.3 Proposition.** Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{K}$ . On a  $S(a, b, c) > 0$  de sorte que le spin est déterminé par les longueurs  $bc, ca, ab$  :  $S(a, b, c) = \text{ch } bc \text{ ch } ca \text{ ch } ab$ .

*Démonstration.* Avec les conventions usuelles (voir 2.4.8 et 2.4.9),  $q(a), q(b)$  et  $q(c)$  sont négatifs ainsi que  $\varphi(b, c), \varphi(c, a)$  et  $\varphi(a, b)$ . La dernière assertion vient de 4.5.2 et 5.1.14.

Dans le cas d'un triangle extérieur en revanche, le spin a un sens. Cette remarque est importante, même si l'on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe dans  $\mathbf{K}$ , car un triangle extérieur est le dual d'un triangle de  $\mathbf{K}$  et son spin n'est autre que le spin angulaire de ce triangle, lequel a un sens géométrique très simple :

**6.4.4 Proposition.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ ,  $A = (bc)$ ,  $B = (ca)$ ,  $C = (ba)$  ses côtés,  $a' = b \wedge c$ ,  $b' = c \wedge a$ ,  $c' = a \wedge b$  leurs pôles. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) Le spin angulaire  $S^*(A, B, C)$  est  $> 0$ .
  - 2) Le spin du triangle polaire  $S(a', b', c')$  est  $> 0$ .
  - 3) Le triangle  $abc$  a deux angles (de demi-droites) aigus et un obtus.
- Il en résulte qu'un triangle hyperbolique est de spin angulaire négatif (resp. nul) si et seulement si il admet trois angles aigus (resp. s'il est rectangle).

*Démonstration.* L'équivalence de 1) et 2) est évidente car on a  $\varphi^*(A, B) = \varphi(a', b')$ , etc. Pour le point 3), on a un lemme :

**6.4.5 Lemme.** *Soient  $a, b, c$  des points distincts de  $\mathbf{K}$  ou  $\mathbf{E}$ . On pose  $a' = b \wedge c$ ,  $b' = c \wedge a$ ,  $c' = a \wedge b$  et  $A = b \wedge c$ ,  $B = c \wedge a$ ,  $C = a \wedge b$ . On a la formule :  $-\cos \widehat{a} \cos \widehat{b} \cos \widehat{c} = S(a', b', c') = S^*(A, B, C)$  où  $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$  sont les angles de demi-droites du triangle  $abc$ .*

*Démonstration.* (du lemme) Rappelons que l'angle des demi-droites  $[ab)$  et  $[ac)$  a pour cosinus la quantité :  $I^+([ab), [ac)) = \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\sqrt{q(a \wedge b)q(a \wedge c)}}$ . Ce cosinus est donc du signe opposé à  $\varphi(b', c')$ . Comme  $q(a')$ ,  $q(b')$ ,  $q(c')$  sont positifs, la formule en résulte.

Pour terminer la preuve de la proposition, on note que le spin  $S(a', b', c')$  est positif si et seulement si  $abc$  admet trois angles obtus ou un obtus et deux aigus. Comme il a au plus un angle obtus puisque la somme des angles est inférieure à  $\pi$  (voir 6.4.1), la conclusion s'impose.

Pour une caractérisation topologique du spin d'un triangle extérieur, voir exercice 6.10.3.

## 6.5 Premier paramétrage de l'espace des triangles : le troisième cas d'isométrie

Nous avons vu en 4.5.3 qu'un système complet d'invariants pour un triangle comprend essentiellement, une fois imposés les signes des points, les trois longueurs des côtés et le spin. Nous examinons ce que donne ce paramétrage dans les deux géométries réelles. Le lemme suivant permettra de traiter certains cas dégénérés :

**6.5.1 Lemme.** *Soient  $\bar{a}, \bar{b}$  deux points distincts de  $\mathbf{P}(E)$  tels que la droite  $(\bar{a}\bar{b})$  soit non isotrope. Soient  $\bar{c}, \bar{c}' \in (\bar{a}\bar{b})$ . On suppose qu'on a des représentants de ces points vérifiant  $\varphi(a, c) = \varphi(a, c')$  et  $\varphi(b, c) = \varphi(b, c')$ . Alors on a  $c = c'$ .*

*Démonstration.* On écrit  $c = \lambda a + \mu b$  et  $c' = \lambda' a + \mu' b$  et on a les équations  $(\lambda - \lambda')q(a) + (\mu - \mu')\varphi(a, b) = 0$  et  $(\lambda - \lambda')\varphi(a, b) + (\mu - \mu')q(b) = 0$ . Le déterminant de ce système n'est autre que  $q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$  c'est-à-dire le discriminant de  $q$  en restriction à  $(ab)$ . Il est donc non nul par hypothèse, d'où le résultat.

### 6.5.1 Le cas de la géométrie elliptique réelle

Dans ce cas, on peut améliorer le résultat de 4.5.3 en incluant le cas des points alignés, voire confondus :

**6.5.2 Proposition.** *Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{E}$ . Un système complet d'invariants pour ces points est donné par les trois longueurs  $\alpha = bc$ ,  $\beta = ca$ ,  $\gamma = ab$  et le signe  $\epsilon$  du spin  $S(a, b, c)$  (par convention on prend  $\epsilon = 1$  si le spin est nul).*

*Démonstration.* On se donne  $a, b, c$  et  $a', b', c'$  avec les mêmes invariants. On relève ces points en des vecteurs de  $E$ , notés de la même façon et vérifiant  $q(a) = \dots = q(c') = 1$ . On note déjà que les points sont alignés (resp. distincts) en même temps (voir 5.1.12). Le cas  $a, b, c$  non alignés résulte de 4.5.3. Le cas  $a = b = c$  est trivial. Supposons donc  $a, b, c$  alignés et, par exemple,  $a \neq b$ . On peut alors envoyer  $a$  sur  $a'$  et  $b$  sur  $b'$  en vertu de 4.3.2. On est ainsi ramené au cas  $a = a'$ ,  $b = b'$ . Les conditions d'égalité de longueurs donnent  $\varphi(a, c)^2 = \varphi(a, c')^2$  et  $\varphi(b, c)^2 = \varphi(b, c')^2$ . Quitte à changer  $c'$  en  $-c'$  on peut supposer  $\varphi(a, c) = \varphi(a, c')$  et on a alors  $\varphi(b, c) = \varphi(b, c')$  grâce à la condition de spin. On conclut par 6.5.1.

Le corollaire suivant reformule cette proposition en termes de quotient (l'indice  $l$  dans  $\Phi_l$  signifie, bien entendu, longueurs) :

**6.5.3 Corollaire.** *Avec les notations précédentes, l'application  $\Phi_l : \mathbf{E}^3 \rightarrow [0, \pi/2]^3 \times \{+1, -1\}$  qui à un triplet  $(a, b, c)$  associe  $(\alpha, \beta, \gamma, \epsilon)$  induit une application injective  $\overline{\Phi}_l : \mathbf{E}^3/PO(q) \rightarrow [0, \pi/2]^3 \times \{+1, -1\}$ .*

### Discussion de la condition de spin

On notera que, dans le cas elliptique, la condition de spin est incontournable. En effet, nous verrons ci-dessous, voir 6.5.5 que, si on se donne des longueurs de côtés  $\alpha, \beta, \gamma$ , de telle sorte que le périmètre  $\alpha + \beta + \gamma$  soit supérieur à  $\pi$ , il existe deux types de triangles  $abc$  avec  $bc = \alpha$ ,  $ca = \beta$ ,  $ab = \gamma$ , l'un de spin positif, l'autre de spin négatif. Cela montre que le troisième cas n'est pas vrai sans le spin puisque ces triangles ne sont pas isométriques (ils sont même différents topologiquement, voir 6.3.14). Voici deux exemples, l'un par le calcul, l'autre par l'image (voir aussi 6.10.8) :

**6.5.4 Exemple.** On prend  $a = a' = (0, 0, 1)$ ,  $b = b' = (0, 1, 1)$ ,  $c = (\gamma, 0, 1)$  et  $c' = (\sqrt{\gamma^2 - 4}, -2, 1)$  (pour cela il faut évidemment avoir  $|\gamma| \geq 2$ ). On a  $q(c) = q(c') = \gamma^2 + 1$ ,  $\varphi(a, c) = \varphi(a, c') = 1$ , mais  $\varphi(b, c) = 1$ , tandis que  $\varphi(b, c') = -1$ . On a donc les conditions de 4.5.3 à l'exception de la condition de spin et il n'existe pas d'isométrie échangeant les triangles  $abc$  et  $abc'$ .

La figure ci-contre montre deux triangles avec le côté  $[ab]$  commun mais deux sommets  $c, c'$  distincts. Ces triangles ne sont pas isométriques mais ont tous leurs côtés égaux. Le triangle violet (resp. orange) est de spin  $> 0$  (resp.  $< 0$ ). Les distances sont ici mesurées en degrés. Le point  $c'$  est à l'intersection des cercles de centres  $a, b$  passant par  $c$ , voir chapitre suivant.

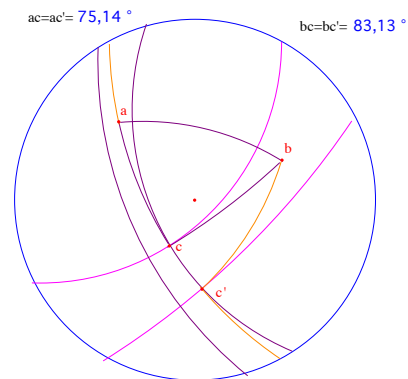


FIGURE 6.9 – Le troisième cas d'isométrie en défaut

### Construction de triangles

Nous étudions maintenant l'image de  $\Phi_l$  en nous limitant au cas des vrais triangles. On note  $\mathcal{T}_{\mathbf{E}}$  l'espace des triangles, i.e. les triplets  $(a, b, c) \in \mathbf{E}^3$  formé de points non alignés. Pour l'image de  $\mathbf{E}^3$  tout entier, voir exercice 6.10.10.

**6.5.5 Proposition.** *L'image  $\Omega_l^\epsilon$  de l'espace  $\mathcal{T}_{\mathbf{E}}$  des triangles elliptiques par  $\Phi_l$  est constituée des quadruplets  $(\alpha, \beta, \gamma; \epsilon)$  de l'un des deux types suivants :*

- 1)  $\epsilon = 1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in ]0, \pi/2]$  et  $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$  (inégalité triangulaire),
- 2)  $\epsilon = -1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in ]0, \pi/2[$  et  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ .

#### 6.5.6 Remarques.

- 1) On rappelle que lorsque le spin du triangle est nul (i.e. lorsqu'un des nombres  $\alpha, \beta, \gamma$  vaut  $\pi/2$ ) on a convenu de poser  $\epsilon = 1$ . On aurait tout aussi bien pu poser  $\epsilon = -1$  et les triangles en question seraient obtenus au point 2). D'ailleurs, topologiquement, l'image est formée de deux sous-espaces qui se recollent sur les triangles de spin nul, voir 6.10.9.
- 2) Bien entendu l'inégalité triangulaire avec  $\alpha$  implique celles avec  $\beta$  et  $\gamma$ . De plus, la condition  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$  implique l'inégalité triangulaire.
- 3) On notera qu'il y a à la fois des triangles de spin positif et de spin négatif qui vérifient  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$  ce qui montre, une nouvelle fois, la nécessité de l'invariant spin.
- 4) On voit apparaître ici une partition entre trois types de triangles : ceux de spin négatif, ceux de spin positif avec  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$  (resp.  $> \pi$ ). Attention, pour les triangles de spin positif, cette dichotomie n'est pas la même que celle entre triangles de types 1,2 de 6.3.4.

*Démonstration.* Que les conditions soient nécessaires résulte de 5.1.12, 6.1.6 et 6.1.7. Réciproquement, si on se donne  $(\alpha, \beta, \gamma; \epsilon) \in \Omega_l^\epsilon$ , on considère  $a =$

$(1, 0, 0)$ ,  $b = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$ ,  $c = (\cos \beta, \cos \theta \sin \beta, \sin \theta \sin \beta)$  où  $\theta$  désigne un réel<sup>4</sup> de  $]0, \pi[$ . Il est clair que  $a, b, c$  sont sur la sphère et qu'on a  $\varphi(a, b) = \cos \gamma$ ,  $\varphi(a, c) = \cos \beta$ , donc  $ab = \gamma$  et  $ac = \beta$ . Si  $\epsilon$  est égal à 1, il s'agit de montrer qu'on peut trouver une valeur de  $\theta$  pour avoir  $\varphi(b, c) = \cos \alpha$ . On doit avoir  $\cos \theta = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$  et on trouve un  $\theta$  convenable si le second membre est strictement compris entre 1 et  $-1$ , donc si l'on a  $\cos(\beta + \gamma) < \cos \alpha < \cos(\beta - \gamma)$ , ce qui résulte de l'inégalité triangulaire<sup>5</sup>.

Dans le cas  $\epsilon = -1$ , il s'agit de trouver  $\theta$  pour avoir  $\varphi(b, c) = -\cos \alpha$ , soit  $\cos \theta = \frac{-\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$ . Cette fois on a à vérifier l'inégalité  $\cos(\beta + \gamma) < -\cos \alpha < \cos(\beta - \gamma)$ . Comme  $\alpha, \beta, \gamma$  sont dans  $]0, \pi/2[$ , la seule relation non évidente est  $\cos(\beta + \gamma) < -\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$  qui vient de  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ .

**6.5.7 Remarque.** L'image de l'espace des triangles de spin négatif (resp. positif) est un tétraèdre (resp. un double tétraèdre) dans l'espace de dimension 3 des paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$ . On peut montrer que  $\overline{\Phi}_l$  induit un homéomorphisme de  $\mathcal{T}_{\mathbf{E}}/PO(q)$  sur la somme connexe de ces deux solides, recollés selon l'image des triangles de spin nul, voir 6.10.9.

**6.5.8 Remarque.** On peut aussi utiliser les triangles de spin  $< 0$  pour donner des exemples de triangles "pseudo-rectangles", c'est-à-dire de triangles vérifiant la relation  $I(b, c) = I(a, b)I(a, c)$ , soit  $q(a)^2\varphi(b, c)^2 = \varphi(a, c)^2\varphi(a, b)^2$ , avec la variante opposée à Pythagore :  $q(a)\varphi(b, c) = -\varphi(a, c)\varphi(a, b)$ .

Avec la paramétrisation ci-dessus,  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$ ,  $c = (\cos \beta, \cos \theta \sin \beta, \sin \theta \sin \beta)$ , le triangle  $abc$  est pseudo-rectangle si l'on a  $\cos \theta = -2\cotan \beta \cotan \gamma$  (par exemple  $\beta = \gamma = \pi/3$  et  $\theta = \text{Arccos } \frac{-2}{3}$ ). Attention, on ne peut pas définir de droites pseudo-perpendiculaires, voir 6.10.7.

## 6.5.2 Le cas de la géométrie hyperbolique réelle

### Le troisième cas d'isométrie et les triangles de $\mathbf{K}$

Nous avons vu en 6.4.3 que pour des points de  $\mathbf{K}$  le spin est déterminé par les longueurs, de sorte qu'on peut l'oublier dans le troisième cas d'isométrie 4.5.3. On peut d'ailleurs, comme dans le cas elliptique, améliorer un peu le troisième cas d'isométrie en incluant les cas d'alignement :

4. On notera que  $\theta$  n'est autre que l'angle  $\widehat{bac}$ .

5. Le lecteur vérifiera que le point donné ci-dessus convient aussi pour les cas de spin nul, i.e.  $\alpha, \beta$  ou  $\gamma = \pi/2$ .

**6.5.9 Proposition.** Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{K}$ . Un système complet d'invariants pour ces points est donné par les trois longueurs  $\alpha = bc$ ,  $\beta = ca$ ,  $\gamma = ab$ .

*Démonstration.* Elle est analogue à celle de 6.5.2 en utilisant 5.1.16.

**6.5.10 Corollaire.** Avec les notations précédentes, l'application  $\Phi_l : \mathbf{K}^3 \rightarrow (\mathbf{R}^+)^3$  qui à  $a, b, c$  associe  $\alpha, \beta, \gamma$  induit une application injective sur le quotient  $\overline{\Phi}_l : \mathbf{K}^3/PO(q) \rightarrow (\mathbf{R}^+)^3$ .

On détermine maintenant l'image de  $\Phi_l$ . Comme dans le cas elliptique, on se limite aux vrais triangles (trois points non alignés) :

**6.5.11 Proposition.** Soit  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}$  l'espace des triangles de  $\mathbf{K}$ . L'image  $\Omega_l^h$  de  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}$  par  $\Phi_l$  est l'ensemble des triplets  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de nombres réels positifs qui vérifient l'inégalité triangulaire :  $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ . C'est l'intérieur du trièdre défini par les trois plans  $\alpha = \beta + \gamma$ ,  $\beta = \gamma + \alpha$  et  $\gamma = \alpha + \beta$ .

*Démonstration.* La nécessité de la condition a été vue en 6.1.12. Pour la réciproque, on utilise la paramétrisation de  $\mathbf{K}$  vue en 2.4.10. On prend  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (\text{th } \gamma, 0, 1)$  et  $c = (\text{th } \beta \cos \theta, \text{th } \beta \sin \theta, 1)$  avec  $\theta \in ]0, \pi[$ . On a alors  $q(a) = -1$ ,  $q(b) = \text{th}^2 \gamma - 1 = \frac{-1}{\text{ch}^2 \gamma}$ ,  $q(c) = \text{th}^2 \beta - 1 = \frac{-1}{\text{ch}^2 \beta}$ ,  $\varphi(a, b) = \varphi(a, c) = -1$  et  $\varphi(b, c) = \text{th } \beta \text{th } \gamma \cos \theta - 1$ . On en déduit  $I(a, b) = \text{ch}^2 \gamma$  et  $I(a, c) = \text{ch}^2 \beta$ , d'où  $ab = \gamma$  et  $ac = \beta$ .

Comme on a  $I(b, c) = (\text{th } \beta \text{th } \gamma \cos \theta - 1)^2 \text{ch}^2 \beta \text{ch}^2 \gamma$ , il reste à trouver  $\theta$  pour réaliser  $\text{ch } \alpha = \text{ch } \beta \text{ch } \gamma - \text{sh } \beta \text{sh } \gamma \cos \theta$ . Il faut pour cela que  $\cos \theta$  soit dans  $] -1, 1[$  ce qui signifie  $\text{ch}(\beta - \gamma) < \text{ch } \alpha < \text{ch}(\beta + \gamma)$  et cela résulte de l'inégalité triangulaire.

## Triangles extérieurs ou mixtes et condition de spin

En revanche, pour des triangles extérieurs ou des triangles mixtes, la condition de spin est nécessaire. Voici deux exemples de triangles admettant des côtés de même "longueur" mais non isométriques. On se reportera à 6.10.3 et 6.10.8 pour des précisions.

**6.5.12 Exemple.**

1) On prend  $a = a' = (1, 0, 0)$ ,  $b = b' = (1, 1, 0)$ ,  $c = (x, y, 1)$ . Le triangle  $abc$  est extérieur<sup>6</sup> si on a les conditions  $y^2 > 1$  et  $(y - x)^2 > 2$ . On suppose de plus  $x, y > 0$ , de sorte que  $abc$  est un triangle de spin  $> 0$ . Le nombre  $\mu = 4x^2 + 4xy + 1$  est positif, on appelle  $\lambda$  la racine carrée positive de  $1/\mu$ .

6. Au sens où les droites  $(bc)$ ,  $(ca)$  et  $(ab)$  sont entièrement contenues dans  $\mathbf{T}$ .

Si on considère  $c' = (x', y', 1)$ , avec  $x' = \lambda x$  et  $y' = -\lambda y - 2\lambda x$ , le triangle  $abc'$  vérifie les conditions de 4.5.3 à l'exception de la condition de spin et il n'est donc pas isométrique à  $abc$ .

2) Voici un autre exemple, avec deux points dans  $\mathbf{K}$  et un dans  $\mathbf{T}$  :  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (1/2, 0, 1)$ , tous deux dans  $\mathbf{K}$ ,  $c = (0, 5, 1)$  et  $c' = (4, 3, 1)$  dans  $\mathbf{T}$ . On a  $q(c) = q(c') = 24$ ,  $\varphi(a, c) = \varphi(a, c') = -1$ ,  $\varphi(b, c) = -1$  et  $\varphi(b, c') = 1$ . On a ainsi les égalités des invariants  $I$ , mais pourtant pas d'isométrie puisque les spin sont de signes opposés.

## 6.6 Le troisième cas d'isométrie, version angles

Nous avons vu dans le cas général, cf. 4.5.5, que deux triangles qui ont les mêmes angles de droites (et le même spin angulaire) sont isométriques, phénomène très différent du cas euclidien : la notion de triangles semblables n'existe pas en géométrie non euclidienne. Dans cet énoncé, la condition de spin angulaire est essentielle en géométrie elliptique (c'est évident par polarité), mais aussi lorsque  $A, B, C$  sont les côtés d'un triangle  $abc$  du plan hyperbolique de Klein  $\mathbf{K}$ . En effet, dans ce cas, le triangle polaire est extérieur et on a vu que le troisième cas d'isométrie est en défaut si l'on omet la condition de spin, cf. 6.5.12. On peut d'ailleurs facilement produire un contre-exemple directement dans  $\mathbf{K}$ . On prend un triangle  $abc$  dont les trois angles de demi-droites vérifient  $\widehat{b} + \widehat{c} < \widehat{a}$  et on construit  $a'b'c'$  avec  $\widehat{a}' = \pi - \widehat{a}$ ,  $\widehat{b}' = \widehat{b}$  et  $\widehat{c}' = \widehat{c}$ . Comme on a  $\widehat{a}' + \widehat{b}' + \widehat{c}' < \pi$ , un tel triangle existe en vertu de 6.7.7. Les deux triangles  $abc$  et  $a'b'c'$  ont alors mêmes angles de droites, mais des spin angulaires différents car l'un admet un angle obtus et pas l'autre, voir 6.4.4.

Nous allons voir cependant que sur  $\mathbf{R}$  la condition de spin peut être oubliée, à condition de travailler avec les angles de demi-droites. Cela va nous conduire à une deuxième paramétrisation de l'espace des triangles. Dans tout ce paragraphe, nous omettrons parfois les indices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{K}$  ou les exposants  $e$  et  $h$ , qui indiquent dans laquelle des géométries l'on se trouve, lorsque le contexte l'indiquera clairement.

### 6.6.1 Variante avec les angles de demi-droites : le cas elliptique

#### Le critère

Rappelons que si  $abc$  est un triangle de  $\mathbf{E}$ , ses angles de demi-droites sont définis par 5.5.7, sauf *a priori* si  $abc$  est de spin nul, auquel cas on les définit



par la convention 5.5.11.

**6.6.1 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle du plan elliptique  $\mathbf{E}$ . Un système complet d'invariants pour ce triangle est formé des trois angles de demi-droites  $\lambda = \widehat{bac}$ ,  $\mu = \widehat{cba}$ ,  $\nu = \widehat{acb}$ .*

*Démonstration.* Comme les points sont distincts, on peut considérer les droites  $A = (bc)$ ,  $B = (ca)$  et  $C = (ab)$  qui déterminent  $a, b, c$ . On utilise alors 4.5.5. Les conditions sur  $q^*$  sont évidentes car la forme  $q$  est positive. Celles sur  $I^*$  résultent des formules du type  $I^*((ab), (ac)) = I^+([ab], [ac])^2 = \cos^2 \widehat{bac}$ . Enfin, le spin angulaire, qui n'est autre que le spin du triangle dual, est déterminé par les angles de demi-droites : il est négatif si et seulement si le triangle est de type 1 (trois angles aigus), voir 6.3.4. Notons que cette preuve vaut aussi si le triangle est de spin nul. En effet, si on a deux triangles  $abc$  et  $a'b'c'$ , l'égalité de leurs angles montre qu'ils sont de spin nul en même temps (à cause de la relation  $\cos \widehat{a} = -\cos \widehat{b} \cos \widehat{c}$ , voir 6.2.3). Dans ce cas, on sait que leur spin angulaire est  $\geq 0$  et on conclut comme précédemment.

**6.6.2 Corollaire.** *Soit  $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\mathbf{E}}$  l'espace des triangles de  $\mathbf{E}$ . Avec les notations précédentes, l'application<sup>7</sup>  $\Phi_a^e : \mathcal{T} \rightarrow ]0, \pi[^3$  qui a un triplet  $(a, b, c)$  associe  $(\lambda, \mu, \nu)$  induit une application injective  $\bar{\Phi}_a : \mathcal{T}/PO(q) \rightarrow ]0, \pi[^3$ .*

**6.6.3 Remarque.** On prendra garde que si les points ne sont pas distincts les droites n'existent plus et que s'ils sont alignés, les droites ne déterminent pas les points, de sorte que le critère est faux (si on prend  $a$  quelconque dans  $[bc]$ , on a  $\widehat{a} = \pi$ ,  $\widehat{b} = \widehat{c} = 0$ ).

## Construction de triangles

Il s'agit de préciser l'image de  $\Phi_a$ , autrement dit de savoir à quelle condition on peut construire un triangle d'angles donnés. Le résultat est un peu plus délicat qu'il n'y paraît au premier abord et il sera prouvé dans la section suivante. Nous indiquons seulement ici des conditions nécessaires.

**6.6.4 Notation.** On note  $\Omega_a^e$  l'ensemble des triplets  $(\lambda, \mu, \nu)$  de  $]0, \pi[^3$  qui vérifient l'une des conditions suivantes :

- 1)  $\lambda, \mu, \nu$  sont aigus ou droits (i.e. dans  $]0, \pi/2]$ ) et on a  $\lambda + \mu + \nu > \pi$ ,
- 2)  $\lambda, \mu, \nu$  sont obtus, on a  $|\cos \lambda| > \cos \mu \cos \nu$  et les deux autres relations analogues,
- 3) l'un des angles, disons  $\lambda$ , est obtus ou droit, les autres sont aigus ou droits et on a  $\lambda + \mu + \nu > \pi$  et  $|\cos \lambda| \leq \cos \mu \cos \nu$ .

---

7. Notée aussi  $\Phi_a$ .

**6.6.5 Lemme.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$ . L'image  $(\lambda, \mu, \nu) := (\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c})$  de  $abc$  par  $\Phi_a$  est dans  $\Omega_a^e$ .

*Démonstration.* La relation  $\lambda + \mu + \nu > \pi$  a été vue en 6.3.2 et celles sur les cosinus résultent de 6.3.1.

## 6.6.2 Variante avec les angles de demi-droites : le cas hyperbolique

**6.6.6 Proposition.** Soit  $abc$  un triangle du plan hyperbolique  $\mathbf{K}$ . Un système complet d'invariants pour ce triangle est formé des trois angles de demi-droites  $\lambda = \widehat{bac}$ ,  $\mu = \widehat{cba}$ ,  $\nu = \widehat{acb}$ .

*Démonstration.* Comme les points sont distincts, on peut considérer les droites  $A = (bc)$ ,  $B = (ca)$  et  $C = (ab)$  qui déterminent  $a, b, c$ . On utilise alors 4.5.5. Les conditions sur  $q^*$  sont évidentes (la forme  $q$  est négative sur  $\mathbf{K}$ ). Celles sur  $I^*$  résultent de la formule  $I^*((ab), (ac)) = I^+([ab], [ac])^2$ . Enfin, le spin angulaire est déterminé par les angles de demi-droites en vertu de 6.4.4.

**6.6.7 Corollaire.** Soit  $\mathcal{T} := \mathcal{T}_{\mathbf{K}}$  l'espace des triangles de  $\mathbf{K}$ . Avec les notations précédentes, l'application  $\Phi_a^h : \mathcal{T} \rightarrow ]0, \pi[^3$  (ou simplement  $\Phi_a$ ) qui à un triplet  $(a, b, c)$  associe  $(\lambda, \mu, \nu)$  induit une application injective  $\overline{\Phi}_a : \mathcal{T}/PO(q) \rightarrow ]0, \pi[^3$ . L'image de  $\Phi_a$  est contenue dans l'ouvert  $\Omega_a^h$  formé des triplets qui vérifient  $\lambda + \mu + \nu < \pi$ .

*Démonstration.* La condition sur l'image vient de 6.4.1.

## 6.7 Al-Kashi et les deux paramétrages

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que l'image du paramétrage angulaire  $\Phi_a$  dans le cas des géométries elliptique (resp. hyperbolique) est égal à l'ensemble  $\Omega_a^e$  (resp.  $\Omega_a^h$ ) défini ci-dessus. Cela va se faire à l'aide du paramétrage  $\Phi_l$  par les longueurs d'une part et des formules d'Al-Kashi d'autre part. Pour cela nous avons besoin de formuler plus précisément le lien entre ces diverses formules.

### 6.7.1 Les applications $F$ et $G$

**6.7.1 Rappel.** Rappelons (voir 6.5.5 et 6.5.11) que l'image  $\Omega_l^e$  ou  $\Omega_l^h$  de l'espace des triangles par le paramétrage  $\Phi_l$  est égale :

- dans le cas elliptique, à l'ensemble des quadruplets  $(\alpha, \beta, \gamma; \epsilon)$  qui vérifient
  - a)  $\epsilon = 1$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma) \in ]0, \pi/2]^3$  et  $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ ,

- b)  $\epsilon = -1$ ,  $(\alpha, \beta, \gamma) \in ]0, \pi/2[^3$  et  $\alpha + \beta + \gamma > \pi$ ,  
 • dans le cas hyperbolique, à l'ensemble des triplets  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbf{R}^{+*})^3$  qui vérifient  $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ .

### 6.7.2 Proposition-Définition. (Les applications $F$ )

1) **(Cas elliptique)** La formule  $\cos \lambda = \frac{\epsilon \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}$  et les formules analogues obtenues par permutation circulaire définissent une application  $F := F^e$  de  $\Omega_l^e$  dans  $]0, \pi[^3$  qui à  $(\alpha, \beta, \gamma; \epsilon)$  associe  $(\lambda, \mu, \nu)$ .

2) **(Cas hyperbolique)** La formule  $\cos \lambda = \frac{\text{ch } \beta \text{ch } \gamma - \text{ch } \alpha}{\text{sh } \beta \text{sh } \gamma}$  et les formules analogues obtenues par permutation circulaire définissent une application  $F := F^h$  de  $\Omega_l^h$  dans  $]0, \pi[^3$  qui à  $(\alpha, \beta, \gamma)$  associe  $(\lambda, \mu, \nu)$ .

*Démonstration.* La seule chose à vérifier c'est que  $\cos \lambda$  et les autres sont dans  $] -1, 1[$  et c'est immédiat avec la définition des  $\Omega_l$ .

**6.7.3 Proposition.** Sur l'espace  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\mathbf{E}}$  ou  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}$  on a la formule  $F \circ \Phi_l = \Phi_a$ .

*Démonstration.* C'est exactement ce que dit la formule d'Al-Kashi, voir 6.1.4 et 6.1.11.

**6.7.4 Corollaire.** L'image de  $F$  est contenue dans  $\Omega_a^e$  ou  $\Omega_a^h$  (notations de 6.6.4 et 6.6.7).

*Démonstration.* En effet, si  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est dans  $\Omega_l$ , il est dans l'image de  $\Phi_l$ , donc  $F(\alpha, \beta, \gamma)$  est dans l'image de  $\Phi_a$ , qui est contenue dans  $\Omega_a$  (voir 6.6.5 et 6.6.7).

Il reste à montrer que  $\Omega_a$  est l'image de  $\Phi_a$  ce qui va se faire au moyen de l'application  $G$ , inverse de  $F$  :

### 6.7.5 Proposition-Définition. (Les applications $G$ )

1) **(Cas elliptique)** Soit  $(\lambda, \mu, \nu) \in \Omega_a^e$ . Si  $\lambda, \mu, \nu$  sont tous trois  $> \pi/2$  on pose  $\epsilon = -1$  et sinon  $\epsilon = 1$ . La formule  $\cos \alpha = \epsilon \frac{\cos \lambda + \cos \mu \cos \nu}{\sin \mu \sin \nu}$  et les formules analogues obtenues par permutation circulaire définissent alors une application  $G := G^e$  de  $\Omega_a^e$  dans  $]0, \pi/2[^3 \times \{+1, -1\}$  qui à  $(\lambda, \mu, \nu)$  associe  $(\alpha, \beta, \gamma; \epsilon)$ .

2) **(Cas hyperbolique)** Soit  $(\lambda, \mu, \nu) \in \Omega_a^h$ . On définit sur  $\Omega_a^h$  une application  $G := G^h$  qui à  $(\lambda, \mu, \nu)$  associe  $(\alpha, \beta, \gamma) \in (\mathbf{R}^{+*})^3$  par la formule  $\text{ch } \alpha = \frac{\cos \lambda + \cos \mu \cos \nu}{\sin \mu \sin \nu}$  et les formules analogues obtenues par permutation circulaire.

Dans les deux cas, l'application  $G$  est à valeurs dans  $\Omega_l$  et on a  $F \circ G = \text{Id}_{\Omega_a}$ .

*Démonstration.* Nous traitons seulement le cas hyperbolique qui est plus facile, des indications pour traiter le cas elliptique sont fournies dans l'exercice 6.10.11. Comme  $(\lambda, \mu, \nu)$  est dans  $\Omega_a$  on a  $\lambda + \mu + \nu < \pi$ , donc  $\mu + \nu < \pi - \lambda$ . Comme ces nombres sont dans  $[0, \pi]$ , la décroissance du cosinus donne  $\cos \lambda + \cos \mu \cos \nu > \sin \mu \sin \nu$ , donc  $\frac{\cos \lambda + \cos \mu \cos \nu}{\sin \mu \sin \nu} > 1$  et cette quantité peut donc bien s'écrire  $\text{ch } \alpha$  avec  $\alpha > 0$ . Cela montre que  $G$  est bien définie. Pour montrer qu'elle est à valeurs dans  $\Omega_l$  il faut montrer l'inégalité triangulaire. Montrons par exemple,  $\alpha < \beta + \gamma$ , ou encore  $\text{ch } \beta \text{ch } \gamma - \text{ch } \alpha + \text{sh } \beta \text{sh } \gamma > 0$ . Un calcul facile donne  $\text{sh }^2 \beta = \frac{N}{\sin^2 \lambda \sin^2 \nu}$  avec

$$N := \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu - 1$$

et on note que cette quantité est symétrique en  $\lambda, \mu, \nu$ . On en déduit  $\text{sh } \beta \text{sh } \gamma = \frac{N}{D}$  avec  $D := \sin^2 \lambda \sin \mu \sin \nu$ . Un autre calcul facile donne  $\text{ch } \beta \text{ch } \gamma - \text{ch } \alpha = \frac{N \cos \lambda}{D}$ . On est donc ramené à montrer que  $(1 + \cos \lambda)N$  est positif, ce qui est clair avec  $N = \text{sh }^2 \beta \sin^2 \lambda \sin^2 \nu$ . De plus, si on pose  $F(G(\lambda, \mu, \nu)) = (\lambda', \mu', \nu')$ , on a  $\cos \lambda' = \frac{\text{ch } \beta \text{ch } \gamma - \text{ch } \alpha}{\text{sh } \beta \text{sh } \gamma} = \frac{ND \cos \lambda}{ND} = \cos \lambda$ , d'où  $\lambda' = \lambda$  puisque ces nombres sont dans  $[0, \pi]$ . On montre de même les autres égalités et on a bien  $F \circ G = \text{Id}$ .

Comme sous-produit du calcul précédent, on notera la jolie formule suivante, analogue de la relation bien connue en géométrie euclidienne  $\frac{bc}{\sin \hat{a}} = \frac{ca}{\sin \hat{b}} = \frac{ab}{\sin \hat{c}}$  :

**6.7.6 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$  avec  $\alpha = bc$ ,  $\beta = ca$  et  $\gamma = ab$ . On a la formule :*

$$\frac{\text{sh } \alpha}{\sin \hat{a}} = \frac{\text{sh } \beta}{\sin \hat{b}} = \frac{\text{sh } \gamma}{\sin \hat{c}}.$$

*Dans le cas elliptique, la formule est la même avec les lignes trigonométriques ordinaires :*

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \hat{a}} = \frac{\sin \beta}{\sin \hat{b}} = \frac{\sin \gamma}{\sin \hat{c}}.$$

## 6.7.2 Applications

Le corollaire suivant montre que l'espace des triangles, modulo isométries, est en bijection à la fois avec  $\Omega_l$  et  $\Omega_a$ , ces espaces étant eux-mêmes reliés par les applications  $F$  et  $G$ .

**6.7.7 Corollaire.** Dans le cas elliptique (resp. hyperbolique), l'image de  $\Phi_a^e$  (resp.  $\Phi_a^h$ ) est égale à  $\Omega_a^e$  (resp.  $\Omega_a^h$ ).

*Démonstration.* Soit  $(\lambda, \mu, \nu) \in \Omega_a$  et posons  $(\alpha, \beta, \gamma) = G(\lambda, \mu, \nu)$ . Comme  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est dans  $\Omega_l$ , il existe un triangle  $T = abc$  tel que  $\Phi_l(T) = (\alpha, \beta, \gamma)$ . On a alors  $F(\Phi_l(T)) = \Phi_a(T) = F(G(\lambda, \mu, \nu)) = (\lambda, \mu, \nu)$ , cqfd.

**Exemple :** Dans le plan hyperbolique il existe des triangles admettant des angles donnés pourvu que la somme de ces angles soit  $< \pi$ . Par exemple, il existe un triangle (unique à isométrie près) admettant les angles  $\pi/7$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/2$ , voir figure ci-contre.

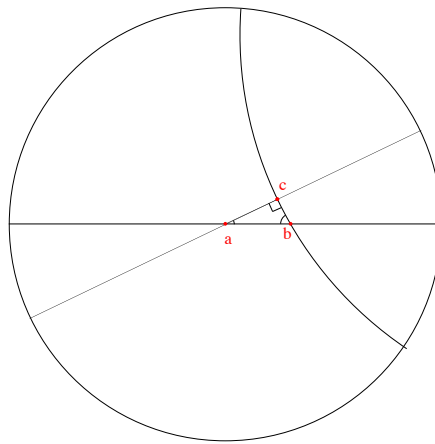


FIGURE 6.10 – Un triangle d'angles  $\hat{a} = \pi/7$ ,  $\hat{b} = \pi/3$ ,  $\hat{c} = \pi/2$

Ce triangle donne naissance à un pavage du plan hyperbolique, voir figure 6.14. Ce pavage a été étudié par Klein et est intimement lié au groupe simple d'ordre 168, voir [Kle79] ou ma page web :

<http://www.math.u-psud.fr/~perrin/conferences.html>.

On peut aussi fabriquer des triangles équilatéraux d'angles (presque) quelconques :

**6.7.8 Corollaire.** En géométrie elliptique (resp. hyperbolique) réelle il y a des triangles équilatéraux avec trois angles de demi-droites égaux  $\lambda = \mu = \nu \in ]0, \pi[$  pourvu que l'on ait  $3\lambda > \pi$  (resp.  $< \pi$ ).

**6.7.9 Remarque.** Attention, dans le cas elliptique, les conditions :  $\lambda + \mu + \nu > \pi$ ,  $\lambda + \mu - \nu < \pi$ ,  $\lambda - \mu + \nu < \pi$  et  $-\lambda + \mu + \nu < \pi$ , si elles sont nécessaires, ne sont pas suffisantes. Par exemple, si on prend les angles de droites  $\pi/4, \pi/6, \pi/6$  on voit que seul le triplet  $(3\pi/4, \pi/6, \pi/6)$  correspond à un triangle, les triplets  $(5\pi/6, \pi/4, \pi/6)$  et  $(5\pi/6, 5\pi/6, 3\pi/4)$ , bien que vérifiant les quatre inégalités précédentes ne vérifient pas les conditions sur les cosinus de 6.3.1.

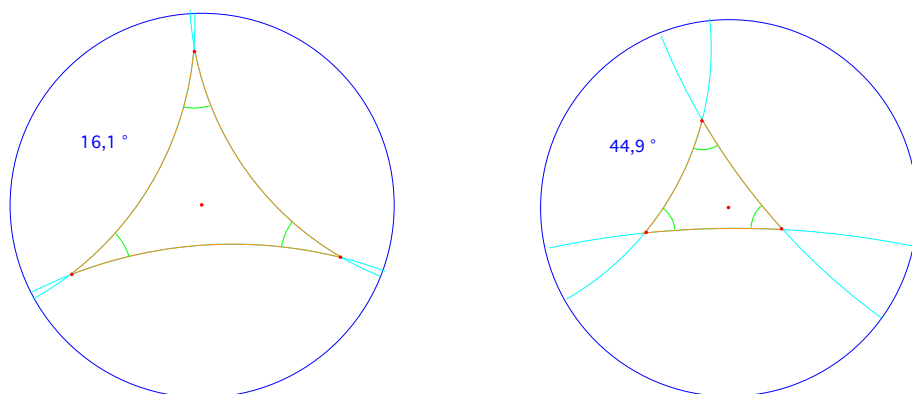


FIGURE 6.11 – Deux exemples de triangles équilatéraux dans le plan hyperbolique

## 6.8 Premier et deuxième cas d’isométrie

*Il s’agit cette fois des cas “mixtes”, ceux qui font intervenir à la fois angles et côtés. Attention, les deux cas possibles (deux côtés et un angle ou deux angles et un côté) sont duaux l’un de l’autre<sup>8</sup> si l’on utilise les angles de droites, mais pas tout à fait avec les angles de demi-droites.*

### 6.8.1 Le premier cas d’isométrie

#### Le critère

Tous les auteurs ne sont pas d’accord sur le nom des cas d’isométrie. Nous appellerons “premier cas” celui qui met en jeu deux côtés et un angle.

**6.8.1 Théorème.** *Soit  $abc$  un triangle du plan elliptique  $\mathbf{E}$  ou hyperbolique  $\mathbf{K}$ . Alors un système complet d’invariants pour  $abc$  est formé des longueurs  $\beta = ca$  et  $\gamma = ab$  et de l’angle de demi-droites<sup>9</sup>  $\lambda = \widehat{bac}$ .*

*Démonstration.* En vertu du troisième cas, il suffit de montrer que les données permettent de calculer la troisième longueur  $\alpha = bc$  et le signe du spin en elliptique. Cela résulte de la formule d’Al-Kashi. En effet cette formule s’écrit, selon le cas :

$$\epsilon \cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \lambda \quad \text{ou} \quad \text{ch } \alpha = \text{ch } \beta \text{ch } \gamma - \text{sh } \beta \text{sh } \gamma \cos \lambda.$$

La conclusion est évidente en hyperbolique. En elliptique, comme les longueurs sont dans  $[0, \pi/2]$ ,  $\cos \alpha$  est  $> 0$  et la formule donne à la fois la

8. En hyperbolique il faut consentir à sortir du plan de Klein  $\mathbf{K}$ .

9. Si, en elliptique,  $b$  ou  $c$  est orthogonal à  $a$ , on utilise la convention 5.5.11.

longueur  $\alpha$  et le signe  $\epsilon$  du spin. (Si  $b$  ou  $c$  est orthogonal à  $a$  on utilise 6.1.10.)

**6.8.2 Remarque.** Attention, le critère n'est pas valable si l'angle n'est pas compris entre les côtés, voir exercice 6.10.12.

### Existence de triangles : cas elliptique

**6.8.3 Proposition.** Soient  $\beta, \gamma$  deux nombres de  $]0, \pi/2]$  et soit  $\lambda \in ]0, \pi[$ . Il existe un triangle  $abc$  de  $\mathbf{E}$  vérifiant  $ca = \beta$ ,  $ab = \gamma$  et  $\widehat{bac} = \lambda$ .

*Démonstration.* Le triangle donné par  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$  et  $c = (\cos \beta, \cos \lambda \sin \beta, \sin \lambda \sin \beta)$  convient.

**6.8.4 Corollaire.** L'application<sup>10</sup>  $\Phi_{lal} : \mathcal{T}_{\mathbf{E}} \rightarrow ]0, \pi/2]^2 \times ]0, \pi[$  qui à un triangle  $abc$  associe  $(ac, ab, \widehat{bac})$  induit un homéomorphisme de  $\mathcal{T}_{\mathbf{E}}/PO(q)$  sur  $]0, \pi/2]^2 \times ]0, \pi[$ .

*Démonstration.* L'application qui à  $\beta, \gamma, \lambda$  associe, à isométrie près, le triangle défini dans la preuve de 6.8.3 fournit l'application réciproque.

On notera que cette description de l'espace des triangles à isométrie près est sans doute la plus simple de toutes.

### Existence de triangles : cas hyperbolique

**6.8.5 Proposition.** Soient  $\beta, \gamma$  deux nombres  $> 0$  et soit  $\lambda \in ]0, \pi[$ . Il existe un triangle  $abc$  de  $\mathbf{K}$  vérifiant  $ca = \beta$ ,  $ab = \gamma$  et  $\widehat{bac} = \lambda$ .

*Démonstration.* Le triangle donné par  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (\text{th } \gamma, 0, 1)$  et  $c = (\text{th } \beta \cos \lambda, \text{th } \beta \sin \lambda, 1)$  convient.

**6.8.6 Corollaire.** L'application  $\Phi_{lal} : \mathcal{T}_{\mathbf{K}} \rightarrow (\mathbf{R}^{+*})^2 \times ]0, \pi[$  qui à un triangle  $abc$  associe  $(ac, ab, \widehat{bac})$  induit un homéomorphisme de  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}/PO(q)$  sur  $(\mathbf{R}^{+*})^2 \times ]0, \pi[$ .

## 6.8.2 Le deuxième cas d'isométrie

**6.8.7 Théorème.** Soit  $abc$  un triangle du plan elliptique  $\mathbf{E}$  ou hyperbolique  $\mathbf{K}$ . Alors un système complet d'invariants pour  $abc$  est formé de la longueur  $\alpha = bc$  et des angles de demi-droites<sup>11</sup>  $\mu = \widehat{cba}$  et  $\nu = \widehat{acb}$ .

10. La notation signifie longueur-angle-longueur.

11. Comme d'habitude, si certains points sont orthogonaux on applique la convention 5.5.11.

*Démonstration.* En vertu de la variante du troisième cas d'isométrie qui met en jeu les angles de demi-droites, il suffit de montrer que le dernier angle est déterminé. Or, on a les formules d'Al-Kashi :

$$\cos \lambda + \cos \mu \cos \nu = \epsilon \sin \mu \sin \nu \cos \alpha \quad \text{ou} \quad \cos \lambda + \cos \mu \cos \nu = \sin \mu \sin \nu \operatorname{ch} \alpha,$$

qui montrent que  $\lambda$  est déterminé par  $\alpha, \mu, \nu$  (dans le cas elliptique, comme  $\epsilon$  intervient, il faut noter que la connaissance de deux angles détermine le signe du spin : si les deux angles sont obtus le spin est  $< 0$ , sinon, y compris dans le cas où certains points sont orthogonaux, il est  $> 0$ , voir 6.3.4).

**6.8.8 Remarque.** Dans le cas euclidien, le critère est encore valable si le côté n'est pas celui compris entre les deux angles. Cela vient du fait que la somme des angles est égale à  $\pi$ , de sorte que la donnée de deux angles détermine le troisième. Dans le cas elliptique on obtient un contre-exemple à partir d'un contre-exemple au premier cas d'isométrie en passant aux triangles polaires. En revanche, en géométrie hyperbolique, le second cas est valable dans la mauvaise position, voir 6.10.13.

### Existence de triangles, cas elliptique

**6.8.9 Proposition.** Soient  $\alpha \in ]0, \pi/2]$  et  $\mu, \nu \in ]0, \pi[$  des réels. Il existe un triangle  $abc$  de  $\mathbf{E}$  tel que  $\alpha = bc$ ,  $\mu = \widehat{b}$  et  $\nu = \widehat{c}$ .

*Démonstration.* On note que  $\epsilon$  est déterminé, on construit le triangle dual  $a'b'c'$  grâce à 6.8.3 et 6.10.6 et on en prend le dual.

**6.8.10 Corollaire.** Le quotient  $\mathcal{T}_{\mathbf{E}}/PO(q)$  est homéomorphe à  $]0, \pi/2] \times ]0, \pi[^2$ .

*Démonstration.* On utilise la dualité et 6.10.6 pour se ramener au cas de deux longueurs et un angle.

### Existence de triangles, cas hyperbolique

**6.8.11 Proposition.** Soient  $\alpha$  un réel  $> 0$  et  $\mu, \nu$  deux réels de  $]0, \pi[$ . On suppose qu'on a  $\sin \mu \sin \nu \operatorname{ch} \alpha < 1 + \cos \mu \cos \nu$ . Alors, il existe un triangle  $abc$  de  $\mathbf{K}$  tel que  $\alpha = bc$ ,  $\mu = \widehat{b}$  et  $\nu = \widehat{c}$ .

*Démonstration.* L'hypothèse permet de définir  $\lambda \in ]0, \pi[$  par la formule  $\cos \lambda = -\cos \mu \cos \nu + \sin \mu \sin \nu \operatorname{ch} \alpha$  et on vérifie qu'on a  $\lambda + \mu + \nu < \pi$ . On applique alors 6.7.7.

**6.8.12 Corollaire.** Le quotient  $\mathcal{T}_{\mathbf{K}}/PO(q)$  est homéomorphe à la partie de  $\mathbf{R}^{+*} \times ]0, \pi[^2$  formée des triplets  $(\alpha, \mu, \nu)$  vérifiant  $\sin \mu \sin \nu \operatorname{ch} \alpha < 1 + \cos \mu \cos \nu$ .



**6.8.13 Remarque.** La figure ci-dessous illustre l'importance de la condition  $\sin \mu \sin \nu \operatorname{ch} \alpha < 1 + \cos \mu \cos \nu$  :  $\alpha$  ne doit pas être trop grand.

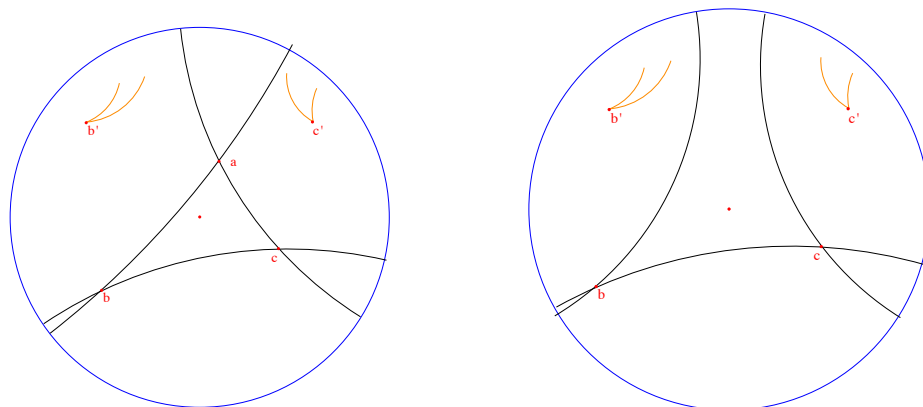


FIGURE 6.12 – On se donne deux angles (en  $b'$  et  $c'$ ), que l'on reporte en  $b, c$ , et la longueur  $bc$ . Si  $bc$  est trop grand il n'y a pas de triangle  $abc$  solution.

## 6.9 Retour sur la structure riemannienne

### 6.9.1 Les isométries

Nous avons montré au chapitre 2 que les éléments de  $PO(q)$  sont des isométries pour la structure riemannienne, tant dans le cas de  $\mathbf{E}$  que dans celui de  $\mathbf{K}$ . Le théorème suivant montre que ce sont les seules :

**6.9.1 Théorème.** *Soit  $f$  une isométrie de  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{K}$  au sens de sa structure riemannienne (i.e. une bijection qui conserve la distance). Alors,  $f$  est égale à un élément de  $PO(q)$  (ou à sa restriction, dans le cas de  $\mathbf{K}$ ).*

*Démonstration.* Traitons d'abord le cas de  $\mathbf{K}$ . Soit  $a, b, c$  trois points non alignés de  $\mathbf{K}$  et posons  $a' = f(a)$ ,  $b' = f(b)$ ,  $c' = f(c)$ . Il existe  $g \in PO(q)$  qui envoie  $a, b, c$  sur  $a', b', c'$  respectivement (c'est le troisième cas d'isométrie 6.5.9). Comme  $g$  est une isométrie pour la structure riemannienne en vertu de 2.4.20, on est ramené, en composant par  $g^{-1}$ , à montrer que si  $f$  fixe  $a, b, c$  c'est l'identité. Pour cela, soit  $m \in \mathbf{K}$ , posons  $m' = f(m)$  et supposons  $m \neq m'$ . Par conservation de la distance on a  $ma = m'a$ ,  $mb = m'b$  et  $mc = m'c$ . Il en résulte que  $a, b, c$  sont sur l'unique médiatrice (hyperbolique) de  $m, m'$  (voir 3.4.9 et 4.7.21) ce qui contredit le fait que  $a, b, c$  soient non alignés.

Dans le cas elliptique, la démonstration est presque la même, mais il faut prendre garde à deux écueils :

- Le troisième cas d'isométrie requiert la condition de spin. Pour contourner la difficulté, il suffit d'imposer au triangle  $abc$  d'avoir la somme des longueurs  $bc + ca + ab$  plus petite que  $\pi$ , ce qui assure que le spin est positif en vertu de 6.1.7.

- Si  $a, b, c$  sont équidistants de  $m, m'$ , ils sont sur la réunion des deux médiatrices de  $m, m'$  et plus nécessairement alignés, voir figure 6.13. Dans ce cas, deux des points, disons  $a, b$ , sont sur une des médiatrices et  $c$  sur l'autre. Soit  $d$  celui des milieux de  $m, m'$  situé sur la médiatrice  $(ab)$ . Alors l'autre médiatrice  $D$  est égale à  $d^\perp$ . Comme  $D$  contient  $c$ ,  $d$  est l'intersection de  $(ab)$  et de la polaire de  $c$ . Autrement dit, les mauvais points  $m$  sont situés sur les trois perpendiculaires aux côtés en les points orthogonaux aux sommets opposés. Si  $m$  n'est pas dans la réunion de ces trois droites on montre comme ci-dessus qu'on a  $f(m) = m$ . Mais comme  $f$  est une isométrie, elle est continue et comme le complémentaire des trois droites est partout dense dans  $\mathbf{E}$ , on a le résultat.

Dans la figure ci-contre, les médiatrices de  $m, m'$  sont les droites  $(ab)$  et  $D$ , de sorte qu'on a  $ma = m'a$ ,  $mb = m'b$  et  $mc = m'c$  avec pourtant  $m \neq m'$ . La droite rose  $(mm')$  est une des droites à éviter.

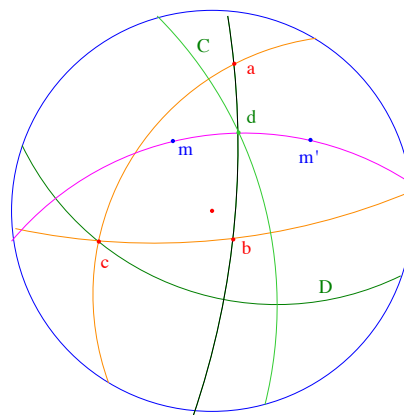


FIGURE 6.13 – Le cas difficile du plan elliptique

## 6.9.2 Les aires et le théorème de Gauss-Bonnet

### Retour sur les triangles

Il y a toujours trois façons de voir un triangle : comme trois points, comme une ligne polygonale formée de trois segments ou comme une partie pleine, l'intérieur du triangle. Nous avons défini ci-dessus un triangle

comme la donnée de trois points non alignés (voir 1.3.4). Avec la définition de segments intrinsèques, on peut associer à un triangle la ligne polygonale **bord intrinsèque** de  $abc$  :  $L = [bc] \cup [ca] \cup [ab]$  pourvu que deux des sommets ne soient pas orthogonaux (voir 5.4.6). Cependant, ces définitions sont inopérantes quand il s'agit de calculer l'aire d'un triangle. Nous allons préciser ce point maintenant.

**6.9.2 Remarques.** 1) Dans le plan hyperbolique de Klein, les notions euclidiennes de demi-plans restent valables : on appelle demi-plan de  $\mathbf{K}$ , limité par une droite hyperbolique, la trace sur  $\mathbf{K}$  d'un demi-plan euclidien et on a la caractérisation usuelle : deux points  $a, b$  sont dans des demi-plans différents limités par  $D$  si le segment  $[ab]$  coupe  $D$ . De même, comme les segments intrinsèques de  $\mathbf{K}$  sont les segments euclidiens, la notion de convexité pour une partie de  $\mathbf{K}$  est identique à celle de l'espace euclidien<sup>12</sup>. Cela vaut en particulier pour les polygones, notamment les quadrilatères. D'ailleurs pour ceux-ci, on a encore le critère : un quadrilatère  $abcd$  est convexe si et seulement si ses diagonales  $[ac]$  et  $[bd]$  se coupent.

2) En revanche, dans  $\mathbf{E}$  il faut être plus circonspect. En effet, le complémentaire d'une droite de  $\mathbf{E}$  est connexe et il n'y a donc pas moyen de parler de demi-plans. De plus, les segments intrinsèques n'existent que si les points ne sont pas orthogonaux. On peut cependant dire qu'une partie  $A$  est convexe si pour tous  $a, b \in A$  le segment intrinsèque qui les joint est contenu dans  $A$ , étant entendu que cela suppose que la partie ne contient pas de points orthogonaux.

**6.9.3 Définition.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ . On appelle **triangle plein** associé à  $abc$  l'enveloppe convexe des points  $a, b, c$ , ou ce qui revient au même l'intersection des trois demi-plans limités par les droites  $(bc)$ ,  $(ca)$  et  $(ab)$  contenant chacun le sommet opposé.

**6.9.4 Proposition-Définition.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$  de  $spin > 0$ . On relève  $a, b, c$  en des points de  $\mathbf{S}^2$  vérifiant  $\varphi(b, c) > 0$ ,  $\varphi(c, a) > 0$  et  $\varphi(a, b) > 0$ . Soit  $L = [bc] \cup [ca] \cup [ab]$  le bord intrinsèque de  $abc$ .

0) Deux points de  $L$  ne sont jamais orthogonaux.

1) Les ensembles suivants sont égaux :

i) La réunion des segments intrinsèques  $[mn]$  avec  $m, n$  situés dans le bord intrinsèque.

ii) Les images des points  $\lambda a + \mu b + \nu c$  avec  $\lambda, \mu, \nu \geq 0$  vérifiant  $\lambda + \mu + \nu = 1$ .

iii) La réunion de  $L$  et de la composante connexe du complémentaire de  $L$  qui contient le centre de gravité intrinsèque (voir 5.6.8) de  $abc$ .

---

12. Mais, si l'on y tient, on peut traduire les définitions dans les modèles conformes.

Ces ensembles constituent le **triangle plein**  $abc$ .

*Démonstration.* Au lecteur : on rappelle que le segment intrinsèque  $[ab]$  est l'image des  $\lambda a + \mu b$  avec  $\lambda, \mu \in [0, 1]$  vérifiant  $\lambda + \mu = 1$ , voir 5.4.12.

### La formule de Gauss-Bonnet

On a vu que, dans les géométries non euclidiennes, la somme des angles d'un triangle est différente de  $\pi$ . On peut calculer cette différence en termes d'aires. C'est un cas particulier de la célèbre formule de Gauss-Bonnet :

**6.9.5 Théorème.** 1) Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ . On désigne par  $\mathcal{A}(abc)$  l'aire du triangle plein associé (voir 6.9.3). On a  $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi - \mathcal{A}(abc)$ .

2) Soit  $abc$  un triangle de spin positif de  $\mathbf{E}$ . On désigne par  $\mathcal{A}(abc)$  l'aire du triangle plein associé (voir 6.9.4). On a  $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi + \mathcal{A}(abc)$

*Démonstration.* La démonstration de ces résultats bien connus n'est jamais évidente. On peut par exemple prouver le théorème en deux temps : d'abord pour les triangles rectangles, par un calcul pas si facile, que le lecteur effectuera à titre d'exercice, voir 6.10.18 et 6.10.19. Le résultat s'en déduit en décomposant chaque triangle en deux triangles rectangles, grâce au lemme suivant :

**6.9.6 Lemme.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{P}(E)$ . On suppose que  $abc$  est dans  $\mathbf{K}$  ou dans  $\mathbf{E}$ , mais qu'il est alors de spin positif. Alors le triangle admet au moins deux angles aigus, disons  $\widehat{b}$  et  $\widehat{c}$ , et le pied  $a'$  de la hauteur issue de  $a$  est dans le segment intrinsèque  $[bc]$ . Le triangle plein  $abc$  est réunion des triangles pleins  $aba'$  et  $aca'$ , l'intersection étant réduite au segment  $[aa']$ . On a  $\widehat{bac} = \widehat{baa'} + \widehat{a'ac}$ .

*Démonstration.* Qu'il y ait deux angles aigus résulte de 6.4.1 ou 6.3.4. Si  $a'$  n'est pas dans le segment  $[bc]$ , supposons par exemple  $b \in [a'c]$ . Alors, comme les demi-droites  $[bc]$  et  $[ba']$  sont opposées, on a  $\widehat{a'ba} + \widehat{abc} = \pi$  et comme  $a'ba$  est rectangle en  $a'$ , l'angle  $\widehat{a'ba}$  est aigu, donc  $\widehat{abc}$  obtus, ce qui est absurde.

Le fait que le triangle plein  $abc$  est réunion des triangles rectangles pleins vient de la définition des triangles pleins et la condition d'angles de la relation de Chasles géométrique, voir 5.6.13.

Le théorème est alors évident à partir du cas du triangle rectangle. Dans le cas hyperbolique, par exemple, on a  $\mathcal{A}(abc) = \mathcal{A}(aba') + \mathcal{A}(aca') = \frac{\pi}{2} - \widehat{b} - \widehat{baa'} + \frac{\pi}{2} - \widehat{c} - \widehat{a'ac}$  et la conclusion s'ensuit.

**6.9.7 Remarque.** Il y a d'autres voies pour prouver Gauss-Bonnet dans les cas précédents. Pour 1) on peut utiliser une décomposition en triangles idéaux (i.e. les triangles à sommets sur  $\Gamma$ ), voir 6.10.20. Pour 2) on peut passer par la sphère et utiliser les fuseaux, voir 6.10.21 ou [Per11].

**6.9.8 Remarque.** On voit qu'en géométrie non euclidienne, l'aire se déduit immédiatement des angles, de sorte que c'est un invariant à peu près inutile. Pour une discussion plus approfondie sur ce thème, voir chapitre 8 §7 et chapitre 9, §9.1.5.

## 6.10 Exercices

### 6.10.1 Le cas d'orthogonalité

**6.10.1 Exercice.** Le but de cet exercice est d'élucider le cas des triangles de spin nul dans le plan elliptique. Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$  vérifiant  $\varphi(b, c) = 0$ .

1) Montrer qu'on peut supposer qu'on a  $a = (\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sin \varphi)$  avec  $\theta \in [0, 2\pi]$  et  $\varphi \in ]0, \pi/2]$ ,  $b = (1, 0, 0)$  et  $c = (0, 1, 0)$ , à isométrie près.

2) Calculer toutes les valeurs de  $q$  et  $\varphi$  en les points  $a, b, c$  (resp.  $b \mathbb{A} c$ ,  $c \mathbb{A} a$ ,  $a \mathbb{A} b$ ). En déduire les valeurs des longueurs  $\alpha, \beta, \gamma$  et des angles de demi-droites  $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$  (on appliquera la convention 5.5.11). Montrer que  $\widehat{a}$  est toujours obtus.

3) Montrer les propositions 6.1.10 et 6.2.3.

### 6.10.2 Faux rectangles, parallèles et équidistantes

**6.10.2 Exercice.** Le but de cet exercice est d'étudier des "faux rectangles" (quadrilatères à trois angles droits) et de retrouver le résultat de 5.3.3 sur la distance des "parallèles".

On travaille dans le plan de Klein  $\mathbf{K}$  et on considère un faux rectangle  $abcd$  (quatre points distincts et non alignés avec les angles  $\widehat{dab}$ ,  $\widehat{abc}$  et  $\widehat{bcd}$  égaux à  $\pi/2$ ).

0) Montrer que dans  $\mathbf{K}$ , deux droites perpendiculaires à une même troisième ne se coupent pas (considérer sinon le triangle ainsi formé). En déduire que le quadrilatère  $abcd$  est convexe (voir 6.9.2).

1) Montrer que l'angle  $\widehat{cda}$  est  $< \pi/2$  (utiliser 6.9.2 et 5.6.13).

2) Montrer qu'on a l'égalité  $\frac{\text{ch } bc}{\text{ch } ad} = \frac{\text{ch } ab}{\text{ch } cd} := \lambda$ . (On utilisera Pythagore dans les triangles  $bad$  et  $bcd$ .)

3) Exprimer  $chac$  de deux manières différentes (par Pythagore dans  $abc$  et par Al-Kashi dans  $adc$ ) et en déduire qu'on a  $\lambda < 1$ .

4) Retrouver le résultat de 5.3.3.

### 6.10.3 Spin d'un triangle extérieur du plan hyperbolique

**6.10.3 Exercice.** ¶ Soit  $abc$  un triangle extérieur du plan hyperbolique  $\mathbf{P}(E)$  (i.e. un triangle tel que  $a, b, c$  soient des points de  $\mathbf{T}$  et que les droites  $(bc)$ ,  $(ca)$  et  $(ab)$  soient extérieures; il revient au même de demander que les produits vectoriels  $b \wedge c$ ,  $c \wedge a$  et  $a \wedge b$  soient dans  $\mathbf{K}$ ). On considère les segments intrinsèques  $[bc]$ ,  $[ca]$ ,  $[ab]$  (voir 5.4.6) et le lacet  $abca$  formé par ces segments.

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) On a  $S(a, b, c) > 0$ .
- 2) Le lacet  $abca$  est homotope à un point dans  $\mathbf{P}(E)$ .
- 3) Le complémentaire du lacet  $abca$  a deux composantes connexes.
- 4) Une droite projective quelconque, ne passant pas par  $a, b, c$  coupe le lacet  $abca$  en 0 ou 2 points.

### 6.10.4 Les triangles rectangles ne sont plus ce qu'ils étaient (bis)

Les exercices suivants complètent 4.7.18. Le premier relie l'absence des propriétés de similitude des triangles rectangles au fait que la somme des angles d'un triangle est différente de  $\pi$ . Le second propose un ersatz de la relation qui, en géométrie euclidienne, exprime les tangentes des angles aigus en fonction des côtés de l'angle droit.

**6.10.4 Exercice.** Soient  $a, b, c$  des points de  $\mathbf{E}$ . On suppose que le triangle  $abc$  est rectangle en  $a$ . Soit  $h$  le point d'intersection de  $(bc)$  et de la perpendiculaire à  $(bc)$  passant par  $a$ . Dans le cas euclidien, on sait qu'on a  $\widehat{bah} = \widehat{ach}$ .

1) Montrer qu'on peut supposer  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$  et  $c = (\cos \beta, 0, \sin \beta)$  avec  $\beta, \gamma \in ]0, \pi/2]$ . Déterminer le point  $h$ .

2) Montrer qu'on a  $\widehat{bac} = \pi/2 = \widehat{bah} + \widehat{hac}$ . En déduire l'inégalité  $\widehat{bah} < \widehat{ach}$ .

3) Traiter le même problème dans le plan hyperbolique  $\mathbf{K}$  (on montrera l'inégalité en sens inverse  $\widehat{bah} > \widehat{ach}$ ).

4) Soient  $A, B, C, H$  des droites de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{K}$ . On suppose que  $B$  et  $C$  sont perpendiculaires, ainsi que  $A$  et  $H$  et que  $B, C, H$  sont concourantes.

Montrer qu'on a  $|C, H| > |A, B|$  en géométrie hyperbolique et l'inégalité en sens inverse en géométrie elliptique.

**6.10.5 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ , rectangle en  $a$ . On pose  $bc = \alpha$ ,  $ca = \beta$ ,  $ab = \gamma$  et on note  $\widehat{b}$  l'angle  $\widehat{abc}$ .

1) Montrer la relation  $\operatorname{ch}^2 \beta = \frac{\cos^2 \widehat{b}}{1 - \sin^2 \widehat{b} \operatorname{ch}^2 \gamma}$  et en déduire qu'à  $\widehat{b}$  fixé,  $\beta$  est une fonction croissante de  $\gamma$  et inversement. (On utilisera Pythagore et Al-Kashi.) Exprimer aussi  $\alpha$  en fonction de  $\gamma$ .

2) Soit  $a'$  un point de  $[ab]$ . Montrer que la perpendiculaire à  $(ab)$  en  $a'$  coupe  $(bc)$  en  $c'$  et qu'on a  $bc' \leq bc$ . (On utilisera le théorème des valeurs intermédiaires, Al-Kashi et Pythagore.)

### 6.10.5 Longueurs et angles du triangle dual

**6.10.6 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$  et  $a'b'c'$  son triangle dual. On note respectivement  $\alpha, \beta, \gamma; \lambda, \mu, \nu$  les longueurs des côtés et les angles de demi-droites de  $abc$  et de même  $\alpha', \dots, \nu'$  pour  $a'b'c'$ . On renvoie à 6.3.4 pour la définition des trois types de triangles.

1) On suppose  $abc$  de type 1. Montrer qu'on a  $\alpha' = \lambda, \beta' = \mu, \gamma' = \nu$  et  $\lambda' = \pi - \alpha, \mu' = \pi - \beta, \nu' = \pi - \gamma$ .

2) On suppose  $abc$  de type 3. Montrer qu'on a  $\alpha' = \pi - \lambda, \beta' = \pi - \mu, \gamma' = \pi - \nu$  et  $\lambda' = \alpha, \mu' = \beta, \nu' = \gamma$ .

3) On suppose  $abc$  de type 2 avec  $\lambda > \pi/2$ . Montrer qu'on a  $\alpha' = \pi - \lambda, \beta' = \mu, \gamma' = \nu$  et  $\lambda' = \pi - \alpha, \mu' = \beta, \nu' = \gamma$ .

### 6.10.6 Triangles pseudo-rectangles

**6.10.7 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{E}$  pseudo-rectangle en  $a$  (c'est-à-dire vérifiant  $q(a)\varphi(b, c) = -\varphi(a, b)\varphi(a, c)$ ).

Montrer que l'ensemble des points  $c'$  tels que  $abc'$  soit pseudo-rectangle est la polaire du point  $q(a)b + \varphi(a, b)a$ , mais que cette droite ne passe pas par  $a$  sauf si  $a$  et  $b$  sont orthogonaux.

En déduire que les triangles  $abc'$  avec  $c' \in (ac)$ ,  $c' \neq c$  ne sont pas pseudo-rectangles sauf dans le cas particulier évoqué ci-dessus.

### 6.10.7 Contre-exemples au troisième cas d'isométrie

**6.10.8 Exercice.** Le but de cet exercice est de préciser le domaine dans lequel le troisième cas d'isométrie requiert nécessairement la condition de spin.

L'espace  $E$  est un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une forme  $q$  non dégénérée (elliptique ou hyperbolique). On fixe une base  $\mathcal{B}$  et on appelle  $\Delta(q)$  le discriminant de  $q$  dans cette base. On considère deux vecteurs  $a, b$  de  $E$ , non isotropes, non colinéaires et tels que le plan  $(a, b)$  soit non isotrope. On pose  $a' = b - \frac{\varphi(a, b)}{q(a)} a := b - \lambda a$ , de sorte que  $a'$  est dans  $(a, b)$  et orthogonal à  $a$ . On complète  $a, a'$  en une base orthogonale de  $E$  par le produit vectoriel  $a \wedge b$  (calculé dans la base  $\mathcal{B}$ ). On pose  $\alpha = q(a)$ ,  $\beta = q(a')$ ,  $\gamma = q(a \wedge b)$ .

1) Montrer qu'on a  $\Delta(q) = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ .

2) Soient  $c = xa + ya' + z(a \wedge b)$  et  $c' = x'a + y'a' + z'(a \wedge b)$  deux vecteurs de  $E$ .

a) Calculer les valeurs de  $q$  et  $\varphi$  pour les vecteurs  $a, b, c, c'$ .

b) Montrer qu'on a  $q(c) = q(c')$ ,  $\varphi(a, c) = \varphi(a, c')$ , mais  $\varphi(b, c) = -\varphi(b, c')$  si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :  $x = x'$ ,  $\beta y^2 + \gamma z^2 = \beta y'^2 + \gamma z'^2$  et  $y' = -y - 2\frac{\lambda\alpha x}{\beta}$ . En déduire qu'on a alors :

$$\Delta(q)\gamma^2 z'^2 = \Delta(q)\gamma^2 z^2 - 4\lambda^2\alpha^3 x^2 - 4\lambda\alpha^2\beta xy.$$

3) Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{P}(E)$ . Montrer qu'il existe un contre-exemple au troisième cas d'isométrie (sans condition de spin) entre  $abc$  et un autre triangle si on a la condition :

$$\varphi(a \wedge b, c)^2 - \frac{4}{\Delta(q)}\varphi(a, b)\varphi(a, c)\varphi(b, c) \geq 0.$$

Montrer que, pour  $a, b$  fixés, l'ensemble  $X$  des points  $c$  qui vérifient cette condition est l'une des composantes connexes limitées par une conique  $C$ , dont on notera qu'elle passe par les points  $a'$  et  $b'$  de  $(ab)$  orthogonaux à  $a$  et  $b$  et qu'elle est tangente en ces points à  $a^\perp$  et  $b^\perp$ , de sorte qu'elle est dans le pinceau de base  $(ab)^2$  et  $a^\perp b^\perp$ . Montrer que si  $a, b$  sont tous deux dans  $\mathbf{K}$  ou  $\mathbf{E}$ , le point  $a \wedge b$  est dans la composante  $X$ , mais pas<sup>13</sup> les points  $a, b$ .

## 6.10.8 L'image de $\Phi_l$ : topologie

### 6.10.9 Exercice. ¶

On travaille dans le plan elliptique  $\mathbf{E}$  et on écrit  $\mathcal{T}$  au lieu de  $\mathcal{T}_{\mathbf{E}}$ . Le but de l'exercice est de décrire topologiquement l'image de  $\mathcal{T}$  par  $\Phi_l$ . On

13. Autrement dit, pour les points assez voisins de  $a, b$ , le troisième cas est valable sans condition de spin.



note  $\mathcal{T}^+$ ,  $\mathcal{T}^0$  et  $\mathcal{T}^-$  l'ensemble des triangles de spin positif, nul et négatif. Dans l'espace  $\mathbf{R}^3$  des points  $(\alpha, \beta, \gamma)$  on pose  $O = (0, 0, 0)$ ,  $A = (\pi/2, \pi/2, 0)$ ,  $B = (\pi/2, 0, \pi/2)$ ,  $C = (0, \pi/2, \pi/2)$  et  $D = (\pi/2, \pi/2, \pi/2)$ .

1) Montrer que la projection sur l'espace des  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de l'image  $T^+$  de  $\mathcal{T}^+$  est formée de la réunion des deux tétraèdres semi-ouverts  $OABC$  et  $ABCD$ , se recollant suivant la face  $ABC$  qui est l'image des triangles vérifiant  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . Montrer que la projection de l'image  $T^-$  de  $\mathcal{T}^-$  est le tétraèdre ouvert  $ABCD$  et que celle de  $\mathcal{T}^0$  est la réunion des faces  $T^0 = BCD \cup CAD \cup ABD$ . On précisera quels points du bord sont atteints.

2) Montrer que  $\bar{\Phi}_l$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{T}^+/PO(q)$  sur  $T^+$  et de même pour  $\mathcal{T}^-$  et  $\mathcal{T}^0$ .

3) On considère les parties  $(T^+ \cup T^0) \times \{1\}$  et  $(T^- \cup T^0) \times \{-1\}$  de  $\mathbf{R}^3 \times \{\pm 1\}$  et on considère l'espace topologique quotient  $T$  obtenu en recollant ces parties le long de  $T^0$  (cela signifie qu'on identifie les points  $(\alpha, \beta, \gamma; 1)$  et  $(\alpha, \beta, \gamma, -1)$  dès que  $\alpha, \beta$  ou  $\gamma$  vaut  $\pi/2$ ).

Montrer que  $\bar{\Phi}_l$  induit un homéomorphisme de  $\mathcal{T}/PO(q)$  sur  $T$ .

### 6.10.9 L'image par $\Phi_l$ de $\mathbf{E}^3$ tout entier

**6.10.10 Exercice.** Soient  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$  et  $\epsilon \in \{+1, -1\}$ .

Montrer qu'il existe un triplet  $a, b, c \in \mathbf{E}$ , unique à isométrie près, tel que  $bc = \alpha$ ,  $ca = \beta$ ,  $ab = \gamma$  et que  $S(a, b, c)$  soit du signe de  $\epsilon$  (en convenant que  $\epsilon$  est égal à 1 si le spin est nul) si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- 1)  $\epsilon = 1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi/2]$  et  $|\beta - \gamma| \leq \alpha \leq \beta + \gamma$ ,
- 2)  $\epsilon = -1$ ,  $\alpha, \beta, \gamma \in ]0, \pi/2[$  et  $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi$ .

(On pourra utiliser les points  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$ ,  $c = (\cos \beta, \cos \theta \sin \beta, \sin \theta \sin \beta)$  où  $\theta$  désigne un réel de  $[0, \pi]$ .)

### 6.10.10 L'application $G$ dans le cas elliptique

**6.10.11 Exercice.** Le but de l'exercice est de prouver le résultat de 6.7.5 dans le cas elliptique. Les notations sont celles de 6.7.5. On omet les exposants  $e$ .

1) Soit  $(\lambda, \mu, \nu) \in \Omega_a$  avec  $\lambda, \mu, \nu > \pi/2$ . Montrer qu'on a l'inégalité  $\mu + \nu < \pi + \lambda$  et les inégalités analogues après permutations.

2) ¶ Montrer que la formule  $\cos \alpha = \epsilon \frac{\cos \lambda + \cos \mu \cos \nu}{\sin \mu \sin \nu}$  définit bien un nombre  $\alpha \in ]0, \pi/2]$  et de même pour  $\beta, \gamma$ . (Attention, il y a de nombreux cas à distinguer.)

3) Montrer que  $G$  est à valeurs dans  $\Omega_l$ . (On montrera les formules  $\sin \beta \sin \gamma = \frac{N}{\sin^2 \lambda \sin \mu \sin \nu}$  et  $\cos \beta \cos \gamma - \cos \alpha = \frac{-N \cos \lambda}{\sin^2 \lambda \sin \mu \sin \nu}$ , avec  $N = 1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu - 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu$ .)

4) Montrer que  $F \circ G$  est l'identité de  $\Omega_a$  et la formule des sinus de 6.7.6.

### 6.10.11 La mauvaise position des cas mixtes

**6.10.12 Exercice.** On se propose de montrer que le premier cas d'isométrie n'est pas vrai lorsque l'angle n'est pas compris entre les côtés. Dans les trois premières questions on travaille dans le plan elliptique et on considère un triangle  $abc$  dont on se donne les longueurs  $\alpha = bc$  et  $\beta = ca$ , ainsi que l'angle en  $a$ ,  $\lambda = \widehat{bac}$  et on suppose  $\alpha, \beta, \lambda \in ]0, \pi/2[$ . On va montrer que, sous certaines conditions, il y a deux valeurs de  $\gamma = ab$  possibles, donc deux tels triangles non isométriques.

1) Montrer que la longueur  $\gamma$  vérifie la relation (\*) :

$$\cos \beta \cos \gamma + \cos \lambda \sin \beta \sin \gamma - \cos \alpha = 0.$$

2) On considère la droite  $D$  de  $\mathbf{R}^2$  d'équation  $X \cos \beta + Y \cos \lambda \sin \beta - \cos \alpha = 0$ . Montrer que cette droite rencontre le cercle unité en deux points situés dans le premier quadrant si et seulement si la distance de l'origine  $O$  à  $D$  est  $< 1$  et si  $D$  coupe les axes en des points d'abscisse et d'ordonnée  $> 1$ . En déduire qu'il y a deux longueurs  $\gamma$  vérifiant (\*) si et seulement si  $\alpha, \beta, \lambda$  vérifient les inégalités :

$$\cos \alpha > \cos \beta, \quad \cos \alpha > \cos \lambda \sin \beta \quad \text{et} \quad \cos^2 \alpha < \cos^2 \beta + \cos^2 \lambda \sin^2 \beta.$$

3) Montrer que le premier cas d'isométrie peut être en défaut si l'angle n'est pas compris entre les côtés (on pourra utiliser la paramétrisation usuelle :  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$ ,  $c = (\cos \beta, \cos \lambda \sin \beta, \sin \lambda \sin \beta)$ , fixer  $\beta, \lambda$  et montrer qu'il y a des valeurs convenables pour  $\alpha$ ).

4) Montrer un résultat analogue dans le cas hyperbolique.

**6.10.13 Exercice.** On travaille dans le plan hyperbolique et on se propose de montrer que le second cas d'isométrie est encore valable même si le côté n'est pas celui compris entre les angles. On considère deux triangles  $abc$  et  $a'b'c'$  de  $\mathbf{K}$  et on suppose qu'on a  $bc = b'c'$ ,  $\widehat{b} = \widehat{b'}$  et  $\widehat{a} = \widehat{a'}$ .

1) Montrer qu'on peut supposer  $b = b'$ ,  $c = c'$  et  $[ba] = [ba']$ .

2) On raisonne par l'absurde en supposant  $a \neq a'$  et, par exemple,  $a \in [ba')$ . Montrer qu'alors, dans le triangle  $aa'c$  on a  $\widehat{a'ac} + \widehat{aa'c} = \pi$  et conclure.

### 6.10.12 Les cas d'isométrie des triangles rectangles

**6.10.14 Exercice.** On suppose qu'on travaille dans le plan elliptique **E**.

1) Soit  $abc$  un triangle rectangle en  $a$  et de spin  $\neq 0$ . Montrer qu'un système complet d'invariants de  $abc$  est donné par l'angle droit et deux longueurs de côtés quelconques (pas nécessairement les côtés de l'angle droit). (On utilisera le théorème de Pythagore  $\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma$ .) Montrer que ce résultat est en défaut si le triangle est de spin nul (dans ce cas, le triangle a deux angles droits, disons en  $a$  et  $b$ , et il faut absolument se donner la longueur  $ab$  car les deux autres sont égales à  $\pi/2$ ).

2) Soit  $abc$  un triangle rectangle en  $a$  et de spin  $\neq 0$ . Montrer qu'un système complet d'invariants de  $abc$  est donné par l'angle droit, un autre angle, disons en  $b$ , et n'importe lequel des côtés (on utilisera la formule d'Al-Kashi et on se souviendra que les angles autres que  $\hat{a}$  sont aigus ou droits).

Étudier les cas des triangles birectangles et autopolaires.

**6.10.15 Exercice.** On suppose qu'on travaille dans le plan hyperbolique **K**. Soit  $abc$  un triangle rectangle en  $a$ .

1) Montrer qu'un système complet d'invariants de  $abc$  est donné par l'angle droit et deux longueurs de côtés quelconques (pas nécessairement les côtés de l'angle droit). (On utilisera le théorème de Pythagore  $\operatorname{ch} \alpha = \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \gamma$ .)

2) Montrer qu'un système complet d'invariants de  $abc$  est donné par l'angle droit, un autre angle, disons en  $b$ , et une longueur de côté (pas nécessairement  $ab$ ). (On utilisera les formules d'Al-Kashi et on tiendra compte du fait que  $\hat{c}$  est aigu car la somme des angles est  $< \pi$ .)

**6.10.16 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle et soient  $b', c'$  les projetés orthogonaux de  $b$  et  $c$  sur  $(ac)$  et  $(ab)$ . On suppose qu'on a l'égalité de distances  $bb' = cc'$ . Montrer que  $abc$  est isocèle en  $a$ .

### 6.10.13 Hyperbolicité à la Gromov

**6.10.17 Exercice.** Soit  $abc$  un triangle de **K**. On pose  $\alpha = bc$ ,  $\beta = ca$  et  $\gamma = ab$  et on normalise le triangle en posant  $q(a) = q(b) = q(c) = -1$  et  $\varphi(b, c) = -\operatorname{ch} \alpha$ ,  $\varphi(c, a) = -\operatorname{ch} \beta$  et  $\varphi(a, b) = -\operatorname{ch} \gamma$ .

1) Montrer qu'on a alors  $q(b \wedge c) = \operatorname{sh}^2 \alpha$ ,  $q(c \wedge a) = \operatorname{sh}^2 \beta$  et  $q(a \wedge b) = \operatorname{sh}^2 \gamma$ .

2) Soit  $o$  le centre du cercle inscrit à  $abc$ , c'est-à-dire le point de concours des bissectrices intérieures, cf. 3.4.18. Montrer que  $o$  est donné par la formule  $o = \operatorname{sh} \alpha a + \operatorname{sh} \beta b + \operatorname{sh} \gamma c$ .

3) Montrer que le rayon du cercle inscrit (c'est-à-dire la distance de  $o$  à l'un quelconque des côtés  $(bc)$ ,  $(ca)$ ,  $(ab)$ ) est  $\leq \frac{1}{2} \ln 3$ . (En utilisant la formule

4.5.15 on montrera que la condition équivaut, par exemple, à  $I(o, b \wedge c) \geq -\frac{1}{3}$  et on se ramènera à l'inégalité  $-q(o) \geq 3[a, b, c]^2$ . On utilisera ensuite la formule 1.1.6 et l'inégalité triangulaire sous la forme  $\text{ch}(\beta - \gamma) \leq \text{ch} \alpha$ .)

Montrer le même résultat par une variante consistant à faire tendre successivement les sommets du triangle  $abc$  vers des points de  $\Gamma$  (autrement dit, en se ramenant au cas d'un triangle "idéal").

4) Soit  $m$  un point du segment  $[bc]$ . Montrer que le minimum des distances de  $m$  aux côtés  $(ab)$  et  $(ac)$  est inférieur à  $\ln 3$  (**condition d'hyperbolicité de Gromov**<sup>14</sup>). (Avec les notations ci-dessus, soit  $h$  le projeté orthogonal de  $o$  sur  $(bc)$ . On peut supposer, par exemple,  $m \in [bh]$ . Soit  $p$  l'intersection de la perpendiculaire à  $(bc)$  en  $m$  avec  $(bo)$  (voir 6.10.5) et soit  $m' \in (ba)$  le symétrique de  $m$  par rapport à  $(bo)$ . En utilisant 6.10.5, montrer les inégalités  $d(m, (ab)) \leq mm' \leq mp + pm' \leq 2oh \leq \ln 3$ .)

## 6.10.14 Calcul de l'aire des triangles rectangles

### 6.10.18 Exercice. ¶¶ En géométrie hyperbolique<sup>15</sup>

On travaille dans le plan de Klein  $\mathbf{K}$ . On rappelle que l'élément d'aire est donné par  $dS = \frac{dx \wedge dy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$ , voir 2.4.28. On considère un triangle  $abc$  rectangle en  $a$  avec  $ab = \text{ch} \gamma$ ,  $ac = \text{ch} \beta$  (et donc  $bc = \text{ch} \beta \text{ch} \gamma$  par Pythagore). On se propose de calculer l'aire  $\mathcal{A}$  de  $T = abc$ .

1) Montrer qu'on peut supposer  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (\text{th} \gamma, 0, 1)$  et  $c = (0, \text{th} \beta, 1)$ .

2) Montrer qu'on a  $\mathcal{A} = \iint_T \frac{dx dy}{(1 - x^2 - y^2)^{3/2}}$ .

3) On effectue le changement de variables  $x = \text{th} u \cos \theta$ ,  $y = \text{th} u \sin \theta$ . En déduire la formule  $\mathcal{A} = I - \pi/2$  avec  $I = \int_0^{\pi/2} \text{ch} f(\theta) d\theta$  où  $f$  est définie

par la formule :  $\text{th} f(\theta) = \frac{\text{th} \beta \text{th} \gamma}{\text{th} \gamma \sin \theta + \text{th} \beta \cos \theta}$ .

4) Calculer l'intégrale  $I$  en posant successivement  $u = \text{th} \gamma \sin \theta + \text{th} \beta \cos \theta$ , puis  $v = u^2$  et enfin  $w = v - \frac{A}{2}$  avec  $A = \text{th}^2 \beta \text{th}^2 \gamma + \text{th}^2 \beta + \text{th}^2 \gamma$ . (On a

14. Cette condition signifie que, bien que les distances ne soient pas bornées dans le plan hyperbolique, les triangles y sont "fins". Voir sur ces questions M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes*, Lecture Notes in Maths 1441, Springer, 1990.

15. On conseille cet exercice au lecteur qui veut réviser les techniques de calcul d'intégrales ... ou qui veut se venger d'un amphi de premier cycle particulièrement rétif.

$$I = \int_{\operatorname{th}^2 \beta - \frac{A}{2}}^{\operatorname{th}^2 \gamma - \frac{A}{2}} \frac{dw}{\sqrt{C^2 - w^2}} \text{ avec } C = \frac{1}{2}(\operatorname{th}^2 \beta \operatorname{th}^2 \gamma - \operatorname{th}^2 \beta - \operatorname{th}^2 \gamma).$$

5) Montrer les formules  $\sin \mathcal{A} = \frac{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \gamma}{1 + \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \gamma}$  et  $\cos \mathcal{A} = \frac{\operatorname{ch} \beta + \operatorname{ch} \gamma}{1 + \operatorname{ch} \beta \operatorname{ch} \gamma}$ .

6) Montrer qu'on a, dans le cas d'un triangle rectangle en  $a$ ,  $\mathcal{A} = \frac{\pi}{2} - (\widehat{b} + \widehat{c})$  (utiliser la formule d'Al-Kashi).

### 6.10.19 Exercice. ¶¶ En géométrie elliptique

Soit  $abc$  un triangle de spin positif, rectangle en  $a$ . On pose  $ab = \cos \gamma$  et  $ac = \cos \beta$ . On se propose de calculer l'aire  $\mathcal{A}$  du triangle  $T = abc$  (voir 6.9.4). On paramètre  $\mathbf{E}$  (ou la sphère) par  $(\cos t, \cos u \sin t, \sin u, \sin t)$ . L'élément d'aire est alors  $dS = \sin t dt \wedge du$ .

1) Montrer qu'on peut supposer  $a = (1, 0, 0)$ ,  $b = (\cos \gamma, \sin \gamma, 0)$  et  $c = (\cos \beta, 0, \sin \beta)$ .

2) Montrer que l'aire est donnée par la formule  $\mathcal{A} = \int_0^{\pi/2} \sin f(u) du$  où  $f$  est définie par la formule  $\cotan f(u) = \cotan \gamma \cos u + \cotan \beta \sin u$ .

3) Calculer l'aire en s'inspirant de la méthode utilisée à l'exercice précédent.

4) Montrer les formules  $\sin \mathcal{A} = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{1 + \cos \beta \cos \gamma}$  et  $\cos \mathcal{A} = \frac{\cos \beta + \cos \gamma}{1 + \cos \beta \cos \gamma}$ .

5) Montrer qu'on a, dans le cas d'un triangle rectangle en  $a$ ,  $\mathcal{A} = (\widehat{b} + \widehat{c}) - \frac{\pi}{2}$  (utiliser la formule d'Al-Kashi).

## 6.10.15 D'autres preuves de Gauss-Bonnet

### 6.10.20 Exercice. ¶

On travaille dans le plan hyperbolique réel.

1) Montrer qu'un triangle idéal<sup>16</sup> (c'est-à-dire un triangle dont les sommets sont distincts et situés sur  $\Gamma$ ) est d'aire égale à  $\pi$ . (Comme tous ces triangles sont isométriques on peut faire le calcul avec celui qu'on veut et où l'on veut. Le plus simple est de faire le calcul dans le demi-plan de Poincaré avec le triangle de sommets  $-1, 1, \infty$ .)

2) Soit  $abc$  un triangle avec le sommet  $a$  dans  $\mathbf{K}$  et les sommets  $b, c$  dans  $\Gamma$ . On pose  $\theta = \pi - \widehat{a}$ .

a) Montrer que deux tels triangles sont isométriques s'ils ont même  $\theta$ ; on note  $\mathcal{A}(\theta)$  leur aire. Montrer qu'on a  $\mathcal{A}(\pi) = \pi$ .

16. Attention, si l'aire est définie pour ces triangles à sommets dans  $\Gamma$ , elle n'est pas continue car les triangles sont tous d'aire  $\pi$ , sauf ceux qui ont deux sommets confondus et qui sont d'aire nulle. Il y a des intégrales sauvagement divergentes par ici ...

b) Soient  $\alpha, \beta \in [0, \pi[$  tels que  $\alpha + \beta \leq \pi$ . Montrer la formule  $\mathcal{A}(\alpha + \beta) = \mathcal{A}(\alpha) + \mathcal{A}(\beta)$ .

c) En déduire que l'aire de  $abc$  est égale à  $\theta$ . (On utilisera la continuité de la fonction  $\mathcal{A}$ .)

3) Soit  $abc$  un triangle avec  $a, b \in \mathbf{K}$  et  $c \in \Gamma$ . Montrer la formule  $\mathcal{A}(abc) = \pi - \widehat{a} - \widehat{b}$ . (Si la droite  $(ab)$  coupe  $\Gamma$  en  $d$  et  $e$ , on utilisera 2) appliqué aux triangles  $cdb$  et  $cea$ .)

4) Montrer<sup>17</sup> la formule de Gauss-Bonnet pour un triangle de  $\mathbf{K}$ .

#### 6.10.21 Exercice. ¶

On travaille en géométrie elliptique réelle.

1) Soit  $abc$  un triangle de spin positif de  $\mathbf{E}$ . On rappelle que ce triangle se relève en un triangle de  $\mathbf{S}^2$ . Montrer que les aires de ces triangles sont égales.

2) Soit  $F(\alpha)$  un fuseau de  $\mathbf{S}^2$  d'angle  $\alpha$  (c'est-à-dire la partie limitée par des demi grands cercles joignant deux points antipodes et faisant entre eux un angle  $\alpha$ ). Montrer que l'aire de  $F(\alpha)$  est égale à  $2\alpha$ . (On rappelle que l'aire de  $\mathbf{S}^2$  est égale à  $4\pi$ .)

3) En déduire que l'aire d'un triangle sphérique  $abc$  est égale à  $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} - \pi$ . (On considérera les trois fuseaux de sommets  $a, b, c$  contenant le triangle.)

4) En déduire le théorème de Gauss-Bonnet dans le plan elliptique.

---

17. On retrouvera cette démonstration dans un cadre plus algébrique en 8.7.19.

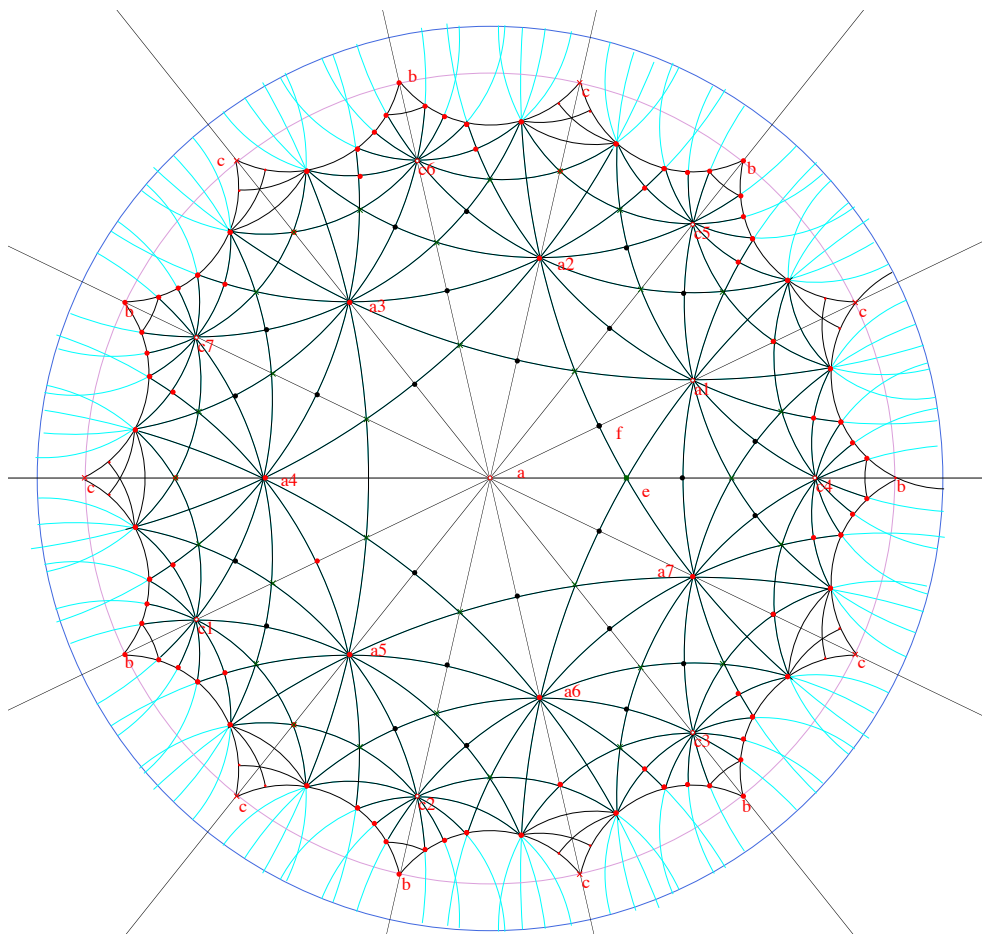


FIGURE 6.14 – Le pavage du plan hyperbolique par des triangles “2,3,7”





# Chapitre 7

## Cercles, équidistantes et horicycles

*Dans ce chapitre on aborde l'un des objets essentiels d'une géométrie métrique : les cercles. On verra qu'ils ont des aspects divers, tant en géométrie hyperbolique, où ils ont (au moins) trois apparences selon la position de leur centre : cercles, horicycles, équidistantes, qu'en géométrie elliptique où, selon les modèles, ils peuvent être en plusieurs morceaux. Cela ne manquera pas d'avoir des répercussions sur leurs intersections et donc sur les constructions "à la règle et au compas".*

Dans tout ce chapitre on travaille dans  $\mathbf{P}(E)$ , muni de la forme quadratique  $q$ , a priori sur un corps  $k$  quelconque.

### 7.1 Cercles

#### 7.1.1 Définition

Finalement, qu'est-ce qu'un cercle? Bien entendu la réponse classique s'exprime en termes de distance. Mais, on a vu qu'une façon de définir la distance elle-même est de faire référence à l'action d'un groupe, voir 4.3.2. On peut donc définir la notion de cercle dès qu'on dispose d'un groupe  $G$  qui opère sur un ensemble  $X$  : étant donnés deux points  $a, b \in X$ , le cercle de centre  $a$  passant par  $b$  c'est l'ensemble des points  $m \in X$  qui sont, vis à vis de  $a$ , "comme"  $b$ , autrement dit des points qu'on peut envoyer sur  $b$  par un élément de  $G$  tout en gardant  $a$  fixe. On considère donc dans le groupe  $G$  les stabilisateurs  $G_a$  des points et les cercles sont les orbites de ces sous-groupes de  $G$ . On verra au chapitre suivant que ces sous-groupes  $G_a$  (et surtout leurs variantes positives) jouent aussi un rôle essentiel dans la

définition d'invariants orientés.

La notion est évidemment triviale si le groupe est deux fois transitif<sup>1</sup> (tous les points distincts de  $a$  sont alors sur le même cercle de centre  $a$ ), et, sinon, elle se traduit à la manière habituelle dès lors qu'on dispose d'un invariant "longueur" ou distance qui décrit le défaut de double transitivité : le cercle est l'ensemble des points  $m$  qui sont à la même distance de  $a$  que  $b$ . Vu 4.3.2, c'est exactement ce que nous proposons ici dans le cas des points non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ , mais nous verrons qu'il y a tout de même quelques cas particuliers un peu épineux.

**7.1.1 Proposition-Définition.** *Soient  $a$  et  $b$  des points distincts et non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$ . Soit  $m$  un point distinct de  $a$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Il existe une isométrie  $g \in PO(q)$  vérifiant  $g(a) = a$  et  $g(b) = m$ .*
- 2) *On a  $q(b) = q(m)$  dans  $k^*/k^{*2}$  et  $I(a, m) = I(a, b)$  dans  $k$ .*
- 3) *On a  $q(b) = q(m)$  dans  $k^*/k^{*2}$  et*

$$(*) \quad q(b)\varphi(a, m)^2 = q(m)\varphi(a, b)^2.$$

*L'ensemble des points  $m$  vérifiant les conditions précédentes est appelé **cercle de centre  $a$  passant par  $b$**  et noté  $\mathcal{C}(a, b)$ .*

*Démonstration.* Il est clair que 1) implique 2). Réciproquement, si on a  $q(b) = q(m)$  dans  $k^*/k^{*2}$ , on peut supposer, quitte à changer de représentant de  $b$  qu'on a  $q(b) = q(m)$ . Avec la condition  $I(a, m) = I(a, b)$ , on en déduit  $\varphi(a, b)^2 = \varphi(a, m)^2$  et, quitte à changer  $b$  en  $-b$ , on peut supposer  $\varphi(a, b) = \varphi(a, m)$ . On conclut avec le théorème de Witt, voir 4.1.3. L'équivalence de 2) et 3) est évidente.

**7.1.2 Remarques.**

- 1) Attention, pour appliquer Witt dans la preuve précédente il est essentiel que les points  $b$  et  $m$  soient différents de  $a$ . D'ailleurs le résultat est faux si la droite  $(ab)$  est tangente à  $\Gamma$  et si  $a$  et  $m$  sont égaux (c'est le cas  $I(a, b) = I(a, m) = 1$ ).
- 2) La propriété 1) signifie bien que  $G_a$  est transitif sur  $\mathcal{C}(a, b)$ .
- 3) Si on impose des conditions invariantes par  $PO(q)$  au point  $b$  (par exemple, être distinct de  $a$ , non isotrope, non orthogonal à  $a$ , être tel que  $(ab)$  ne soit pas tangente à  $\Gamma$ , etc.) et si  $m$  est sur  $\mathcal{C}(a, b)$ ,  $m$  vérifie les mêmes conditions. En particulier, lorsque le corps de base est  $\mathbf{R}$  et la forme hyperbolique, les points d'un cercle sont tous dans  $\mathbf{K}$  ou tous dans  $\mathbf{T}$ .

---

1. C'est le cas du groupe  $PGL(E)$  opérant sur  $\mathbf{P}(E)$ .

## 7.1.2 Le cas réel dans $\mathbf{K}$ ou $\mathbf{E}$

Lorsqu'on dispose d'une distance convenable, un cercle est bien ce qu'on pense :

**7.1.3 Proposition.** *Soient  $a, b$  deux points distincts de  $\mathbf{K}$  ou  $\mathbf{E}$ . On note  $R$  la distance  $ab$  au sens de 5.1.14 ou 5.1.7. Alors  $\mathcal{C}(a, b)$  est l'ensemble des points  $m$  de  $\mathbf{K}$  ou  $\mathbf{E}$  qui vérifient  $am = R$ .*

*Démonstration.* En effet, on a, selon les cas,  $I(a, b) = \operatorname{ch}^2 ab$  ou  $\cos^2 ab$ .

**7.1.4 Remarque.** Dans le cas elliptique, si  $b$  est orthogonal à  $a$ , le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  est la polaire  $a^\perp$ , donc une droite!

## 7.1.3 Discussion

Dans ce paragraphe nous examinons deux cas particuliers importants qui vont correspondre aux deux valeurs spéciales de l'invariant  $I$  : 0 et 1. Une première question concerne la condition  $q(b) = q(m)$  dans  $k^*/k^{*2}$  :

**7.1.5 Proposition.** *Avec les notations de 7.1.1, si l'on suppose  $a$  et  $b$  non orthogonaux, on peut oublier<sup>2</sup> la condition  $q(b) = q(m)$  dans  $k^*/k^{*2}$  de 3).*

*Démonstration.* En effet, la condition 3) s'écrit  $q(b)\varphi(a, b)^2 = q(m)\varphi(a, m)^2$ . Comme  $q(b)$  et  $\varphi(a, b)$  sont non nuls, il en est de même de  $\varphi(a, m)$ , et  $q(b)$  et  $q(m)$  sont égaux dans  $k^*/k^{*2}$ .

**7.1.6 Remarque.** Si  $a$  et  $b$  sont orthogonaux, on a  $I(a, b) = 0$  et les exemples vus en 4.6.2 montrent que la condition sur  $q(b)$  et  $q(m)$  est indispensable : on peut avoir  $I(a, b) = I(a, m) = 0$  sans pour autant que  $q(b)$  et  $q(m)$  soient égaux. Précisément, la formule (\*) donne  $\varphi(a, m) = 0$ , donc définit la polaire de  $a$ , tandis que  $\mathcal{C}(a, b)$  est la partie de cette polaire sur laquelle on a  $q(m) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$  et ces ensembles ne sont pas toujours égaux. Par exemple, dans le cas hyperbolique réel, si on prend  $a$  extérieur, la polaire de  $a$  coupe  $\Gamma$  et, si on prend  $b$  intérieur et  $m$  extérieur sur cette polaire,  $q(m)$  et  $q(b)$  sont de signes contraires. Dans ce cas, le cercle est la trace sur  $\mathbf{K}$  de la polaire<sup>3</sup> de  $a$ .

2. C'est vrai aussi avec 2) à condition de supposer que  $m$  est non isotrope.

3. En vérité, comme  $\varphi(a, m)$  est au carré, on trouve la trace sur  $\mathbf{K}$  de la polaire "double" et on peut voir ce "cercle" comme la limite d'une ellipse intérieure bitangente à  $\Gamma$  dont le petit axe tend vers zéro, voir figure 7.2 ci-dessous.

Il y a ensuite la question de la nature de la transformation  $g$  qui fixe  $a$  et envoie  $b$  sur  $m$ . La question est de savoir si on peut supposer qu'il s'agit d'une symétrie. C'est presque vrai, mais il y a un cas d'exception qui se produit lorsque  $I$  est égal à 1 :

**7.1.7 Proposition.** *Avec les notations de 7.1.1, les propriétés 1), 2) et 3) sont encore équivalentes aux propriétés 4) et 5) suivantes, sauf si la droite  $(ab)$  est tangente à la conique  $\Gamma$  et si le point  $m$  est sur  $(ab)$ .*

4) *Les points  $b$  et  $m$  admettent des médiatrices et le point  $a$  est situé sur l'une d'elles.*

5) *Il existe une symétrie  $\tau$  qui vérifie  $\tau(a) = a$  et  $\tau(b) = m$ .*

*Démonstration.* La question est de montrer que 2) implique 4). On a vu qu'on peut supposer  $q(b) = q(m)$  et  $\varphi(a, b) = \varphi(a, m)$ . Les points  $b$  et  $m$  admettent alors une ou deux médiatrices qui sont les polaires de  $b - m$  et de  $b + m$ , pourvu que ces points soient non isotropes, voir 3.1.3. Comme  $a$  est orthogonal à  $b - m$ , on a la conclusion, sauf si  $b - m$  est isotrope. Dans ce cas, on a  $q(b) = q(m) = \varphi(b, m)$ , la droite  $(bm)$  est tangente à  $\Gamma$  et  $a$  est sur cette droite. C'est exactement le cas d'exception annoncé.

**7.1.8 Remarque.** Dans le cas où  $(ab)$  est tangente à  $\Gamma$ , le "cercle"  $\mathcal{C}(a, b)$  est la réunion des deux tangentes à  $\Gamma$  issues de  $a$ . En effet, si  $m$  est sur l'une des tangentes, on vérifie qu'on a bien  $q(m) = q(b)$  modulo les carrés et  $I(a, b) = I(a, m) = 1$ , voir 4.3.5. Ce qu'indique la proposition précédente c'est que ces tangentes ne se comportent pas de la même façon. Notons  $T$  celle des tangentes qui contient  $b$  et  $T'$  l'autre. Si  $m$  est sur  $T'$ , on peut échanger  $b$  et  $m$  par une involution. Géométriquement, il suffit de prendre l'involution dont le point de Frégier est à l'intersection de  $(bm)$  et de la droite qui joint les points de contact des tangentes. En revanche, si  $m$  est sur  $(ab) = T$ , cela n'est pas possible, car la seule involution qui échange  $b$  et  $m$  est la symétrie par rapport à la polaire de  $b + m$ , qui coupe  $T$  au point  $b - m$  et ne passe donc pas par  $a$ . Cependant, on trouve aisément une isométrie non involutive qui convient en envoyant d'abord  $b$  en  $n \in T'$  par une involution, comme on l'a vu ci-dessus, puis en ramenant  $n$  en  $m$ , toujours par une involution. La transformation en question est hyperbolique, voir 1.4.25.

**7.1.9 Exemple.** Si  $o$  est intersection de trois médiatrices d'un triangle strict  $abc$  (voir 3.2.1 et 3.2.3), le cercle de centre  $o$  passant par  $a$  passe aussi par  $b$  et  $c$ . C'est un **cercle circonscrit** au triangle  $abc$ . Il y a en général quatre cercles circonscrits à un triangle strict. Voir 7.4.7 pour d'autres précisions.

Les cercles sont des coniques bitangentes à  $\Gamma$  (voir 7.1.10). Les contacts sont réels si le centre du cercle est extérieur à  $\Gamma$ , ce qui est le cas pour trois d'entre eux ici.

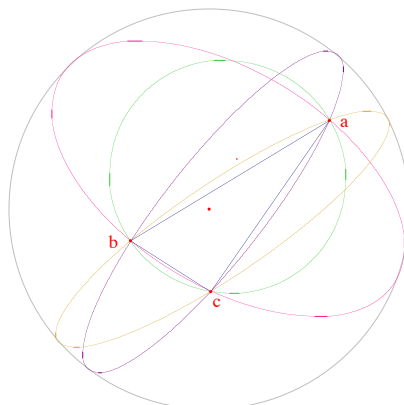


FIGURE 7.1 – Les quatre cercles circonscrits au triangle  $abc$  dans le plan de Klein

## 7.1.4 Description

### Cercles et coniques bitangentes

Nous précisons maintenant la nature de l'ensemble  $\mathcal{C}(a, b)$ , dans le cas où  $a$  et  $b$  sont non isotropes et non orthogonaux :

**7.1.10 Proposition.** *Soient  $a, b \in \mathbf{P}(E)$  des points distincts, non isotropes et non orthogonaux. Soit  $A$  la polaire de  $a$ . On relève  $a, b$  en des vecteurs de  $E$  et on pose  $P_{a,b}(m) = q(b)\varphi(a, m)^2 - q(m)\varphi(a, b)^2$ .*

1) *L'application  $m \mapsto P_{a,b}(m)$  est une forme quadratique non nulle et  $V(P_{a,b})$  est une conique de  $\mathbf{P}(E)$  qui contient  $b$  et est indépendante du choix des représentants de  $a, b$ .*

2) *On note  $Z$  l'intersection  $V(P_{a,b}) \cap \Gamma$ . On a  $Z = V(P_{a,b}) \cap A = \Gamma \cap A$  et cet ensemble est formé de zéro ou deux points. Précisément, il est toujours vide dans le cas elliptique et, dans le cas hyperbolique, il est vide si  $q(a)$  n'est pas un carré. Les coniques  $V(P_{a,b})$  et  $\Gamma$  sont bitangentes (voir Partie III, ??) en les deux points de  $Z$  (en considérant au besoin ces points dans une extension quadratique<sup>4</sup> de  $k$ ).*

3) *Le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  est égal à la conique  $V(P_{a,b})$  privée<sup>5</sup> de  $Z$ . On dit que cette conique est le **support** de  $\mathcal{C}(a, b)$ .*

4) *La conique  $V(P_{a,b})$  est propre sauf si  $(ab)$  est tangente à  $\Gamma$  i.e. si l'on a  $q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2 = 0$ . Dans ce cas  $V(P_{a,b})$  est la réunion des tangentes à  $\Gamma$  issues de  $a$ .*

5) *Réciproquement, toute conique  $C$  bitangente à  $\Gamma$  en deux points  $u, v$  (éven-*

4. Sur  $\mathbf{R}$  cela signifie que les contacts peuvent être imaginaires.

5. On parlera cependant de la conique  $\mathcal{C}$  par abus de langage.

tuellement à coefficients dans une extension quadratique de  $k$ ) est un cercle hyperbolique de centre le pôle de  $(uv)$ .

*Démonstration.* Si  $P_{a,b}$  était identiquement nulle, elle serait nulle sur  $A$  et, comme  $\varphi(a,b)$  est non nul,  $q$  serait nulle sur  $A$ . Cela signifie que  $q$  admettrait un plan vectoriel totalement isotrope, ce qui est absurde car  $q$  est non dégénérée. Les autres points de 1) sont évidents. L'intersection de  $\Gamma$  et  $V(P_{a,b})$  est donnée par les équations  $q(m) = 0$  et  $P_{a,b}(m) = 0$  et on voit qu'on peut remplacer l'une ou l'autre de ces équations par  $\varphi(a,m)^2 = 0$  ce qui donne l'intersection<sup>6</sup> de chaque conique avec  $A$ . En elliptique,  $\Gamma$  est vide, donc aussi  $Z$ . En hyperbolique, l'intersection est non vide si et seulement si  $q|_A$  est hyperbolique, donc de discriminant  $-1$ , ce qui équivaut à  $q(a) \in (k^*)^2$  en vertu de la convention 1.1.3 (dans le cas réel cela signifie que le centre est extérieur à  $\mathbf{K}$ ). Comme le pinceau défini par les deux coniques contient la droite  $A$  double et que cette droite n'est pas tangente, on a un pinceau de coniques bitangentes, voir Partie III ??, ce qui prouve 2).

Pour 3), on note que le cercle  $\mathcal{C}(a,b)$  est contenu dans  $V(P_{a,b})$  en vertu de 7.1.1. Réciproquement, les seuls points de  $V(P_{a,b})$  qui ne sont pas dans  $\mathcal{C}(a,b)$  sont les isotropes en vertu de 7.1.5, donc les points de  $\Gamma$ , ou encore de  $Z$ .

4) Dans le pinceau de coniques bitangentes, il y a deux coniques dégénérées : la droite double  $\varphi(a,m)^2 = 0$  et la réunion des tangentes aux points de  $Z$  qui est l'unique conique du pinceau passant par  $a$ . La conique  $V(P_{a,b})$  ne peut être égale à la droite double car on a supposé  $\varphi(a,b) \neq 0$ . Elle est égale à la réunion des tangentes si et seulement si elle contient  $a$ , donc si on a  $P_{a,b}(a) = 0$  soit  $q(a)q(b) = \varphi(a,b)^2$ , ce qui signifie que  $(ab)$  est tangente à  $\Gamma$ .

5) Si on a une conique  $C$  bitangente en  $u, v$  à  $\Gamma$  et si  $a$  est le pôle de  $(uv)$ ,  $\varphi(a,m) = 0$  est une équation de  $(uv)$ . L'équation de  $C$  est donc de la forme  $\lambda q(m) + \mu \varphi(a,m)^2$ . Si l'on écrit que  $b$  est sur  $C$  on retrouve les coefficients voulus.

**7.1.11 Remarque.** Si  $a$  et  $b$  sont orthogonaux, l'équation  $P_{a,b} = 0$  définit la polaire  $A$  de  $a$  comme droite double, mais, dans ce cas, le cercle  $\mathcal{C}(a,b)$  est seulement formé des points  $m$  de  $A$  qui vérifient  $q(m) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Dans le cas hyperbolique réel, si  $b$  est dans  $\mathbf{K}$  (resp.  $\mathbf{T}$ ) on trouve les points de  $A$  qui sont dans  $\mathbf{K}$  (resp.  $\mathbf{T}$ ).

**7.1.12 Remarque.** Comme on le voit sur la figure 7.3, le "cercle"  $\mathcal{C}(a,b)$  peut être une hyperbole dans le plan hyperbolique. C'est aussi le cas dans le

---

6. Comptée double puisque  $\varphi(a,m)$  est a carré.

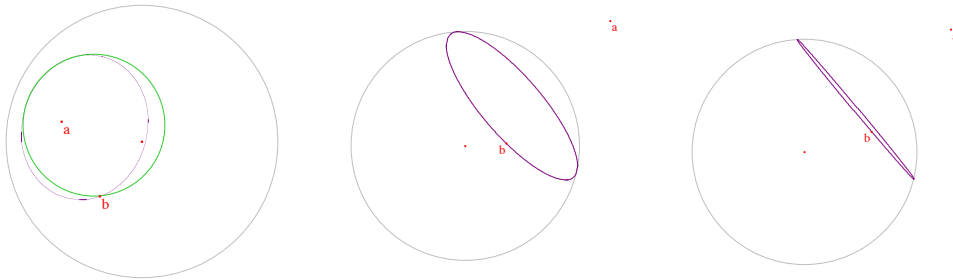


FIGURE 7.2 – Trois exemples de cercles  $\mathcal{C}(a, b)$  dans le plan hyperbolique étendu, à gauche le centre  $a$  est dans  $\mathbf{K}$  et  $\mathcal{C}(a, b)$  n'est pas un cercle euclidien, comme le montre le cercle témoin vert, au centre et à droite le centre est extérieur et presque orthogonal à  $b$  à droite

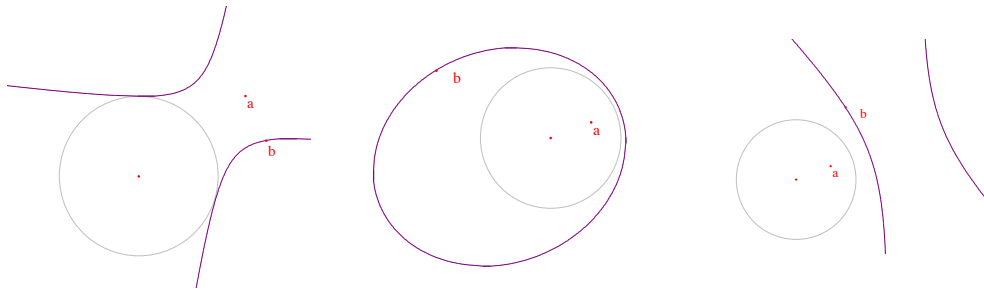


FIGURE 7.3 – Trois autres exemples de cercles  $\mathcal{C}(a, b)$  dans le plan hyperbolique avec des formes diverses (ellipse, hyperbole) et des contacts réels ou imaginaires avec  $\Gamma$ . Pour des exemples de cercles dans les modèles conformes, voir plus loin.

modèle affine non conforme du plan elliptique. Par exemple, avec  $a = (\alpha, 0, 1)$  et  $b = (0, 0, 1)$  on a la conique d'équation  $(\alpha^2 - 1)x^2 - y^2 + 2\alpha x - 1 = 0$  qui peut être une ellipse, une parabole ou une hyperbole selon la valeur de  $\alpha$ .

### Le groupe des isométries conservant un cercle

Nous commençons par une remarque d'apparence anodine :

**7.1.13 Proposition.** *On suppose  $k \neq \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_5$ . Soient  $a, b$  (resp.  $a', b'$ ) des points distincts, non isotropes et non orthogonaux. On suppose  $(ab)$  (resp.  $(a'b')$ ) non tangente à  $\Gamma$ . Alors, si les cercles  $\mathcal{C}(a, b)$  et  $\mathcal{C}(a', b')$  sont égaux, ils ont même centre.*

*Démonstration.* Les hypothèses assurent que les coniques associées aux cercles sont propres. Les cercles sont obtenus à partir de ces coniques en enlevant au plus deux points. Comme le cardinal du corps est  $> 6$ , les coniques ont donc

au moins 5 points communs, donc elles sont égales en vertu du théorème de Bézout (voir Partie III ??). Elles sont donc bitangentes à  $\Gamma$  en les mêmes points (éventuellement situés dans une extension quadratique). La droite qui joint les points de contact est la même pour les deux cercles et, comme c'est la polaire du centre, on a  $a = a'$ .

**7.1.14 Proposition.** *On suppose  $k \neq \mathbf{F}_3, \mathbf{F}_5$ . Soient  $a, b$  des points distincts, non isotropes et non orthogonaux. On suppose  $(ab)$  non tangente à  $\Gamma$ . Le groupe  $G_C$  des isométries conservant  $\mathcal{C}(a, b)$  est égal au groupe  $G_a$  des isométries conservant  $a$ . En particulier toutes les droites passant par  $a$  et non isotropes (les "diamètres du cercle") sont axes de symétrie de  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Il est clair que  $G_a$  est inclus dans  $G_C$  et la réciproque vient de 7.1.13.

**7.1.15 Remarque.** Les résultats de 7.1.13 et 7.1.14 sont faux sur  $\mathbf{F}_3$  et  $\mathbf{F}_5$  : il y a des cercles qui ont plusieurs centres<sup>7</sup> et dont les groupes d'isométries sont plus gros que  $G_a$ , voir exercices 7.5.1 et 7.5.2.

## 7.2 Intersections de droites et de cercles

### 7.2.1 Une droite et un cercle

Nous étudions d'abord le cas général de l'intersection d'un cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  et d'une droite  $D$  sur un corps quelconque. L'idée est d'obtenir une condition analogue à la condition euclidienne qui compare le rayon du cercle à la distance du centre à la droite (ou au projeté orthogonal  $n$  du centre sur la droite). Dans le cas présent, c'est l'invariant  $I$  qui va jouer le rôle de la distance et les quantités pertinentes sont donc  $I(a, b)$  et  $I(a, n)$ . Précisément, on a :

**7.2.1 Proposition.** *Soient  $a, b$  deux points distincts, non isotropes et non orthogonaux,  $\mathcal{C} := \mathcal{C}(a, b)$  le cercle de centre  $a$  passant par  $b$ ,  $V := V(P_{a,b})$  la conique support de  $\mathcal{C}$  et soit  $D$  une droite non isotrope, de pôle  $d$ . On suppose que  $a$  n'est pas orthogonal à  $D$  (i.e.  $a \neq d$ ) et on appelle  $n$  le projeté orthogonal de  $a$  sur  $D$ . On a les propriétés suivantes :*

- 1) *La droite  $D$  et le cercle  $\mathcal{C}$  ont au plus deux points communs.*
- 2) *Ils en ont exactement deux si la droite  $(ab)$  n'est pas tangente à  $\Gamma$  et si la quantité :*

$$\Delta(q)q(a)q(b)q(d) [I(a, n) - I(a, b)]$$

---

<sup>7</sup>. Voilà qui aurait fait plaisir à Palmiro Togliatti.



est un carré non nul de  $k$ . Si  $D$  passe par  $a$  la condition signifie que les droites  $D$  et  $(ab)$  sont de même nature vis-à-vis de  $q$  (i.e. que le discriminant de  $q$  est le même, modulo les carrés, en restriction à ces droites).

3) Ils ont un unique point commun dans deux cas :

- Si l'on a  $I(a, n) = I(a, b)$  et ce point est alors le point  $n$ . Si  $(ab)$  n'est pas tangente à  $\Gamma$ , la conique  $V$  est propre et la droite  $D$  est alors la tangente à  $V$  en  $n$  (au sens des coniques). On dit encore que  $D$  est **tangente** à  $\mathcal{C}$  en  $n$ . Il existe une unique tangente en chaque point  $n$  de  $\mathcal{C}$  ; elle est caractérisée comme la perpendiculaire à  $(an)$  en  $n$ .

Si  $(ab)$  est tangente à  $\Gamma$ ,  $V$  est la conique dégénérée formée des deux tangentes à  $\Gamma$  issues de  $a$ ,  $D$  passe par  $a$  et  $\mathcal{C} \cap D$  est le point double  $a$ .

- Si la droite  $(ad)$  est tangente à  $\Gamma$ . Dans ce cas, le point  $n$  est égal à  $a \wedge d$ , il est isotrope et c'est l'un des points d'intersection de  $D$  et de  $V$ . L'autre point d'intersection de  $D$  et  $V$  est un point non isotrope  $p$  et on a<sup>8</sup>  $\mathcal{C} \cap D = \{p\}$ .

4) Dans tous les autres cas,  $\mathcal{C} \cap D$  est vide.

*Démonstration.* Le fait que la droite et le cercle admettent au plus deux points d'intersection résulte du théorème de Bézout. En effet, si l'on travaille dans le plan  $\mathbf{P}(E)$ , la droite est une (vraie) droite projective et le cercle est une conique (peut-être privée de deux points). On sait (voir Partie III ??) qu'il y a alors au plus deux points d'intersection, sauf si la droite est incluse dans la conique (mais elle serait isotrope en vertu de 7.1.10.4) et que la droite est tangente au sens des coniques s'il y en a un seul.

Pour prouver le point 2), nous allons écrire un point  $m$  de  $D$  comme combinaison de deux points de  $D$  et le reporter dans l'équation du cercle. En général, il y a deux points remarquables sur  $D$  : le point  $n$ , intersection de  $D$  et de  $(ad)$ , et le point  $a \wedge d$ . Il faut toutefois prendre garde au cas où  $n$  et  $a \wedge d$  coïncident. Ce cas est exclu dans le point 2) en vertu du lemme suivant :

**7.2.2 Lemme.** *On reprend les notations et hypothèses de 7.2.1. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 1) on a  $n = a \wedge d$ ,
- 2) le point  $n$  est isotrope,
- 3) le point  $a \wedge d$  est isotrope,
- 4) la droite  $(ad) = (an)$  est tangente à  $\Gamma$  en  $n$ .

*Démonstration.* Le point  $n$  est sur  $(ad)$ , donc de la forme  $\lambda a + \mu d$ , et orthogonal à  $d$ , ce qui donne  $n = q(d)a - \varphi(a, d)d$ . Dire qu'il est égal à  $a \wedge d$

---

8. Car le point  $n$  étant isotrope est disqualifié.

signifie seulement qu'il est orthogonal à  $a$ . Cette condition, comme  $q(n) = 0$  ou  $q(a \wedge d) = 0$ , se traduit par  $q(d)q(a) = \varphi(a, d)^2$ , et cela signifie exactement que  $(ad)$  est une droite isotrope.

Revenons au point 2) de 7.2.1. On suppose  $(ad)$  non tangente à  $\Gamma$ , de sorte que les points  $n$  et  $a \wedge d$  sont deux points distincts et non isotropes de  $D$ . Un point  $m$  est dans l'intersection de  $D$  et  $\mathcal{C}$  s'il vérifie  $q(b)\varphi(a, m)^2 - q(m)\varphi(a, b)^2 = 0$ . On voit que  $a \wedge d$  n'est pas dans l'intersection et on peut donc chercher  $m$  sous la forme  $m = n + \mu(a \wedge d)$  avec  $\mu \in k$ . Posons  $\delta = q(a)q(d) - \varphi(a, d)^2$ . Un calcul facile donne  $\varphi(a, m) = \delta$  et  $q(m) = q(d)\delta + \mu^2\Delta(q)\delta$  et l'équation devient :

$$(q(b)\delta - q(d)\varphi(a, b)^2) = \mu^2\Delta(q)\varphi(a, b)^2.$$

Cette équation admet deux solutions distinctes si et seulement si la quantité :

$$\Delta(q)(q(a)q(b)q(d) - q(b)\varphi(a, d)^2 - q(d)\varphi(a, b)^2)$$

est un carré non nul. En utilisant l'invariant  $I$  et la formule  $1 - I(a, d) = I(a, n)$  de 4.5.15, on voit qu'il y a deux points d'intersection si et seulement si  $\Delta(q)q(a)q(b)q(d)(I(a, n) - I(a, b))$  est un carré non nul de  $k$  comme annoncé.

Si la droite  $D$  passe par  $a$ , on a  $\varphi(a, d) = 0$  et la condition d'existence de deux solutions est que  $\Delta(q)q(d)(q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2)$  soit un carré non nul. Comme  $\Delta(q)q(d)$  est le discriminant de  $q|_D$ , cela signifie exactement que les discriminants de  $q$  en restriction à  $D$  et  $(ab)$  sont égaux modulo les carrés, ou encore que ces droites sont de même nature.

Passons au point 3). Si la droite  $(ad)$  n'est pas tangente à  $\Gamma$ , le calcul précédent reste valable et il y a un point d'intersection unique si  $\mu = 0$  est solution, donc si on a  $I(a, n) = I(a, b)$  et le point en question est le point  $n$  (non isotrope). On notera que si  $D$  passe par  $a$  ce cas ne peut se produire que si  $(ab)$  est isotrope. En effet, on a alors  $a = n$  donc  $I(a, n) = 1$ , donc  $I(a, b) = 1$  et cela implique que  $(ab)$  est tangente à  $\Gamma$ . La conique  $\mathcal{C}$  est alors dégénérée, réunion des tangentes à  $\Gamma$  issues de  $a$  et  $D$  la coupe au point double  $a$  (c'est un cas de tangente généralisée, voir Partie III ??).

Réciproquement, si on prend un point  $n$  quelconque sur  $\mathcal{C}(a, b)$ , on a  $I(a, n) = I(a, b)$  et, si  $D$  est la perpendiculaire à  $(an)$  en  $n$ , on est dans le cas précédent et  $D$  est tangente à  $\mathcal{C}(a, b)$  en  $n$ .

Supposons maintenant  $(ad)$  tangente à  $\Gamma$ . Le point de contact  $n = a \wedge d$  est isotrope et vérifie l'équation de  $\mathcal{C}$ . C'est donc l'un des points de contact des coniques bitangentes  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  (voir 7.1.10). La droite  $D$  n'étant pas tangente à  $\Gamma$  n'est pas tangente non plus à  $\mathcal{C}$  et recoupe donc  $\mathcal{C}$  en un point  $p$ . Ce point n'est pas l'autre point de contact de  $\mathcal{C}$  et  $\Gamma$  (sinon,  $D$  serait égale à la polaire

de  $a$  contrairement à l'hypothèse). En définitive, l'intersection de  $\mathcal{C}$  et  $D$  est réduite<sup>9</sup> à  $p$ .

### 7.2.3 Remarques.

1) Si  $a$  et  $b$  sont orthogonaux, on sait que  $\mathcal{C}$  est une partie (comptée double) de la polaire de  $a$  (voir 7.1.6) et l'intersection avec  $D$  est vide ou un point double.

2) Si  $a$  et  $d$  sont orthogonaux, la droite  $D$  est la polaire de  $a$  par rapport à  $\Gamma$  et l'intersection de la conique  $V$  support de  $\mathcal{C}$  avec  $D$  est égale à  $D \cap \Gamma$  (voir 7.1.10). Comme elle ne contient que des points isotropes, on a  $\mathcal{C} \cap D = \emptyset$ .

3) Si la droite  $D$  est isotrope, donc aussi  $d$ , avec  $a, d$  non orthogonaux, le calcul mené pour le point 2) de 7.2.1 reste valable et on a deux ou zéro solutions selon que  $-\Delta(q)q(b)$  est ou non un carré.

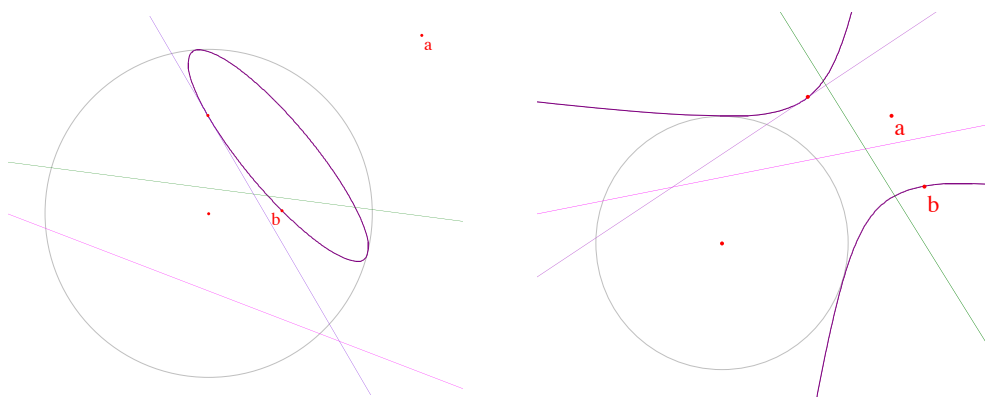


FIGURE 7.4 – Quelques exemples d'intersections de droites et cercles dans le plan hyperbolique étendu (le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  est en violet)

**7.2.4 Remarque.** Si le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  est porté par une conique propre et si  $m$  est un point du plan hors de  $\mathcal{C}$ , il y a zéro ou deux tangentes à  $\mathcal{C}$  issues de  $m$  (c'est un résultat général sur les coniques, voir Partie III ??).

### Les cas réels usuels (modèle de Klein et plan elliptique)

Dans les cas réels les plus usuels ( $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{K}$ ) on retrouve la même condition que dans le cas euclidien :

**7.2.5 Proposition.** On suppose  $k = \mathbf{R}$ . Soient  $a, b$  deux points distincts et non orthogonaux du plan elliptique  $\mathbf{E}$  (resp. du plan de Klein  $\mathbf{K}$ ),  $\mathcal{C}(a, b)$  le

9. On rappelle qu'on a exclu les isotropes de  $\mathcal{C}$ .

cercle de centre  $a$  passant par  $b$  et soit  $D$  une droite de  $\mathbf{E}$  (resp. une droite de  $\mathbf{K}$ ), de pôle  $d$ . On appelle  $n$  le projeté orthogonal de  $a$  sur  $D$  et on note  $an$  et  $ab$  les distances de  $a$  à  $n$  et  $b$ . Alors le cercle  $\mathcal{C}$  et la droite  $D$  admettent deux, un ou zéro points communs selon que l'on a  $an < ab$ ,  $an = ab$  ou  $an > ab$  respectivement.

*Démonstration.* En effet, dans le cas elliptique (resp. hyperbolique) la quantité  $q(a)q(b)q(d)\Delta(q)$  est positive (resp. négative) et la condition de la proposition 7.2.1 se résume à  $I(a, n) > I(a, b)$  (resp.  $I(a, n) < I(a, b)$ ). Comme on a  $I(a, b) = \cos^2 ab$  (resp.  $I(a, b) = \operatorname{ch}^2 ab$ ) (voir 5.1.7 et 5.1.14) la conclusion vient du fait que la fonction cosinus (resp. cosinus hyperbolique) est décroissante (resp. croissante).

**7.2.6 Remarque.** Dans le cas hyperbolique, lorsque les points ne sont pas dans  $\mathbf{K}$ , le lecteur examinera divers cas selon les positions des points  $a, b$  et de la droite  $D$ . Par exemple, si  $a, b, D$  sont extérieurs, la condition pour que le cercle et la droite se coupent en deux points est, au contraire,  $I(a, n) > I(a, b)$ . D'une manière générale, l'inégalité change de sens chaque fois qu'on change la nature des points  $a, b, d$ .

Notons le résultat suivant qui concerne l'intersection d'un cercle avec les demi-droites issues de son centre :

**7.2.7 Proposition.** *Le corps de base est toujours  $\mathbf{R}$ . Soit  $a$  un point non isotrope, soient  $b$  et  $c$  des points distincts de  $a$ , non isotropes, non orthogonaux, tels que les droites  $(ab)$  et  $(ac)$  soient toutes deux anisotropes ou toutes deux hyperboliques. Alors, la demi-droite  $[ac)$  coupe  $\mathcal{C}(a, b)$  en un unique point.*

*Démonstration.* On note  $a'$  le point conjugué de  $a$  sur  $(ac)$ . On pose  $c = \lambda a + \mu a'$  (avec  $\lambda, \mu \neq 0$ ) et on cherche  $m = xa + a'$  dans  $[a, c[$  (en vertu de 5.4.3 cela signifie que  $\lambda\mu$  et  $x$  sont de même signe) et dans  $\mathcal{C}(a, b)$ . Cela donne la condition  $x^2 q(a)(q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2) = q(a')\varphi(a, b)^2$ . Mais,  $q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$  (resp.  $q(a)q(a')$ ) est le discriminant de  $q$  restreinte à  $(ab)$  (resp. à  $(aa') = (ac)$ ) et ces nombres sont de même signe par hypothèse, de sorte qu'on a deux solutions pour  $x$ , dont une seule de signe convenable.

**7.2.8 Remarque.** On notera que la condition sur les droites est automatique sauf, dans le cas hyperbolique, si le point  $a$  est extérieur.

## 7.2.2 Intersections de deux cercles

Les résultats obtenus ci-dessus en ce qui concerne l'intersection d'un cercle et d'une droite n'ont sans doute pas vraiment surpris le lecteur : deux points

d'intersection au plus, la possibilité de tangence, etc., rien que de très normal, en somme. Les intersections de cercles lui réservent plus de surprises, notamment dans le cas elliptique réel, où il va y avoir parfois 4 points d'intersection pour deux cercles.

**7.2.9 Proposition.** *Soient  $a, b$  (resp.  $a', b'$ ) deux points distincts non isotropes et non orthogonaux,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(a, b)$  (resp.  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(a', b')$ ) le cercle de centre  $a$  (resp.  $a'$ ) passant par  $b$  (resp.  $b'$ ). On suppose que les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont distincts. Alors, leur intersection est formée d'au plus quatre points, sauf si les droites  $(ab)$ ,  $(a'b')$  et  $(aa')$  sont toutes trois tangentes à  $\Gamma$ , auquel cas les cercles sont des coniques décomposées et leur intersection est la droite  $(aa')$ .*

*Démonstration.* Si l'un au moins des cercles est une conique propre de  $\mathbf{P}(E)$ , cela résulte du théorème de Bézout, Partie III, ???. Sinon, on est dans le cas où les droites  $(ab)$  et  $(a'b')$  sont tangentes à  $\Gamma$ , les cercles étant alors formés par les deux tangentes issues de  $a$  (resp.  $a'$ ), voir 7.1.10. Dire qu'il y a une composante commune, c'est dire qu'une tangente issue de  $a$  est égale à une tangente issue de  $a'$  : c'est la droite  $(aa')$  ( $a$  et  $a'$  sont distincts sinon les coniques sont égales).

**7.2.10 Remarques.** Nous discutons ici le nombre de points d'intersection de deux cercles en supposant que les coniques associées sont propres (i.e.  $(ab)$  n'est pas tangent à  $\Gamma$ ).

1) Tout d'abord, la question du corps de base est cruciale. En effet, si  $k$  est algébriquement clos, l'intersection est non vide. Plus précisément, elle est formée de quatre points, pourvu qu'on compte les points à l'infini et les multiplicités, voir Partie III ??? ou [Per95].

2) Sur le corps des réels il se peut que l'intersection soit vide. Cela se produit dans deux cas au moins. Si l'on est en hyperbolique et si  $b$  est dans  $\mathbf{K}$  et  $b'$  dans  $\mathbf{T}$ , il est clair que les cercles sont disjoints. En effet, un point  $m$  (resp.  $m'$ ) de  $\mathcal{C}(a, b)$  (resp.  $\mathcal{C}(a', b')$ ) vérifie  $q(m) = q(b)$  (resp.  $q(m') = q(b')$ ) modulo les carrés et il est donc dans  $\mathbf{K}$  (resp. dans  $\mathbf{T}$ ). De manière moins triviale, que l'on soit en hyperbolique dans  $\mathbf{K}$  ou en elliptique, si on note  $R = ab$ ,  $R' = a'b'$  les rayons des cercles et  $\delta = aa'$  la distance des centres, on voit aussitôt, avec la caractérisation "ordinaire" de 7.1.3, que si on a  $\delta < |R - R'|$  ou  $\delta > R + R'$ , l'intersection des cercles est vide (c'est l'inégalité triangulaire). On notera que le résultat est le même qu'en géométrie euclidienne.

3) Si l'intersection est réduite à un point  $n$ , ce point est sur la droite des centres  $(aa')$ . En effet, on a vu en 7.1.14 que toute droite passant par le centre d'un cercle est axe de symétrie pour ce cercle. La droite  $(aa')$  est donc un axe de symétrie commun pour  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ , donc pour leur intersection. Si  $n$  n'est pas sur l'axe, son symétrique  $n'$  est aussi sur l'intersection et distinct

de  $n$  et l'intersection a donc deux points au moins. Si les coniques supports des cercles sont propres<sup>10</sup>, la perpendiculaire à  $(aa')$  en  $n$  est tangente à la fois à  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  (voir 7.2.1), et les deux cercles sont tangents en  $n$  au sens des coniques, voir Partie III ??.

4) Dans le cas hyperbolique réel, les choses sont différentes selon que les cercles sont dans  $\mathbf{K}$  ou dans  $\mathbf{T}$ . Dans  $\mathbf{K}$  la situation est identique à celle de la géométrie euclidienne : deux cercles se coupent en 0, 1 ou 2 points.

Le plus simple pour le prouver est de regarder le cas du modèle  $\mathbf{D}$  de Poincaré dans lequel les cercles hyperboliques sont des cercles euclidiens, voir 7.4.9. En revanche, pour des cercles extérieurs, le nombre de points d'intersection peut varier entre 0 et 4, voir figure 7.5.

5) Dans le cas elliptique, tous les cas sont possibles (de 0 à 4 points d'intersection), voir figure 7.6.

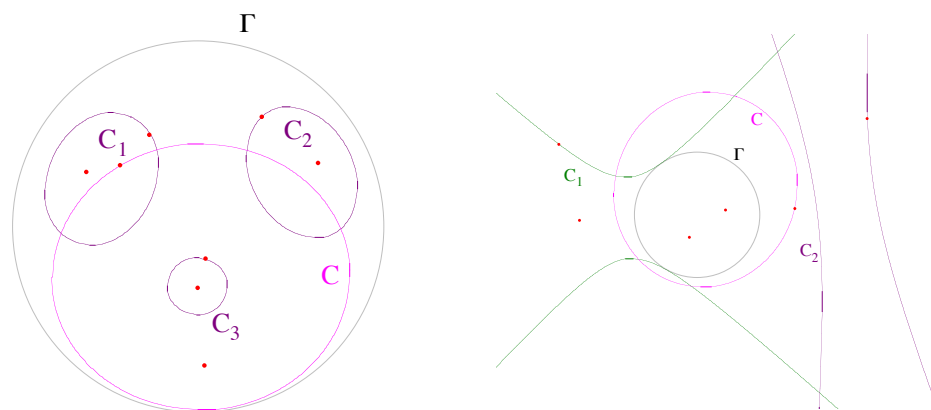


FIGURE 7.5 – Quelques exemples d'intersections de cercles dans le plan hyperbolique étendu

### 7.2.3 Application : construction des médiatrices “à la règle et au compas”

En géométrie euclidienne, la médiatrice de  $a, b$  s'obtient en joignant les points d'intersection des cercles  $\mathcal{C}(a, b)$  et  $\mathcal{C}(b, a)$ . La même construction peut être envisagée en géométrie non euclidienne, mais elle présente parfois quelques difficultés inattendues. Bien entendu, l'expression “à la règle

10. On vérifie que sinon l'intersection ne peut être réduite à un point.

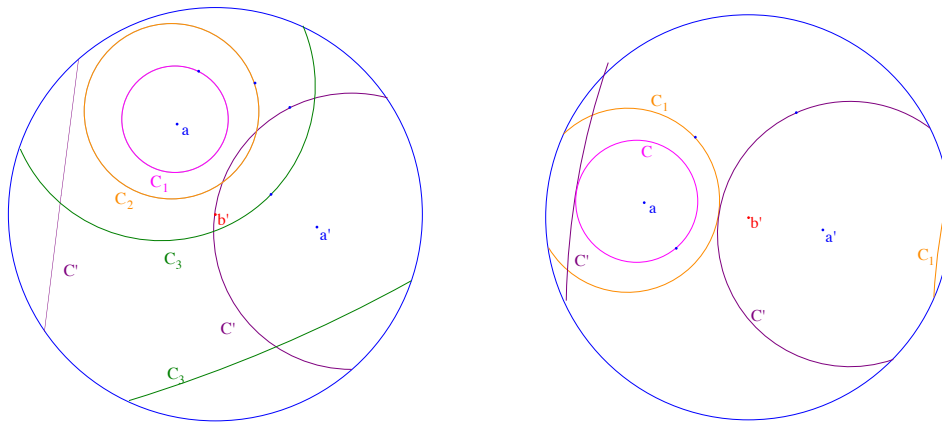


FIGURE 7.6 – Quelques exemples d’intersections de cercles dans le plan elliptique, à gauche les cercles  $C_i$  coupent  $C'$  (qui est en deux morceaux) en 0, 2 ou 4 points, à droite en 1 ou 3 points.

et au compas” signifie ici : en utilisant des intersections de droites et des cercles, même si les cercles en question ne sont pas – en général – des cercles euclidiens.

**7.2.11 Proposition.** *On suppose  $a, b$  distincts, non isotropes et non orthogonaux.*

1) *En géométrie hyperbolique, les cercles  $\mathcal{C}(a, b)$  et  $\mathcal{C}(b, a)$  ont au plus deux points communs, de sorte qu’on ne peut construire qu’une au plus des médiatrices de  $a, b$ .*

2) *En géométrie elliptique, les cercles  $\mathcal{C}(a, b)$  et  $\mathcal{C}(b, a)$  ont 2, 3 ou 4 points communs selon que  $\alpha = ab$  est plus petit que  $\pi/3$ , égal ou plus grand. Lorsque les cercles ont deux points d’intersection, la droite qui les joint est une médiatrice. Lorsqu’ils en ont quatre,  $p, q, r, s$ , les médiatrices de  $a, b$  sont obtenues en joignant les diagonales du quadrilatère  $prqs$  (i.e.  $p, q$  et  $r, s$ ) et les côtés de  $prqs$  se coupent sur  $(ab)$ .*

*Démonstration.* 1) Le résultat a été évoqué en 7.2.10.4 dans le cas où  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbf{K}$ . S’ils sont dans  $\mathbf{T}$ , il y a deux cas de figure<sup>11</sup>. Si la droite  $(ab)$  est hyperbolique, on peut supposer  $a = (1, 0, 0)$  et  $b = (\operatorname{ch} \alpha, 0, \operatorname{sh} \alpha)$ . On voit que les intersections des cercles sont les intersections de l’un d’eux avec les médiatrices (définies par  $\varphi(b + \epsilon a, m) = 0$  avec  $\epsilon = \pm 1$ ). Un calcul facile montre que, pour  $\epsilon$  fixé, il y a deux points d’intersection si et seulement si la quantité  $2\epsilon \operatorname{ch}^3 \alpha + 3\operatorname{ch}^2 \alpha - 1$  est positive. C’est toujours vrai pour  $\epsilon = 1$  et jamais pour  $\epsilon = -1$ . Il y a donc exactement deux points d’intersection pour les cercles et une médiatrice qui les joint.

11. Nous laissons en cadeau au lecteur le cas où  $(ab)$  est isotrope.

Si la droite  $(ab)$  est extérieure, on peut supposer  $a = (1, 0, 0)$  et  $b = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ ,  $\alpha \in [0, \pi]$ . Le calcul est analogue et on montre qu'il y a deux points d'intersection si  $2\epsilon \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha - 1$  est positif. On vérifie que pour  $\epsilon = 1$  (resp.  $\epsilon = -1$ ) c'est vrai pour  $\alpha < \pi/3$  (resp.  $\alpha > 2\pi/3$ ). Il y a donc au plus deux points d'intersection et s'il y en a deux on obtient une médiatrice en joignant ces points<sup>12</sup>, sinon, la construction ne fonctionne pas.

2) Dans le cas elliptique, on peut supposer  $a = (1, 0, 0)$  et  $b = (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)$ , avec  $\alpha \in ]0, \pi/2[$ . Les équations des cercles sont alors les suivantes :  $-\sin^2 \alpha x^2 + \cos^2 \alpha y^2 + \cos^2 \alpha t^2 = 0$  et  $-2 \cos \alpha \sin \alpha xt + \cos^2 \alpha y^2 + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)t^2 = 0$ . On peut supposer  $t = 1$ . Par différence on obtient une équation du second degré en  $x$  qui admet pour solutions  $x = \frac{\cos \alpha + \epsilon}{\sin \alpha}$  et en reportant on obtient  $y^2 \cos^2 \alpha = 1 + 2\epsilon \cos \alpha$ . On voit que, pour  $\epsilon = 1$ , il y a toujours deux solutions, mais que pour  $\epsilon = -1$  le partage se fait lorsque  $\cos \alpha$  vaut  $1/2$ .

Il reste à montrer la dernière assertion. Notons  $m, n$  les milieux de  $a, b$ , intersections de  $(ab)$  avec  $(pq)$  et  $(rs)$  respectivement et soit  $o$  le point d'intersection de ces droites. Comme  $(pq)$  (resp.  $(rs)$ ) est l'orthogonal de  $n$  (resp.  $m$ ),  $o$  est le pôle de  $(mn)$ , ou encore de  $(ab)$ , par rapport à la conique (imaginaire)  $\Gamma$ . Les points  $o$  et  $m$  sont donc conjugués par rapport à  $\Gamma$ . Par ailleurs, comme  $m$  est sur  $(ab)$ , ils sont aussi conjugués par rapport à la droite double  $(ab)^2$  (car le noyau de la forme quadratique associée est justement  $(ab)$ ). Il en résulte (voir Partie III) que  $o$  et  $m$  sont conjugués par rapport à toutes les coniques du pinceau défini par  $\Gamma$  et  $(ab)^2$  et notamment par rapport à  $\mathcal{C}(a, b)$  et  $\mathcal{C}(b, a)$ . Comme les points d'intersection de  $\mathcal{C}(a, b)$  avec  $(om)$  sont  $p$  et  $q$ , on a donc  $\llbracket o, m, p, q \rrbracket = -1$  et, de même,  $\llbracket o, n, r, s \rrbracket = -1$ . Cela signifie que la polaire de  $o$  par rapport aux deux droites  $(pr)$  et  $(qs)$  (resp.  $(ps)$  et  $(qr)$ ) n'est autre que  $(mn) = (ab)$ . Mais alors, si on désigne par  $i, j$  les intersections de  $(pr)$  et  $(qs)$  et de  $(ps)$  et  $(qr)$  respectivement, la construction de la polaire (voir Partie I ??) montre que  $i$  et  $j$  sont sur  $(ab)$ .

## 7.3 Horicycles

Nous allons étendre la définition des cercles  $\mathcal{C}(a, b)$  au cas où les points  $a, b$  peuvent être isotropes. L'exercice 4.7.4 montre qu'il faut adapter l'idée initiale dans ce cas. En effet, le groupe des isométries qui fixent un point isotrope est trop transitif. Par exemple, dans le cas hyperbolique réel le résultat de 4.7.4 s'applique, pour  $a = a' \in \Gamma$ , lorsque  $b$  et  $b'$  sont deux points de  $\mathbf{K}$ .

12. Dans les cas limites comme  $\epsilon = 1$  et  $\alpha = \pi/3$ , les cercles sont tangents et la médiatrice cherchée est la tangente commune.



La figure ci-contre est réalisée dans le plan elliptique conforme. Le cercle de centre  $a$  (resp.  $b$ ) est la réunion des deux arcs verts (resp. violets). Les médiatrices de  $a, b$  sont en rose.

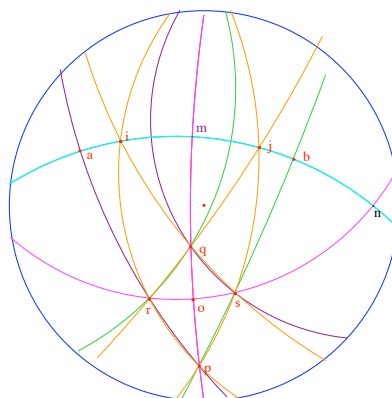


FIGURE 7.7 – La construction des médiatrices de  $a, b$  dans le plan elliptique conforme

Autrement dit, le cercle de centre  $a$  passant par  $b$  (si on le définit au sens de l'action de groupes comme ci-dessus) est égal à  $\mathbf{K}$  tout entier !

En fait, le groupe adapté à la situation est le groupe  $G_a^+$  des déplacements parallèles vu en 1.4.28 : groupe formé des transformations qui fixent non seulement le point  $a$  mais aussi ses représentants vectoriels. En effet, on a la proposition suivante qui montre que les orbites sous ce groupe ont encore une équation du type (\*) de 7.1.1 :

**7.3.1 Proposition-Définition.** Soient  $a \in \Gamma$  un point isotrope de  $\mathbf{P}(E)$  et soient  $b$  et  $m$  deux points de  $\mathbf{P}(E)$  distincts de  $a$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i)* il existe  $g \in G_a^+$  tel que  $g(b) = m$ ,
- ii)* on a  $P_{a,b}(m) = q(b)\varphi(a, m)^2 - q(m)\varphi(a, b)^2 = 0$ .

L'ensemble des points  $m$  vérifiant les conditions précédentes est appelé<sup>13</sup> **horicycle** de centre  $a$ , passant par  $b$ , et il est noté  $\mathcal{H}(a, b)$ . Il est égal à la conique  $V(P_{a,b})$  privée du point  $a$ .

*Démonstration.* Supposons la condition *i)* réalisée. Il existe alors des représentants des points  $a, b, m$ , notés encore  $a, b, m$  et  $g \in O(q)$  tels que l'on ait  $g(a) = a$  (par définition de  $G_a^+$ ) et  $g(b) = m$ . On a alors  $q(b) = q(m)$  et  $\varphi(a, b) = \varphi(a, m)$  d'où l'égalité  $P_{a,b}(m) = 0$ .

Réciproquement, supposons *ii)* réalisée. Choisissons des représentants  $a, b, m$  des points. Notons d'abord que, comme  $b$  est différent de  $a$ ,  $q(b)$  et  $\varphi(a, b)$  ne sont pas tous deux nuls (sinon le plan vectoriel  $(a, b)$  serait totalement isotrope). Le même argument vaut aussi pour  $m$ .

13. D'autres disent *horocycle*. On appelle aussi parfois *transformations horicycliques* ou *horocycliques* les déplacements parallèles.

Supposons d'abord  $\varphi(a, b)$  et  $q(b)$  non nuls. La remarque précédente montre que  $q(m)$  et  $\varphi(a, m)$  aussi sont non nuls (sinon ils le seraient tous les deux). On a alors  $q(m) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Quitte à changer  $m$  en  $\lambda m$  on peut donc supposer  $q(m) = q(b) \neq 0$ . On en déduit  $\varphi(a, m)^2 = \varphi(a, b)^2$  et quitte à changer éventuellement  $m$  en  $-m$  on peut supposer qu'on a  $\varphi(a, m) = \varphi(a, b)$ . Mais alors, en vertu du théorème de Witt (voir 4.1.3), il existe  $g \in O(q)$  tel que  $g(a) = a$  et  $g(b) = m$  et  $g$  est bien dans  $G_a^+$ .

Supposons  $q(b) = 0$ . Comme  $\varphi(a, b)$  est non nul, on en déduit  $q(m) = 0$  et, quitte à changer  $m$  en  $\lambda m$ , on peut supposer  $\varphi(a, m) = \varphi(a, b)$ . On conclut encore par 4.1.3.

Enfin, si  $\varphi(a, b)$  est nul, on a aussi  $\varphi(a, m) = 0$ , de sorte que  $m$  est dans le plan  $(a, b) = a^\perp$ . Comme ce plan est de rang 1, les valeurs non nulles de  $q$  sur ce plan sont toutes égales dans  $k^*/k^{*2}$ . Quitte à changer  $m$  en  $\lambda m$ , on peut supposer  $q(b) = q(m)$  et on conclut comme précédemment.

### 7.3.2 Remarques.

- 1) Dans le cas  $q(b) = 0$ , avec  $b \neq a$ ,  $V(P_{a,b})$  est égal à  $\Gamma$ .
- 2) Dans le cas  $\varphi(a, b) = 0$ , avec  $b$  non isotrope,  $V(P_{a,b})$  est la polaire de  $a$ , c'est-à-dire encore la tangente en  $a$  à  $\Gamma$  (définie par  $\varphi(a, m)^2 = 0$  donc une droite "double").

**7.3.3 Proposition.** *Soit  $a$  un point de  $\Gamma$  et  $b$  un point non isotrope et non orthogonal à  $a$ . La conique  $V(P_{a,b})$  contenant  $\mathcal{H}(a, b)$  est une conique propre, surosculatrice à  $\Gamma$  en  $a$ . Toute conique surosculatrice à  $\Gamma$  en  $a$ , privée de  $a$ , est un horicycle de centre  $a$ .*

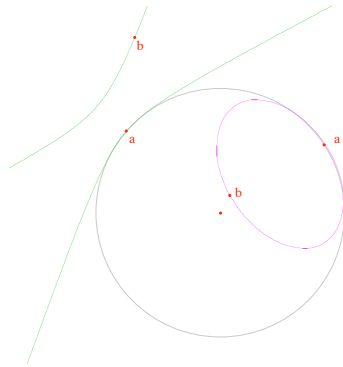


FIGURE 7.8 – Deux horicycles du plan hyperbolique étendu, l'un intérieur, l'autre extérieur

*Démonstration.* Les conditions assurent que  $P_{a,b}$  est une forme quadratique non nulle. Elle définit donc une conique, qui passe par  $a$ . L'intersection de

cette conique et de  $\Gamma$  est égale à l'intersection de  $\Gamma$  et de la droite double  $\varphi(a, m)^2$ . Comme cette droite est tangente, on voit que l'intersection est un point quadruple, de sorte que les coniques sont surosculatrices. La seule conique impropre du pinceau est la tangente double, voir Partie III ???. Ce cas correspond à  $a$  et  $b$  orthogonaux et il est donc exclu, de sorte que  $\mathcal{H}(a, b)$  est une conique propre.

Réciproquement, si on a une conique  $C$  surosculatrice en  $a$  et si on prend  $b \in C$ ,  $C$  a une équation de la forme  $\lambda q(m) + \mu \varphi(a, m)^2$  et en écrivant que  $C$  passe par  $b$  on obtient les coefficients voulus à un scalaire près.

## 7.4 Le cas des géométries réelles

### 7.4.1 La géométrie elliptique

Si l'on travaille dans  $\mathbf{E} = \mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  il n'y a rien à changer au discours précédent : les cercles sont des coniques bitangentes à la conique (imaginaire)  $\Gamma$  en des points (imaginaires). Pour une prise en compte d'une droite à l'infini, voir exercice 7.5.5. Dans le modèle conforme **KE** (le disque avec les points diamétralement opposés identifiés), les cercles sont plus compliqués<sup>14</sup>, notamment à cause de l'identification des points antipodes du bord. On commence par décrire les cercles de la sphère :

**7.4.1 Proposition.** *Soient  $a, b$  deux points de la sphère  $\mathbf{S}^2$ . On note  $\delta$  la distance sur la sphère (voir 5.1.3) et on pose  $R = \delta(a, b)$ . L'ensemble des points  $m$  de  $\mathbf{S}^2$  qui vérifient  $\delta(a, m) = R$  (le cercle de centre  $a$  et de rayon  $R$  pour la géométrie sphérique) est la trace sur  $\mathbf{S}^2$  d'un plan. C'est donc un cercle euclidien.*

*Démonstration.* Comme la distance est invariante par isométrie, on peut supposer  $a = (0, 0, 1)$ . Si on écrit  $b$  sous la forme  $(\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta)$ , avec  $\alpha, \beta \in [0, \pi]$  et  $m = (x, y, t)$ , on trouve  $\delta(a, b) = \beta$  et  $\delta(a, m) = \text{Arccos } t$ . Le cercle est donc la trace sur la sphère du plan  $t = \cos \beta$  et c'est un cercle euclidien de rayon  $\sin \beta$ .

On regarde ensuite l'image réciproque d'un cercle de  $\mathbf{E}$  dans  $\mathbf{S}^2$  :

**7.4.2 Proposition.** *Soient  $a, b$  deux points de  $\mathbf{E}$ . On désigne par  $d$  la distance dans  $\mathbf{E}$  et on pose  $R = d(a, b)$ . Rappelons qu'on a  $R \leq \pi/2$ . Soit  $\hat{a}$  l'un des antécédents de  $a$  dans  $\mathbf{S}^2$  (par exemple celui de l'hémisphère nord).*

14. Bien entendu, la complication vient du modèle qui nous limite au disque. Les choses seraient conceptuellement plus simples si l'on travaillait dans tout le plan, avec plus d'identifications.

L'image réciproque du cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  dans  $\mathbf{S}^2$  est la réunion des deux cercles (au sens de 7.4.1)  $C^+$  et  $C^-$  de centres  $\hat{a}$  et  $-\hat{a}$  et de rayon  $R$ . Ces cercles sont antipodes, ils sont disjoints si  $R$  est strictement plus petit que  $\pi/2$  et sont tous deux égaux au grand cercle orthogonal à  $\hat{a}$  si  $R$  est égal à  $\pi/2$ . Si on note  $\hat{n}$  le pôle nord de  $\mathbf{S}^2$ , n son image dans  $\mathbf{E}$  et  $\Gamma_0$  le cercle équatorial, les cercles  $C^+$  et  $C^-$  rencontrent  $\Gamma_0$  si et seulement si on a, dans  $\mathbf{E}$ ,  $d(n, a) + d(a, b) \geq \pi/2$ .

*Démonstration.* Soit  $m$  un point de  $\mathcal{C}(a, b)$  et soit  $\hat{m}$  un point de la sphère qui se projette sur  $m$ . On a  $d(a, m) = R$ . On utilise la formule 2) de 5.1.7 :  $d(a, m) = \text{Min}(\delta(\hat{a}, \hat{m}), \delta(-\hat{a}, \hat{m}))$ . On voit que  $\hat{m}$  vérifie  $\delta(\hat{a}, \hat{m}) = R$  ou  $\delta(-\hat{a}, \hat{m}) = R$ , autrement dit,  $\hat{m}$  est sur l'un des cercles de rayon  $R$  et de centre  $\hat{a}$  ou  $-\hat{a}$ . Si  $\hat{m}$  est dans l'intersection de ces cercles on a  $\pi = \delta(\hat{a}, -\hat{a}) \leq \delta(\hat{a}, \hat{m}) + \delta(\hat{m}, -\hat{a}) = 2R$  et cela n'est possible que dans le cas  $R = \pi/2$ . Dans ce cas, les deux cercles sont égaux au cercle équatorial orthogonal à  $\hat{a}$ .

Si ce n'est pas le cas, les deux cercles sont disjoints et antipodes. Si  $\hat{m}$  est, disons, dans le cercle de centre  $\hat{a}$  et se projette en  $m$ , on a  $\delta(-\hat{a}, \hat{m}) \geq \pi - \delta(\hat{a}, \hat{m}) = \pi - R > R$  et on en déduit  $d(a, m) = \delta(\hat{a}, \hat{m}) = R$ , ce qui montre que  $m$  est dans  $\mathcal{C}(a, b)$ .

Montrons la dernière assertion. Supposons d'abord  $d(n, a) + d(a, b) < \pi/2$  et soit  $\hat{m} \in C^+$  relevant  $m \in \mathcal{C}(a, b)$ . On a  $\delta(\hat{n}, \hat{m}) \leq \delta(\hat{n}, \hat{a}) + \delta(\hat{a}, \hat{m}) = d(n, a) + d(a, m) = d(n, a) + d(a, b) < \pi/2$ , de sorte que  $\hat{m}$  est strictement dans l'hémisphère nord. Inversement, si on suppose  $d(n, a) + d(a, b) \geq \pi/2$ , il s'agit de voir que  $C^+$  rencontre  $\Gamma_0$ . C'est évident si  $a$  et  $n$  coïncident. Sinon, on considère le grand cercle joignant  $\hat{n}$  et  $\hat{a}$  et son demi grand cercle d'extrémité  $\hat{a}$  qui ne contient pas  $\hat{n}$ . Il contient un point  $\hat{m}$  qui vérifie  $\delta(\hat{a}, \hat{m}) = d(a, b)$ . Comme les points  $\hat{n}, \hat{a}, \hat{m}$  sont sur un grand cercle et dans cet ordre, on a  $\delta(\hat{n}, \hat{m}) = \delta(\hat{n}, \hat{a}) + \delta(\hat{a}, \hat{m}) = d(a, n) + d(a, b) \geq \pi/2$  et cela montre que  $\hat{m}$  est dans l'hémisphère sud. Le disque euclidien limité par  $C^+$  est convexe. Son centre est sur le rayon joignant le centre de la sphère à  $\hat{a}$ . Il est donc dans l'hémisphère nord. Cela montre que  $C^+$  a des points dans l'hémisphère nord. Comme il contient aussi le point  $\hat{m}$  dans l'hémisphère sud, le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il a un point sur l'équateur.

L'étape suivante est de regarder l'image des cercles de  $\mathbf{S}^2$  par la projection stéréographique  $p : \mathbf{S}^2 \rightarrow \hat{P} = P \cup \{\infty\}$  (voir 2.3.1 et 2.3.2) :

**7.4.3 Proposition.** *On reprend les notations de la proposition précédente. L'image des cercles  $C^+$  et  $C^-$  par la projection stéréographique est la réunion de deux cercles euclidiens  $\mathcal{C}^+$  et  $\mathcal{C}^-$  de  $\hat{P}$  (ou d'un cercle et une droite si le pôle sud est sur  $C^-$ ), disjoints (sauf si  $R = \pi/2$ ) et échangés par l'antipodie elliptique  $\varepsilon$  (voir 2.3.5). Ces cercles rencontrent le cercle unité si et seulement si on a  $d(n, a) + d(a, b) \geq \pi/2$ .*

*Démonstration.* Le fait que l'image d'un cercle de  $\mathbf{S}^2$  soit un cercle de  $P$  (sauf si le cercle passe par le pôle sud) est évident avec les formules donnant  $p^{-1}$  (voir la preuve de 2.3.2). Comme  $p$  est bijective, qu'elle envoie l'équateur sur le cercle unité, et que l'antipodie elliptique  $\varepsilon$  est la conjuguée par  $p$  de l'antipodie de  $\mathbf{S}^2$ , le reste est immédiat.

On peut maintenant préciser l'allure des cercles du modèle **KE** :

**7.4.4 Proposition.** Soient  $a, b \in \mathbf{KE}$ . On note  $o$  le centre du disque. Le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  est un cercle euclidien passant par  $b$  si  $d(o, a) + d(a, b) \leq \pi/2$  ou la réunion de deux arcs de cercles euclidiens dont l'un contient  $b$  sinon.

*Démonstration.* Le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  est réunion des traces des deux cercles  $\mathcal{C}^+$  et  $\mathcal{C}^-$  sur **KE**. Comme l'antipodie elliptique échange l'intérieur et l'extérieur du disque, il y a deux cas : soit  $\mathcal{C}^+$  est contenu dans **KE** (et  $\mathcal{C}^-$  est alors extérieur), soit tous deux coupent le disque et leurs traces sont deux arcs de cercle.

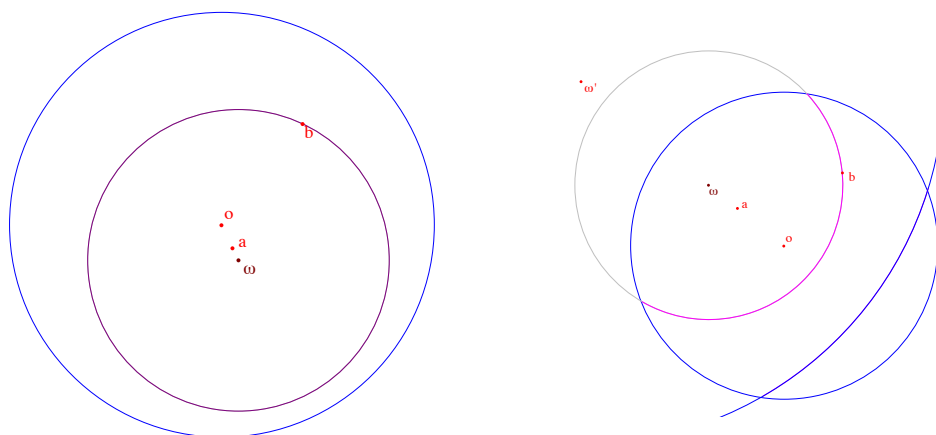


FIGURE 7.9 – Deux aspects du cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  dans **KE**. À gauche on a un cercle euclidien de centre  $\omega$ , à droite deux arcs de cercles euclidiens de centres  $\omega$  et  $\omega'$

#### 7.4.5 Remarques.

1) Une autre preuve de 7.4.4 consiste à traiter d'abord le cas  $a = o$  où l'on trouve le cercle euclidien de centre  $o$  passant par  $b$ . Dans le cas général, il existe une symétrie  $\tau_D$ , par rapport à une droite elliptique  $D$ , qui transforme  $a$  en  $o$  et  $b$  en  $b'$ . Notons  $\widehat{D}$  le support<sup>15</sup> de  $D$ . Le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  est donc l'image

<sup>15</sup>. Nous parlerons du cercle  $\widehat{D}$ , mais cela peut être parfois une droite ; l'inversion correspondante est alors une symétrie axiale.

par  $\tau_D$  du cercle euclidien  $\mathcal{C}(o, b')$ . Vu la description de  $\tau_D$  (voir 2.3.4), on commence par regarder le cercle  $\mathcal{C}'$ , image de  $\mathcal{C}(o, b')$  par l'inversion de cercle  $\widehat{D}$ . Si ce cercle est entièrement contenu dans  $\mathbf{KE}$  il est égal à  $\mathcal{C}(a, b)$ . Sinon, le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  est formé de l'arc de cercle intersection de  $\mathcal{C}'$  et du disque et de l'image de l'autre arc (intersection avec l'extérieur du disque) par l'antipodie elliptique.

2) La description précédente permet de préciser les centres du cercle ou des arcs de cercle.

## 7.4.2 La géométrie hyperbolique : le modèle de Klein

Ce cas est nettement plus complexe. En effet, il y a, *a priori*, neuf types de cercles dans le plan hyperbolique  $\mathbf{P}(E)$  selon la position de  $a$  (resp.  $b$ ) dans  $\mathbf{K}$ ,  $\Gamma$ ,  $\mathbf{T}$ . Tous ces cas offrent un réel intérêt, cependant les plus classiques sont les cercles formés de points de  $\mathbf{K}$ . Parmi ceux-ci, les plus pittoresques sont ceux dont le centre est extérieur :

**7.4.6 Proposition-Définition.** *Soit  $a$  un point de  $\mathbf{T}$ ,  $A$  sa polaire et soit  $b \in \mathbf{K}$ . Le "cercle"  $\mathcal{C}(a, b)$  est contenu dans  $\mathbf{K}$ . C'est une conique, bitangente à  $\Gamma$  en les points de  $A \cap \Gamma$ . Les points  $m$  de  $\mathcal{C}(a, b)$  sont tous à même distance de  $A$  (au sens de 5.3.1). On dit que  $\mathcal{C}(a, b)$  est l'équidistante à  $A$  passant par  $b$  et on la note plutôt  $\mathcal{E}(A, b)$ .*

*Démonstration.* La distance de  $m$  à  $A$  est la distance de  $m$  à son projeté orthogonal  $n \in A$ . Elle correspond donc à  $I(m, n)$ . Or, on a vu la formule  $I(m, a) + I(m, n) = 1$  (voir 4.5.15), d'où la conclusion.

On sait, en vertu de 3.4.9 et 5.4.15, qu'un triangle de  $\mathbf{K}$  admet trois médiatrices intrinsèques, qui sont des droites hyperboliques, et trois médiatrices extrinsèques, qui sont des droites extérieures. On obtient ainsi quatre cercles circonscrits dont on peut préciser les types :

**7.4.7 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$ .*

1) *Deux médiatrices extrinsèques et une intrinsèque sont concourantes en trois points (nécessairement extérieurs), centres de trois cercles circonscrits, qui sont les équidistantes aux droites des milieux du triangle passant par les sommets.*

2) *Les trois médiatrices intrinsèques sont concourantes en un point  $\omega \in \mathbf{P}(E)$  centre d'un cercle circonscrit (que l'on dira intrinsèque). Il y a trois cas :*

a) *Si  $\omega$  est dans  $\mathbf{K}$ , les points  $a, b, c$  sont sur le cercle  $\mathcal{C}(\omega, a)$ .*

b) *Si  $\omega$  est dans  $\Gamma$ , ce qui signifie que les médiatrices sont parallèles, les points  $a, b, c$  sont sur l'horicycle  $\mathcal{H}(\omega, a)$ .*

c) Si  $\omega$  est dans  $\mathbf{T}$ , ce qui signifie que les médiatrices admettent une perpendiculaire commune  $\Omega = \omega^\perp$  dans  $\mathbf{K}$ , les points  $a, b, c$  sont sur l'équidistante  $\mathcal{E}(\Omega, a)$ .

*Démonstration.* 1) Les médiatrices extérieures  $B^-$  et  $C^-$  sont les polaires des milieux intérieurs  $b' = a + b$  et  $c' = a + c$ . Le point d'intersection de ces médiatrices, centre du cercle circonscrit, est le pôle de  $(b'c')$  et le cercle est donc l'équidistante  $\mathcal{E}((b'c'), a)$ .

2) C'est clair (voir 7.1.9).

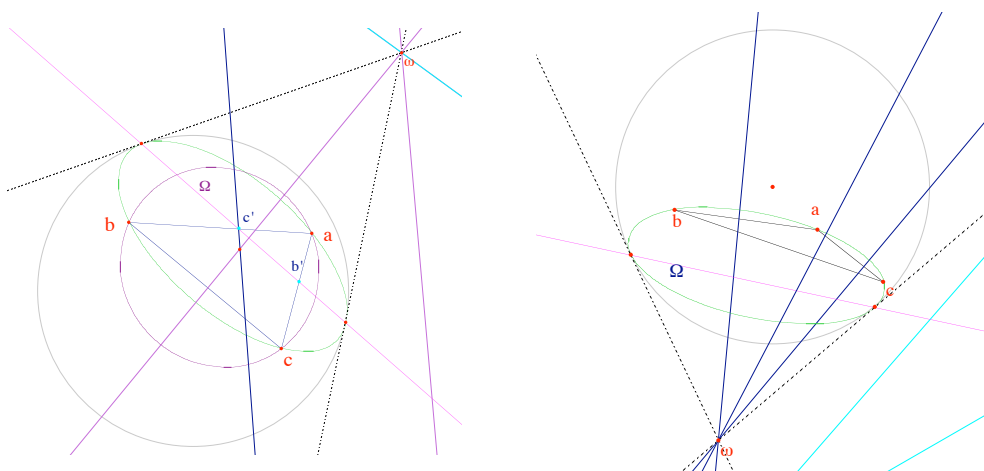


FIGURE 7.10 – À gauche le cercle circonscrit intrinsèque est un cercle et on a tracé l'équidistante à  $(b'c')$ , à droite, le cercle intrinsèque est lui-même une équidistante.

**7.4.8 Remarque.** Lorsque  $a$  est l'origine du plan  $\mathbf{K}$ , le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  est le cercle euclidien ordinaire. En effet, on a alors  $I(a, b) = 1/(1 - r^2)$  où  $r$  est la distance euclidienne de  $a$  à  $b$ .

### 7.4.3 La géométrie hyperbolique : le modèle de Poincaré

#### Cercles

Dans le modèle du disque  $\mathbf{D}$  de Poincaré, les cercles sont vraiment des cercles :

**7.4.9 Proposition.** Soient  $a, b \in \mathbf{D}$ . Le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  est un cercle euclidien passant<sup>16</sup> par  $b$ .

16. Mais son centre euclidien n'est pas le point  $a$ , sauf si  $a$  est le centre de  $\mathbf{D}$ .

*Démonstration.* On commence par traiter le cas où  $a$  est l'origine  $o = (0, 0)$ . Il y a plusieurs façons de faire. On a vu en 7.4.8 qu'un cercle de centre  $o$  du plan de Klein  $\mathbf{K}$  est un cercle euclidien. On vérifie que son image réciproque dans le plan de Minkowski est un cercle, situé dans un plan  $t = k$  et vérifiant  $x^2 + y^2 = R^2$  et on voit aussitôt que l'image de ce cercle dans  $\mathbf{D}$  en est encore un.

On peut aussi utiliser la distance directement avec la formule de Laguerre, voir 5.1.19.

On peut enfin utiliser le fait que les droites hyperboliques passant par  $o$  sont les droites euclidiennes et que le cercle hyperbolique étant invariant par les symétries (à la fois hyperboliques et euclidiennes dans ce cas), c'est un cercle euclidien.

Si maintenant  $a$  est un point quelconque de  $\mathbf{D}$  il existe une symétrie hyperbolique axiale qui transforme  $a$  en  $o$  (la symétrie par rapport à une médiatrice de  $a, o$ ). Dans le disque de Poincaré, cette symétrie est une inversion  $i$  (dont le pôle est à l'extérieur du disque) en vertu de 2.4.22. Elle transforme  $b$  en  $b'$  et le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  en  $\mathcal{C}(o, b')$ . Comme ce dernier est un cercle euclidien (qui ne contient pas le pôle), il en est de même de  $\mathcal{C}(a, b)$ .

## Horicycles

**7.4.10 Proposition.** *Soit  $a$  un point de  $\Gamma$  et  $b$  un point de  $\mathbf{D}$ . L'horicycle  $\mathcal{H}(a, b)$  est le cercle euclidien passant par  $b$  et tangent à  $\Gamma$  en  $a$ .*

*Démonstration.* Comme le groupe  $PO(q)$  est transitif sur les couples  $(a, b)$  formé d'un point isotrope et d'un point de  $\mathbf{D}$  (voir 4.7.4), il suffit de traiter le cas de l'horicycle de centre  $a = (1, 0)$  passant par l'origine. Dans le plan de Klein, cet horicycle a pour équation  $2x^2 + y^2 - 2xt = 0$  (c'est bien une ellipse surosculatrice à  $\Gamma$  en  $(1, 0, 1)$ ). L'image réciproque de cette ellipse dans l'hyperboloïde  $\mathcal{H}$  a pour équations  $x^2 + y^2 - t^2 = -1$  (l'équation de  $\mathcal{H}$ ) et  $2x^2 + y^2 - 2xt = 0$ . Cette courbe se décompose en deux composantes qui sont les sections de  $\mathcal{H}$  par les plans  $t = x - 1$  et  $t = x + 1$ . Seule la section définie par  $t = x + 1$  rencontre "l'hémisphère nord"  $\mathbf{M}$  et si on la projette dans  $\mathbf{D}$  par  $\Psi'$  on obtient la courbe d'équation  $X^2 + Y^2 - X = 0$  : c'est bien le cercle tangent en  $a$  à  $\Gamma$  qui passe par  $o$ .

## Équidistantes

Les équidistantes du disque de Poincaré ont un aspect quelque peu chaotique :



**7.4.11 Proposition.** *On note  $o$  le centre du disque de Poincaré. Soient  $\Delta$  une droite hyperbolique de  $\mathbf{D}$ ,  $i$  et  $j$  les points d'intersection de  $\Delta$  avec l'horizon  $\Gamma$  et soit  $a$  un point n'appartenant pas à  $\Delta$ . On désigne par  $C$  :*

- i) la droite  $(ij)$  si les points  $i, j, a$  sont alignés au sens euclidien,*
- ii) le cercle (euclidien) circonscrit à  $i, j, a$  sinon.*

*Soit  $C'$  l'inverse de  $C$  dans l'inversion de cercle  $\Gamma$  qui est un cercle passant par  $o$  dans le cas i), un cercle (resp. une droite) dans le cas ii) si  $C$  ne passe pas par  $o$  (resp. passe par  $o$ ).*

*Alors, l'équidistante  $\mathcal{E}(\Delta, b)$  est la réunion des deux arcs de cercles-droites  $C \cap \mathbf{D}$  et  $C' \cap \mathbf{D}$  d'extrémités  $i$  et  $j$ .*

*Démonstration.* Nous donnons deux preuves de ce résultat.

La première consiste à faire le calcul dans un cas particulier et à utiliser ensuite la transitivité du groupe  $PO(q)$ . Dans ce qui suit on utilise les calculs menés au chapitre 2 (voir les paragraphes 2.4.2 et 2.4.3). On travaille d'abord dans le plan de Klein  $\mathbf{K}$  (identifié à une partie de  $\mathbf{R}^2$ ) et on considère la droite  $D$  d'équation  $x = 0$  et le point  $b = (\beta, 0)$  avec  $\beta \in ]-1, 1[$ ,  $\beta \neq 0$ . L'image de  $D$  dans le disque de Poincaré est une droite hyperbolique  $\Delta$  dont l'équation est encore  $x = 0$ , l'image de  $b$  est le point  $a = (\frac{\beta}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}, 0)$ .

Comme l'orthogonal de  $D$  est le point  $d = (1, 0, 0)$ , l'équation de l'équidistante  $\mathcal{E}(D, b)$  s'écrit :  $q(m)\varphi(d, b)^2 = q(b)\varphi(d, m)^2$  et un calcul immédiat donne, pour  $m = (x, y) \in \mathcal{E}(D, b)$  l'équation  $\frac{x^2}{\beta^2} + y^2 = 1$ . On reconnaît bien une ellipse passant par  $b$  et bitangente à  $\Gamma$  en les points  $(0, \pm 1)$ . On calcule alors l'image réciproque de cette ellipse dans le modèle de Minkowski  $\mathbf{M}$  ou plutôt dans l'hyperboloïde  $\mathcal{H}$ . On obtient l'équation  $\frac{x^2}{\beta^2} + y^2 - t^2 = 0$  qui, avec l'équation de  $\mathcal{H}$ ,  $x^2 + y^2 - t^2 = -1$ , donne  $x^2 = \frac{\beta^2}{1 - \beta^2}$ . On obtient une courbe décomposée en les deux sections planes (deux hyperboles) de  $\mathcal{H}$  par les plans  $x = \pm \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ . La projection de ces hyperboles sur  $\mathbf{D}$ , ou plutôt sur

le plan  $P = \mathbf{R}^2$ , donne les courbes d'équations  $X^2 + Y^2 + 2\epsilon X \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{\beta} - 1 = 0$  avec  $\epsilon = \pm 1$ . Il s'agit de deux cercles  $C$  ( $\epsilon = 1$ ) et  $C'$  ( $\epsilon = -1$ ). Un calcul sans malice montre que le point  $a$  est sur  $C$  et que  $C$  et  $C'$  sont inverses dans l'inversion  $z \mapsto 1/\bar{z}$  de cercle  $\Gamma$ . Par ailleurs, il est clair que  $C$  et  $C'$  passent par les extrémités de  $\Delta$ , c'est-à-dire les points  $(0, \pm 1)$ , de sorte qu'on a bien montré la proposition dans ce cas là.

Le cas général s'en déduit aussitôt. Si on a  $\Delta$  et  $a$  quelconques, il existe une isométrie  $u$  de  $\mathbf{D}$  qui envoie la droite  $\Delta$  sur la droite  $\Delta_0$  d'équation  $x = 0$

et le point  $a$  sur un point  $a_0$  de l'axe des  $x$ . Comme une isométrie transforme équidistante en équidistante, l'équidistante  $\mathcal{E}(\Delta, a)$  est l'image par  $u^{-1}$  de  $\mathcal{E}(\Delta_0, a_0)$ . Comme les isométries de  $\mathbf{D}$  sont des composées d'inversions et de symétries (voir 2.4.22), les arcs de cercles constituant l'équidistante de  $\Delta_0$  se transforment en des arcs de cercles ou des segments et on a le résultat.

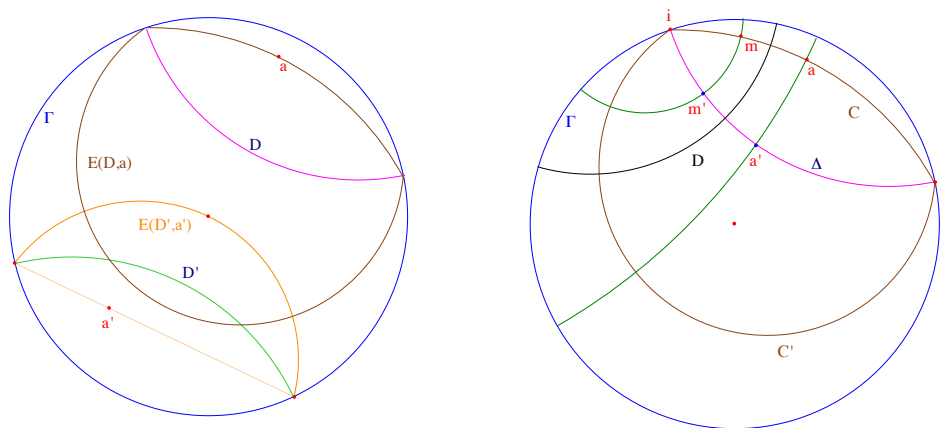


FIGURE 7.11 – À gauche deux exemples d'équidistantes, à droite la figure de la deuxième preuve de 7.4.11

La deuxième preuve est plus géométrique, mais nécessite quelques connaissances sur l'inversion, à commencer par un lemme :

**7.4.12 Lemme.** *Soient  $\Gamma$  et  $\Delta$  deux cercles orthogonaux, sécants en  $i, j$  et soit  $C$  un cercle passant par  $i, j$ . Alors les images de  $C$  dans les inversions de cercles  $\Gamma$  et  $\Delta$  sont égales.*

*Démonstration.* Les cercles passant par  $i, j$  forment un pinceau, i.e. une droite projective (si on désigne par  $\Gamma = 0$  et  $\Delta = 0$  des équations des cercles correspondants, les cercles passant par  $i, j$  ont pour équation  $\lambda\Gamma + \mu\Delta = 0$  avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{P}^1(\mathbf{R})$ ). Les inversions considérées définissent des homographies de cette droite projective, qui sont toutes deux des involutions de points fixes  $\Gamma$  et  $\Delta$  : elles sont donc égales.

Revenant à 7.4.11, on montre d'abord que tout point  $m$  de  $C$  appartient à  $\mathcal{E}(\Delta, a)$ . Pour cela, on projette  $m$  et  $a$  orthogonalement sur  $\Delta$  en  $m'$  et  $a'$ . Soit  $D$  la médiatrice de  $a'$  et  $m'$ . C'est une droite (hyperbolique) orthogonale à la droite (hyperbolique)  $\Delta$ . Elle est donc portée par un cercle qui est orthogonal à la fois à l'arc de cercle  $\Delta$  et à  $\Gamma$ , donc à tous les cercles du pinceau à points base  $i, j$ , donc en particulier à  $C$ . Le cercle  $C$  est donc stable par la symétrie (ou l'inversion)  $\tau_D$ . Comme  $\tau_D$  transforme la droite  $(aa')$  en  $(mm')$ ,

elle échange  $a$  et  $m$  et on a l'égalité de longueurs  $aa' = mm'$ , ce qui montre que  $m$  est bien sur  $\mathcal{E}(\Delta, a)$ .

Considérons maintenant  $\tau_\Delta$ . On sait qu'il s'agit de l'inversion de cercle le support de  $\Delta$  et, comme ce cercle est orthogonal à  $\Gamma$ , on a  $\tau_\Delta(C) = C'$  en vertu du lemme. Par conservation de la distance il est clair que  $C'$  est contenu dans  $\mathcal{E}(\Delta, a)$ .

Il reste à montrer que si  $m$  est sur  $\mathcal{E}(\Delta, a)$  il est sur  $C$  ou  $C'$ . On considère à nouveau les projetés  $m'$  et  $a'$  et leur médiatrice  $D$ . Dire que  $m$  est sur l'équidistante signifie qu'on a  $mm' = aa'$ . Soit  $n$  le symétrique de  $a$  par rapport à  $D$ . Il est sur la droite  $(mm')$  par conservation de l'orthogonalité et il vérifie  $m'n = a'a = m'm$ . C'est donc soit  $m$  soit son symétrique par rapport à  $\Delta$ . Autrement dit, on a  $m = \tau_D(a)$  ou  $m = \tau_\Delta \circ \tau_D(a)$ . Comme  $a$  est sur  $C$ ,  $m$  est sur  $\tau_D(C) = C$  ou sur  $\tau_\Delta \tau_D(C) = C'$ .

#### 7.4.13 Remarques.

1) Il y a une notable différence d'aspect de l'équidistante entre le modèle de Klein où il s'agit d'une belle conique bitangente à  $\Gamma$ , bien régulière et celui de Poincaré où elle est réunion de deux arcs de cercles se coupant en des points anguleux. Plusieurs éléments expliquent ce phénomène. Rappelons les bijections entre  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{D}$ ,  $\Theta = \Psi' \circ \Psi^{-1} : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{D}$  définie par

$$\Theta(X, Y) = \left( \frac{X}{1 + \sqrt{1 - R^2}}, \frac{Y}{1 + \sqrt{1 - R^2}} \right),$$

avec  $R^2 = X^2 + Y^2$ , de réciproque donnée par  $\Theta^{-1}(x, y) = \left( \frac{2x}{1 + r^2}, \frac{2y}{1 + r^2} \right)$  avec  $r^2 = x^2 + y^2$ . Ces bijections induisent l'identité sur le cercle  $\Gamma$  mais il y a une différence fondamentale entre  $\Theta$  et  $\Theta^{-1}$  :  $\Theta$  ne s'étend pas au plan tout entier, à cause du terme  $\sqrt{1 - R^2}$  qui devient imaginaire pour  $R > 1$ , alors que  $\Theta^{-1}$  se prolonge en un revêtement de degré 2, de  $\widehat{P} = \mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$  sur  $\mathbf{K}$ , ramifié le long de  $\Gamma$ . (Le point à l'infini s'envoie sur 0).

La fibre d'un point  $m$  de  $\mathbf{K}$  est formée de deux points,  $p$  et  $q$ , avec  $p = (x, y)$  et  $q = \left(\frac{x}{r^2}, \frac{y}{r^2}\right)$ , autrement dit,  $p$  et  $q$  sont inverses par rapport à  $\Gamma$ . On peut donc voir  $\mathbf{D}$  comme le quotient de  $\widehat{P}$  obtenu en identifiant un point et son inverse<sup>17</sup> par rapport à  $\Gamma$ . Si on note  $\pi : \widehat{P} \rightarrow \mathbf{D}$  la projection, on comprend pourquoi cet aspect bizarre de l'équidistante : c'est parce qu'elle est l'image par  $\pi$  de deux cercles, ou, ce qui revient au même, la trace sur  $\mathbf{D}$  de ces deux cercles. C'est aussi ce qu'on a vu dans la première preuve ci-dessus en passant par le modèle de Minkowski.

2) On retrouve aussi un aspect qui a déjà été évoqué au chapitre 2 (voir

---

17. C'est la métaphore de la crêpe utilisée en 2.4.15.

2.4.15), à savoir que les deux compactifications du plan hyperbolique : le plongement de  $\mathbf{K}$  dans  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  et celui de  $\mathbf{D}$  dans  $\widehat{P} = \widehat{C}$  ne sont pas de même nature. En effet ce dernier plongement est juste un double de  $\mathbf{D}$ , (un revêtement de degré 2) ce qui n'est pas le cas de  $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$  par rapport à  $\mathbf{K}$  où, comme on l'a vu, les points extérieurs jouent un rôle tout à fait différent. Le lecteur perçoit peut-être ainsi le pourquoi de la préférence de l'auteur pour le modèle de Klein et surtout sa version étendue, porteuse de bien plus d'information que le disque  $\mathbf{D}$ , même étendu au plan.

La figure ci-contre explique l'aspect de l'équidistante  $\mathcal{E}(D, a)$ . Dans le plan  $\widehat{P}$  elle est formée des deux cercles violet et vert. Dans  $\mathbf{D}$  ne subsistent que les arcs intérieurs à  $\mathbf{D}$ , les arcs extérieurs se repliant par inversion (l'arc extérieur vert sur l'intérieur violet et vice-versa).

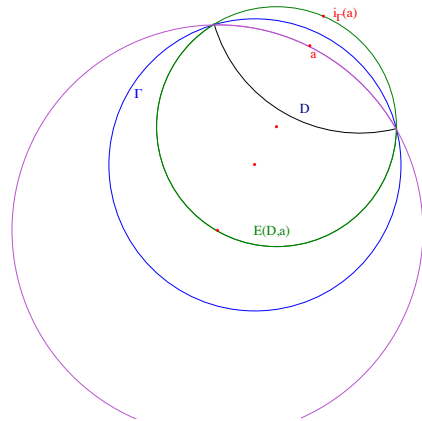


FIGURE 7.12 – Le pliage des équidistantes

Pour terminer nous donnons en 7.13 ci-dessous les deux figures des cercles et équidistantes circonscrits à un triangle de  $\mathbf{D}$ . Il y en a quatre, à gauche, dans le cas des médiatrices concourantes, un cercle et trois équidistantes correspondant aux droites des milieux, à droite, dans le cas où les médiatrices ont une perpendiculaire commune, quatre équidistantes, les trois précédentes et celle associée à la perpendiculaire commune.

## 7.5 Exercices

### 7.5.1 Des cercles à plusieurs centres

**7.5.1 Exercice.** On suppose  $k = \mathbf{F}_3$ ,  $q = X^2 + Y^2 - T^2$ . Montrer que  $\mathbf{P}(E)$  a 13 points, énumérer ceux de  $\Gamma$  et ceux qui vérifient  $q = 1$  et  $q = -1$ . Déterminer les cercles  $\mathcal{C}(a, b)$  “non dégénérés” (i.e. ceux qui correspondent à des points  $a, b$  non orthogonaux et tels que  $(ab)$  ne soit pas tangente à  $\Gamma$ ). Montrer que les deux cercles de centres  $\alpha = (1, 0, 0)$ ,  $\beta = (0, 1, 0)$  passant

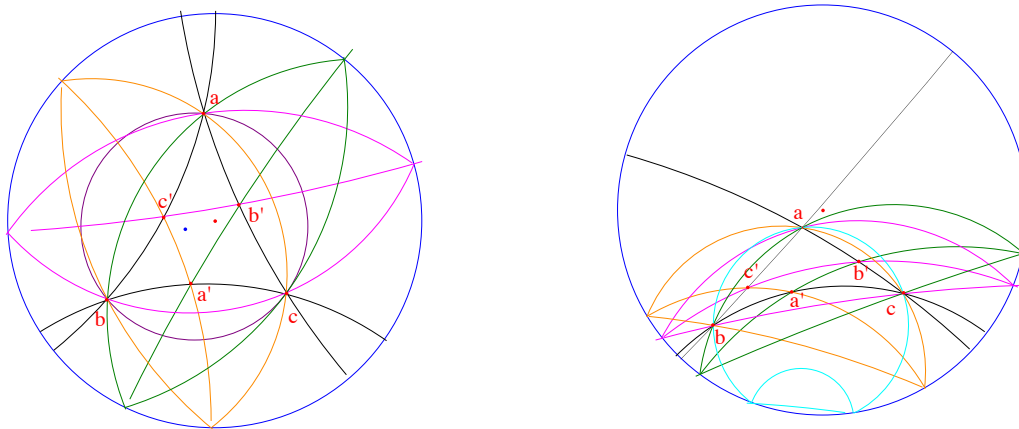


FIGURE 7.13 – Cercle et équidistantes circonscrits

$b = (1, 1, 0)$  sont égaux. Montrer que le stabilisateur de ce cercle est un groupe diédral  $\mathbf{D}_4$  à 8 éléments, tandis que le stabilisateur de  $\alpha$  ou  $\beta$  est un groupe de Klein  $\mathbf{V}_4$  à 4 éléments. (On pourra interpréter  $PO(q)$  comme le groupe  $\mathcal{S}_4$  des permutations des quatre éléments de  $\Gamma$ .)

**7.5.2 Exercice.** On suppose  $k = \mathbf{F}_5$ ,  $q = X^2 + Y^2 - T^2$ . On note  $\Gamma$  (resp.  $\mathbf{T}$ , resp.  $\mathbf{K}$ ) l'ensemble des points où  $q$  est nul (resp. est un carré non nul, resp. n'est pas un carré) et on les appelle encore isotropes, extérieurs, intérieurs.

1) Soit  $m \in \Gamma$ . Montrer que les points de la tangente à  $\Gamma$  en  $m$  autres que  $m$  sont extérieurs (ce qui justifie la terminologie).

2) Montrer que le groupe  $PO(q)$  est un groupe à 120 éléments<sup>18</sup> (utiliser l'isomorphisme avec  $PGL(2, \mathbf{F}_5)$ , voir Partie III ??).

3) Montrer que  $\mathbf{P}(E)$ ,  $\Gamma$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{K}$  sont respectivement de cardinal 31, 6, 15, 10 (pour les deux derniers on utilisera l'opération de  $PO(q)$  et on calculera les cardinaux des stabilisateurs à l'aide de 1.4.23 et 1.4.25).

4) Montrer que les cercles de centres intérieurs (resp. extérieurs) sont de cardinal 6 (resp. 4). Montrer que le centre des cercles de cardinal 6 est bien déterminé.

5) Montrer qu'il y a un seul cercle de centre extérieur  $a$  qui corresponde à une conique propre et soit formé de points extérieurs (on n'oubliera pas d'écartier les points de la polaire de  $a$  et des tangentes passant par  $a$ ). Montrer qu'un tel cercle détermine son centre.

6) On considère les points  $a = (1, 0, 0)$  et  $b = (1, 1, 2)$ . Déterminer le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  et montrer qu'il admet deux centres autres que  $a$  (il s'agit de

18. On peut montrer que c'est aussi le groupe symétrique  $\mathcal{S}_5$ , voir [Per96].

$a' = (0, 1, 0)$  et  $a'' = (0, 0, 1)$ ). Montrer que le stabilisateur de  $a$  est un groupe diédral  $\mathbf{D}_4$  à 8 éléments, tandis que le groupe  $G(\mathcal{C}(a, b))$  est le groupe symétrique  $\mathcal{S}_4$  à 24 éléments. (On montrera que  $\mathcal{C}(a, b)$  contient quatre points sur lesquels  $q$  et  $\varphi$  prennent les mêmes valeurs et on appliquera le théorème de Witt.)

## 7.5.2 Cocyclicité

**7.5.3 Exercice.** Soient  $a, b, c, d$  quatre points non isotropes et “de même nature” (i.e. vérifiant  $q(a) = q(b) = q(c) = q(d)$  dans  $k^*/k^{*2}$ ). Ils admettent donc douze milieux  $m_{ab}, n_{ab}, m_{ac}$ , etc. et douze médiatrices. On suppose que  $a, b, c, d$  sont en position générale (i.e. trois quelconques d’entre eux ne sont pas alignés).

1) Montrer que les quatre points sont cocycliques si et seulement si six de leurs milieux sont alignés ou six de leurs médiatrices sont concourantes.

2) En déduire que les points sont cocycliques si deux paires de points disjointes (par exemple  $\{a, b\}$  et  $\{c, d\}$ ) ont même milieu<sup>19</sup>. Retrouver ce résultat en utilisant les formules donnant les centres des cercles circonscrits :  $b \wedge c + c \wedge a + a \wedge b$ , etc. Montrer un résultat analogue avec les médiatrices. Comparer aux cas euclidiens du parallélogramme et du trapèze isocèle et verser quelques larmes sur l’absence de dualité dans le cas euclidien.

**7.5.4 Exercice.** Le but de cet exercice est de donner un critère de cocyclicité qui prenne la forme d’une relation polynomiale entre les invariants de quatre points. Soient  $a, b, c, d$  quatre points génériques de  $\mathbf{P}(E)$ .

1) On suppose  $a, b, c, d$  non isotropes et  $q(a) = q(b) = q(c) = q(d)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Montrer que les centres des cercles circonscrits à  $a, b, c$  sont les points  $o = \lambda(b \wedge c) + \mu(c \wedge a) + \nu(a \wedge b)$  avec les relations  $\lambda^2 q(b) = \mu^2 q(a)$  et  $\lambda^2 q(c) = \nu^2 q(a)$ .

2) Montrer que  $d$  est sur l’un des cercles circonscrits à  $abc$  si et seulement si il vérifie l’une des relations :

$$q(d)[a, b, c]^2 = q(a)[b, c, d]^2 + q(b)[c, a, d]^2 + q(c)[a, b, d]^2 \pm \sqrt{q(b)q(c)}[c, a, d][a, b, d] \\ \pm \sqrt{q(c)q(a)}[a, b, d][b, c, d] \pm \sqrt{q(b)q(c)}[b, c, d][c, a, d].$$

19. Attention au raisonnement faux suivant : si  $a, b$  et  $c, d$  ont même milieu, disons  $a + b$  et  $c + d$ , on a  $a + b = c + d$  (??), donc aussi  $a - c = d - b$  et  $a - d = c - b$  et d’autres milieux communs. Une petite expérience Cabri montre qu’il n’en est rien. En fait, on sait seulement que  $a + b$  et  $c + d$  sont colinéaires, ce qu’on peut traduire par  $(a + b) \wedge (c + d) = 0$ . Attention aussi, il y a quatre cercles circonscrits à  $abc$ . Dire que  $a, b, c, d$  sont cocycliques signifie que  $d$  est sur l’un d’entre eux, pas sur tous.

3) ¶ On pose  $x_1 = [b, c, d]^2 q(a)$ ,  $x_2 = [c, a, d]^2 q(b)$ ,  $x_3 = [a, b, d]^2 q(c)$  et  $x_4 = [a, b, c]^2 q(d)$ . Montrer que les points  $a, b, c, d$  sont cocycliques ou alignés si et seulement si on a la relation :

$$\sum_{i=1}^4 x_i^4 - 4 \sum_{i,j} x_i^3 x_j + 6 \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j^2 + 4 \sum_{i,j,k} x_i^2 x_j x_k - 40 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

(On écrira les relations de la question 2) en fonction des quantités  $y_1 = [b, c, d] \sqrt{q(a)}$ , etc. et on les multipliera en n'écouterant que son courage ... ou un bon logiciel de calcul formel.)

### 7.5.3 Les cercles du plan elliptique

**7.5.5 Exercice.** Dans cet exercice on travaille dans le plan elliptique réel, muni de la forme  $q(x, y, t) = x^2 + y^2 + t^2$ . On choisit la droite  $t = 0$  comme droite à l'infini. Sur le plan affine  $X$  défini par  $t = 1$ , la forme  $q$  définit une forme euclidienne  $x^2 + y^2 = q(x, y, 1) - 1$ . On note  $o = (0, 0, 1)$  (c'est le pôle de la droite à l'infini pour  $q$ ). Les isométries  $u \in PO(q)$  qui conservent la droite à l'infini fixent le point  $o$  et leur restriction à  $X$  sont les isométries euclidiennes qui fixent  $o$  (donc les rotations de centre  $o$  et les symétries par rapport aux droites passant par  $o$ ). Soient  $a, b \in X$  avec  $a \neq o$ .

1) Montrer que  $\mathcal{C}(a, b)$  est une conique dont un axe est  $(oa)$  et dont le centre est le point  $c$ , barycentre de  $o, a$  affectés des coefficients  $q(a \wedge b)$  et  $-q(b)$ .

2) Montrer que cette conique est une ellipse, une parabole, une hyperbole selon que  $q(b) - q(a \wedge b)$  est positif, nul ou négatif.

(On pourra, par exemple, faire les calculs avec  $a = (\alpha, 0, 1)$  et  $b = (\beta, \gamma, 1)$ .)

### 7.5.4 Puissance, axe radical

**7.5.6 Exercice.** Soient  $a, b$  deux points de  $\mathbf{P}(E)$ . On suppose  $a, b$  non isotropes et non orthogonaux. Soit  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(a, b)$  le cercle associé et soit  $m$  un point (non isotrope) du plan. On définit la puissance de  $m$  par rapport à  $\mathcal{C}$  comme la quantité  $p(m, \mathcal{C}) := \frac{I(a, m)}{I(a, b)}$ .

0) Montrer que  $m$  est sur  $\mathcal{C}$  si et seulement si on a  $p(m, \mathcal{C}) = 1$ .

1) On suppose qu'il existe  $n \in \mathcal{C}$  tel que  $(mn)$  soit tangente au cercle (i.e. perpendiculaire au rayon  $(an)$ , ce cas englobe le cas où  $m$  est sur  $\mathcal{C}$ ). Montrer que l'on a  $p(m, \mathcal{C}) = I(m, n)$  (utiliser le théorème de Pythagore).

2) Une droite  $D$  passant par  $m$  coupe  $\mathcal{C}(a, b)$  en  $c$  et  $d$ . Soit  $n$  le projeté orthogonal de  $a$  sur  $D$ . Montrer qu'on a  $p(m, \mathcal{C}) = \frac{I(m, n)}{I(n, c)}$  (toujours par Pythagore).

3) On reprend les notations de 2) mais on suppose que le corps de base est  $\mathbf{R}$  et que les points  $a, b, m$  sont soit dans  $\mathbf{K}$ , soit dans  $\mathbf{E}$  (donc avec des valeurs de  $q$  toutes de même signe). Montrer la formule suivante :

$$p(m, \mathcal{C}) = \left( \frac{I^+(m, c) + I^+(m, d)}{1 + I^+(c, d)} \right)^2$$

où  $I^+$  est l'invariant "de demi-points" défini par  $I^+(a, b) = \epsilon \frac{\varphi(a, b)}{\sqrt{q(a)q(b)}}$  où  $\epsilon$  est du signe de  $q$ . (Cette formule est l'analogie de la formule euclidienne  $p(m, \mathcal{C}) = \overline{mc} \overline{md}$ ).

4) Soient  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(a, b)$  et  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}(a', b')$  deux cercles. Montrer que l'ensemble des points  $m$  qui vérifient  $p(m, \mathcal{C}) = p(m, \mathcal{C}')$  est une conique dégénérée du pinceau défini par les deux cercles dont l'équation est :

$$q(b)\varphi(a', b')^2\varphi(a, m)^2 = q(b')\varphi(a, b)^2\varphi(a', m)^2.$$

On suppose que les cercles ont un point commun qu'on peut supposer être  $b = b'$ . Montrer que les deux droites qui constituent la conique en question ont pour équations  $\varphi(a, b)\varphi(a', m) = \pm\varphi(a', b)\varphi(a, m)$ . Montrer que ces droites sont invariantes par la symétrie d'axe  $(aa')$  (cela permet de préciser la conique dégénérée parmi les trois possibles).

## 7.5.5 Cercles et triangles rectangles

**7.5.7 Exercice.** L'objectif de cet exercice est de montrer que le théorème qui affirme qu'un triangle rectangle est inscrit dans le demi-cercle de diamètre son hypoténuse n'est plus valable géométrie non euclidienne.

Soient  $a, b$  deux points non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$  admettant un milieu  $o$  et soit  $c \in \mathbf{P}(E)$ , non isotrope. On suppose  $a, b, c$  non alignés et le triangle  $abc$  rectangle en  $c$ . Montrer que le point  $c$  n'est pas sur le cercle  $\mathcal{C}(o, a)$ . (On pourra supposer  $q(a) = q(b)$  et  $o = a + b$ . On se souviendra de la caractérisation des triangles rectangles :  $q(c)\varphi(a, b) = \varphi(a, c)\varphi(b, c)$  et on fera apparaître la relation fondamentale d'alignement vue en 1.1.6).



## 7.5.6 Constructions

**7.5.8 Exercice.** Dans cet exercice on suppose qu'on dispose des outils de constructions suivants : droites, perpendiculaires, médiatrices, cercles et les constructions se font à partir de ces outils<sup>20</sup>.

1) On se donne un segment  $[ab]$  et un point  $c$ . Construire un point  $d$  avec  $ab = cd$  (utiliser la médiatrice de  $a, c$ ). Même question en imposant, de plus, que  $d$  soit sur une droite passant par  $c$  (utiliser un cercle).

2) On se donne deux segments  $[uv]$  et  $[xy]$ . Construire un triangle rectangle en  $b$  vérifiant  $ab = uv$  et  $ac = xy$ . Discuter.

3) Construire, dans le disque de Klein  $\mathbf{K}$ , un triangle  $abc$  rectangle isocèle en  $a$  connaissant son hypoténuse  $[bc]$  (on pourra supposer  $b = (x, 0, 1)$ ,  $c = (-x, 0, 1)$  et  $a = (0, y, 1)$  et calculer  $y$  en fonction de  $x$ ). ¶ Même question dans le disque de Poincaré  $\mathbf{D}$ .

---

20. Dès que l'on pratique un peu la géométrie (euclidienne ou pas) on est confronté à ce type de questions.



## Chapitre 8

# Transformations de la droite ou du point, vecteurs, angles orientés, etc.

*Dans ce chapitre on aborde les notions d'angles orientés et de vecteurs en géométrie non euclidienne en les comparant avec les notions analogues en géométrie euclidienne.*

*Lorsqu'on étudie ces deux concepts dans le cadre euclidien, on constate qu'ils présentent de nombreux points communs. En particulier, on a, dans les deux cas, la relation de Chasles et la "règle du parallélogramme". De fait, ces notions sont les avatars d'une même situation générale que nous explicitons ci-dessous et qui met en jeu un groupe abélien opérant simplement transitivement sur un ensemble. Il y a cependant des différences importantes entre vecteurs et angles euclidiens (ou entre rotations et translations). Ainsi, les vecteurs forment un groupe de dimension 2, les angles seulement de dimension 1 ; les translations forment un groupe, mais pas les rotations, pour lesquelles on doit se limiter aux rotations fixant un point, mais cependant, le produit de deux rotations, lorsque c'est une rotation, a bien pour angle la somme des angles. Tous ces phénomènes correspondent peu ou prou à l'existence d'un gros sous-groupe distingué du groupe des isométries : le groupe des translations et on sait qu'il ne peut rien exister de tel en non euclidien puisque le groupe  $PO(q)$  est "presque" simple.*

*On aura toutefois des notions d'angles et de vecteurs en géométrie non euclidienne, mais on devra se limiter aux transformations fixant un point (pour les rotations) ou laissant stable une droite (pour les translations), les deux cas étant ici logés à la même enseigne à cause de la polarité (contrairement à ce qui se passe en euclidien). De plus, l'absence de sous-groupe distingué a pour conséquence qu'il n'y a pas de corrélation entre les notions d'angles ou de vecteurs lorsque les points ou les droites sont différents (le produit des translations de directions distinctes, si c'est une translation, ce qui n'est pas assuré, n'a pas pour vecteur la somme des vecteurs et de même pour les rotations). Cela nous fera perdre une bonne partie des résultats de la géométrie euclidienne et nous tenterons de sauvegarder ce qui peut l'être, notamment en énonçant un succédané du théorème de l'angle inscrit : le Lotensatz. Nous terminerons ce chapitre en dressant le bilan des classes de conjugaison de  $PO(q)$ .*

## 8.1 La situation algébrique de base

### 8.1.1 Introduction

Nous donnons ici un cadre algébrique abstrait (mais essentiellement trivial) à plusieurs théories similaires : la théorie des vecteurs d'un espace affine, celle des angles orientés et bien d'autres. Toutes sont des avatars d'une même situation de base, très simple, et on y retrouve les mêmes résultats (notamment la relation de Chasles et celle du parallélogramme). Nous verrons d'ailleurs qu'en géométrie non euclidienne, la dualité fait qu'il est bien difficile de faire la différence entre angles et vecteurs, surtout dans le cas elliptique!

On considère un groupe **abélien**  $H$  qui opère **simplement transitivement** sur un ensemble  $X$ , ce qui signifie que, pour tous  $x, y$  dans  $X$ , il existe un unique  $h$  de  $H$  tel que  $h.x = y$ . L'unicité implique que les éléments de  $H$  distincts de l'identité opèrent sans point fixe sur  $X$ . Si  $H$  est abélien, il opère simplement transitivement dès qu'il est transitif et fidèle (i.e. si  $h.x = x$  pour tout  $x$ ,  $h$  est l'identité). Cette situation est très répandue : elle intervient dès qu'un groupe **abélien** opère, quitte à restreindre l'opération à une orbite pour la rendre transitive et à passer au quotient par le noyau de l'opération pour la rendre fidèle. On en trouvera des illustrations dans les exercices ci-dessous. Voici déjà les deux exemples standard qui vont nous guider tout au long de ce chapitre :

### 8.1.1 Exemples.

- 1) On prend pour  $H$  un espace vectoriel et pour  $X$  un espace affine associé.
- 2) On prend pour  $H$  le groupe des rotations planes (euclidiennes) de centre  $o$  et pour  $X$  l'ensemble des points du cercle unité de centre  $o$  ou, ce qui revient au même, des demi-droites issues de  $o$ .

### 8.1.2 Angles orientés et vecteurs : la théorie

On se place dans la situation évoquée ci-dessus d'un groupe abélien  $H$  opérant simplement transitivement sur  $X$ . La question qui se pose est celle de la double transitivité :  $A, B, A', B' \in X$  étant donnés, existe-t-il  $h \in H$  qui envoie, à la fois,  $A$  sur  $A'$  et  $B$  sur  $B'$  ? Bien entendu, ce n'est pas vrai en général et la question se transforme ainsi : décrire l'obstruction à la double transitivité (ou encore les orbites de  $H$  sur les couples). La réponse, dans les exemples standard, est donnée par la notion de "vecteur" ou d'"angle". Nous donnons ci-dessous les deux variantes correspondantes. Bien entendu, en l'absence d'autre élément de choix, il n'y a aucune raison d'appeler l'invariant angle plutôt que vecteur ou taraboutzim.

#### Angles orientés

La tradition veut que l'on note additivement le groupe abélien  $H$ . Si ce n'est pas le cas au départ (penser au groupe des rotations), on choisit une bijection quelconque  $\rho : \mathcal{A} \rightarrow H$  et on munit  $\mathcal{A}$  de l'addition définie par  $\rho(\theta_1 + \theta_2) = \rho(\theta_1)\rho(\theta_2)$ . Le groupe  $\mathcal{A}$  s'appelle groupe des angles et l'élément  $\rho(\theta) \in H$  est appelé rotation<sup>1</sup> d'angle  $\theta$ . Dans la pratique, cette bijection sera souvent donnée par la structure même de  $H$ . Par exemple, dans le cas des rotations euclidiennes,  $\rho$  sera l'isomorphisme de  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  sur  $O^+(2, \mathbf{R})$  issu de l'exponentielle, voir aussi 8.3.1.

**8.1.2 Définition.** Soient  $A, B \in X$ . On appelle "angle" (orienté) associé au couple  $(A, B)$  l'unique  $\theta \in \mathcal{A}$  tel que  $\rho(\theta)(A) = B$ . On pose  $\theta = \widehat{A, B}$ .

Les résultats suivants n'étonneront personne :

#### 8.1.3 Théorème.

1) Soient  $A, B, A', B' \in X$ . Il existe  $h \in H$  tel que  $h(A) = B$  et  $h(A') = B'$  si et seulement si on a  $\widehat{A, A'} = \widehat{B, B'}$ . Autrement dit, on a  $\widehat{A, B} = \widehat{A', B'}$  si et seulement si  $\widehat{A, A'} = \widehat{B, B'}$ . (Règle du parallélogramme)

---

1. Nous dirons parfois pseudo-rotation, notamment dans le cas où nous aurons eu recours à un passage au quotient pour rendre fidèle l'opération.

- 2) On a  $\widehat{A,C} = \widehat{A,B} + \widehat{B,C}$ . (Relation de Chasles)  
 3) Soient  $A, B \in X$  et  $h \in H$ . Posons  $A' = h(A)$  et  $B' = h(B)$ . On a  $\widehat{A,B} = \widehat{A',B'}$ . (Conservation des angles)

*Démonstration.* C'est une vérification triviale : on a seulement dégagé les conditions qui font que ces propriétés sont valides. Ainsi, le point 1) ne fait que traduire la commutativité du groupe et le point 2) le fait que l'application  $\theta \mapsto \rho(\theta)$  est un homomorphisme.

## Vecteurs

Là encore, la tradition veut que l'on note additivement le groupe abélien  $H$ . On choisit une bijection quelconque  $t : \mathcal{V} \rightarrow H$  qui à  $\vec{v}$  associe  $t_{\vec{v}}$  et on munit  $\mathcal{V}$  de l'addition définie par  $t_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2} = t_{\vec{v}_1} t_{\vec{v}_2}$ . Le groupe  $\mathcal{V}$  s'appelle groupe des vecteurs et l'élément  $t_{\vec{v}} \in H$  est appelé translation<sup>2</sup> de vecteur  $\vec{v}$ . Voir ci-dessous le cas hyperbolique pour un exemple.

**8.1.4 Définition.** Soient  $a, b \in X$ . On appelle "vecteur" associé au couple  $(a, b)$  l'unique  $\vec{v} \in \mathcal{V}$  tel que  $t_{\vec{v}}(a) = b$ . On pose  $\vec{v} = \overrightarrow{ab}$ .

Le théorème 8.1.3 devient :

### 8.1.5 Théorème.

- 1) Soient  $a, b, a', b' \in X$ . Il existe  $h \in H$  tel que  $h(a) = b$  et  $h(a') = b'$  si et seulement si on a  $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'}$ . Autrement dit, on a  $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$  si et seulement si  $\overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'}$ . (Règle du parallélogramme)  
 2) On a  $\overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc}$ . (Relation de Chasles)  
 3) Soient  $a, b \in X$  et  $h \in H$ . Posons  $a' = h(a)$  et  $b' = h(b)$ . On a  $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$ . (Conservation des vecteurs)

## Angles orientés, vecteurs et invariants non orientés

Si l'on dispose d'invariants (non orientés) pour les éléments du groupe (longueurs, angles, etc.) on peut généraliser le fait qu'un parallélogramme a ses côtés opposés "égaux" (i.e. de même longueur). Nous donnons ici la variante "vecteurs" de ce résultat, le lecteur imaginera l'autre. On suppose qu'on a un invariant  $I$  tel que  $h(a) = a'$  et  $h(b) = b'$  impliquent  $I(a, b) = I(a', b')$ .

**8.1.6 Corollaire.** Avec les notations précédentes, si on a un parallélogramme (autrement dit,  $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$ ) on a  $I(a, b) = I(a', b')$  et  $I(a, a') = I(b, b')$ .

---

2. Voire pseudo-translation.

*Démonstration.* La relation vectorielle signifie, au choix, qu'il existe  $h \in H$  avec  $h(a) = a'$  et  $h(b) = b'$  ou  $k \in H$  tel que  $k(a) = b$  et  $k(a') = b'$ , d'où le résultat.

Attention, ce corollaire n'a de sens que si les vecteurs en ont un, donc si les points  $a, b, a', b'$  sont dans un ensemble  $X$  sur lequel  $H$  opère simplement transitivement.

## 8.2 Angles et vecteurs en géométrie non euclidienne : le cas général

Dans cette section on suppose le corps  $k$  et la forme  $q$  quelconques.

### 8.2.1 Les groupes concernés

Considérons la situation usuelle : l'espace projectif  $\mathbf{P}(E)$  muni de la forme quadratique  $q$  et son groupe d'isométries  $G = PO(q)$ . Le groupe  $G$  n'est certes pas commutatif (il est même "presque" simple, voir §1.4.6), mais il contient des sous-groupes abéliens intéressants. Ces groupes sont obtenus en considérant les éléments de  $PO(q)$  qui laissent stables un point ou une droite donnés. Ils sont isomorphes aux groupes orthogonaux des formes de rang 2 et ont été étudiés au chapitre 1, voir 1.4.17 et 1.4.19. Nous rappelons ici les points essentiels.

Si  $a$  est un point non isotrope de  $\mathbf{P}(E)$ , on appelle  $G_a$  le sous-groupe de  $PO(q)$  des isométries qui fixent  $a$ . Si  $A$  est la polaire de  $a$ , ce groupe est aussi celui des isométries qui laissent  $A$  stable. Si  $\hat{a}$  est un relèvement de  $a$ ,  $G_a$  est isomorphe à  $G_{\hat{a}}$ , sous-groupe de  $O(q)$  formé des isométries vectorielles qui fixent  $\hat{a}$ . On a ainsi des isomorphismes  $G_{\hat{a}} \simeq G_a \simeq O(q|_A)$  où  $q|_A$  désigne la restriction de  $q$  à l'orthogonal de  $\hat{a}$ .

On appelle  $G_a^+$  la partie positive de  $G_a$  (celle qui correspond à  $O^+(q|_A)$ ). On renvoie au chapitre 1 pour la description des groupes  $G_a$  et  $G_a^+$ . Le point essentiel, pour ce qui nous concerne ici, est que  $G_a^+$  est **abélien**. On rappelle aussi que les éléments de  $G_a^-$  sont des involutions  $\sigma_c$  de point de Frégier  $c \in A$  tandis que les éléments de  $G_a^+$  sont les produits  $\sigma_b\sigma_c$  de deux telles involutions, l'une pouvant être choisie arbitrairement.

Dans le cas où  $a$  est isotrope le groupe  $G_a^+$  a été défini de manière un peu différente, voir 1.4.28.

## 8.2.2 Les opérations de $G_a^+$ : le cas général

Le groupe  $G_a^+$  étant abélien, la condition essentielle pour appliquer la théorie générale est donc remplie. Il reste à faire opérer ce groupe de manière transitive et fidèle. Il y a plusieurs opérations possibles.

### Opérations sur les “cercles”

**8.2.1 Proposition.** *Soit  $a$  un point non isotrope de  $\mathbf{P}(E)$ ,  $G_a^+$  le groupe associé et soit  $b$  un point distinct de  $a$ , ni isotrope, ni orthogonal à  $a$ . On suppose que la droite  $(ab)$  n'est pas tangente à  $\Gamma$ . Alors, le groupe  $G_a^+$  opère simplement transitivement sur le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$ .*

*Démonstration.* Rappelons que les points du cercle sont supposés non isotropes. Par définition du cercle, voir 7.1.1, le groupe  $G_a$  opère transitivement sur  $\mathcal{C}(a, b)$ . On peut donc envoyer  $b$  sur  $c \in \mathcal{C}(a, b)$  par  $g \in G_a$ , mais il faut trouver un tel  $g$  positif. Il suffit de montrer qu'il existe un élément  $\tau$  de  $G_a^-$  qui fixe  $b$  et on utilisera au besoin  $g\tau$ . La réflexion d'axe  $(ab)$  convient (car la droite  $(ab)$  n'est pas tangente à  $\Gamma$ ).

Supposons que  $g \in G_a^+$  fixe  $c \in \mathcal{C}(a, b)$ . En vertu de 1.4.24 le point  $c$  serait égal ou orthogonal à  $a$  et c'est absurde.

**8.2.2 Exemple.** Dans le cas de la géométrie hyperbolique réelle il y a deux cas de figure essentiels. Si les points  $a$  et  $b$  sont dans  $\mathbf{K}$ , on a affaire au “vrai” cercle  $\mathcal{C}(a, b)$  et les transformations de  $G_a^+$  seront vues comme des rotations. Si le point  $a$  est extérieur mais que  $b$  est dans  $\mathbf{K}$ , le cercle devient l'équidistante  $\mathcal{E}(A, b)$  (où  $A$  est la polaire de  $a$ ) et les transformations de  $G_a^+$  comprendront notamment les translations hyperboliques, voir ci-dessous.

On peut donc définir des angles orientés ou des vecteurs à partir de ces orbites de  $G_a^+$ . C'est ce que nous ferons dans le cas réel, en interprétant ces objets comme des angles orientés de demi-droites.

### Opérations la droite duale $a^*$ et sur la polaire $A$

Les deux groupes  $G_a$  et  $G_a^+$  opèrent naturellement sur la droite projective  $A$  de  $\mathbf{P}(E)$  et sur la droite projective duale  $a^*$  des droites de  $\mathbf{P}(E)$  qui passent par  $a$ . Attention, ces deux opérations ne remplissent pas les conditions de simple transitivité de la théorie générale.

Une première difficulté provient du fait que, dans les deux cas, cette opération est infidèle, son noyau étant le sous-groupe à deux éléments engendré par l'involution  $\sigma_a = \tau_A$ , voir 1.4.24. En effet, cette involution est



égale à  $-\text{Id}$  sur le plan vectoriel  $\widehat{A}$  donc à l'identité sur la droite projective  $A$  et sur la droite duale  $a^*$ . On ne peut donc pas appliquer directement la théorie générale à  $G_a^+$ . Dans ce qui suit nous noterons  $H_a$  (resp.  $H_a^+$ ) le quotient  $G_a/\{\text{Id}, \sigma_a\}$  (resp.  $G_a^+/\{\text{Id}, \sigma_a\}$ ). Les isomorphismes vus ci-dessus induisent des isomorphismes  $H_a \simeq PO(q|_A)$  et  $H_a^+ \simeq PO^+(q|_A)$ . Les groupes  $PO$  et  $PO^+$  sont les quotients de  $O$  et  $O^+$  par le groupe<sup>3</sup>  $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$ . C'est au groupe abélien  $H_a^+$  que nous allons appliquer la théorie générale. Sa structure découle de celle de  $G_a^+$  (voir 1.4.25) :

### 8.2.3 Proposition.

- 1) Si  $q|_A$  est hyperbolique, le groupe  $H_a^+$  est isomorphe à  $k^*/\{\pm 1\}$ .
- 2) Si  $q|_A$  est anisotrope, le groupe  $H_a^+$  est isomorphe à  $\mathbf{U}_k/\{\pm 1\}$  (où  $\mathbf{U}_k$  est le groupe des éléments de norme 1 dans une extension quadratique de  $k$ ).

### Opération sur $a^*$

Dans son opération sur  $a^*$ , le groupe  $H_a$  n'a pas de point fixe, il échange les droites isotropes de  $a^*$  (s'il y en a). Le groupe  $H_a^+$  opère sur  $a^*$  en laissant stables les droites isotropes. Si l'on restreint cette opération à l'ensemble des droites non isotropes passant par  $a$ , elle est sans point fixe.

Attention, en général, cette opération n'est pas transitive sur  $a^*$  privé de ses isotropes (on pensera au cas où le corps  $k$  est égal à  $\mathbf{Q}$ ). Précisément, voir<sup>4</sup> 4.4.1, deux droites  $B$  et  $C$  sont dans la même orbite si et seulement si on a  $q^*(B) = q^*(C)$  dans  $k^*/k^{*2}$ .

Cependant, l'opération de  $H_a^+$  l'est dans trois cas importants.

a) Lorsque le corps de base est algébriquement clos. On pourra d'ailleurs éventuellement se ramener à ce cas en plongeant le corps de base  $k$  dans un corps algébriquement clos  $\bar{k}$ .

b) Lorsque le corps de base est  $\mathbf{R}$ , la forme anisotrope et le point  $a$  quelconque.

c) Lorsque le corps de base est  $\mathbf{R}$ , la forme de Lorentz et le point  $a$  dans  $\mathbf{K}$ . On notera que dans ce cas il n'y a pas de droite isotrope dans  $a^*$ .

### Opération sur la polaire $A$

Dans son opération sur  $A$ , le groupe  $H_a$  n'a pas de points fixes, il échange les points isotropes éventuels (les points de  $A \cap \Gamma$ ). Le groupe  $H_a^+$  fixe les points isotropes. Si l'on restreint l'opération à  $A$  privé de ses points isotropes, elle est sans point fixe.

3. Attention, en dimension 2, les groupes  $PO$  et  $PO^+$  ne sont pas égaux.

4. L'argument vaut pour  $G_a$ . Pour  $G_a^+$  il faut noter qu'il y a toujours un élément de  $G_a^-$  qui laisse invariante une droite non isotrope donnée passant par  $a$ .

Comme ci-dessus, cette opération n'est pas transitive en général (deux points  $b$  et  $c$  de  $A$  sont dans la même orbite si et seulement si on a  $q(b) = q(c)$  dans  $k^*/k^{*2}$ ) mais elle l'est dans les cas duaux des précédents.

- a) Lorsque le corps  $k$  est algébriquement clos.
- b) Lorsque le corps de base est  $\mathbf{R}$  et la forme elliptique ( $A$  quelconque).
- c) Lorsque le corps de base est  $\mathbf{R}$ , la forme hyperbolique et la droite  $A$  extérieure.

Dans le cas d'une droite hyperbolique, le groupe est transitif sur les points de  $A \cap \mathbf{K}$ .

### 8.2.3 Angles orientés de droites, pseudo-vecteurs : le cas général

#### Les définitions

Ce paragraphe vise essentiellement à montrer que la théorie s'applique d'une manière très générale. On reprend les notations précédentes.

Notre objectif est de définir des vecteurs  $\overrightarrow{bc}$  pour certains points  $b, c \in A$  et des angles orientés de droites  $(B, C)$  pour certaines droites  $B, C \in a^*$ . On sait que le groupe quotient  $H_a^+ = G_a^+ / \{\text{Id}, \sigma_a\}$  est abélien, qu'il opère fidèlement sur  $A$  et sur  $a^*$  et que ses orbites sont déterminées par les valeurs de  $q$  ou  $q^*$ . On note alors, au choix,  $\mathcal{V}$ , groupe des vecteurs (resp.  $\mathcal{A}$ , groupe des angles) un groupe isomorphe à  $H_a^+$  mais noté additivement. Un même élément de  $H_a^+$  correspondant par cet isomorphisme à un vecteur  $\vec{v} \in \mathcal{V}$  (resp. un angle  $\theta \in \mathcal{A}$ ) sera noté, selon le point de vue adopté,  $t_{A, \vec{v}}$  (voire  $t_{\vec{v}}$ ) et appelé pseudo-translation d'axe  $A$  et de vecteur  $\vec{v}$  (resp.  $\rho(a, \theta)$ , voire  $\rho(\theta)$  et appelé pseudo-rotation de centre  $a$  et d'angle  $\theta$ ). **Attention**, le préfixe "pseudo" est là pour rappeler qu'un vecteur ou un angle détermine un élément unique  $\bar{t}$  de  $H_a^+$  (la pseudo-translation ou pseudo-rotation), mais que cet élément a deux antécédents dans  $G_a^+$  (donc dans  $PO(q)$ ), les éléments  $t$  et  $t\sigma_a = \sigma_a t$ .

On peut maintenant adopter la définition suivante :

#### 8.2.4 Définition.

- 1) Soient  $b, c \in A$  des points non isotropes vérifiant  $q(b) = q(c)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . On appelle vecteur<sup>5</sup> et on note  $\overrightarrow{bc}$  l'unique élément  $\vec{v} \in \mathcal{V}$  vérifiant  $t_{\vec{v}}(b) = c$ .
- 2) Soient  $B, C \in a^*$  deux droites non isotropes vérifiant  $q^*(B) = q^*(C)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . On appelle angle orienté des droites  $B$  et  $C$  et on note  $(B, C)$  l'unique élément  $\theta \in \mathcal{A}$  vérifiant  $\rho(\theta)(B) = C$ .

---

5. On dira plutôt pseudo-vecteur dans le cas général, le nom de vecteur étant réservé au cas hyperbolique où le groupe  $H_a^+$  s'identifie à un sous-groupe de  $G_a^+$ , ce qui assure que la translation de vecteur  $\vec{v}$  est un élément de  $PO(q)$ .

### 8.2.5 Remarques.

1) Le lecteur garde le droit de penser que cette définition n'est pas d'un grand intérêt. Il verra cependant dans le paragraphe sur les composées d'involutions comment on peut l'utiliser. Elle est donnée ici dans le but essentiel de montrer l'analogie des définitions d'angles orientés et de vecteurs.

2) N'ayons pas peur d'enfoncer le clou : dans le cas général les angles et les vecteurs, les (pseudo) translations et les (pseudo) rotations, sont une seule et même chose, la seule différence étant ce sur quoi on opère : droite  $A$  ou droite duale  $a^*$  ! Dans le cas réel on aura cependant tendance à parler de vecteurs lorsque le groupe est du type  $k^*$  et d'angles lorsqu'il est de la forme  $\mathbf{U}_k$ , voir ci-dessous.

3) Même si cette définition peut sembler biscornue, les angles et les vecteurs définis ci-dessus vérifient bien les propriétés usuelles ; Chasles, le parallélogramme<sup>6</sup>, etc.

4) Attention, dans le cas général, cela n'a aucun sens de comparer des angles de sommets différents (ou des vecteurs d'axes différents) car ces angles ne vivent pas dans le même groupe, ni même dans des groupes isomorphes. En effet, les groupes  $G_a^+$  et  $G_b^+$  (resp.  $H_a^+$  et  $H_b^+$ ) sont isomorphes si  $a$  et  $b$  peuvent être échangés par  $PO(q)$ , mais sinon ils ne le sont pas (en général). Ainsi, en géométrie hyperbolique réelle, les groupes  $H_a^+$  correspondant à des points intérieurs ou extérieurs ne sont pas isomorphes. C'est aussi le cas en géométrie elliptique sur  $\mathbf{Q}$ , voir exercice 8.8.1.

5) Lorsque les points  $a$  et  $b$  vérifient  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$ , on pourrait imaginer comparer les angles de droites orientés en  $a$  et  $b$  via la conjugaison des rotations associées. En général ce n'est pas possible, faute d'une notion d'isométrie positive ou négative, voir exercice 8.8.4 : l'égalité des angles non orientés suffit à assurer la conjugaison dans  $PO(q)$ . Dans le cas hyperbolique réel, voir 8.6.5.

### Deux exemples de récupération

Dans ce paragraphe, on donne deux exemples (composées de symétries et milieux) où l'on peut retrouver les résultats euclidiens usuels dans le langage introduit ci-dessus.

Nous avons vu qu'un vecteur (resp. un angle) ne détermine pas entièrement un élément  $t$  de  $PO(q)$  mais qu'il lui en correspond deux, à savoir  $t$  et  $\sigma_a t$ . En revanche, le carré de cet élément est bien déterminé (car on a  $(\sigma_a t)^2 = t^2$  puisque  $t$  et  $\sigma_a$  commutent). Pour des points ou des droites d'une même or-

---

6. Bien entendu, pour pouvoir écrire l'équivalence  $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'} \iff \overrightarrow{aa'} = \overrightarrow{bb'}$ , il faut supposer qu'on a  $q(a) = q(b) = q(a') = q(b')$  dans  $k^*/k^{*2}$ .

bite, on retrouve ainsi la description des composées de symétries en termes de (pseudo) vecteur double ou d'angle double :

**8.2.6 Proposition.** *Soit  $A$  une droite non isotrope,  $a$  son pôle, soient  $b, c \in A$  deux points vérifiant  $q(b) = q(c)$  dans  $k^*/k^{*2}$  et soient  $B, C$  leurs polaires. Soit  $t \in G_a^+$  vérifiant  $\bar{t} = t_{\overrightarrow{bc}} = \rho(a, (B, C))$ . On a  $\sigma_c\sigma_b = \tau_C\tau_B = t^2$ .*

*Démonstration.* Cela résulte du lemme suivant :

**8.2.7 Lemme.**

1) *Soient  $b, c \in \mathbf{P}(E)$  deux points non isotropes tels que  $A = (bc)$  soit non isotrope. Soit  $a$  le pôle de  $A$ . Si  $t$  est un élément de  $G_a^+$  qui envoie  $b$  sur  $c$ , on a  $t^2 = \sigma_c\sigma_b$ .*

2) *Soient  $B, C$  deux droites non isotropes telles que leur point d'intersection  $a$  soit non isotrope. Si  $\rho$  est un élément de  $G_a^+$  qui envoie  $B$  sur  $C$ , on a  $\rho^2 = \tau_C\tau_B$ .*

*Démonstration.* Les deux assertions sont identiques, à polarité près. Pour 1), on peut écrire  $t = \sigma_d\sigma_b$  avec  $d \in A$  et on a alors  $\sigma_d(b) = c$ . On en déduit  $t^2 = \sigma_d\sigma_b\sigma_d\sigma_b$  et, comme  $\sigma_d\sigma_b\sigma_d = \sigma_c$  par le principe de conjugaison, on a le résultat.

On retrouve aussi la caractérisation vectorielle des milieux :

**8.2.8 Proposition.** *Soit  $A$  une droite non isotrope,  $a$  son pôle et  $b, c, m \in A$  des points vérifiant  $q(b) = q(c) = q(m)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Alors  $m$  est un milieu de  $b, c$  si et seulement si on a la relation  $\overrightarrow{bm} = \overrightarrow{mc}$ .*

*Démonstration.* Soit  $t \in G_a^+$  envoyant  $b$  sur  $m$  (autrement dit tel que  $\bar{t} \in H_a^+$  soit une pseudo-translation de vecteur  $\overrightarrow{bm}$ ). Soit  $\sigma_m$  la symétrie de point de Frégier  $m$ . On a  $\sigma_m t \sigma_m = t^{-1}$  en vertu de 1.4.23 et, dans  $H_a^+$ , c'est une pseudo-translation de vecteur  $-\overrightarrow{bm}$ . Mais, si l'on pose  $c' = \sigma_m(b)$ ,  $t^{-1}$  envoie  $c'$  sur  $m$ , de sorte que son image est aussi une translation de vecteur  $\overrightarrow{c'm}$  et on a donc  $\overrightarrow{bm} = \overrightarrow{mc'}$ . On en déduit le résultat.

**8.2.9 Remarque.** L'exemple des points  $b = (1, 0, 0)$ ,  $c = (0, 1, 0)$  dans le cas  $k = \mathbf{Q}$ ,  $q = X^2 + Y^2 + T^2$  montre la nécessité de l'hypothèse sur  $q(m)$  : dans ce cas, le vecteur  $\overrightarrow{bm}$  n'existe pas.

## 8.3 Le cas réel : les angles orientés

Dans ce paragraphe on suppose  $k = \mathbf{R}$ , on considère un point  $a \in \mathbf{P}(E)$  et sa polaire  $A$ . On suppose que  $a$  est, soit dans le plan elliptique  $\mathbf{E}$ , soit dans le plan hyperbolique  $\mathbf{K}$ , de sorte que  $q|_A$  est une forme euclidienne.

### 8.3.1 La structure du groupe

Précisons d'abord la structure du groupe  $G_a^+$  dans ce cas :

**8.3.1 Proposition.** *On fixe un relèvement  $\hat{a} \in E$  de  $a$ , et on note  $\hat{A}$  le plan orthogonal à  $\hat{a}$  dans  $E$ . La forme  $q|_{\hat{A}}$  est euclidienne.*

1) *La donnée d'une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de  $\hat{A}$  détermine un isomorphisme de  $G_a^+$  sur le groupe  $\mathbf{U}$  des nombres complexes de module 1. Si l'on effectue, dans  $\hat{A}$ , un changement de base direct (resp. indirect) l'isomorphisme est inchangé (resp. est composé par l'application  $\rho \mapsto \rho^{-1}$ ).*

2) *Le groupe  $G_a^+$  est aussi isomorphe au groupe additif  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  via l'exponentielle  $\exp : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{U}$ . On note  $\rho(a, \bar{\theta})$  l'image de  $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  par l'isomorphisme réciproque et on l'appelle **rotation** de centre  $a$  et d'angle  $\bar{\theta}$  (ou  $\theta$  par abus de langage). Dans la base de  $E$  formée de  $\hat{a}$  et de  $\mathcal{B}$ , la*

*matrice de  $\rho(\theta)$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ . Si l'on change la base  $\mathcal{B}$ , l'angle  $\theta$*

*est inchangé (resp. changé en  $-\theta$ ) si le changement de base est direct (resp. indirect).*

*Démonstration.* C'est essentiellement 1.4.25 .

**8.3.2 Remarque.** Dans le cas hyperbolique, si l'on a orienté le plan  $\mathbf{K}$ , voir 5.4.16, il y a une façon canonique de choisir, pour tous les points  $a \in \mathbf{K}$ , à changement de base direct près, une base orthonormée dans le plan  $\hat{A}$ , avec  $A = a^\perp$ , donc un isomorphisme de  $G_a^+$  sur  $\mathbf{U}$ . On procède de la façon suivante. On choisit, en  $a$ , un repère orthogonal direct  $a; b, c$  avec  $b, c \in \mathbf{K}$ . On choisit des relèvements de ces points (notés encore  $a, b$  et  $c$ ) de sorte que l'on ait  $\varphi(a, b)\varphi(a, c) > 0$  (\*). On considère alors les vecteurs  $b' = \varphi(a, b)a - q(a)b$  et  $c' = \varphi(a, c)a - q(a)c$ . Il est clair que  $b'$  et  $c'$  sont dans  $\hat{A}$ . Ils en forment une base orthogonale pour la forme euclidienne  $q|_{\hat{A}}$  (car on a  $q(a)\varphi(b, c) = \varphi(a, c)\varphi(a, b)$  à cause de l'orthogonalité de  $(ab)$  et  $(ac)$ , voir 1.2.3). On en déduit une base orthonormée  $(b'', c'')$  en divisant ces vecteurs par leurs normes. Si l'on change les relèvements en  $\lambda a, \mu b$  et  $\nu c$  en conservant la condition (\*),  $b'$  et  $c'$  sont respectivement multipliés par  $\lambda^2\mu$  et  $\lambda^2\nu$ , mais comme  $\mu\nu$  est  $> 0$  en vertu de (\*), la base  $(b'', c'')$  ne change pas d'orientation.

Bien entendu, faute d'orientation, il n'y a rien de tel en géométrie elliptique.

**8.3.3 Proposition.** *On conserve les notations de 8.3.1. Soit  $\rho(a, \bar{\theta})$  une rotation et soit  $u \in PO(q)$ . La conjuguée  $u\rho u^{-1}$  est une rotation de centre  $u(a)$  et d'angle  $\bar{\theta}$  ou  $-\bar{\theta}$  selon le choix d'une base de  $u(a)^\perp$ . Dans le cas de la*

géométrie hyperbolique, si l'on choisit une orientation de  $\mathbf{K}$ , ce qui permet de choisir une base dans chaque plan  $a^\perp$  pour  $a \in \mathbf{K}$  (voir 8.3.2), on peut préciser que l'angle de la conjuguée est  $\bar{\theta}$  si  $u$  est dans  $\Omega(q)$  et  $-\bar{\theta}$  sinon.

*Démonstration.* C'est clair sur la forme matricielle des rotations. Le cas hyperbolique résulte de 8.3.2.

## 8.3.2 Angles orientés de demi-droites

### L'opération

Dans le cas réel, l'opération de  $G_a^+$  est transitive sur l'ensemble  $a^*$  des droites passant par  $a$  mais elle est infidèle car  $\sigma_a = \tau_A$  opère trivialement sur  $a^*$  : en un mot, le groupe est deux fois trop gros par rapport à l'ensemble. Pour y remédier, il y a deux solutions possibles. La première, vue ci-dessus dans le cas général, consiste à diminuer le groupe de moitié en utilisant le quotient  $H_a^+ = G_a^+ / \{\text{Id}, \sigma_a\}$ , et nous l'examinerons au paragraphe suivant. La seconde, qui s'applique ici, consiste à employer un ensemble deux fois plus gros que  $a^*$ , sur lequel  $G_a^+$  sera fidèle : l'ensemble des demi-droites.

**8.3.4 Proposition.** *On suppose soit qu'on est en géométrie elliptique, soit qu'on est en géométrie hyperbolique et que  $a$  est un point de  $\mathbf{K}$ . Alors le groupe  $G_a^+$  opère simplement transitivement sur l'ensemble  $\mathcal{D}_a$  des demi-droites issues de  $a$ .*

*Démonstration.* On choisit un point  $b$  dans  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{K}$ , distinct de  $a$  et non orthogonal à  $a$ . On considère le cercle  $\mathcal{C}(a, b)$ . En vertu de 7.2.7 et 7.2.8, l'application de  $\mathcal{C}(a, b)$  sur  $\mathcal{D}_a$  qui à un point  $c$  associe  $[ac]$  est bijective. On applique alors 8.2.1.

### Les angles

Vu 8.3.4 on peut appliquer la théorie générale avec  $H = G_a^+$  et  $X = \mathcal{D}_a$ .

**8.3.5 Définition.** *Soient  $a, b, c$  trois points distincts<sup>7</sup> de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{K}$ . On identifie le groupe  $G_a^+$  avec  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  comme expliqué ci-dessus<sup>8</sup>. On appelle **angle orienté** des demi-droites  $[ab]$  et  $[ac]$  et on note  $([ab], [ac])$  (voire  $(\vec{ab}, \vec{ac})$ ) l'angle de l'unique rotation de centre  $a$  qui envoie  $[ab]$  sur  $[ac]$ .*

7. Si l'on est dans  $\mathbf{E}$ , il faut supposer aussi que  $b$  et  $c$  ne sont pas orthogonaux à  $a$  sinon les demi-droites ne sont pas définies.

8. On a donc choisi une base orthonormée de l'orthogonal  $A$  de  $a$ .

**8.3.6 Corollaire.** *Les angles orientés de demi-droites issues de  $a$  vérifient les propriétés de 8.1.3 : la relation de Chasles, la règle du parallélogramme, la conservation de l'angle par les éléments de  $G_a^+$ .*

Pour les éléments de  $G_a^-$  on a la proposition suivante :

**8.3.7 Proposition.** *Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{K}$  et soit  $g \in G_a^-$ . Posons  $b' = g(b)$  et  $c' = g(c)$ . On a  $([ab'], [ac']) = -([ab], [ac])$ . On a  $([ac], [ab]) = -([ab], [ac])$ .*

*Démonstration.* La première formule résulte de la formule de conjugaison : si  $h$  est dans  $G_a^+$  et  $g$  dans  $G_a^-$  on a  $ghg^{-1} = h^{-1}$ . La seconde est évidente.

Lorsqu'on fait agir toutes les isométries, on doit se contenter de résultats partiels :

**8.3.8 Proposition.** *Soient  $a, b, c$  trois points de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{K}$  et soit  $g \in PO(q)$ . Posons  $a' = g(a)$ ,  $b' = g(b)$  et  $c' = g(c)$ . On suppose choisies des bases dans les plans vectoriels relevant  $a^\perp$  et  $(a')^\perp$ . On a alors  $([a'b'], [a'c']) = \pm([ab], [ac])$ . Dans le cas hyperbolique, si on choisit les bases selon le procédé expliqué en 8.3.2, on peut préciser qu'on a  $([a'b'], [a'c']) = ([ab], [ac])$  si  $g$  est dans  $\Omega(q)$  et  $([a'b'], [a'c']) = -([ab], [ac])$  sinon.*

*Démonstration.* C'est le résultat sur la conjugaison 8.3.3.

### Lien avec les angles non orientés de demi-droites

Le lien entre les deux notions d'angles de demi-droites est le même que dans le cas euclidien :

**8.3.9 Proposition.** *Soient  $a, b, c$  trois points distincts de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{K}$ . Soit  $\widehat{bac} \in [0, \pi]$  l'angle non orienté des demi-droites  $[ab]$  et  $[ac]$  (voir 5.5.7) et soit  $\bar{\theta} = ([ab], [ac]) \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  leur angle orienté. Si on choisit un relèvement  $\theta \in [-\pi, \pi]$ , on a  $\widehat{bac} = |\theta|$ .*

*Démonstration.* Vu le résultat sur la conjugaison des rotations, il suffit de faire le calcul pour un  $a$  particulier. Traitons par exemple le cas hyperbolique. On prend  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (\beta, 0, 1)$  et  $c = \rho(b)$  où  $\rho$  est la rotation d'angle  $\theta$  :

$$\rho = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 On en déduit  $c = (\beta \cos \theta, \beta \sin \theta, 1)$ . Pour calculer

$\widehat{bac}$ , on calcule  $a \wedge b = (0, \beta, 0)$  et  $a \wedge c = (-\beta \sin \theta, \beta \cos \theta, 0)$ . et on a, en vertu de 5.5.7,  $\cos \widehat{bac} = \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\sqrt{|q(a \wedge b)q(a \wedge c)|}} = \cos \theta$ . Si on choisit un relèvement  $\theta$

dans  $[-\pi, \pi]$ , comme  $\widehat{bac}$  est dans  $[0, \pi]$ , on en déduit bien qu'on a  $\widehat{bac} = |\theta|$ .

### 8.3.10 Commentaire. (Mise en garde)

*Attention, il est indispensable, à ce moment du texte, de ne pas laisser le lecteur se faire des illusions. Même si toute cette théorie ressemble diablement au cas euclidien, il y a des différences importantes. Tout d'abord, lorsqu'on considère des angles (orientés) de sommets différents, ils vivent certes dans le même groupe  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ , mais on a vu qu'en géométrie elliptique, on n'a pas de moyen de choisir de manière cohérente un isomorphisme entre  $G_a^+$  et  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ , de sorte que, lorsqu'on change de centre, les angles ne peuvent guère se comparer qu'au signe près, ce qui nous ramène au cas des angles non orientés, déjà examiné plus haut. Cette difficulté disparaît dans le cas hyperbolique, puisque, grâce à l'orientation, on a une façon cohérente de choisir les isomorphismes qui permet d'avoir la conservation des angles et les propriétés de conjugaison. Cependant, dans les deux cas, il y a une autre différence, et celle-là, majeure, essentielle, fondamentale, avec le cas euclidien, c'est que, si l'on travaille avec des angles de sommets différents, il faut pratiquement s'interdire de les additionner. La raison en est explicitée ci-dessous : l'application qui à une rotation associe son angle n'est pas un homomorphisme si l'on travaille avec des rotations de centres distincts. Cela revient à dire qu'en géométrie non euclidienne la relation de Chasles ne vaut pas pour des angles de sommets différents. Un autre aspect de cette difficulté apparaît quand on considère un théorème comme celui de l'angle inscrit dans sa variante orientée. Nous verrons plus loin que ce résultat ne peut valoir en non euclidien.*

La meilleure façon de se convaincre de ces difficultés est de revenir au triangle :

**8.3.11 Proposition.** *Soient  $a, b, c$  trois points distincts et non orthogonaux de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{K}$ . On considère les rotations  $\rho_a, \rho_b, \rho_c$  de centres  $a, b, c$  et d'angles respectifs  $([ab], [ac]), ([bc], [ba])$  et  $([ca], [cb])$ . Alors, la composée  $u = \rho_a \rho_b \rho_c$  est une symétrie de centre  $o \in (ac)$ .*

*Démonstration.* Les rotations transforment successivement la droite  $(ac)$  en  $(bc)$ , puis en  $(ab)$ , puis en  $(ac)$ , donc l'isométrie  $u$  conserve  $(ac)$ . Elle fixe donc le pôle  $d$  de  $(ac)$  (la droite  $(ac)$  n'est pas isotrope). La restriction de  $u$  à  $(ac)$  est une isométrie. En vertu de 5.6.7.3, si on montre qu'elle "change le sens" des demi-droites sur  $(ac)$ , on en déduira que c'est une symétrie centrale sur  $(ac)$ . Comme elle fixe  $d$  ce sera bien une symétrie centrale.

Pour cela, on part de la demi-droite  $[ca]$  que  $\rho_c$  transforme en  $[cb]$ . Comme l'image de  $[bc]$  par  $\rho_b$  est  $[ba]$ , l'image de  $[cb]$  est une demi-droite de sens opposé à  $[ba]$  donc de même sens que  $[ab]$ . Comme l'image de  $[ab]$  par  $\rho_a$  est



$[ac)$ , on voit que l'image de  $[ca)$  par  $u$  est une demi-droite de même sens que  $[ac)$  donc de sens opposé à  $[ca)$ , cqfd.

**8.3.12 Corollaire.** *L'application  $\rho \mapsto \theta$  qui à une rotation associe son angle n'est pas un homomorphisme pour des rotations de sommets distincts. La relation de Chasles n'est pas valable pour des angles de sommets différents.*

*Démonstration.* Reprenons les notations de 8.3.11. L'angle de  $\rho_c$  est  $\gamma = ([ca), [cb))$ , celui de  $\rho_b$  est  $\beta = ([bc), [ba))$ , celui de  $\rho_a$ ,  $\alpha = ([ab), [ac))$ . Si l'application  $\rho \mapsto \theta$  était un homomorphisme, comme l'angle de la composée  $\sigma_o$  vaut  $\pi$  puisque  $\sigma_o$  est une symétrie centrale, on aurait  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  modulo  $2\pi$ . On peut choisir des représentants de  $\alpha, \beta, \gamma$  dans  $[-\pi, \pi]$  et, en passant aux angles non orientés on obtient  $\pm|\alpha| \pm |\beta| \pm |\gamma| = \pm\pi$  ce qui, dans tous les cas, contredit les résultats sur la somme des angles d'un triangle 6.3.2, 6.3.5 ou 6.4.1.

En ce qui concerne la relation de Chasles, elle donnerait  $([ab), [ac)) + ([ca), [cb)) + ([bc), [ba)) = ([ab), [ac)) + ([ac), [bc)) + ([bc), [ba)) = ([ab), [ba)) = \pi$  et on a la même contradiction en passant aux angles non orientés.

### 8.3.3 Le cas réel : angles orientés de droites

Dans ce paragraphe, nous passons à la deuxième manière de lutter contre l'infidélité de  $G_a^+$  sur  $a^*$  : diminuer le groupe.

On suppose encore que le point  $a$  est soit dans le plan elliptique  $\mathbf{E}$ , soit dans le plan hyperbolique  $\mathbf{K}$ . La théorie générale s'applique avec  $H = H_a^+$  et  $X = a^*$  et le groupe  $H_a^+$  est le quotient du groupe  $\mathbf{U}$  des nombres complexes de module 1 par  $\{\pm 1\}$ . Il est donc aussi isomorphe à  $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$  (groupe des angles modulo  $\pi$ ). On peut alors donner la définition suivante (qui coïncide avec celle donnée dans le cas général, voir 8.2.4) :

**8.3.13 Définition.** *Soient  $a, b, c$  trois points distincts de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{K}$ . On appelle **angle orienté des droites**  $(ab)$  et  $(ac)$  et on note  $((ab), (ac))$  la classe modulo  $\pi$  de l'angle de l'une des deux rotations de centre  $a$  qui envoient  $(ab)$  sur  $(ac)$ .*

**8.3.14 Corollaire.** *Les angles orientés de droites **issues de**  $a$  vérifient les propriétés de 8.1.3 : la relation de Chasles, la règle du parallélogramme, la conservation de l'angle par les éléments de  $G_a^+$ .*

Relativement à  $G_a^-$  on a :

**8.3.15 Proposition.** *Soit  $a$  un point de  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{K}$  et soient  $A, B \in a^*$ . Si  $g$  est un élément de  $G_a^-$  et si on pose  $A' = g(A)$  et  $B' = g(B)$ , on a  $(A', B') = -(A, B)$ .*

*Démonstration.* C'est la formule de conjugaison :  $ghg^{-1} = h^{-1}$  pour  $g \in G_a^-$  et  $h \in G_a^+$ .

Ce résultat permet de faire le lien entre l'angle orienté et l'angle non orienté :

**8.3.16 Corollaire.** *Soient  $A, B, C, D$  des droites non isotropes se coupant en un même point  $a$ . On a  $I^*(A, B) = I^*(C, D)$  (ou encore, avec les notations de 5.2.2  $|A, B| = |C, D|$ ) si et seulement si on a  $(A, B) = (C, D)$  ou  $(A, B) = -(C, D)$ .*

La multiplication par 2, de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , induit un isomorphisme de  $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$  sur  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ , qui permet de retrouver un résultat classique en géométrie euclidienne :

**8.3.17 Proposition.** *Soient  $B, C$  deux droites se coupant en un point  $a$  de  $\mathbf{E}$  ou de  $\mathbf{K}$ . On a  $\tau_C\tau_B = \rho(2(B, C))$  où  $(B, C)$  est l'angle orienté des droites  $B$  et  $C$ .*

*Démonstration.* C'est la traduction de 8.2.7.2 dans ce cas.

**8.3.18 Remarque.** Les mêmes difficultés que dans le cas des angles de demi-droites surgissent dès qu'on veut ajouter des angles de droites de sommets différents : la relation de Chasles n'est plus vraie, etc.

## 8.4 Le cas réel : vecteurs sur une droite hyperbolique

Dans ce paragraphe, le corps est toujours le corps des réels, mais on suppose que  $q$  est la forme de Lorentz  $X^2 + Y^2 - T^2$ . On considère un point  $a$  non isotrope et sa polaire  $A$ .

### 8.4.1 Translations et commutateurs

Lorsque  $a$  est dans  $\mathbf{T}$  (point extérieur), la droite  $A$  est hyperbolique et l'opération de  $G_a^+$  sur  $A \cap \mathbf{K}$  est encore transitive, mais toujours infidèle. Pour surmonter l'infidélité, on va remplacer le groupe  $G_a^+$  par un groupe deux fois plus petit  $G_a^{++}$ , qui opérera fidèlement, comme on l'a fait pour définir les angles de droites, avec l'avantage ici que ce groupe sera non seulement un quotient de  $G_a^+$ , mais aussi un sous-groupe.

Cela va se faire à l'aide du groupe des commutateurs  $\Omega(q) = P\Omega(q)$ , voir §1.4.5 dont nous précisons maintenant<sup>9</sup> la trace sur  $G_a$  :

9. Le cas  $a \in \mathbf{K}$  est là pour mémoire et ne sera plus utilisé dans ce paragraphe.

**8.4.1 Proposition.** Soit  $a \in \mathbf{P}(E)$  un point non isotrope.

- 1) Si  $a$  est dans  $\mathbf{K}$  on a  $G_a \cap \Omega(q) = G_a^+$ .
- 2) Si  $a$  est dans  $\mathbf{T}$ , la droite  $A$  est l'image d'un plan vectoriel hyperbolique  $\widehat{A}$ . Les éléments de  $G_a^-$  sont les involutions  $\sigma_c$  avec  $c \in A$ . Une telle involution est dans  $\Omega(q)$  si et seulement si  $c$  est dans  $\mathbf{K}$ . Les éléments de  $G_a^+$  correspondent aux isométries de  $\widehat{A}$  qui ont pour matrices dans une base hyperbolique<sup>10</sup>  $e_1, e_2 : t(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$  avec  $\lambda \in \mathbf{R}^*$ , le cas  $\lambda = -1$  correspond à  $\sigma_a = \tau_A$ . Les éléments de  $G_a^+ \cap \Omega(q)$  sont ceux qui vérifient  $\lambda > 0$ .

*Démonstration.* On renvoie au paragraphe 1.4.5 ou à la Partie III pour les détails. Rappelons que la norme spinorielle de  $\sigma_c$  est égale à  $-q(c)$  dans  $k^*/k^{*2}$ , voir 1.4.14.

Si  $a$  est dans  $\mathbf{K}$  les éléments de  $G_a^-$  sont des involutions  $\sigma_c$  avec  $c$  extérieur. Ils sont donc de norme spinorielle  $-1$  et ceux de  $G_a^+$ , qui sont produits de deux éléments de  $G_a^-$ , sont au contraire de norme spinorielle  $+1$ .

Si  $a$  est dans  $\mathbf{T}$ , la droite  $A$  est hyperbolique donc contient des éléments de  $\mathbf{K}$  et de  $\mathbf{T}$ . Les éléments de  $G_a^-$  sont encore des involutions  $\sigma_c$ , avec  $c \in A$ . Une telle involution est dans  $\Omega(q)$  si et seulement si  $c$  est dans  $\mathbf{K}$ .

Un élément  $\sigma_b\sigma_c$  de  $G_a^+$  sera dans  $\Omega(q)$  si  $b$  et  $c$  sont de même type : tous deux dans  $\mathbf{T}$  ou tous deux dans  $\mathbf{K}$ , voir 1.4.16. Choisissons une base hyperbolique du plan vectoriel  $\widehat{A}$  qui relève  $A$ . Dans cette base on a  $q(x, y) = 2xy$ . Soit  $b = (\beta, 1)$  un vecteur non isotrope. L'élément  $\sigma_b$  de  $G_a^-$ , a pour matrice  $s(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ -1/\beta & 0 \end{pmatrix}$ . En effet, on vérifie aisément que les éléments de  $G_a^-$  ont bien des matrices de cette forme (voir [Per96] Ch. VIII) et cette matrice est bien celle de  $\sigma_b$  car  $b$  est le vecteur propre de  $s(\beta)$  relatif à la valeur propre  $-1$  (voir 1.4.20). On a  $q(b) = 2\beta$ , de sorte que  $b$  est dans  $\mathbf{K}$  ou dans  $\mathbf{T}$  selon le signe de  $\beta$ . Mais on a  $s(\beta)s(\gamma) = \begin{pmatrix} \beta/\gamma & 0 \\ 0 & \gamma/\beta \end{pmatrix} = t(\beta/\gamma)$  et cet élément est dans  $\Omega(q)$  si et seulement si  $\beta$  et  $\gamma$  sont de même signe, autrement dit<sup>11</sup> si  $\lambda = \beta/\gamma$  est  $> 0$ .

**8.4.2 Proposition-Définition.** Soient  $A$  une droite de  $\mathbf{K}$  et  $a$  son pôle, qui est élément de  $\mathbf{T}$ . On pose  $G_a^{++} = G_a^+ \cap \Omega(q)$ . On appelle **translation d'axe**  $A$  tout élément de  $G_a^{++}$ . Une translation d'axe  $A$  s'écrit comme produit de deux involutions  $\sigma_b\sigma_c$  avec  $b, c \in A$  tous deux dans  $\mathbf{K}$  ou tous deux dans  $\mathbf{T}$ . Le groupe  $G_a^{++}$  est isomorphe à  $H_a^+ = G_a^+/\{\text{Id}, \sigma_a\}$ .

10. C'est-à-dire une base formée de deux vecteurs isotropes.

11. On peut aussi utiliser le fait que  $\Omega(q)$  est engendré par les carrés, voir [Per96] ch. VI, §3, Ex. 4.

**8.4.3 Remarques.** On suppose  $a \in \mathbf{T}$ .

1) Il est clair que le groupe  $G_a^{++}$  est isomorphe à  $(\mathbf{R}^{+*}, \times)$  donc aussi à  $(\mathbf{R}, +)$  via le logarithme.

2) Si l'on remplace la base hyperbolique  $e_1, e_2$  de  $\widehat{A}$  par  $\epsilon_1 = e_1 + \frac{e_2}{2}$  et  $\epsilon_2 = e_1 - \frac{e_2}{2}$  la forme  $q$  devient  $x^2 - y^2$  dans cette base. Si  $\lambda$  est positif, on pose  $\lambda = e^v$  et la matrice de  $t(\lambda)$  devient  $T(v) = \begin{pmatrix} \text{ch } v & \text{sh } v \\ \text{sh } v & \text{ch } v \end{pmatrix}$  avec  $v \in \mathbf{R}$ .

Cette paramétrisation du groupe des translations d'axe  $A$  met en évidence l'isomorphisme  $T(v) \mapsto v$  de  $G_a^{++}$  sur  $(\mathbf{R}, +)$ .

3) Une translation est caractérisée comme un élément de  $\Omega(q)$  qui admet un unique point fixe extérieur, ou encore un élément de  $\Omega(q)$  qui admet un point fixe extérieur et n'est pas une involution, voir 1.4.31.

4) Les éléments de  $G_a^+$  qui ne sont pas dans  $\Omega(q)$  sont les composés des translations d'axe  $A$  avec la réflexion  $\tau_A$  (on les appelle des **symétries glissées**).

**8.4.4 Proposition.** *On suppose  $a \in \mathbf{T}$ . Le groupe  $G_a^{++}$  opère simplement transitivement sur  $A \cap \mathbf{K}$ . Si  $b, c$  sont dans  $A \cap \mathbf{K}$ , il y a donc une unique translation  $t_{bc}$  qui envoie  $b$  sur  $c$ .*

*Démonstration.* Cela résulte de l'isomorphisme de  $G_a^{++}$  et de  $H_a^+$ .

**8.4.5 Proposition.** *Soit  $t$  une translation d'axe  $A$  et  $g$  une isométrie. La conjuguée  $gtg^{-1}$  est une translation d'axe  $g(A)$ .*

*Démonstration.* Cela résulte de 8.4.3.3.

## 8.4.2 Vecteurs sur une droite hyperbolique

Dans le cas hyperbolique réel, on peut donner une définition des vecteurs un peu plus conforme à l'intuition que celle vue en 8.2.4. Étant donnés deux points  $b, c \in \mathbf{K}$ , 8.4.4 montre qu'il y a une unique translation qui envoie  $b$  sur  $c$ . Nous allons associer à cette translation un nombre réel (soit le  $\lambda$  de  $t(\lambda)$ , soit le  $v$  de  $T(v)$ ), mais il y a une difficulté car ce nombre n'est pas défini de façon univoque. En effet, dans le cas de  $t(\lambda)$ , si l'on échange les vecteurs isotropes  $e_1$  et  $e_2$ ,  $\lambda$  est changé en  $1/\lambda$ , dans le cas de  $T(v)$ , si l'on change  $\epsilon_1$  en  $-\epsilon_1$ ,  $v$  est changé en  $-v$ . Il faut donc préciser les choses :

**8.4.6 Définition.** *Soit  $A$  une droite hyperbolique de  $\mathbf{K}$  qui coupe  $\Gamma$  en  $i, j$ . On choisit une base hyperbolique  $e_1, e_2$  de  $\widehat{A}$  relevant  $i, j$  (dans cet ordre). Soient  $b, c \in A \cap \mathbf{K}$  et soit  $t_{bc}$  l'unique translation qui envoie  $b$  sur  $c$ . Le vecteur  $\overrightarrow{bc}$  est l'unique  $v \in \mathbf{R}$  tel que la matrice de  $t_{bc}$  dans la base  $e_1, e_2$  soit  $t(e^v)$ . Il revient au même de demander que la matrice de  $t_{bc}$  dans la base orthogonale  $\epsilon_1 = e_1 + \frac{e_2}{2}$  et  $\epsilon_2 = e_1 - \frac{e_2}{2}$  soit  $T(v)$ .*

*On notera désormais  $t_{\overrightarrow{bc}}$  la translation  $t_{bc}$ .*

### 8.4.7 Remarques.

- 1) Comme le groupe  $G_a^{++}$  est isomorphe à  $H_a^+$  (voir 8.4.2), la définition donnée ci-dessus est équivalente à celle des pseudo-vecteurs de 8.2.4.
- 2) Les vecteurs vérifient les propriétés usuelles : Chasles, le parallélogramme, etc.
- 3) On dit que la droite  $(bc)$  est **l'axe** de la translation de vecteur  $\vec{bc}$ . C'est la seule droite invariante par la translation comme on le voit en considérant son pôle. Les translations d'axe donné forment un groupe abélien isomorphe à  $(\mathbf{R}, +)$ .
- 4) La définition requiert une sorte d'orientation de la droite  $A$  par l'ordre imposé aux points de  $A \cap \Gamma$ . Voir ci-dessous pour une discussion.

La proposition suivante relève quelques similitudes avec le cas euclidien : les vecteurs, comme les mesures algébriques sur une droite euclidienne, apparaissent comme des distances munies d'un signe, et on a la formule usuelle pour le vecteur de la translation  $\sigma_a \sigma_b$ .

**8.4.8 Proposition.** Soient  $a, b \in \mathbf{K}$ . Rappelons que  $\vec{ab}$  est un élément de  $\mathbf{R}$ .

- 1) On a  $\vec{ab} = \pm d(a, b)$ .
- 2) Le vecteur de la translation  $\sigma_a \sigma_b$  est égal à  $2\vec{ba}$ .

*Démonstration.* 1) Le résultat est évident si  $a = b$ . Sinon, on calcule dans la droite hyperbolique  $(ab)$  en choisissant une base hyperbolique dans laquelle la forme est donnée par  $q(x, y) = 2xy$ . Posons  $d = d(a, b)$  et  $v = \vec{ab} \in \mathbf{R}$ . Si on note  $a = (x, y)$ , on a  $b = (\lambda x, y/\lambda)$  avec  $\lambda \in \mathbf{R}^{+*}$ ,  $\lambda = e^v$ . On en déduit  $q(a) = q(b) = 2xy$ ,  $\varphi(a, b) = xy(\lambda + 1/\lambda)$ . Cela donne  $I(a, b) = \operatorname{ch}^2 d = \operatorname{ch}^2 v$ , d'où  $v = \pm d$ .

2) C'est une conséquence de 8.2.7, mais on peut le montrer directement ici avec le paramétrage précédent. On pose  $a = (\alpha, 1)$ ,  $b = (\beta, 1)$ . Le calcul de  $t = \sigma_a \sigma_b$  a été fait dans la preuve de 8.4.1. On trouve que  $t$  admet une matrice diagonale de coefficients  $\alpha/\beta$  et  $\beta/\alpha$  et le vecteur  $v$  de  $t$  est donné par  $e^v = \alpha/\beta$ . Par ailleurs, la translation qui envoie  $b$  sur  $a$  admet une matrice diagonale de coefficients  $\mu, 1/\mu$  avec  $\mu > 0$  et  $\mu^2 = \alpha/\beta$ . Son vecteur  $w$  vérifie donc  $e^w = \mu$ , soit  $e^{2w} = \alpha/\beta = e^v$ , d'où  $v = 2w$ .

### 8.4.3 Mise en garde, suite

*De même que dans le cas des angles, il ne faut pas se laisser abuser par les analogies avec le cas euclidien, il y a des différences majeures, en voici quatre :*

- 1) Une translation hyperbolique a une unique droite invariante : son axe.

- 2) La composée de deux translations n'en est pas nécessairement une.  
 3) Même si le produit de deux translations est une translation, son vecteur n'est pas la somme des autres.  
 4) La définition du vecteur d'une translation nécessite une orientation de l'axe, et il n'y a pas d'orientation canonique valable pour toutes les droites de  $\mathbf{K}$ .

Nous allons examiner tous ces points. Le premier a été vu en 8.4.7.

Le second point est évidemment essentiel et il provient d'une raison algébrique incontournable : si les translations formaient un groupe ce serait un sous-groupe de  $\Omega(q)$  et il serait distingué car la conjuguée d'une translation en est une autre en vertu de 8.4.5. Or on sait que  $\Omega(q)$  est simple.

On peut aussi en donner des raisons plus concrètes, en examinant les composées possibles :

**8.4.9 Proposition.** *Soient  $D_1, D_2$  deux droites de  $\mathbf{K}$  et  $t_1, t_2$  deux translations d'axes respectifs  $D_1$  et  $D_2$ . Si les axes se coupent dans  $\mathbf{K}$  le produit  $t = t_2 t_1$  est une translation, s'ils se coupent sur  $\Gamma$ , le produit peut être une translation ou un déplacement parallèle, s'ils se coupent dans  $\mathbf{T}$  le produit peut être une translation, une rotation ou un déplacement parallèle (voir 1.4.28).*

*Démonstration.* Soit  $b$  le point d'intersection des axes. Supposons d'abord  $b \in \mathbf{K}$ . On peut alors écrire  $t_1 = \sigma_b \sigma_a$  et  $t_2 = \sigma_c \sigma_b$  avec  $a, c \in \mathbf{K}$  (voir 1.4.23 et 8.4.2) et on a  $t = t_2 t_1 = \sigma_c \sigma_a$ . Comme  $t$  laisse stable  $(ac)$  elle fixe  $(ac)^\perp$  qui est un point extérieur. De plus  $t$  est dans  $\Omega(q)$ . Enfin, ce n'est pas une involution (sinon les points  $a$  et  $c$  seraient orthogonaux, voir 1.4.9). C'est donc une translation en vertu de 8.4.3.

Supposons  $b \in \mathbf{T}$ . Le calcul est identique mais cette fois  $a$  et  $c$  sont aussi dans  $\mathbf{T}$  et la droite  $(ac)$  peut être hyperbolique, auquel cas  $t$  est une translation, extérieure, auquel cas  $t$  est une rotation ou tangente, auquel cas  $t$  est un déplacement parallèle.

Supposons  $b \in \Gamma$ . Le point  $b$  est un point fixe de  $t$ . Si  $c$ 'est le seul point fixe isotrope,  $t$  est un déplacement parallèle, sinon, c'est une translation. Voir exercice 8.8.12 pour des précisions.

Donnons maintenant une explication sur le point 3) (le vecteur d'une translation produit).

Reprenons le cas de trois points  $a, b, c$  de  $\mathbf{K}$  non alignés avec  $t_1 = \sigma_b \sigma_a$  et  $t_2 = \sigma_c \sigma_b$ . On a alors  $t = t_2 t_1 = \sigma_c \sigma_a$ . En vertu de 8.4.8.2, les vecteurs de ces translations sont respectivement les doubles de  $\vec{ab}$ ,  $\vec{bc}$  et  $\vec{ac}$ . Si le vecteur de  $t$  était somme des deux autres, on aurait la relation de Chasles :  $\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$ . En prenant les valeurs absolues et en notant  $ab$  la distance, on

aurait (en vertu de 8.4.8.1) l'une des relations  $ac = ab + bc$  ou  $ac = ab - bc$  ou  $ac = bc - ab$ , qui toutes signifient que les points  $a, b, c$  sont alignés (voir 5.1.16).

**8.4.10 Remarque.** Un autre argument permet de montrer que la relation de Chasles n'est pas universelle. On reprend les mêmes notations. L'axe de  $t = \sigma_c \sigma_a$  est  $(ac)$ . Posons  $a' = \sigma_a(b)$  et  $c' = t_2(b) = \sigma_c(b)$  de sorte que les vecteurs de  $t_1$  et  $t_2$  sont  $\overrightarrow{a'b}$  et  $\overrightarrow{bc'}$ . Si les vecteurs vérifiaient la relation de Chasles, celui de  $t$  serait donc  $\overrightarrow{a'c'}$  et l'axe de  $t$  serait  $(a'c')$ . On aurait donc  $(ac) = (a'c') = (aa') = (ab)$  et  $c'$  est absurde.

Enfin, discutons le point 4). On a vu que la définition des vecteurs sur la droite  $A$  dépend du choix d'un ordre sur les deux points de  $A \cap \Gamma$ . Le résultat suivant montre qu'il n'y a pas de bonne façon (i.e. continue) d'effectuer un tel choix, même en se limitant aux droites passant par l'origine :

**8.4.11 Proposition.** *Il n'existe pas d'application continue "choix d'un premier point parmi  $m$  et  $-m$ ", c'est-à-dire d'application  $f : \Gamma \rightarrow \Gamma$  qui vérifie  $f(m) = f(-m) = \pm m$ .*

*Démonstration.* Si une telle application existe,  $f(\Gamma)$  est compact donc fermé dans  $\Gamma$  et donc aussi son opposé  $-f(\Gamma)$ . Ces fermés sont disjoints, non vides et leur réunion est  $\Gamma$  ce qui contredit le fait que  $\Gamma$  est connexe.

#### 8.4.4 Horicycles et déplacements parallèles

Si  $a$  est un point isotrope, on a vu que le groupe  $G_a^+$  des déplacements parallèles (qui est abélien) opère transitivement sur les horicycles  $\mathcal{H}(a, b)$  (voir 7.3.1). De plus, ce groupe opère fidèlement sur  $\mathcal{H}(a, b) - \{a\}$ . En effet, on vérifie aussitôt sur la définition des déplacements parallèles de centre  $a$  que ces opérations n'ont pas d'autres points fixes que  $a$ . On peut donc (si l'on y tient) définir des "vecteurs" sur les horicycles. Retenons en tous cas le résultat suivant, à saveur de parallélogramme :

**8.4.12 Proposition.** *Soit  $a$  un point isotrope et  $g \in G_a^+$  un déplacement parallèle de centre  $a$ . Soit  $b$  un point quelconque,  $c$  un point de l'horicycle  $\mathcal{H}(a, b)$  et posons  $b' = g(b)$  et  $c' = g(c)$ . On a  $I(b, c) = I(b', c')$  et  $I(b, b') = I(c, c')$ .*

*Démonstration.* La première assertion résulte de la conservation de  $I$  par  $g$ . Pour la seconde, on note qu'il existe  $h \in G_a^+$  tel que  $c = h(b)$  et on a aussi  $c' = g(c) = gh(b) = hg(b) = h(b')$  puisque le groupe  $G_a^+$  est commutatif. La conclusion en découle.

## 8.5 Lotensatz et théorème de l'angle inscrit

Dans ce paragraphe, nous abordons le Lotensatz (ou théorème des perpendiculaires), un résultat dû à Hjelmslev et largement utilisé par Bachmann. Ce théorème est un succédané du théorème euclidien de l'angle inscrit. En effet, comme beaucoup de résultats sur les angles, ce dernier théorème est faux en géométrie non euclidienne. Nous verrons comment on peut comprendre ce phénomène en termes de triangles rectangles, voire de rectangles.

### 8.5.1 Le Lotensatz

#### Variante points

On commence par un lemme (voir figure<sup>12</sup> 8.1) :

**8.5.1 Lemme. (des deux triangles autopolaires)** Soient  $aa'a''$ ,  $bb'b''$  deux triangles autopolaires<sup>13</sup>. On suppose  $a \neq b$ ,  $a' \neq b'$ ,  $a'' \neq b''$ . On appelle  $d, d', d''$  les intersections des côtés  $(a'a'')$  et  $(b'b'')$ ,  $(a''a)$  et  $(b''b)$ ,  $(aa')$  et  $(bb')$  et  $c, c', c''$  les intersections de  $(a'b')$  et  $(a''b'')$ ,  $(a''b'')$  et  $(ab)$ ,  $(ab)$  et  $(a'b')$ . Alors, les triangles  $cc'c''$  et  $dd'd''$  sont conjugués (i.e.  $c$  est le pôle de  $(d'd'')$ , etc.)

*Démonstration.* Montrons par exemple que  $c$  est orthogonal à  $d'$  et  $d''$ . On sait que  $d'$  est intersection de  $(a''a)$  et  $(b''b)$ . Par hypothèse, la polaire de  $a'$  est  $(aa'')$ , de sorte que  $d'$  est conjugué de  $a'$ . De même, il est conjugué de  $b'$ . La polaire de  $d'$  est donc  $(a'b')$ . De la même manière, celle de  $d''$  est  $(a''b'')$ . Comme  $c$  est intersection de  $(a'b')$  et  $(a''b'')$  il est bien conjugué à la fois de  $d'$  et de  $d''$ .

On en déduit le résultat fondamental, par la méthode de Bachmann, cf. [Bac59] (voir figure 8.1) :

**8.5.2 Théorème. (Lotensatz)** Soient  $a, a', b, b'$  quatre points (non isotropes), distincts, non alignés et tels que  $a, a'$  (resp.  $b, b'$ ) soient conjugués. On appelle  $d''$  et  $c''$  les intersections respectives de  $(aa')$  et  $(bb')$  et de  $(ab)$  et  $(a'b')$ . Alors, le produit  $\sigma_b \sigma_{c''} \sigma_a$  est la symétrie  $\sigma_{c'}$  où  $c'$  est le point de  $(ab)$  orthogonal à  $d''$ .

*Démonstration.* On complète  $a, a'$  et  $b, b'$  par les pôles  $a'', b''$  de  $(aa')$  et  $(bb')$  pour obtenir des triangles autopolaires et on reprend les notations du lemme précédent. Les hypothèses sont réalisées ( $a''$  et  $b''$  sont distincts car  $a, a', b, b'$

12. Les figures sont faites dans le plan elliptique.

13. Rappelons que cela signifie que  $a, a', a''$  sont non isotropes et deux à deux conjugués.



ne sont pas alignés). En vertu de ce résultat, le point  $c'$  est à la fois le point de  $(ab)$  orthogonal à  $d''$  et l'intersection de  $(ab)$  et  $(a''b'')$ .

Comme  $a, b, c''$  sont alignés,  $\sigma_b\sigma_{c''}\sigma_a$  est une involution  $\sigma_u$ , avec  $u \in (ab)$  en vertu du lemme des trois involutions, voir 1.4.11. Il s'agit de voir que  $u$  est égal à  $c'$ , donc qu'il est sur  $(a''b'')$ . Pour cela, il suffit, toujours en vertu de 1.4.11, de montrer que  $g = \sigma_{b''}\sigma_u\sigma_{a''}$  est une involution. Or, on a  $g = \sigma_{b''}(\sigma_b\sigma_{c''}\sigma_a)\sigma_{a''} = \sigma_{b''}\sigma_{c''}\sigma_{a'}$  (en effet, comme  $bb'b''$  est autopolaire on a  $\sigma_{b''}\sigma_b = \sigma_{b'}$ ). Comme  $a', b', c''$  sont alignés, on a gagné.

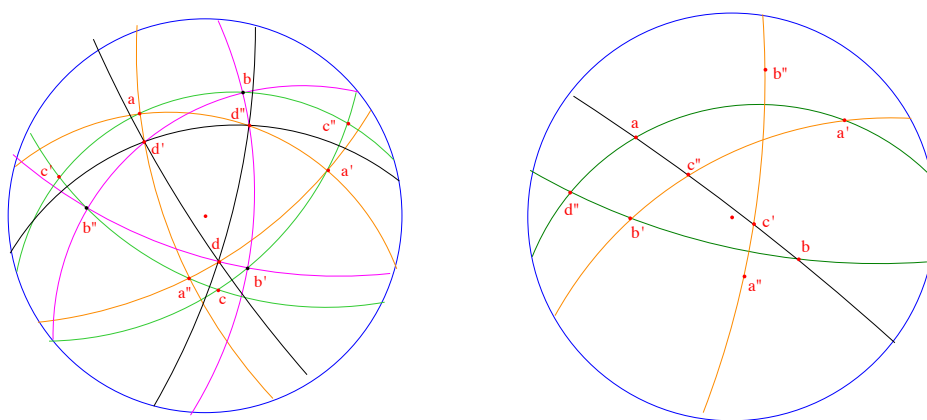


FIGURE 8.1 – À gauche le lemme des deux triangles autopolaires (orange et rose), à droite la preuve du Lotensatz

### 8.5.3 Remarques.

- 1) On peut encore écrire le résultat sous la forme  $\sigma_b\sigma_{c''} = \sigma_{c'}\sigma_a$  qui montre que  $bc''ac'$  est un parallélogramme aplati, voir 4.3.12. Si les pseudo-vecteurs existent on a encore  $\overrightarrow{bc''} = \overrightarrow{c'a}$ , voir 8.8.8.
- 2) Dans la configuration des deux triangles autopolaires, on a évidemment d'autres parallélogrammes aplatis obtenus par permutation circulaire des points de base.

### Variante droites

Voici l'énoncé original du Lotensatz (voir figure 8.2) :

**8.5.4 Théorème. (Lotensatz)** Soient  $A, A', B, B'$  quatre droites distinctes non isotropes et non concourantes telles que  $A, A'$  (resp.  $B, B'$ ) soient perpendiculaires. On appelle  $D''$  (resp.  $C''$ ) la droite qui joint les points d'intersection de  $A, A'$  et  $B, B'$  (resp.  $A, B$  et  $A', B'$ ). Alors, le produit  $\tau_{B'T}C''\tau_A$  est

la symétrie  $\tau_{C'}$  où  $C'$  est la droite perpendiculaire à  $D''$  passant par le point d'intersection de  $A$  et  $B$ .

**8.5.5 Remarque.** Cette fois on a une écriture en termes d'angles de droites :  $(B, C'') = (C', A)$  (s'ils existent). On peut encore dire que les droites  $A, B$  et  $C', C''$  ont les mêmes bissectrices.

*Démonstration.* Pas de démonstration : c'est le même théorème que ci-dessus, lu dans le dual.

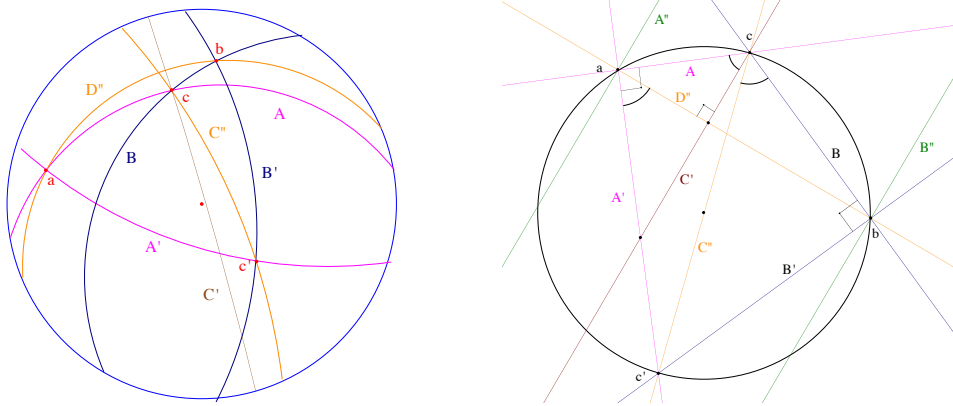


FIGURE 8.2 – Le Lotensatz des droites, à gauche en elliptique, à droite en euclidien

### Une démonstration tout de même ?

On considère  $u = \tau_B \tau_{C''} \tau_A$ . Comme ces droites concourent en un point  $c$ , en vertu du lemme des trois involutions  $u$  est une involution  $\tau_U$  relative à une droite  $U$  passant par  $c$ . Il reste à voir que  $U$  est perpendiculaire à  $D''$ . Pour cela on introduit les droites  $A''$  et  $B''$  perpendiculaires à  $D''$  respectivement en  $a$  (intersection de  $A, A'$ ) et  $b$  (intersection de  $B, B'$ ). On a alors  $\tau_A \tau_{A'} = \sigma_a = \tau_{A''} \tau_{D''}$  et  $\tau_B \tau_{B'} = \sigma_b = \tau_{B''} \tau_{D''}$  (on notera que ces produits sont commutatifs). On calcule alors  $v = \tau_{A''} \tau_{B''} \tau_U = \tau_{A''} \tau_{D''} \tau_{D''} \tau_{B''} \tau_U = \tau_A \tau_{A'} \tau_{B'} \tau_{B'} \tau_B \tau_{C''} \tau_A = \tau_A (\tau_{A'} \tau_{B'} \tau_{C''}) \tau_A$ . Comme  $A', B'$  et  $C''$  sont concourantes,  $\tau_{A'} \tau_{B'} \tau_{C''}$  est une involution, donc aussi  $v$  qui en est une conjuguée. En vertu du lemme des trois involutions, les droites  $A'', B'', U$  sont concourantes dans  $\mathbf{P}(E)$ . Comme  $A''$  et  $B''$  sont orthogonales à  $D''$  elles passent par le pôle  $d''$  de  $D''$ , donc aussi  $U$  qui est donc bien perpendiculaire à  $D''$ .

**8.5.6 Remarque.** Cette preuve se décalque dans le cas euclidien à la seule différence que les trois droites  $A'', B'', C''$  sont parallèles.

## 8.5.2 Lien avec le théorème de l'angle inscrit

Le Lotensatz, dans sa variante avec les droites, peut être vu comme un ersatz<sup>14</sup> du théorème de l'angle inscrit. En effet, si l'on imagine la situation de 8.5.4 en euclidien (voir figure 8.2) et qu'on appelle  $a, b, c, c'$  les intersections respectives de  $A, A'$ ;  $B, B'$ ;  $A, B$  et  $A', B'$ , les angles droits en  $a$  et  $b$  permettent d'affirmer que les quatre points  $a, b, c, c'$  sont cocycliques et on en déduit l'égalité d'angles  $(B, C'') = (D'', A')$ . Dans le cas non euclidien, on peut se demander si cette égalité d'angles est encore valable. Comme on a  $(B, C'') = (C', A)$  en vertu de 8.5.4, la question est donc l'égalité  $(C', A) = (D'', A')$ , propriété évidente en euclidien en utilisant les complémentaires. Attention, *a priori* la question n'a pas vraiment de sens car les angles en question ne sont pas en les mêmes points et on a vu en 8.2.5 avec quelles précautions il fallait manipuler ces notions. Que l'on considère cette égalité comme la conjugaison des rotations amenant respectivement  $C'$  sur  $A$  et  $D''$  sur  $A'$ , voire celle des rotations  $\tau_{C'}\tau_A$  et  $\tau_{D''}\tau_{A'}$  ou encore, sur  $\mathbf{R}$ , comme l'égalité dans  $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$ , dans tous les cas, on en déduit l'égalité d'angles non orientés  $I^*(C', A) = I^*(D'', A')$  (voir 8.8.4 et 8.3.16). Mais, on est alors dans la situation d'un triangle rectangle et de sa hauteur et on a vu dans l'exercice 4.7.18 que le résultat est faux en géométrie non euclidienne.

**8.5.7 Remarque.** On peut encore faire le lien avec un autre défaut de la géométrie non euclidienne. En effet, dans le cas euclidien, comme les droites  $C', D''$  (resp.  $A, A'$ ) sont perpendiculaires, il existe une rotation d'angle  $\pm\pi/2$  qui envoie  $C'$  sur  $D''$  et  $A$  sur  $A'$ . On en déduit les égalités d'angles  $(C', A) = (D'', A')$  puis  $(D'', A') = (D'', A) + (A, A') = (D'', A) + (C', D'') = (C', A)$  et on retrouve la formule vue en 8.5.5. En revanche, il n'existe pas de telle transformation en non euclidien (sinon, il y aurait des rectangles, voir 8.8.10).

## 8.6 Les classes de conjugaison de $PO(q)$ dans le cas réel

Dans cette section nous faisons le bilan sur les classes de conjugaison des isométries. Nous avons choisi de nous limiter au cas  $k = \mathbf{R}$ . Dans le cas d'un corps quelconque on a vu en 4.2.4 que s'ajoutent nombre de problèmes de nature arithmétique.

---

14. C'est le cas de le dire!

### 8.6.1 Le cas elliptique

Dans ce cas, la situation est bien simple :

**8.6.1 Proposition.** *On suppose qu'on a  $k = \mathbf{R}$  et que  $q$  est une forme anisotrope. Les éléments de  $PO(q)$  sont l'identité, les involutions  $\sigma_a = \tau_A$  et les rotations  $\rho(a, \theta)$  avec  $a \in \mathbf{E}$  et  $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ ,  $\theta \neq 0, \pi$  (voir 8.3.1). Les involutions sont toutes conjuguées. Deux rotations sont conjuguées si et seulement si leurs angles sont égaux ou opposés. Les classes de conjugaison des rotations sont donc en bijection avec  $]0, \pi[$ .*

*Démonstration.* On a vu en 1.4.9 que tous les éléments de  $PO(q)$  ont au moins un point fixe, donc habitent l'un des groupes  $G_a$ . Comme  $PO(q)$  est transitif sur  $\mathbf{P}(E)$ , les points sont tous équivalents et on a une description des éléments de  $G_a$  (voir 1.4.23 et 8.3.1). La conjugaison des involutions a été vue en 4.2.4. Pour les rotations, on fixe un point  $a$ . Par transitivité, toute rotation est conjuguée d'une rotation de centre  $a$  et d'angle  $\theta \neq 0, \pi$  (les rotations d'angle  $\pi$  sont des involutions). On a vu en 1.4.23 que  $\rho = \rho(a, \theta)$  et  $\rho^{-1} = \rho(a, -\theta)$  sont conjuguées. Réciproquement, si deux rotations  $\rho$  et  $\rho'$  d'angles  $\theta$  et  $\theta'$  sont conjuguées<sup>15</sup> :  $\rho' = g\rho g^{-1}$ , quitte à les conjuguer encore on peut les supposer de même centre  $a$ , de sorte que  $g$  fixe  $a$ . Mais alors, si  $g$  est dans  $G_a^+$  on a  $g\rho g^{-1} = \rho$ , tandis que s'il est dans  $G_a^-$  on a  $g\rho g^{-1} = \rho^{-1}$ , d'où le résultat.

### 8.6.2 Le cas hyperbolique

Les choses sont plus compliquées dans le cas hyperbolique car il y a maintenant trois sortes de points (intérieurs, extérieurs ou isotropes) :

**8.6.2 Proposition.** *On suppose qu'on a  $k = \mathbf{R}$  et que  $q$  est une forme de Lorentz. Les éléments de  $PO(q)$  sont l'identité, les involutions  $\sigma_a = \tau_A$ , avec  $a$  non isotrope, les rotations  $\rho(a, \theta)$ , avec  $a \in \mathbf{K}$  et  $\theta \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ ,  $\theta \neq 0, \pi$ , les translations  $t_{A, \vec{v}}$  où  $A$  désigne une droite hyperbolique (c'est-à-dire rencontrant  $\mathbf{K}$  en deux points) et où  $\vec{v}$  est un réel, les symétries glissées<sup>16</sup>, composées d'une translation d'axe  $A$  et de la symétrie  $\tau_A$  et enfin les déplacements parallèles de centre  $c$ , où  $c$  est isotrope (voir 1.4.28). Ces différents types de transformations ne sont pas conjugués entre eux. Il y a deux classes d'involutions correspondant aux cas  $a \in \mathbf{K}$  (c'est-à-dire  $A$  extérieure) et  $a \in \mathbf{T}$  (c'est-à-dire  $A$  hyperbolique). Deux rotations sont conjuguées si et seulement*

15. On peut aussi noter que la trace de  $\rho(a, \theta)$  est égale à  $1 + 2 \cos \theta$ .

16. Translations et symétries glissées constituent ce que nous avons appelé en 1.4.25 les transformations hyperboliques.

si leurs angles sont égaux ou opposés. Deux translations (resp. deux symétries glissées) sont conjuguées si et seulement si leurs vecteurs sont égaux ou opposés. Enfin, les déplacements parallèles sont tous conjugués.

*Démonstration.* En vertu de 1.4.9, tout élément  $g$  de  $PO(q)$  a au moins un point fixe  $a$ , donc est dans l'un des groupes  $G_a$ . Il faut distinguer trois cas :  $a \in \mathbf{K}$ ,  $a \in \mathbf{T}$  et  $a \in \Gamma$ . Le cas des involutions ayant été traité en 4.2.4, nous supposons désormais que  $g$  n'est pas une involution. Dans le cas où  $a$  est non isotrope, cela nous permet de nous limiter désormais aux éléments de  $G_a^+$ , car ceux de  $G_a^-$  sont des involutions.

Si  $g$  admet un point fixe  $a \in \mathbf{K}$ , on peut appliquer 8.3.1 et  $g$  est une rotation.

Supposons que  $g$  admet un point fixe  $a \in \mathbf{T}$  et soit  $A$  la polaire de  $a$ . Les éléments de  $G_a^+$  sont alors les translations (qui sont dans  $G_a^{++}$ ), ou les composées (commutatives) des translations avec la symétrie  $\tau_A$  (voir 8.4.1 et 8.4.3).

Il reste enfin le cas où  $g$  admet un point fixe  $a$  isotrope. S'il en admet deux, on a vu en 1.4.31 que  $g$  est une transformation hyperbolique et on est ramené au cas précédent. Si  $a$  est l'unique point fixe de  $g$ , on est dans le cas d'application de 1.4.28 et  $g$  est un déplacement parallèle.

Le nombre et la nature des points fixes permettent de montrer que les involutions, les rotations, les transformations hyperboliques et les déplacements parallèles sont dans des classes de conjugaison distinctes. De plus, translations et symétries glissées ne sont pas conjuguées car les unes sont dans  $\Omega(q)$  et les autres non. Étudions maintenant les classes à l'intérieur de chaque type. Pour les rotations les arguments donnés ci-dessus dans le cas elliptique restent valables. Soient  $t = t_{A,\vec{v}}$  et  $t' = t_{A',\vec{v}'}$  deux translations conjuguées :  $t' = utu^{-1}$ . On peut supposer  $A = A'$  et  $u$  laisse alors stable la droite  $A$  donc est dans  $G_a$ . On a alors  $t' = t$  si  $u$  est dans  $G_a^+$  et  $t' = t^{-1}$  s'il est dans  $G_a^-$ , d'où le résultat. L'argument est identique pour les symétries glissées.

Pour montrer que les déplacements parallèles sont tous conjugués, on note d'abord que le groupe  $PO(q)$  est transitif sur les isotropes (voir 4.2.1). Un calcul immédiat donne le lemme suivant :

**8.6.3 Lemme.** On pose, pour  $\mu \in \mathbf{R}^*$ ,  $T(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu \end{pmatrix}$ . On a alors, avec les notations de 1.4.27,  $T(\mu)U(\lambda)T(\mu)^{-1} = U(\lambda\mu)$ .

Comme  $T(\mu)$  est la matrice d'une transformation hyperbolique (d'axe la polaire de  $e_2$ ), les déplacements parallèles sont bien conjugués dans  $PO(q)$ .

**8.6.4 Remarque.** Les classes de conjugaison sont essentiellement repérées par la trace. Le lecteur vérifiera que deux transformations  $u, v \in PO(q)$ , qui ne sont ni l'identité ni des symétries, sont conjuguées dans  $PO(q)$  si et seulement si elles ont même trace. La trace est plus petite que  $-1$  pour les symétries glissées, égale à  $-1$  pour les symétries, comprise entre  $-1$  et  $3$  pour les rotations, égale à  $3$  pour l'identité et les déplacements parallèles et supérieure à  $3$  pour les translations (cf. 1.5.12).

**8.6.5 Remarque.** Il reste à préciser les classes de conjugaison de  $\Omega(q)$ . Les isométries qui sont dans  $\Omega(q)$  sont les symétries centrales  $\sigma_a$  avec  $a \in \mathbf{K}$  (voir 1.4.14), les rotations et les translations (8.4.1) et les déplacements parallèles (car ils sont produits de deux symétries axiales d'axes se coupant sur  $\Gamma$ , donc tous deux hyperboliques). Au contraire, ne sont pas dans  $\Omega(q)$ , les symétries axiales  $\tau_A$  avec  $A$  hyperbolique et les symétries glissées<sup>17</sup>. Le groupe  $\Omega(q)$  est transitif sur  $\mathbf{K}$  car le milieu  $m$  de deux points  $a, b \in \mathbf{K}$  est dans  $\mathbf{K}$ , de sorte que  $\sigma_m$  (qui est dans  $\Omega(q)$ ) échange  $a$  et  $b$ . Il en résulte que les symétries centrales sont conjuguées dans  $\Omega(q)$ . Deux rotations sont conjuguées si et seulement si elles ont même angle<sup>18</sup> (voir 8.3.3, si une rotation est de centre  $a$ , les involutions de  $G_a^-$  sont des symétries axiales qui ne sont pas dans  $\Omega(q)$ ). Deux translations sont conjuguées si leurs vecteurs sont égaux ou opposés (car ici, au contraire,  $G_a^-$  contient des éléments de  $\Omega(q)$ ). Enfin, deux déplacements parallèles du type  $T(\lambda)$ ,  $T(\mu)$  sont conjugués dans  $\Omega(q)$  si leurs paramètres sont de même signe.

## 8.7 Aires algébriques

### 8.7.1 Introduction

Nous avons défini au chapitre 2 une notion d'aire à l'aide de la structure riemannienne, donc par une méthode assez différente de celles utilisées dans le reste du texte. Nous nous proposons ici d'en donner une approche plus algébrique, qui puisse éventuellement se généraliser au cas d'un corps quelconque. Nous nous limiterons au cas des triangles, mais le cas des polygones s'en déduirait facilement. Pour réaliser cette construction, il faut se souvenir de la propriété fondamentale de la notion d'aire, son invariance par découpage et recollement, qui se subdivise en deux propriétés : l'additivité et l'invariance par isométrie. Si la définition de l'invariance par isométrie ne

---

17. Il peut sembler bizarre qu'il y ait moins de sortes d'éléments hors de  $\Omega(q)$ . On en verra une explication en étudiant les diverses composées, voir exercice 8.8.11.

18. On voit que la présence du sous-groupe distingué  $\Omega(q)$  induit une orientation du plan.

pose pas de problème, celle de l'additivité n'est pas évidente en général. En effet, dans les cas usuels, elle repose sur la notion de réunion de triangles (il s'agit de triangles pleins, voir 6.9.3 et 6.9.4) et cette notion dépend de celle de segment : si l'on a un triangle  $abc$  et un point  $d$  de la droite  $(bc)$ , le triangle (plein)  $abc$  est réunion de  $abd$  et  $dca$  si  $d$  est dans le segment  $[bc]$ , mais il en est différence si  $d$  est à l'extérieur du segment. Comme la notion de segment est tributaire de l'ordre de  $\mathbf{R}$ , on ne peut donc étendre cette définition à un corps quelconque.

Pour contourner cette difficulté, un moyen est de définir des triangles orientés et des aires algébriques qui vont permettre d'obtenir des relations de découpage sans avoir à distinguer de cas de figure, un peu comme la relation de Chasles sur les segments orientés évite cette distinction. C'est d'ailleurs ce que fait Hadamard dans son traité de géométrie élémentaire [Had98]. Bien entendu, on espère que l'aire ordinaire (au moins dans le cas réel) soit une sorte de valeur absolue de l'aire algébrique. La difficulté qui surgit alors concerne l'invariance. En effet, les isométries conservent l'aire ordinaire, mais ne vont conserver les aires algébriques qu'au signe près et, si les notions ont un sens, les isométries qui conservent l'aire algébrique vont former un sous-groupe distingué (des isométries "positives" en quelque sorte). Comme on sait qu'il n'y a pas de tel sous-groupe en général (notamment en géométrie elliptique) on se doute bien que la théorie ne peut être universelle.

## 8.7.2 Découpage de triangles

On travaille dans le plan projectif  $\mathbf{P}(E)$ , pour l'instant sans structure métrique. On considère l'ensemble des triangles  $abc$ , c'est-à-dire, ici, des triplets (attention, l'ordre est important) de points de  $\mathbf{P}(E)$ . Les points  $a, b, c$  sont les sommets du triangle. S'ils sont distincts, on définit les côtés du triangle comme les droites  $A = (bc)$ ,  $B = (ca)$  et  $C = (ab)$ .

La notion qui va mener au découpage est celle de triangles contigus :

**8.7.1 Définition.** *Soient  $a, b, c, d$  quatre points tels que  $b, c, d$  soient alignés. Les triangles  $abd$  et  $dca$  sont dits **contigus** et le triangle  $abc$  est appelé "**réunion**" (algébrique) des triangles  $abd$  et  $dca$ .*

**8.7.2 Remarques.** 1) La figure euclidienne ci-dessous explique la définition. On oriente le plan, on considère le lacet  $[bc] \cup [ca] \cup [ab]$  associé au triangle  $abc$ . Ce lacet tourne soit dans le sens trigonométrique, soit dans le sens opposé et l'opération de réunion est une vraie réunion si les lacets associés sont de même sens et une différence sinon, les triangles correspondants aux lacets rétrogrades étant comptés négativement.

2) Cette définition ne prend pas en compte les questions de permutation des points : pour l'instant, il y a *a priori* six triangles de sommets  $a, b, c$ . L'idée est d'identifier les triangles à permutation **circulaire** près et de définir la réunion sur le quotient. C'est ce que vise la définition (un peu abstraite) suivante.

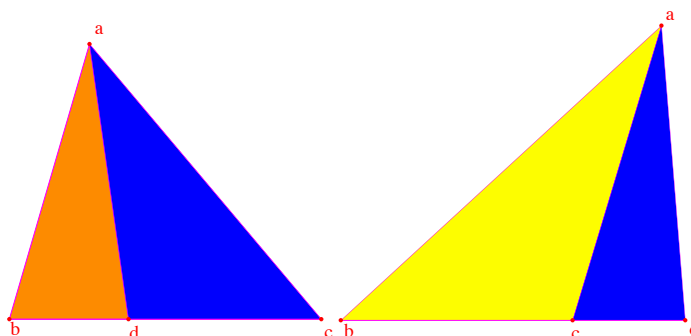


FIGURE 8.3 – Le triangle  $abc$  est réunion algébrique de  $abd$  et  $dca$ . À gauche on a une somme à droite une différence.

**8.7.3 Définition.** Soit  $X$  une partie de  $\mathbf{P}(E)$ . On considère l'ensemble  $\mathcal{T}_X$  des triangles à sommets dans  $X$  et on note  $\mathcal{L}_X$  le groupe abélien libre engendré par  $\mathcal{T}_X$ , c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires finies à coefficients dans  $\mathbf{Z}$  de symboles  $(a, b, c)$ , avec  $a, b, c \in X$ , et le sous-groupe  $\mathcal{N}_X$  engendré par les éléments suivants :

- a)  $(a, b, c) - (b, c, a)$  pour tous  $a, b, c \in X$ ,
- b)  $(a, a, b)$ , pour tous  $a, b \in X$ ,
- c)  $(a, b, c) - (a, b, d) - (d, c, a)$  pour tous  $a, b, c, d \in X$  tels que  $b, c, d$  soient alignés.

Le groupe quotient  $\mathcal{L}_X/\mathcal{N}_X$  sera noté  $\Theta_X$  (voire simplement  $\Theta$ ). On notera<sup>19</sup>  $(abc)$  les éléments du quotient.

**8.7.4 Lemme.** Dans  $\Theta$  on a les relations suivantes :

- 1)  $(abc) = (bca) = (cab)$ ,  $(bac) = (acb) = (cba) = -(abc)$ ,
- 2)  $(aba) = (baa) = 0$ ,
- 3)  $(abc) = 0$  si  $a, b, c$  sont alignés.

*Démonstration.* La relation  $(abc) = (bca) = (cab)$  est évidente avec a) appliqué à  $(a, b, c)$  ou  $(b, c, a)$  et le point 2) en résulte. Pour le second point de

19. La notation comprend une parenthèse, mais pas de virgules.



1), comme  $a, c, c$  sont alignés, on a  $(bac) + (cab) = (baa) = 0$ . Enfin, si  $a, b, c$  sont alignés on a  $(abc) = (aba) + (aca) = 0$ .

**8.7.5 Remarque.** Explicitons le sens de cette définition. Travailler dans  $\Theta$  c'est d'abord considérer que deux triangles sont égaux s'ils s'obtiennent par permutation circulaire, opposés s'ils s'obtiennent par transposition. De plus, on dispose dans  $\Theta$  d'une opération, notée  $+$ , définie formellement, mais qui associe en particulier à deux triangles contigus  $abd$  et  $dca$  leur "réunion"  $abc$ .

### Le lemme des trois triangles

**8.7.6 Proposition.** Soient  $a, b, c, d$  quatre points distincts de  $\mathbf{P}(E)$ . Dans  $\Theta_{\mathbf{P}(E)}$  on a l'égalité :  $(abc) = (dbc) + (dca) + (dab)$ . Si  $a, b, c, d$  sont dans  $X$ , le résultat est encore vrai dans  $\Theta_X$  pourvu que l'un des points d'intersection du type  $(da) \cap (bc)$  soit dans  $X$ .

*Démonstration.* Le résultat est évident si l'on a  $b = c$  ou  $a = d$ . Sinon, soit  $a'$  un point commun de  $(bc)$  et  $(da)$ . On calcule dans  $\Theta$  :  $(abc) = (aba') + (a'ca)$ , puis  $(aba') = (ba'a) = (ba'd) + (dab)$  et  $(a'ca) = -(ca'a) = -(ca'd) - (dac)$ . Mais on a aussi  $(dbc) = (ba'd) - (ca'd)$  et le résultat s'ensuit par addition.

### 8.7.3 Des générateurs de $\Theta$ en géométrie non euclidienne

On applique maintenant ce qui précède lorsque  $E$  est muni d'une forme quadratique  $q$  non dégénérée. Dans ce qui suit, on appelle triangle isocèle un triangle  $abc$  tel qu'il existe une droite  $D$  non isotrope telle que  $\tau_D$  fixe un sommet et échange les deux autres (la définition est un peu plus générale que celle de 4.6.1 notamment parce que les sommets peuvent être isotropes).

**8.7.7 Remarque.** Avec la définition donnée ci-dessus, les triangles  $abc$  avec deux sommets isotropes  $b, c$  distincts sont isocèles, sauf si  $a$  est sur la tangente à  $\Gamma$  en  $b$  ou  $c$ . En effet, si  $d$  est le pôle de  $(bc)$  et si  $D$  est la droite  $(ad)$  (ou une droite non isotrope quelconque passant par  $d$  si  $a$  et  $d$  sont confondus), la symétrie  $\tau_D$  fixe  $a$  et échange  $b, c$ .

**8.7.8 Proposition.** On suppose  $k = \mathbf{R}$ .

- 1) Dans  $\mathbf{E}$ , les triangles isocèles engendrent le groupe  $\Theta_{\mathbf{E}}$ .
- 2) Dans  $X = \mathbf{K} \cup \Gamma$ , les triangles avec deux sommets isotropes distincts engendrent  $\Theta_X$ .

*Démonstration.* 1) Soit  $abc$  un triangle,  $o$  un centre de cercle circonscrit (il en existe en vertu de 3.2.3). Alors, en vertu de 8.7.6,  $(abc)$  est la somme des triangles isocèles  $(obc)$ ,  $(oca)$  et  $(oab)$ .

2) Soit  $abc$  un triangle avec  $a$  isotrope et  $b, c \in \mathbf{K}$ . La droite  $(bc)$  rencontre  $\Gamma$  en  $d$  et on a  $(abc) = (abd) + (dca)$  et ces deux triangles ont deux sommets isotropes. Si  $a, b, c$  sont dans  $\mathbf{K}$ , la droite  $(bc)$  coupe  $\Gamma$  en  $d$ . On a encore  $(abc) = (abd) + (dca)$  et on est ramené au cas précédent.

**8.7.9 Remarques.** 1) Dans le cas du plan hyperbolique tout entier, le résultat ne subsiste plus à cause des triangles exceptionnels formés d'un point isotrope  $a$ , d'un point  $b$  sur la tangente à  $\Gamma$  en  $a$  et d'un point  $c$ , voir exercice 8.8.14.

2) La preuve du point 1) de 8.7.8 ne se transpose pas dans  $\mathbf{K}$  telle quelle car le centre du cercle circonscrit peut être dans  $\mathbf{T}$  (voir 3.4.16). On peut montrer toutefois que les triangles isocèles à sommets dans  $\mathbf{K}$  engendrent  $\mathbf{K}$ , voir exercice 8.8.15.

## 8.7.4 Aire algébrique

### Définition

**8.7.10 Définition.** Soit  $G$  un sous-groupe du groupe  $PGL(E)$  des homographies de  $\mathbf{P}(E)$  (par exemple le groupe  $PO(q)$  relatif à une forme quadratique  $q$  ou un de ses sous-groupes). Soit  $\mathbf{A}$  un groupe abélien noté additivement (par exemple le groupe  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ ). Soit  $X$  une partie de  $\mathbf{P}(E)$  et  $\alpha$  une application de  $\mathcal{T}_X$  dans  $\mathbf{A}$ . L'application  $\alpha$  induit une application notée encore  $\alpha$  du groupe libre  $\mathcal{L}_X$  dans  $\mathbf{A}$ . On dit que  $\alpha$  est une **aire algébrique** des triangles de  $X$  relativement à  $G$  si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- 1) **(Additivité)** L'application  $\alpha$  est nulle sur le sous-groupe  $\mathcal{N}_X$ .
- 2) **(Invariance)** L'application  $\alpha$  est invariante par  $G$  : pour tout triangle  $(a, b, c)$  et tout  $g \in G$  on a  $\alpha(g(a), g(b), g(c)) = \alpha(a, b, c)$ .

**8.7.11 Remarque.** La première condition signifie que l'aire d'un triangle est inchangée si l'on permute circulairement les sommets et changée en son opposée si l'on échange deux sommets et que l'aire de la réunion de deux triangles contigus est la somme des aires : c'est exactement la condition d'invariance par découpage. Le fait que  $\alpha$  est nulle sur  $\mathcal{N}_X$  montre qu'elle induit une application – toujours notée  $\alpha$  – de  $\Theta_X$  dans  $\mathbf{A}$ .

### Un exemple : la géométrie affine

La définition précédente est compatible avec les définitions affines usuelles :

**8.7.12 Proposition.** Soit  $l \in E^*$  une forme linéaire non nulle,  $X = \mathbf{P}(E) - V(l)$  le complémentaire de ses zéros (le plan affine associé à  $l$ ). On pose, pour trois points  $a, b, c$  de  $X$ ,  $\alpha(a, b, c) = \frac{[a, b, c]}{2l(a)l(b)l(c)}$ , (voir Partie II, ??).

L'application  $\alpha$  est une aire algébrique des triangles de  $X$  relative au groupe<sup>20</sup>  $G$  image dans  $PGL(E)$  des éléments de  $SL(E)$  qui fixent la forme linéaire  $l$ .

*Démonstration.* L'invariance est claire car on a, pour  $u \in G$ ,  $[u(a), u(b), u(c)] = [a, b, c]$  et  $l(u(x)) = l(x)$ . Les propriétés relatives aux permutations viennent de l'alternance du crochet. Il reste la propriété relative à la réunion. Soient  $a, b, c, d$  avec  $b, c, d$  alignés. On peut écrire  $d = \lambda b + \mu c$  avec  $\lambda, \mu \in k$ . On a alors  $[a, b, d] = \mu[a, b, c]$ ,  $[d, c, a] = \lambda[a, b, c]$ ,  $l(d) = \lambda l(b) + \mu l(c)$ . On en déduit :

$$\alpha(a, b, d) + \alpha(d, c, a) = \frac{[a, b, c]}{l(a)} \left[ \frac{\mu}{l(b)(\lambda l(b) + \mu l(c))} + \frac{\lambda}{l(c)(\lambda l(b) + \mu l(c))} \right] = \alpha(a, b, c).$$

### Un résultat négatif

Dans ce paragraphe, on suppose  $E$  muni d'une forme quadratique  $q$  non dégénérée. Le résultat suivant montre qu'il n'y a pas d'aire algébrique pour le groupe  $PO(q)$  :

**8.7.13 Proposition.** *On suppose  $k = \mathbf{R}$ . Il n'existe pas de fonction aire algébrique non nulle relative à  $O(q)$  tout entier pour les triangles de  $\mathbf{E}$ , ni pour ceux de  $\mathbf{K} \cup \Gamma$ .*

*Démonstration.* Appelons  $X$  l'espace  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{K} \cup \Gamma$  et supposons qu'une telle fonction  $\alpha$  existe. On a le lemme suivant :

**8.7.14 Lemme.** *Soit  $abc$  un triangle isocèle de  $X$ . On a  $\alpha(abc) = 0$ .*

*Démonstration.* Par définition d'isocèle, il existe une droite  $D$  telle que  $\tau_D$  fixe  $a$  et échange  $b, c$  (une médiatrice de  $b, c$ ). De plus, on peut choisir  $D$  de telle sorte que le point d'intersection  $m$  de  $D$  et  $(bc)$  soit encore dans  $X$  (c'est évident dans le cas elliptique et en hyperbolique il suffit de prendre la médiatrice intérieure, y compris si  $b, c$  sont isotropes). On a alors, dans  $\Theta_X$ ,  $(abc) = (abm) + (mca)$ , donc  $\alpha(abc) = \alpha(abm) + \alpha(mca)$ , mais, en appliquant  $\tau$ , on a  $\alpha(abm) = \alpha(acm) = -\alpha(mca)$  d'où le résultat.

La proposition résulte alors du fait que les triangles isocèles (éventuellement généralisés) engendrent  $\Theta_X$ , voir 8.7.8. Pour le cas de  $\mathbf{P}(E)$  tout entier et d'une forme hyperbolique, voir 8.8.14.

---

20. C'est donc le groupe spécial affine.

## Une fonction additive

Dans ce paragraphe, on retrouve les angles orientés de droites, avec leurs défauts ... On suppose toujours  $E$  muni de la forme  $q$  et  $k = \mathbf{R}$ . Soit  $a$  un point situé soit dans le plan elliptique  $\mathbf{E}$ , soit dans le plan de Klein  $\mathbf{K}$ . On sait qu'alors le groupe  $G_a^+$  est isomorphe au groupe  $\mathbf{U}$  des nombres complexes de module 1, donc à  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ , mais il y a deux isomorphismes possibles et **on choisit arbitrairement** l'un des deux,  $\psi_a : \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow G_a^+$ , pour chaque point  $a$  de  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{K}$ . Pour deux droites  $B, C$  passant par  $a$ , il y a deux rotations de  $G_a^+$  qui envoient  $B$  sur  $C$ . Ces rotations correspondent à deux angles  $\theta$  et  $\theta + \pi$  et l'élément  $\bar{\theta}$  associé dans  $\mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$  est bien défini et c'est l'angle orienté  $(B, C)$ , voir 8.3.13. Rappelons qu'on a  $(B, A) = -(A, B)$  et que, pour des droites  $A, B, C$  **passant toutes par**  $a$ , on a la relation de Chasles  $(B, C) + (C, A) + (A, B) = 0$ . On a alors la proposition suivante :

**8.7.15 Proposition.** *Si  $(a, b, c)$  est un triangle de  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{K}$  et si les points sont non alignés on pose  $A = (bc)$ ,  $B = (ca)$ ,  $C = (ab)$ . L'application  $\alpha$  qui à un triangle de  $\mathbf{E}$  ou  $\mathbf{K}$  associe  $(B, C) + (C, A) + (A, B) \in \mathbf{R}/\pi\mathbf{Z}$  (et 0 si le triangle est aplati) est une application additive.*

*Démonstration.* Les propriétés de permutations sont immédiates. Soient  $a, b, c, d$  des points avec  $b, c, d$  alignés. Si on pose  $D = (ad)$ , il s'agit de montrer la formule  $\alpha(a, b, d) + \alpha(d, c, a) = \alpha(a, b, c)$ , soit  $((A, D) + (D, C) + (C, A)) + ((B, D) + (D, A) + (A, B)) = (B, C) + (C, A) + (A, B)$ . C'est la relation de Chasles au point  $a$ !

**8.7.16 Remarques.** 1) **Attention**, pour un triangle  $abc$  non aplati, la somme  $(B, C) + (C, A) + (A, B)$  n'est pas nulle (comme en euclidien) car la relation de Chasles n'est pas vraie (voir 8.3.10). D'une certaine manière la pseudo aire algébrique définie ici mesure le défaut de la relation de Chasles.

2) **Attention**, cette fonction, si elle est additive, n'est pas invariante par isométrie. En effet, on sait que si  $g$  est une isométrie, on a seulement  $(g(A), g(B)) = \pm(A, B)$ , voir 8.3.8.

3) On peut donner une définition analogue sur un corps quelconque, pourvu que la somme ait un sens, donc que les groupes  $G_a^+$  soient isomorphes, ou encore que les points  $a, b, c$  soient dans une même classe de conjugaison. L'utilité de la notion me semble douteuse ...

4) Pour obtenir un invariant à partir de l'élément précédent, il faut considérer toutes les sommes de la forme  $\pm(B, C) \pm (C, A) \pm (A, B)$ . C'est ce que nous ferons au chapitre suivant.

### 8.7.5 Une aire algébrique pour $\Omega(q)$

#### Existence

Dans le plan elliptique, il n'y a pas moyen d'aller plus loin en se limitant aux transformations qui fixeraient les angles orientés : il n'y a pas de sous-groupe des isométries positives car  $PO(q) \simeq O^+(3, \mathbf{R})$  est un groupe simple (voir par exemple [Per96]). En revanche, dans le plan de Klein on va pouvoir définir une aire algébrique grâce au sous-groupe  $\Omega(q)$ . On a vu en 8.3.2 qu'on a une manière cohérente de choisir en chaque point un isomorphisme  $\psi_a$  de  $G_a^+$  sur  $\mathbf{U}$ , de sorte qu'on ait  $\psi_b(gfg^{-1}) = \psi_a(f)$  pour  $f \in G_a^+$  et  $g \in \Omega(q)$  vérifiant  $g(a) = b$ . On sait qu'alors, si  $a, b, c$  sont des points distincts de  $\mathbf{K}$  et  $g$  un élément de  $\Omega(q)$  on a la formule :  $([g(a)g(b)], [g(a)g(c)]) = ([ab], [ac])$  (angles orientés de demi-droites), voir 8.3.8.

On obtient alors le théorème suivant :

#### 8.7.17 Théorème. (Formule de Gauss-Bonnet algébrique)

*L'application définie sur les triangles de  $\mathbf{K}$  par*

$$\alpha(a, b, c) = \pi - (([bc], [ba]) + ([ca], [cb]) + ([ab], [ac])) \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$$

*(et 0 si deux des points  $a, b, c$  sont égaux) est une aire algébrique relativement à  $\Omega(q)$ . Elle est transformée en son opposée par les éléments de  $PO(q) - \Omega(q)$ .*

*Démonstration.* Les propriétés relatives aux permutations paires sont évidentes. Pour les permutations impaires on utilise les formules :  $(\delta, \delta') = -(\delta', \delta)$  (sur les angles de demi-droites) et  $\pi = -\pi$ . L'invariance par  $\Omega(q)$  résulte de 8.3.8. Il reste à montrer la propriété de découpage. Soient  $a, b, c, d$  avec  $d \in (bc)$ . Pour montrer la formule  $\alpha(abc) = \alpha(abd) + \alpha(dca)$  on distingue selon les positions de  $d$  par rapport à  $b, c$ . Si, par exemple,  $d$  est entre  $b$  et  $c$ , on a  $\alpha(a, b, d) = \pi - (([bd], [ba]) + ([da], [db]) + ([ab], [ad]))$  et  $\alpha(d, c, a) = \pi - (([ca], [cd]) + ([ad], [ac]) + ([dc], [da]))$ . Vu l'hypothèse de position on a  $([bd], [ba]) = ([bc], [ba])$ ,  $([ca], [cd]) = ([ca], [cb])$ . La relation de Chasles au point  $a$  donne  $([ab], [ad]) + ([ad], [ac]) = ([ab], [ac])$ . Il reste la somme  $([dc], [da]) + ([da], [db]) = ([dc], [db])$  qui vaut  $\pi$  car les demi-droites  $[dc]$  et  $[db]$  sont opposées, et on a le résultat. Les autres cas se traitent de la même manière.

**8.7.18 Remarque.** On a ainsi retrouvé l'analogie de la formule donnant l'aire du triangle comme  $\pi - \widehat{a} - \widehat{b} - \widehat{c}$ , voir 6.9.5. On peut étendre la formule précédente à  $\mathbf{K} \cup \Gamma$  de la manière suivante. Si deux des points sont égaux l'aire est nulle<sup>21</sup> et sinon, on utilise la formule précédente, en notant que les

21. Pour n'avoir qu'une formule on peut convenir que la somme des angles d'un triangle qui a deux sommets égaux est  $\pi$ .

angles en les points de  $\Gamma$  sont nuls (la définition 5.5.7 s'étend sans encombre dans ce cas, voir aussi 4.4.3). L'aire ainsi définie est à valeurs dans  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  et c'est une fonction continue sur  $\mathbf{K}^3$ , mais, attention, pas sur  $(\mathbf{K}\cup\Gamma)^3$ . En effet, sur le cercle on a  $\alpha(abc) = \pi$  si les points sont distincts, mais  $\alpha(aab) = 0$ . Cette difficulté a déjà été rencontrée en 6.10.20.

### Unicité de l'aire algébrique pour $\Omega(q)$

On se propose de montrer une réciproque du théorème précédent, avec une hypothèse de continuité modeste. On suppose donnée une fonction aire algébrique  $\alpha$ , définie sur l'espace des triangles de  $\mathbf{K}\cup\Gamma$ , à valeurs dans un groupe abélien  $\mathbf{A}$  et relative à  $\Omega(q)$ . On note d'abord plusieurs faits.

1) Les triangles  $abc$  formés de points distincts de  $\Gamma$  (les triangles idéaux) se répartissent en deux orbites selon le groupe  $\Omega(q) \simeq PSL(2, \mathbf{R})$ . Intuitivement, il y a les triangles directs pour lesquels le lacet  $[ab] \cup [bc] \cup [ca]$  tourne dans le sens trigonométrique et les indirects où il tourne dans le sens inverse. On note  $\xi \in \mathbf{A}$  l'aire algébrique d'un triangle direct. En vertu de la formule  $\alpha(acb) = -\alpha(abc)$ , l'aire d'un triangle indirect est alors<sup>22</sup>  $-\xi$ .

2) Les classes sous  $\Omega(q)$  des triangles  $abc$  avec  $a \in \mathbf{K}$  et  $b, c \in \Gamma$ ,  $b \neq c$ , sont décrites par les angles de demi-droites  $\theta := ([ab], [ac]) \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  : deux tels triangles avec le même angle  $\theta$  s'échangent par un  $g \in \Omega(q)$  et ont donc même aire. On posera  $\alpha(abc) = f(\theta)$  si l'angle en  $a$  est égal à  $\theta$ . On a  $f(-\theta) = -f(\theta)$  en vertu de la formule donnant  $\alpha(acb)$ . On a aussi  $f(\pi) = f(-\pi) = 0$  (car le triangle est aplati). **Attention**, comme on a supposé les points  $b, c$  distincts, la fonction  $f$  n'est pas définie en 0, voir 8.7.18.

3) Nous ferons désormais l'hypothèse que  $\mathbf{A}$  est un groupe topologique et que la fonction  $f$  est continue et admet une limite quand  $\theta$  tend vers 0.

On a alors le théorème suivant :

**8.7.19 Théorème.** *Soit  $\alpha$  une aire algébrique définie sur  $\mathbf{K}\cup\Gamma$ , à valeurs dans un groupe topologique abélien  $\mathbf{A}$  et relative à  $\Omega(q)$ . On note  $\xi$  l'aire des triangles idéaux directs, on pose  $f(\theta) = \alpha(abc)$  pour un triangle  $abc$  avec  $a \in \mathbf{K}$  et  $b, c \in \Gamma$ ,  $b \neq c$  et  $\theta = ([ab], [ac]) \neq 0$  et on suppose que  $f$  se prolonge en une fonction continue de  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{A}$ . Alors, l'application  $\chi$  définie par  $\chi(\theta) = \xi - f(\theta)$  est un homomorphisme de  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{A}$  et on a, pour tout triangle  $abc$  à sommets dans  $\mathbf{K}$ , la formule :*

$$\alpha(abc) = \chi(\pi - (([bc], [ba]) + ([ca], [cb]) + ([ab], [ac]))).$$

*Autrement dit, l'aire est l'image par  $\chi$  de celle vue en 8.7.17.*

<sup>22</sup>. Mais nous verrons plus loin qu'avec des hypothèses minimales on a  $\xi = -\xi$ .

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle de 6.10.20. On montre d'abord qu'on a  $\xi = -\xi$ . Pour cela on considère un point  $a \in \mathbf{K}$ , deux points distincts  $b, c \in \Gamma$  et le point  $d$  où  $(ab)$  recoupe  $\Gamma$ . On suppose (par exemple) que  $bcd$  est direct. On a  $\alpha(cab) = \alpha(cad) + \alpha(dbc)$ . Si on pose  $\theta = ([ab], [ac])$ , on a  $([ad], [ac]) + ([ac], [ab]) = ([ad], [ab]) = \pi$ , d'où  $([ad], [ac]) = \pi + \theta$  et on a, par définition de  $f$  :  $f(\theta) = \xi + f(\pi + \theta)$ . Lorsque  $\theta$  tend vers 0,  $\pi + \theta$  tend vers  $\pi$  et  $f(\pi + \theta)$  tend vers 0. On voit ainsi que  $f(\theta)$  tend vers  $\xi$ . La formule  $f(-\theta) = -f(\theta)$  montre que  $f(-\theta)$  tend vers  $-\xi$  et comme on a supposé que  $f$  a une limite en 0, on a  $\xi = -\xi$ , donc  $2\xi = 0$ .

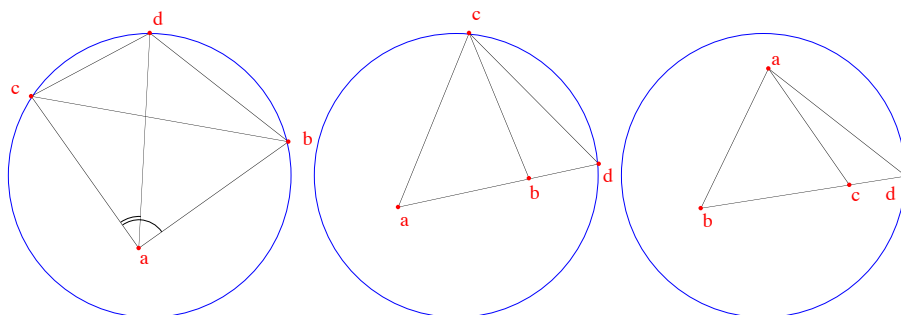


FIGURE 8.4 – Les étapes de la preuve

Posons alors  $\chi(\theta) = \xi - f(\theta)$ . On note qu'on a  $\chi(\pi) = \xi$  et  $\chi(0) = 0$ . Montrons que  $\chi$  est un homomorphisme. Pour cela, on prend un point  $a \in \mathbf{K}$  et trois points  $b, c, d$  distincts dans  $\Gamma$  et il s'agit de montrer que  $\chi$  vérifie la relation de Chasles. Le lemme des trois triangles donne  $\alpha(abc) = \alpha(dbc) + \alpha(dca) + \alpha(dab)$ , soit  $\xi - \chi([ab], [ac]) = \xi + \xi - \chi([ad], [ac]) + \xi - \chi([ab], [ad])$  et on a bien  $\chi([ab], [ac]) = \chi([ab], [ad]) + \chi([ad], [ac])$ .

Calculons maintenant l'aire d'un triangle  $abc$  avec  $a, b \in \mathbf{K}$ ,  $a \neq b$  et  $c \in \Gamma$ . Soit  $d$  un des points de  $(ab) \cap \Gamma$  et supposons par exemple que  $b$  est entre  $a$  et  $d$ . Par définition de l'aire on a  $\alpha(cab) = \alpha(cad) + \alpha(dbc) = \xi - \chi([ad], [ac]) + \xi - \chi([bc], [bd])$ . Comme les demi-droites  $[ad]$  et  $[ab]$  (resp.  $[ba]$  et  $[bd]$ ) sont égales (resp. opposées), on a  $([ad], [ac]) = ([ab], [ac])$  (resp.  $([bc], [bd]) = ([bc], [ba]) + \pi$ ) et, en définitive,  $\alpha(abc) = \xi - \chi([ab], [ac]) - \chi([bc], [ba])$ .

Il reste le cas d'un triangle  $abc$  avec trois sommets distincts dans  $\mathbf{K}$ . On suppose que  $(bc)$  coupe  $\Gamma$  en  $d$  et, par exemple, que  $c$  est entre  $b$  et  $d$ . On utilise la formule  $\alpha(abc) = \alpha(abd) + \alpha(dca)$  et le cas précédent et le résultat est immédiat en appliquant la relation de Chasles au point  $a$ .

**8.7.20 Remarque.** Le théorème précédent montre que toute aire algébrique dans le plan hyperbolique est obtenue en composant l'aire définie en 8.7.17

par un homomorphisme. L'exemple typique d'un tel homomorphisme est obtenu en passant au quotient dans  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  par un élément de la forme  $2\pi/n$  avec  $n$  entier (par exemple  $\pi$ , ce qui revient à prendre des angles de droites).

## 8.8 Exercices

### 8.8.1 Généralités

**8.8.1 Exercice.** On travaille sur  $\mathbf{Q}$  avec la forme elliptique  $X^2 + Y^2 + T^2$ . On considère les points  $a = (0, 0, 1)$  et  $b = (1/2, 1/2, 0)$ .

1) Montrer que la forme  $q$  restreinte à  $a^\perp$  (resp.  $b^\perp$ ) est équivalente à  $X^2 + Y^2$  (resp.  $X^2 + 2Y^2$ ).

2) Montrer que les groupes  $G_a^+$  et  $G_b^+$  sont respectivement les groupes  $\mathbf{U}_a$  et  $\mathbf{U}_b$  des complexes de norme 1 dans les corps  $\mathbf{Q}(i)$  et  $\mathbf{Q}(i\sqrt{2})$  (voir 1.4.25).

3) Montrer que les groupes  $H_a^+ = G_a^+/\{+1, -1\}$  et  $H_b^+ = G_b^+/\{+1, -1\}$  ne sont pas isomorphes (on regardera leurs éléments d'ordre 2).

### 8.8.2 Un exemple à la manière de Bachmann

**8.8.2 Exercice.** Soit  $G$  un groupe engendré par un ensemble  $S$  d'involutions non triviales. On suppose que tout produit de trois éléments de  $S$  est dans  $S$ .

1) Montrer qu'un produit d'un nombre impair d'éléments de  $S$  est encore dans  $S$ .

2) Montrer qu'un produit  $\sigma_1\sigma_2$  de deux éléments de  $S$  s'écrit aussi sous la forme  $\sigma\tau$  avec  $\sigma, \tau \in S$  et  $\sigma$  imposé.

3) Montrer que l'ensemble  $G^+$  formé de l'identité et des éléments de  $G$  qui peuvent s'écrire comme produit de deux éléments de  $S$  est un sous-groupe de  $G$ , distingué et abélien, et que  $G$  est réunion disjointe de  $G^+$  et de  $S$ .

4) Montrer que le groupe  $G$  est produit semi-direct :  $G \simeq G^+ \rtimes \{+1, -1\}$ .

5) Montrer que les éléments de  $S$  sont conjugués dans  $G$  si et seulement si, dans le groupe  $G^+$ , tout élément est un carré. Montrer que, dans ce cas, les éléments de  $G^+$  sont exactement les carrés des éléments de  $G$  et que  $G^+$  est le groupe dérivé de  $G$ .

**8.8.3 Exercice.** Soit  $A$  un groupe abélien (noté additivement) et soit  $P$  le groupe à deux éléments  $P = \{1, -1\}$ . On fait opérer  $P$  sur  $A$  en posant  $-1.a = -a$ . Soit  $G$  le produit semi-direct  $G = A \rtimes P$  associé à cette opération.



Montrer que  $G$  vérifie les conditions de 8.8.2 et qu'on a  $G^+ = A$ . Montrer que si on suppose que tout élément de  $A$  est un double (i.e. pour tout  $a \in A$  il existe  $b \in A$  avec  $a = b+b$ ), les involutions génératrices de  $G$  sont conjuguées.

*La situation décrite dans les deux exercices précédents s'applique à de nombreux groupes. Bien entendu elle s'applique aux sous-groupes de la forme  $G_a$  étudiés plus haut. Mais elle vaut aussi dans le cas des géométries définies de manière axiomatique comme dans [Bac59]. Précisément, si  $\mathcal{G}$  est un groupe muni des axiomes de Bachmann, si  $a, b$  sont deux droites distinctes de  $\mathcal{G}$  et si  $G(ab)$  est le pinceau associé au sens de Bachmann, le sous-groupe  $G$  de  $\mathcal{G}$  engendré par les éléments de  $G(ab)$  vérifie les hypothèses de 8.8.2 (voir [Bac59] théorèmes 20 et 23).*

### 8.8.3 Conjugaison des pseudo-rotations

**8.8.4 Exercice.** Le but de cet exercice est de montrer que deux pseudo-rotations sont conjuguées dans  $PO(q)$  si et seulement si leurs angles sont égaux comme angles **non orientés**. Autrement dit, en l'absence d'orientation, l'invariant angle orienté est inutile pour décrire les classes de conjugaison.

Soient  $a, b$  deux points vérifiant  $q(a) = q(b)$  dans  $k^*/k^{*2}$  et soient  $A, B$  (resp.  $C, D$ ) des droites passant par  $a$  (resp.  $b$ ) et vérifiant  $q^*(A) = q^*(C)$  et  $q^*(B) = q^*(D)$  dans  $k^*/k^{*2}$ . Soient  $\bar{\rho}$  et  $\bar{r}$  les pseudo-rotations de centres  $a$  et  $b$  et d'angles respectifs  $(A, B)$  et  $(C, D)$ . Rappelons que ces éléments sont dans  $H_a^+$  et  $H_b^+$  et qu'ils ont deux relèvements  $\rho$  et  $\rho\sigma_a$  (resp.  $r$  et  $r\sigma_b$ ) dans  $G_a^+$  et  $G_b^+$  qui envoient respectivement  $A$  sur  $B$  et  $C$  sur  $D$ .

Montrer que  $\bar{\rho}$  et  $\bar{r}$  sont conjugués par  $PO(q)$  (c'est-à-dire que  $\rho$  est conjugué de  $r$  ou de  $r\sigma_b$ ) si et seulement si on a  $I^*(A, B) = I^*(C, D)$ . (Si on a  $r = g\rho g^{-1}$ , on introduira les droites  $C' = g(A)$  et  $D' = g(B)$ ).

### 8.8.4 Mesures algébriques

**8.8.5 Exercice.** Soit  $D$  une droite hyperbolique que l'on oriente en choisissant un ordre  $i, j$  sur ses points isotropes et soit  $d$  son pôle. Rappelons qu'on a défini en 5.1.21 la mesure algébrique de  $ab$  comme  $\overline{ab} = -\frac{1}{2} \ln r(a, b)$  avec  $r(a, b) = \llbracket a, b, i, j \rrbracket = \llbracket i, j, a, b \rrbracket$ .

1) On pose  $i = (1, 0) = \infty$ ,  $j = (0, 1) = 0$ ,  $a = (\alpha, 1)$  et  $b = (\beta, 1)$ . Montrer qu'on a  $r(a, b) = \alpha/\beta$ .

2) Montrer que  $\overline{ab}$  est invariante par les transformations de  $G_d^+$  (c'est-à-dire la symétrie  $\sigma_d$ , les translations et les symétries glissées d'axe  $D$ ) mais

transformée en son opposée par celles de  $G_a^-$  (c'est-à-dire les symétries  $\sigma_c$  pour  $c \in D$ ). (On utilisera les écritures matricielles  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ 1/\mu & 0 \end{pmatrix}$ .)

### 8.8.5 Retour sur la configuration du parallélogramme aplati

**8.8.6 Exercice.** Soit  $a$  un point non isotrope de  $\mathbf{P}(E)$ ,  $G_a^+$  le groupe associé et soit  $b$  un point distinct de  $a$ , ni isotrope, ni orthogonal à  $a$ . On suppose que la droite  $(ab)$  n'est pas tangente à  $\Gamma$ . Soient  $c, d$  des points du cercle  $\mathcal{C}(a, b)$ , soit  $g \in G_a^+$  et posons  $c' = g(c)$  et  $d' = g(d)$ . Montrer qu'on a  $I(c, d) = I(c', d')$  et  $I(c, c') = I(d, d')$ . (On obtient ici une sorte de parallélogramme non aplati.)

### 8.8.7 Exercice. (Le quart de tour)

Soient  $A$  une droite non isotrope,  $a$  son pôle et soit  $t$  un élément de  $G_a^+$ .

1) Montrer qu'on a  $t^2 = \text{Id}$  si et seulement si  $t = \sigma_a$ .

2) Montrer qu'on a  $t^2 = \sigma_a$  si et seulement si, pour tout  $b$  non isotrope de  $A$ ,  $c = t(b)$  est orthogonal à  $b$ .

### 8.8.8 Exercice. ¶ (Caractérisation vectorielle des parallélogrammes aplatis)

Soient  $a, b, c, d$  quatre points non isotropes, alignés sur une droite  $\Delta$  non isotrope et soient  $A, B, C, D$  leurs polaires.

1) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

*i)* Le quadrilatère  $abcd$  est un parallélogramme aplati, autrement dit, voir 4.3.12, on a  $I(a, b) = I(d, c)$  et  $I(a, d) = I(b, c)$ .

*ii)* On a l'égalité d'angles non orientés  $I^*(A, B) = I^*(D, C)$  et  $I^*(A, D) = I^*(B, C)$ .

Si on suppose, de plus, que l'on a  $q(a) = q(b) = q(c) = q(d)$  dans  $k^*/k^{*2}$  et que les points  $b$  et  $d$  ou les points  $a$  et  $c$  ne sont pas orthogonaux, montrer que ces conditions sont encore équivalentes aux suivantes :

*iii)* On a l'égalité de pseudo-vecteurs (voir 8.2.4)  $\vec{ab} = \vec{dc}$ .

*iv)* On a l'égalité d'angles de droites orientés (*loc. cit.*)  $(A, B) = (D, C)$ .

*v)* Les points  $a, c$  et  $b, d$  ont mêmes milieux.

Indications : Pour l'implication  $i) \implies iii)$ , on distinguera d'abord le cas  $b = d$ . Dans ce cas on utilisera 4.3.6 ou 8.2.8. Sinon, on montrera qu'il existe  $g$  (resp.  $h$ ) dans  $PO(q)$  telles que  $g(a) = d$  et  $g(b) = c$  (resp.  $h(a) = b$  et  $h(d) = c$ ) et que l'une au moins de ces transformations n'est pas une symétrie (on utilisera 8.8.7).

Pour l'implication  $iii) \implies v)$  on pourra (par exemple) utiliser 8.2.8, les relations vectorielles  $\vec{ab} = \vec{dc}$  et  $\vec{am} = \vec{mc}$  et Chasles.

2) Montrer qu'il se peut que les valeurs de  $q(a)$  et  $q(b)$  d'un parallélogramme aplati ne soient pas égales dans  $k^*/k^{*2}$  (ce qui interdit de parler du vecteur  $\vec{ab}$ ). (On pourra prendre, par exemple, en hyperbolique,  $a = (0, 0, 1)$ ,  $b = (1, 0, 0)$ ,  $c = (1/2, 0, 1)$  et  $d = (2, 0, 1)$ ).

3) Montrer que l'implication  $1 \implies 3$  est fautive dans le cas l'on a, à la fois,  $b, d$  et  $a, c$  orthogonaux.

Indication : On peut travailler par exemple en géométrie elliptique réelle comme sur la figure 4.1. On choisit une droite  $\Delta$  et, sur cette droite, des points  $b$  et  $d$  orthogonaux. On prend un point  $m$  de  $\Delta$ , distinct de  $b$  et  $d$  et des milieux de  $b$  et  $d$  et on pose  $\sigma_m(b) = a$  et  $\sigma_m(d) = c$ .

### 8.8.9 Exercice. (Involutions et parallélogrammes aplatis)

Dans cet exercice on se propose de retrouver le résultat de 4.3.14 en utilisant les vecteurs.

Soient  $a, b, c, d$  quatre points non isotropes de  $\mathbf{P}(E)$  alignés sur une droite  $\Delta$  **non isotrope**. On suppose que les points  $b$  et  $d$  ou les points  $a$  et  $c$  sont non orthogonaux.

1) Montrer qu'on peut se ramener au cas où le corps  $k$  est algébriquement clos, ce qui permet de supposer qu'on a  $q(a) = q(b) = q(c) = q(d)$  dans  $k^*/k^{*2} = \{1\}$  et d'introduire les pseudo-vecteurs associés.

2) Soit  $t \in G_\delta^+$  (resp.  $t'$ ) une translation de vecteur  $\vec{ba}$  (resp.  $\vec{cd}$ ). On a vu en 8.2.6 qu'on a  $\sigma_a\sigma_b = t^2$  et  $\sigma_d\sigma_c = t'^2$ .

a) Montrer que, si  $abcd$  est un parallélogramme aplati, on a  $\vec{ba} = \vec{cd}$  (utiliser 8.8.8), donc  $\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d = \text{Id}$ .

b) Montrer, réciproquement, que si on a la condition sur la composée, on a  $t^2 = t'^2$  et conclure.

## 8.8.6 En géométrie non euclidienne, on ne démarre pas au quart de tour

**8.8.10 Exercice.** On suppose qu'il existe dans  $PO(q)$  une isométrie qui vérifie  $g(D) \perp D$  pour toute droite  $D$  (un quart de tour en quelque sorte). Montrer qu'il existe alors un "rectangle", i.e. quatre droites distinctes  $A, B, C, D$  telles que  $A, B \perp C, D$ . (Prendre une droite  $A$  non isotrope et son image  $C = g(A)$ , puis  $D$  perpendiculaire à  $A$ , différente de  $C$  et telle que  $B = g(D) \neq A$  et conclure.)

Comme il n'y a pas de rectangle en géométrie non dégénérée, voir 1.3.16, il n'y a donc pas non plus de quart de tour.

## 8.8.7 La nature des composées

**8.8.11 Exercice.** Dans cet exercice, on travaille dans le cas hyperbolique réel et on se propose de préciser la nature des composées. Le mot nature est pris au sens : classe de conjugaison de  $PO(q)$ .

1) Soient  $A, B$  deux droites non isotropes distinctes. Préciser la nature de la composée  $u = \tau_A \tau_B$  selon celles de  $A, B$  (hyperbolique ou extérieure), selon la nature de leur point d'intersection et le fait qu'elles sont perpendiculaires ou non. Préciser les éléments invariants (droites et points) de  $u$ .

2) Étudier les composées d'une réflexion et d'une rotation (resp. une translation). (Indication : décomposer la rotation en employant une droite perpendiculaire à l'axe de la réflexion.) On précisera dans quel cas on trouve une symétrie et si la composée est ou non dans  $\Omega(q)$ . Dans le cas où la composée est dans  $\Omega(q)$  on montrera qu'on peut obtenir tous les cas possibles (symétrie de centre dans  $\mathbf{K}$ , rotation, déplacement parallèle, translation).

3) Étudier la composée de deux isométries de  $\Omega(q)$  (on pourra se limiter au cas des rotations et des translations). (Indication : utiliser la droite joignant les points fixes des deux transformations.) Pour les translations, voir 8.4.9 et l'exercice suivant.

4) Montrer que la composée d'une rotation de centre  $a \in \mathbf{K}$  et d'une réflexion d'axe  $D$  hyperbolique est une symétrie glissée, sauf si  $a$  est sur  $D$ . Montrer que la composée d'une translation d'axe  $\Delta$  et d'une réflexion d'axe  $D$  avec  $D, \Delta$  hyperboliques, est une symétrie glissée, sauf si  $D$  et  $\Delta$  sont égales.

On voit que les deux types d'éléments de  $\Omega(q)$  (rotations et translations), composés avec des réflexions d'axes hyperboliques, donnent génériquement des symétries glissées<sup>23</sup>, ce qui explique que ces symétries glissées soient (presque<sup>24</sup>) les seuls éléments non dans  $\Omega(q)$ .

## 8.8.8 Composition des translations

**8.8.12 Exercice.** On reprend la situation de 8.4.9 et on suppose que les axes des translations  $t_1$  et  $t_2$  se coupent en un point  $c$  de  $\Gamma$ .

1) Montrer qu'on peut écrire les translations sous la forme  $t_i = \sigma_{b_i} \sigma_{a_i}$  où les points  $a_i, b_i$  sont dans  $\mathbf{K}$ .

---

23. En particulier, si l'on compose une réflexion d'axe  $D$  hyperbolique avec deux réflexions de même nature, on trouve toujours une transformation dont le point fixe est extérieur, sauf dans le cas où la composée est une symétrie.

24. Les seuls autres éléments sont des symétries, mais, le groupe  $PO(q)$  et ses classes  $\Omega(q)$  et  $PO(q) - \Omega(q)$  sont des variétés de dimension 3, tandis que les symétries, définies par leurs centres, forment une variété de dimension 2. Elles sont donc "non génériques".

2) Construire l'axe de l'homographie  $t = t_2 t_1$  (voir Partie III ??) et montrer qu'il coupe  $\Gamma$  en deux points  $c$  et  $d$ , éventuellement confondus. Conclure que la composée des translations est une translation ou un déplacement parallèle.

3) Construire effectivement un cas où l'on obtient un déplacement parallèle. Pour cela, on part de  $a_1, b_1$  dans  $\mathbf{K}$  et on note  $c$  le point d'intersection de  $\Gamma$  et de  $(a_1 b_1)$ . On construit la tangente  $T$  à  $\Gamma$  en  $c$ . On prend deux points  $e, f$  sur  $T$  et on considère  $h = \sigma_f \sigma_e \sigma_{a_1} \sigma_{b_1}$ . On construit les images  $m' = h(m)$  et  $n' = h(n)$  de deux points  $m, n \in \Gamma$ , ce qui permet de trouver l'axe de l'homographie  $h$  (il passe par  $c$  et par le point d'intersection de  $(mn')$  et  $(m'n)$ , voir Partie III ??). Cet axe coupe  $\Gamma$  en  $d$ . On choisit  $a_2 \in (cd)$  et on détermine  $b_2$  pour que  $\sigma_{b_2} \sigma_{a_2}(m) = m'$ . On a alors  $\sigma_{b_2} \sigma_{a_2} = h$  et  $t = \sigma_f \sigma_e$  est un déplacement parallèle.

## 8.8.9 Composée de trois symétries

**8.8.13 Exercice.** On travaille toujours dans le cas hyperbolique réel. Soient  $a, b, c$  trois points non isotropes. Préciser la nature de la composée  $u = \sigma_a \sigma_b \sigma_c$  en fonction de la position des points  $a, b, c$  (utiliser 1.5.12).

Montrer en particulier que  $u$  est une symétrie glissée si  $q(a)q(b)q(c)$  est positif.

## 8.8.10 Aires algébriques

### 8.8.14 Exercice. ¶ Une aire exotique dans le plan hyperbolique

On suppose l'espace vectoriel  $E$  muni d'une forme  $q$  de Lorentz. Un triangle  $abc$  est dit **exceptionnel** s'il est formé de trois points distincts non alignés, et s'il admet un drapeau isotrope, i.e. un sommet isotrope et un côté isotrope passant par ce sommet.

1) a) Montrer qu'un triangle exceptionnel est isocèle (au sens où il existe une symétrie qui fixe un sommet et échange les autres) si et seulement si il est formé de deux points isotropes distincts et du pôle de la droite qui les joint.

b) Montrer qu'un triangle exceptionnel non isocèle a un unique drapeau isotrope.

2) Soit  $\mathbf{A}$  un groupe abélien non nul et soit  $u \in \mathbf{A}$ ,  $u \neq 0$ . On définit une fonction  $\alpha$  sur l'ensemble des triangles de  $\mathbf{P}(E)$  de la manière suivante :

- Si  $T$  est un triangle exceptionnel non isocèle, si son unique drapeau isotrope est  $a, (ab)$  et si  $c$  est son troisième point, on pose  $\alpha(a, b, c) = \alpha(b, c, a) = \alpha(c, a, b) = u$  et  $\alpha(b, a, c) = \alpha(c, b, a) = \alpha(a, c, b) = -u$ .

- Pour tous les autres triangles on pose  $\alpha(a, b, c) = 0$ .

Montrer qu'on définit ainsi une aire algébrique sur  $\mathbf{P}(E)$  relative au groupe  $PO(q)$ . (Pour la propriété de découpage, on distinguera soigneusement les divers cas de figure possible.)

En déduire que les triangles isocèles n'engendrent pas le groupe  $\Theta$  des triangles sur  $\mathbf{P}(E)$ .

**8.8.15** *Exercice.* ¶¶ On travaille dans le plan de Klein  $\mathbf{K}$ . On dit qu'un triangle est un bon triangle si l'intersection de ses médiatrices est dans  $\mathbf{K}$ .

1) Montrer qu'un bon triangle est réunion (au sens de 8.7.1) de triangles isocèles.

2) Soit  $abc$  un mauvais triangle. Montrer qu'il existe un point  $d \in \mathbf{K}$  tel que les trois triangles  $dbc$ ,  $dca$  et  $dab$  soient bons. (On pourra utiliser 3.5.13.)

En déduire que les triangles isocèles engendrent  $\Theta_{\mathbf{K}}$ .

# Chapitre 9

## Invariants des géométries non euclidiennes

*Ce chapitre reprend la problématique de la deuxième partie et il utilise les notions et les notations qui y ont été introduites (et notamment les crochets, qui vont compléter notre panoplie d'invariants). Comme dans cette partie, il s'agit d'éclairer la géométrie à l'aide de résultats de nature algébrique sur les invariants du groupe orthogonal et leurs relations et d'abord de déterminer explicitement tous les invariants et toutes leurs relations. On verra que nombre de résultats géométriques trouvent leur origine dans les deux théorèmes fondamentaux : le premier, qui calcule tous les invariants en fonctions des invariants élémentaires, et le second, qui décrit les relations entre ces invariants. Les méthodes employées ici sont très voisines de celles utilisées au chapitre 6 de la Partie II. Le lecteur est donc renvoyé à ce chapitre pour tous les détails techniques sur les démonstrations (polarisations, identités de Cayley-Capelli, etc.).*

### 9.1 Détermination des invariants du groupe $O^+(q)$

#### 9.1.1 L'énoncé

Comme dans la partie II, on travaille sur un espace vectoriel  $E$  de dimension 3 sur un corps  $k$  **de caractéristique zéro**, donc infini (pour le cas de la caractéristique positive, le lecteur consultera [Ric89]), mais il est cette fois muni d'une forme quadratique  $q$  non dégénérée et de sa forme polaire  $\varphi$ .

On se donne une fois pour toutes<sup>1</sup> une base  $e_1, e_2, e_3$ . L'espace  $E$  est alors isomorphe à  $k^3$ . La forme  $\varphi$  s'écrit dans cette base sous la forme

$$(*) \quad \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij} x_i y_j$$

avec  $\alpha_{ij} \in k$ . On note  $\Delta(q)$  le discriminant de  $q$  dans la base des  $e_i$ .

### Le cas des points

On considère  $m$  vecteurs "génériques" de  $E$ ,  $x_1, \dots, x_m$ . Cela signifie qu'on introduit l'anneau de polynômes  $R$  en les  $3m$  indéterminées  $x_{i,j}$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, 3$  et son corps des fractions  $K$  et qu'on étend les scalaires à  $K$ , de sorte que l'espace vectoriel considéré devient  $E_K = K^3$ . Les vecteurs  $x_i \in K^3$  sont définis par  $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})$ . Comme dans la partie II, nous noterons souvent les vecteurs sans indices :  $a, b, c, \dots$ , l'anneau de polynômes  $R$  devenant  $R = k[a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; \dots; m_1, m_2, m_3]$ . Si  $x, y$  sont deux de ces vecteurs, on peut calculer  $q(x)$  et  $\varphi(x, y)$  par la formule (\*). On note que ce sont encore des éléments de  $R$ .

Les groupes  $O(q)$  et  $O^+(q)$  opèrent sur l'anneau  $R$  de la manière décrite au paragraphe ?? de la partie II. Dans ce qui suit nous nous limiterons à l'opération de  $O^+(q)$  puisque le groupe projectif  $PO(q)$  lui est isomorphe. Il est clair que l'ensemble des polynômes de  $R$  invariants sous cette action est un sous-anneau  $\mathcal{S}$  de  $R$ .

On a alors les résultats suivants :

#### 9.1.1 Théorème. (Premier théorème fondamental : le cas des points)

*Avec les notations ci-dessus, le sous-anneau  $\mathcal{S}$  des polynômes de  $R$  invariants sous l'action de  $O^+(q)$  est engendré par les crochets  $[x_i, x_j, x_k]$  avec  $1 \leq i < j < k \leq m$  et par les polynômes  $\varphi(x_i, x_j)$  avec  $1 \leq i \leq j \leq m$ .*

**9.1.2 Remarque.** Il y a une relation entre crochets et produits scalaires (cf. 1.1.6) :

$$\Delta(q)[a, b, c][x, y, z] = \begin{vmatrix} \varphi(a, x) & \varphi(a, y) & \varphi(a, z) \\ \varphi(b, x) & \varphi(b, y) & \varphi(b, z) \\ \varphi(c, x) & \varphi(c, y) & \varphi(c, z) \end{vmatrix}.$$

Cette relation vient simplement de la formule de changement de base : si on a une forme quadratique  $q$  qui a pour matrice  $J$  dans la base  $e_1, \dots, e_n$  (de sorte qu'on a  $\Delta(q) = \det J$ ) et si on cherche à calculer la matrice  $A$  des

---

1. Le choix de la base est sans importance, mais il est commode de la supposer orthogonale.



$\varphi(a, x)$ , etc. avec les vecteurs  $a, b, c$  (resp.  $x, y, z$ ) donnés sur la base par la matrice  $P$  (resp.  $Q$ ) on a la formule  $A = {}^tPJQ$  ce qui donne le résultat.

**9.1.3 Corollaire.** *Le sous-anneau de  $R$  des polynômes invariants sous l'action de  $O(q)$  est engendré par les polynômes  $\varphi(x_i, x_j)$  avec  $1 \leq i \leq j \leq m$ .*

*Démonstration.* En effet, en vertu de 9.1.1, un polynôme  $P$  invariant sous  $O(q)$  est un polynôme en les  $\varphi(x_i, x_j)$  et en les crochets. Grâce à la remarque précédente on peut remplacer les produits de deux crochets par des polynômes en les  $\varphi(x_i, x_j)$  et donc supposer que  $P$  est de la forme  $P = F + \sum_{i,j,k} [x_i, x_j, x_k] G_{i,j,k}$  où  $F$  et les  $G_{i,j,k}$  sont des polynômes en les  $\varphi(x_i, x_j)$ . En appliquant un élément  $u \in O^-(q)$ , qui change les crochets en leurs opposés, on voit que l'on a  $P = F$ .

### Le cas des points et des droites

De la même manière qu'on s'est donné, pour énoncer 9.1.1,  $m$  vecteurs, correspondant à  $m$  points du plan projectif, on peut aussi se donner  $n$  formes linéaires "génériques",  $f_1, \dots, f_n$  correspondant à  $n$  droites du plan. Cela signifie qu'on introduit  $3n$  indéterminées supplémentaires  $f_{i,j}$  avec  $i = 1, \dots, n$  et  $j = 1, 2, 3$ , l'anneau des polynômes  $R$  en les  $3m + 3n$  variables  $x_{i,j}$  et  $f_{i,j}$  et son corps des fractions  $K$ . Sur l'espace vectoriel  $E = K^3$  on obtient alors  $n$  formes linéaires :

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = f_{i,1}x_1 + f_{i,2}x_2 + f_{i,3}x_3.$$

La forme  $q$  induit sur  $E^*$  la forme  $q^*$ , de forme polaire  $\varphi^*$  (voir Partie III ?? ou ci-dessus paragraphe 1.1.2) et le groupe  $O^+(q) = O^+(q^*)$  opère sur  $E$  et  $E^*$ , donc sur  $R$ . On a un isomorphisme  $\bar{\varphi} : E \rightarrow E^*$ . Enfin, les opérations de produit vectoriel permettent d'associer à deux vecteurs  $x_i, x_j$  (resp. deux formes  $f_i, f_j$ ) un vecteur  $x_i \wedge x_j$  (resp. une forme  $f_i \wedge f_j$ ).

**9.1.4 Corollaire. (Premier théorème fondamental : le cas des points et des droites)** *Avec les notations ci-dessus, le sous-anneau des polynômes de  $R$  invariants sous l'action de  $O^+(q)$  est engendré par les crochets  $[x_i, x_j, x_k]$  avec  $1 \leq i < j < k \leq m$ , les crochets  $[f_i, f_j, f_k]$  avec  $1 \leq i < j < k \leq n$ , par les évaluations  $f_j(x_i)$  pour  $i = 1, \dots, m$  et  $j = 1, \dots, n$ , par les polynômes  $\varphi(x_i, x_j)$  avec  $1 \leq i \leq j \leq m$ , par les polynômes  $\varphi^*(f_i, f_j)$  avec  $1 \leq i \leq j \leq n$ , par les  $\varphi^*(f_k, x_i \wedge x_j) = f_k(x_i \wedge x_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, m$  et  $k = 1, \dots, n$  et enfin par les polynômes  $\varphi(x_i, f_j \wedge f_k)$   $i = 1, \dots, m$  et  $j, k = 1, \dots, n$ .*

*Démonstration.* On se ramène au cas des points de la manière suivante. Supposons pour simplifier que la base  $e_1, e_2, e_3$  est orthogonale et qu'on a  $q(z_1e_1 + z_2e_2 + z_3e_3) = \alpha_1z_1^2 + \alpha_2z_2^2 + \alpha_3z_3^2$ , de sorte que l'isomorphisme  $\overline{\varphi}^{-1}$  associe à la forme  $f_i = f_{i,1}e_1^* + f_{i,2}e_2^* + f_{i,3}e_3^*$  le vecteur  $y_i = \overline{\varphi}^{-1}(f_i) = \frac{f_{i,1}}{\alpha_1}e_1 + \frac{f_{i,2}}{\alpha_2}e_2 + \frac{f_{i,3}}{\alpha_3}e_3$ . On considère alors, dans l'anneau  $R$ , les **vecteurs**  $y_i$  de coordonnées  $\frac{f_{i,1}}{\alpha_1}, \frac{f_{i,2}}{\alpha_2}, \frac{f_{i,3}}{\alpha_3}$  et l'opération (au sens des vecteurs) de  $O(q)$  sur  $R = k[x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n]$ . On a un automorphisme  $\Phi$  de  $R$  qui fixe les  $x_i$  et envoie les  $f_j$  sur les  $y_j$  et cet automorphisme est compatible avec les opérations. Les invariants de  $R$ , vu du côté vectoriel, sont donnés par le théorème 9.1.1 et ceux côté vecteurs et formes s'en déduisent par  $\Phi^{-1}$ . On obtient alors le résultat, en énumérant les invariants en question, grâce aux formules suivantes qui résultent des définitions des produits extérieur et vectoriel :  $\varphi(y_i, y_j) = \varphi^*(f_i, f_j)$ ,  $\Delta(q)[y_i, y_j, y_k] = [f_i, f_j, f_k]$ ,  $\varphi(x_i, y_j) = f_j(x_i)$ ,  $[x_i, x_j, y_k] = f_k(x_i \wedge x_j)$ ,  $\Delta(q)[x_i, y_j, y_k] = \varphi(x_i, f_j \wedge f_k)$ .

*La morale du corollaire précédent, c'est que l'on peut se limiter à la recherche des invariants des points et oublier ceux des droites. Géométriquement, cela revient à remplacer une droite par son pôle, chose que nous avons souvent pratiquée dans les chapitres précédents. Bien entendu, une fois de plus, on retrouve la nécessité de tolérer les points extérieurs, mais, à ce moment du texte, le lecteur en est sans doute convaincu.*

## 9.1.2 Preuve du premier théorème fondamental

Elle est très voisine de celles que nous avons détaillées dans la partie II, les identités de Capelli-Cayley y jouant, là encore, un rôle crucial pour faire décroître le nombre de vecteurs. Pour éclairer le lecteur, voici le chemin suivi. On commence par montrer le résultat pour un seul vecteur, en dimension quelconque, par un calcul direct utilisant les réflexions. On passe ensuite au cas de deux vecteurs en dimension 2 en se ramenant au cas d'un seul grâce à Capelli-Cayley. On en déduit le cas de deux vecteurs en dimension 3 en utilisant le point précédent appliqué à un plan variable (c'est le point le plus délicat), et on passe au cas général, de nouveau à l'aide de Capelli-Cayley.

On renvoie à la partie II pour tout ce qui concerne les opérations de polarisation  $D_{ab}$  qui interviennent dans les identités. Rappelons seulement ici quelques points qui nous seront utiles :

- la définition de la polarisation :

$$D_{ab}(F) = a_1 \frac{\partial F}{\partial b_1} + a_2 \frac{\partial F}{\partial b_2} + a_3 \frac{\partial F}{\partial b_3},$$

- l'effet des polarisations sur les degrés : si  $F$  est homogène de degré  $p$  en  $a$  et  $q$  en  $b$ ,  $D_{ab}(F)$  est homogène de degré  $p + 1$  en  $a$  et  $q - 1$  en  $b$ ; si  $F$  est homogène de degré  $p$  en  $a$  on a  $D_{aa}(F) = pF$ ,

- le fait que les images des invariants par polarisation sont encore invariants (voir Partie II ??),

- le comportement de  $D_{ab}$  par rapport aux invariants fondamentaux :  $D_{ba}q(a) = 2\varphi(a, b)$ ,  $D_{ba}\varphi(a, b) = q(b)$  et  $D_{ya}[a, b, c] = [y, b, c]$  (voir II ??).

### Rappel des identités de Capelli-Cayley

Nous aurons besoin de ces identités avec deux et trois variables. Les notations sont celles de la Partie II, voir ??, avec en outre, pour un polynôme  $F$

en  $a_1, a_2, b_1, b_2$  la notation :  $\Omega_{ba}(F) := \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial b_1} & \frac{\partial}{\partial a_1} \\ \frac{\partial}{\partial b_2} & \frac{\partial}{\partial a_2} \end{vmatrix} (F) = \frac{\partial^2 F}{\partial b_1 \partial a_2} - \frac{\partial^2 F}{\partial b_2 \partial a_1}$ .

#### 9.1.5 Théorème. (Identités de Capelli-Cayley)

1) Soient  $a, b$  deux vecteurs distincts à coefficients indéterminés  $a = (a_1, a_2)$  et  $b = (b_1, b_2)$  et soit  $F$  un polynôme en les  $a_i, b_i$ . On a la formule :

$$\begin{vmatrix} D_{bb} + \text{Id} & D_{ba} \\ D_{ab} & D_{aa} \end{vmatrix} (F) = [b, a] \Omega_{ba}(F).$$

2) Soient  $a, b, c$  trois vecteurs distincts à coefficients indéterminés  $a = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $b = (b_1, b_2, b_3)$  et  $c = (c_1, c_2, c_3)$  et soit  $F$  un polynôme en les  $a_i, b_i, c_i$ . On a la formule :

$$\begin{vmatrix} D_{cc} + 2\text{Id} & D_{cb} & D_{ca} \\ D_{bc} & D_{bb} + \text{Id} & D_{ba} \\ D_{ac} & D_{ab} & D_{aa} \end{vmatrix} (F) = [c, b, a] \Omega_{cba}(F).$$

### Le cas d'un seul vecteur en dimension $n$

Dans ce paragraphe on travaille sur un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n \geq 2$ , muni d'une forme quadratique  $q$  non dégénérée et de sa forme polaire  $\varphi$ . On choisit une base  $e_1, \dots, e_n$  de  $E$ , disons orthogonale, qui permet d'identifier  $E$  et  $k^n$  et on considère un vecteur  $a$  générique,  $a = (a_1, \dots, a_n)$  avec des  $a_i$  indéterminées. Le groupe  $O(q)$  opère sur l'anneau  $R = k[a_1, \dots, a_n]$ .

**9.1.6 Lemme.** Soit  $F(a) \in R$  un polynôme invariant sous le groupe  $O^+(q)$ . Alors, il existe un polynôme  $G \in k[T]$  tel que l'on ait  $F(a) = G(q(a))$ .

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a un polynôme invariant  $F$  qui n'est pas de la forme annoncée. On peut le supposer homogène de degré  $d$  minimum. Pour tout vecteur  $x \in E$  et tout  $u$  dans  $O^+(q)$  on a  $F(x) = F(u(x))$ . On choisit un vecteur  $e \in E$  non isotrope, par exemple  $e_1$ . Montrons d'abord qu'on a, dans  $R$ , la formule :

$$q(a)^d F(e) = F(2\varphi(a, e)a - q(a)e).$$

Pour cela on considère un vecteur  $a_0$  non isotrope de  $E$  et le produit des deux réflexions  $u = \sigma_{a_0}\sigma_e$  qui est dans  $O^+(q)$ . La formule :  $\sigma_x(y) = y - \frac{2\varphi(x, y)}{q(x)}x$  donne  $\sigma_e(e) = -e$ , puis

$$F(e) = F(u(e)) = F\left(\frac{2\varphi(a_0, e)}{q(a_0)}a_0 - e\right).$$

En multipliant par  $q(a_0)^d$  on a alors  $q(a_0)^d F(e) = F(2\varphi(a_0, e)a_0 - q(a_0)e)$ . Comme cette formule polynomiale vaut sur l'ouvert de Zariski formé des vecteurs  $a_0$  non isotropes, elle est vraie lorsque  $a$  est un vecteur indéterminé.

On en déduit que  $q(a)$  divise  $F(a)$ . En effet, en développant  $F(2\varphi(a, e)a - q(a)e)$  (par exemple par la formule de Taylor, voire celle du binôme) on voit que  $q(a)$  divise  $2^d \varphi(a, e)^d F(a)$ . Mais, comme  $a$  est générique,  $q(a)$  est premier avec  $\varphi(a, e)^d$ . En effet, avec le choix de  $e$  comme premier vecteur de la base orthogonale  $(e_i)$ , on a  $\varphi(a, e) = \alpha_1 a_1$  et  $q(a) = \sum_i \alpha_i a_i^2$  n'est pas multiple de  $a_1$  (car la dimension  $n$  est  $\geq 2$ ). On en déduit le résultat.

On a donc  $F(a) = q(a)G(a)$  et, comme  $q(a)$  est invariant,  $G$  est invariant et de degré plus petit que  $F$ . C'est donc un polynôme en  $q(a)$ , donc  $F$  aussi et on a une contradiction.

**9.1.7 Remarque.** Bien entendu, les polynômes  $F(a) = G(q(a))$  sont invariants sous  $O(q)$  tout entier.

## Le cas de deux vecteurs en dimension 2

Dans ce paragraphe on suppose que  $E$  est de dimension 2, toujours muni de la forme non dégénérée  $q$ . On identifie  $E$  et  $k^2$  et on considère deux vecteurs génériques  $a = (a_1, a_2)$  et  $b = (b_1, b_2)$  avec les  $a_i, b_i$  indéterminées. On rappelle qu'on a  $[a, b] = a_1 b_2 - a_2 b_1$ . Le groupe  $O(q)$  opère sur  $R = k[a_1, a_2, b_1, b_2]$  et les polynômes  $q(a)$ ,  $q(b)$  et  $\varphi(a, b)$  sont invariants, tandis que le crochet est seulement semi-invariant : on a  $[u(a), u(b)] = \det u [a, b]$  avec  $\det u = \pm 1$ . On a la proposition suivante :

**9.1.8 Proposition.** Soit  $F(a, b)$  un polynôme invariant sous  $O^+(q)$ . Alors il existe un polynôme  $G$  en quatre variables tel que l'on ait :

$$F(a, b) = G(q(a), q(b), \varphi(a, b), [a, b]).$$

*Démonstration.* On appelle  $\mathcal{S}$  le sous-anneau de  $R$  engendré par  $q(a)$ ,  $q(b)$ ,  $\varphi(a, b)$ ,  $[a, b]$ . On raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a un polynôme invariant  $F$  (que l'on peut supposer homogène) qui n'est pas dans  $\mathcal{S}$  et on choisit un tel  $F$  minimal (au sens du degré et de l'ordre lexicographique des variables  $a, b$ , comme dans la partie II). En vertu de 9.1.6 les polynômes en un seul vecteur sont dans  $\mathcal{S}$ , de sorte que  $F$  fait intervenir les deux variables  $a, b$  avec des degrés  $d, e$  positifs. On peut lui appliquer la formule de Capelli-Cayley, voir 9.1.5.1. Comme les polarisations conservent les invariants, le premier membre de l'identité est invariant, donc aussi le second, et, comme  $[a, b]$  est invariant, il en résulte que  $\Omega_{ba}(F)$  l'est aussi. Comme il est de degré plus petit que  $F$ , l'hypothèse de minimalité montre qu'il est dans  $\mathcal{S}$ . Le premier membre de l'identité est donc dans  $\mathcal{S}$  lui aussi. Or, il s'écrit  $D_{bb}D_{aa}(F) + D_{aa}(F) - D_{ab}D_{ba}(F) = d(e+1)F - D_{ab}D_{ba}(F)$ . Le polynôme  $D_{ba}(F)$  est de degré  $d-1$  en  $a$  et  $e+1$  en  $b$ . Il est donc plus petit que  $F$  dans l'ordre lexicographique. Comme il est invariant, il est dans  $\mathcal{S}$ . Comme  $\mathcal{S}$  est stable par  $D_{ab}$  (grâce aux formules du type  $D_{ba}q(a) = \varphi(a, b)$ ), il en résulte que  $d(e+1)F$  est dans  $\mathcal{S}$ , donc aussi  $F$  (c'est là qu'intervient le fait que  $k$  est de caractéristique zéro), ce qui est absurde.

**9.1.9 Corollaire.** Les polynômes  $F(a, b)$  invariants sous  $O(q)$  sont les polynômes en  $q(a), q(b), \varphi(a, b)$ .

*Démonstration.* Si  $F$  est invariant sous  $O(q)$  il l'est *a fortiori* sous  $O^+(q)$ , donc c'est un polynôme en les trois termes indiqués, plus le crochet. Remarquons d'abord qu'on a la formule  $\Delta(q)[a, b]^2 = q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$  (identité de Lagrange). En effet, c'est l'analogue de 9.1.2 en dimension 2. On peut donc remplacer dans  $F$  les termes de degré pair en le crochet par des termes en les autres polynômes et écrire  $F$  sous la forme  $F(a, b) = F_1(a, b) + [a, b]F_2(a, b)$  où  $F_1$  et  $F_2$  sont des polynômes en  $q(a), q(b), \varphi(a, b)$ . Comme  $F$  et  $F_1$  sont invariants sous  $O(q)$ , il en résulte que  $[a, b]F_2(a, b)$  est invariant sous  $O(q)$ . Mais, si on applique  $u \in O^-(q)$ , le polynôme  $F_2$  est invariant mais  $[a, b]$  est changé en son opposé. Le produit ne peut donc être invariant que s'il est nul, d'où la conclusion.

**9.1.10 Remarque.** Par les arguments précédents on montre sans difficulté que les mêmes résultats sont valables dans le cas de  $n$  vecteurs génériques en dimension 2.

### Le cas de deux vecteurs en dimension 3

Revenons à la situation de départ,  $E$  de dimension 3 muni de la forme quadratique  $q$ . Nous supposons pour simplifier que la base canonique  $(e_1, e_2, e_3)$  est orthogonale. On a donc  $q(x_1, x_2, x_3) = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2$ . On considère deux vecteurs génériques  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et  $y = (y_1, y_2, y_3)$ . Nous allons montrer le théorème 9.1.1 dans le cas d'un polynôme (homogène)  $F(x, y)$ , autrement dit prouver que si  $F$  est invariant sous  $O^+(q)$  c'est un polynôme en  $q(x)$ ,  $q(y)$ ,  $\varphi(x, y)$  (en dimension 3, avec deux vecteurs, il n'y a pas de crochets!).

Soit  $P_0$  le plan  $(e_1, e_2)$  de  $E$ , identifié à  $k^2$  et  $q_0$  la restriction de  $q$  à  $P_0$ . On considère l'injection  $i : P_0 \rightarrow E$  qui à  $x = (x_1, x_2)$  associe  $(x_1, x_2, 0)$ . Si  $u_0$  est un élément<sup>2</sup> de  $O(q_0)$ , il se prolonge en un unique élément  $u$  de  $O^+(q)$  en ajustant  $u(e_3) = \pm e_3$  selon le signe de  $\det u_0$ . On a donc  $i \circ u_0 = u \circ i$ .

On définit alors, pour  $x, y \in P_0$ , le polynôme :

$$F_0(x, y) = F(i(x), i(y)) = F((x_1, x_2, 0), (y_1, y_2, 0)).$$

On a  $F_0(u_0(x), u_0(y)) = F(i \circ u_0(x), i \circ u_0(y)) = F(u \circ i(x), u \circ i(y))$  et comme  $F$  est invariant sous  $O^+(q)$ , cette expression est encore égale à  $F(i(x), i(y)) = F_0(x, y)$  et on en déduit que  $F_0$  est invariant sous  $O(q_0)$ . En vertu de 9.1.9 il existe donc un polynôme à trois variables  $G$  tel que l'on ait, pour  $x, y \in P_0$  :

$$F_0(x, y) = G(q_0(x), q_0(y), \varphi_0(x, y)).$$

Comme  $q_0$  est la restriction de  $q$  à  $P_0$  on en déduit que la formule :

$$(*) \quad F(x, y) = G(q(x), q(y), \varphi(x, y))$$

vaut lorsque  $x$  et  $y$  sont des vecteurs de  $P_0$  (i.e. vérifient  $x_3 = y_3 = 0$ , ou encore des vecteurs orthogonaux à  $e_3$ ) et il s'agit de montrer qu'elle est vraie partout.

On note déjà que la formule est vraie si  $x$  et  $y$  sont orthogonaux à un vecteur  $z$  non nul vérifiant  $q(z)/q(e_3) = q(z)/\gamma \in k^{*2}$ . En effet, on peut alors trouver  $u \in O^+(q)$  qui envoie  $z$  sur  $\lambda e_3$  donc qui envoie  $x$  et  $y$  dans  $P_0$ . Posons  $x' = u(x)$  et  $y' = u(y)$ . On a alors  $F(x, y) = F(x', y')$  (car  $F$  est invariant), donc  $F(x', y') = G(q(x'), q(y'), \varphi(x', y'))$ , puisque  $x'$  et  $y'$  sont dans  $P_0$ , et la relation (\*) s'ensuit puisque  $u$  conserve  $q$  et  $\varphi$ .

Le point suivant est de montrer que l'ensemble des "bons"  $z$  est algébrique :

**9.1.11 Lemme.** *Posons  $H(x, y) := F(x, y) - G(q(x), q(y), \varphi(x, y))$ . On note  $V$  l'ensemble des  $z \in E$ ,  $z \neq 0$  tels que pour tous  $x, y$  orthogonaux à  $z$ , on a*

<sup>2</sup>. C'est ici qu'on voit la nécessité d'avoir distingué les cas de  $O(q)$  et  $O^+(q)$  en dimension 2.

$H(x, y) = 0$  et  $\bar{V}$  son image dans  $\mathbf{P}(E)$ . Alors  $\bar{V}$  est un ensemble algébrique de  $\mathbf{P}(E)$ . En particulier, son intersection avec une droite  $D$  de  $\mathbf{P}(E)$  est finie ou égale à  $D$ .

*Démonstration.* (du lemme) Un vecteur orthogonal à  $z$  s'écrit  $x = x_1(z \wedge e_1) + x_2(z \wedge e_2) + x_3(z \wedge e_3)$ . Si on a deux tels vecteurs  $x, y$ , dire que  $z$  est dans  $V$  signifie que le polynôme homogène  $H(x, y)$  est nul pour toutes les valeurs des  $x_i$  et des  $y_j$  et donc, comme le corps est infini, cela équivaut à dire que ses coefficients sont nuls. Mais ces coefficients sont des polynômes homogènes en les coordonnées de  $z$  et on a le résultat.

Revenons à la situation initiale. Montrons par l'absurde que  $\bar{V}$  est égal à  $\mathbf{P}(E)$  tout entier. Sinon, soit  $z$  un vecteur non nul n'appartenant pas à  $V$ . Considérons les vecteurs  $w = \lambda e_3 + \mu z$  avec  $\lambda, \mu$  non tous deux nuls. On calcule  $\frac{q(w)}{\gamma} = \lambda^2 + 2\frac{\lambda\mu}{\gamma}\varphi(e_3, z) + \mu^2\frac{q(z)}{\gamma}$ . Si cette quantité est un carré non nul, on a vu que  $w$  est dans  $V$ . Cela signifie qu'il existe  $\nu \in k^*$  avec  $\lambda^2 + 2\frac{\lambda\mu}{\gamma}\varphi(e_3, z) + \mu^2\frac{q(z)}{\gamma} = \nu^2$ . On notera cette équation  $\lambda^2 + b\lambda\mu + c\mu^2 = \nu^2$ .

Soit  $\alpha \in k$  tel que  $c\alpha^2 \neq 1$  (il y a une infinité de tels  $\alpha$ ) et posons  $t = \frac{2 - b\alpha}{c\alpha^2 - 1}$ .

On vérifie que si on prend  $\lambda = 1, \mu = \alpha t$  et  $\nu = 1 + t$  la relation est satisfaite.

Il y a donc une infinité de points  $(\lambda, \mu) \in \mathbf{P}_k^1$  tels que  $\frac{q(\lambda e_3 + \mu z)}{\gamma}$  soit un carré, donc une infinité de points de la droite  $D = (e_3, z)$  qui sont dans  $\bar{V}$ . Cela implique que  $D$  est toute entière incluse dans  $\bar{V}$ , donc que  $z$  est dans  $V$  et c'est absurde.

**9.1.12 Remarque.** La preuve que nous venons de donner est relativement compliquée. Cela est dû au fait que nous travaillons sur un corps quelconque (de caractéristique 0). Sur  $\mathbf{R}$  cette preuve se simplifie notablement, surtout dans le cas de la forme euclidienne.

### Fin de la preuve de 9.1.1

Nous revenons à la situation générale du théorème avec  $m$  vecteurs "génériques"  $x_1, \dots, x_m$ . Soit  $\mathcal{S}$  le sous-anneau de  $R$  engendré par les polynômes  $\varphi(x_i, x_j)$  et les crochets  $[x_i, x_j, x_k]$ . Il s'agit de montrer que tout polynôme invariant sous  $O^+(q)$  est dans  $\mathcal{S}$ . On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un polynôme invariant  $F$  qui n'est pas dans  $\mathcal{S}$  et on choisit  $F$  minimal pour l'ordre lexicographique. Le polynôme  $F$  fait intervenir au moins trois variables en vertu du paragraphe précédent. Soient  $a < b < c$  ces variables. On applique à  $F$  la formule de Capelli-Cayley avec ces variables, voir 9.1.5.2.

Comme les polarisations conservent les invariants le premier membre est invariant, donc aussi le deuxième, donc, comme  $[a, b, c]$  est invariant,  $\Omega_{a,b,c}(F)$  est invariant. Comme ce polynôme est de degré plus petit que  $F$ , il est dans  $\mathcal{S}$ , donc aussi le premier membre. On raisonne alors exactement comme dans Partie II paragraphe ?? ou ci-dessus 9.1.8 pour aboutir à une contradiction.

### 9.1.3 Les invariants projectifs

#### Caractères

Pour déterminer les invariants projectifs il est nécessaire de déterminer d'abord les caractères rationnels de  $O^+(q)$ . Rappelons qu'un caractère de  $O^+(q)$  est un homomorphisme  $\chi : O^+(q) \rightarrow k^*$ . On dit que  $\chi$  est rationnel s'il s'écrit  $\chi(u) = f(u)/g(u)$  où  $f$  et  $g$  sont des fonctions polynomiales en les coefficients de la matrice de  $u$  sur une base quelconque.

**9.1.13 Proposition.** *Le seul caractère rationnel de  $O^+(q)$  est trivial : il vérifie  $\chi(u) = 1$  pour tout  $u$ .*

*Démonstration.* On sait que le groupe  $O^+(q)$  est engendré par les renversements (i.e. les involutions de  $O^+$ ). Si  $\sigma$  est un renversement, on a  $\sigma^2 = \text{Id}$ , donc  $(\chi(\sigma))^2 = 1$ , donc  $\chi(\sigma) = \pm 1$ . Il en résulte que  $\chi$  est à valeurs dans  $\{\pm 1\}$  et il suffit de montrer qu'on a  $\chi(\sigma) = 1$  lorsque  $\sigma$  est un renversement. On sait que  $\sigma$  admet un vecteur propre non isotrope relatif à la valeur propre 1, appelons le  $e_3$ . Soit  $e_1, e_2$  une base orthogonale du plan  $P$  orthogonal à  $e_3$ . On a  $\sigma(e_1) = -e_1$  et  $\sigma(e_2) = -e_2$ . Il y a deux cas.

1) La forme  $q|_P$  est hyperbolique. Les éléments de  $O^+(q|_P)$  sont alors des transformations hyperboliques  $u(\lambda)$ , avec  $\lambda \in k^*$ , admettant des matrices  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix}$  dans une base formée de deux vecteurs isotropes. En particulier on a  $\sigma = u(-1)$ . Comme  $\chi(u)$  est une fonction rationnelle des coefficients, c'est une fonction rationnelle  $f(\lambda)/g(\lambda)$  et on a  $f(\lambda) = \pm g(\lambda)$  pour tout  $\lambda \in k^*$ , autrement dit la fonction polynomiale  $\lambda(f(\lambda) - g(\lambda))(f(\lambda) + g(\lambda))$  est nulle sur  $k$ . Comme le corps  $k$  est infini, le polynôme correspondant est donc nul et comme  $\lambda$  n'est pas nul, pas plus que  $f(\lambda) + g(\lambda)$  (il vaut  $2g(\lambda)$  au point  $\lambda = 1$  qui correspond à  $u = \text{Id}$ ), on en déduit que  $f(\lambda) - g(\lambda)$  est identiquement nul, donc que  $\chi(u(\lambda))$  vaut 1 partout et en particulier pour  $\lambda = -1$ .

2) La forme  $q|_P$  est anisotrope. On a  $q(xe_1 + ye_2) = \alpha x^2 + \beta y^2$  et  $-\alpha/\beta$  n'est pas un carré de  $k$ . Un calcul immédiat montre que les éléments de  $O^+(q|_P)$  admettent des matrices  $u(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -\frac{\alpha}{\beta}b & a \end{pmatrix}$  avec  $\alpha b^2 + \beta a^2 = \beta$ ,



le renversement  $\sigma$  correspondant au cas  $a = -1, b = 0$ . Le caractère  $\chi$  est alors une fonction rationnelle de  $a$  et  $b$  :  $\chi(u(a, b)) = f(a, b)/g(a, b)$  et le produit  $(f(a, b) + g(a, b))(f(a, b) - g(a, b))$  est nul sur la courbe d'équation  $\alpha b^2 + \beta a^2 = \beta$ . Mais cette courbe est irréductible, par exemple parce qu'on en a un paramétrage<sup>3</sup> :

$$a = \frac{\alpha t^2 - \beta}{\alpha t^2 + \beta}, \quad b = \frac{-2\beta t}{\alpha t^2 + \beta}.$$

Il en résulte que l'un des facteurs est identiquement nul sur la courbe et comme  $f(a, b) + g(a, b)$  vaut  $2g(a, b)$  en l'identité, c'est qu'on a  $f(a, b) = g(a, b)$  pour tous  $a, b$ . En particulier, on a  $\chi(\sigma) = 1$ .

**9.1.14 Remarque.** Bien entendu, le groupe  $O^+(q)$  admet en général des caractères non triviaux. Par exemple, dans le cas de la forme de Lorentz sur  $\mathbf{R}$ , la norme spinorielle  $\theta$  est à valeurs dans  $\{\pm 1\}$ . C'est aussi le cas pour la forme euclidienne sur  $\mathbf{Q}$ , voir [Per96] Ch. VI, Exercice 6.4. Mais ces caractères ne sont pas rationnels.

Le cas de la norme spinorielle mérite réflexion. Il y a plusieurs raisons qui permettent de comprendre que ce caractère n'est pas rationnel. D'abord, sur un corps quelconque<sup>4</sup>, il est à valeurs dans  $k^*/k^{*2}$  qui ne se plonge pas dans  $k^*$  (il a beaucoup trop d'éléments d'ordre 2 pour cela ; le cas de  $\mathbf{R}$  est exceptionnel à cet égard). Ensuite, la norme spinorielle, vue avec  $O^+(q)$  sous son habit  $PGL(2, k)$  n'est autre que le signe du déterminant. Le déterminant est certes rationnel, mais, d'abord, l'isomorphisme entre  $O^+(q)$  et  $PGL$  ne l'est pas (car la matrice de l'image n'est déterminée qu'à une homothétie près), ensuite et surtout, l'application "signe" n'est pas une application rationnelle. Une conséquence de 9.1.13 est l'inexistence d'invariants polynomiaux pour  $\Omega(q)$  :

**9.1.15 Corollaire.** *On suppose  $k = \mathbf{R}$ . Il n'existe pas de polynôme invariant sous le groupe  $\Omega(q)$  et non invariant sous  $PO(q)$ .*

*Démonstration.* Soit  $P$  un tel invariant et  $\tau$  une symétrie axiale (donc un élément de  $PO(q) - \Omega(q)$ ). Posons  $Q = \tau(P)$ . Si  $u$  est un élément de  $PO(q) - \Omega(q)$  on peut l'écrire  $u = \tau g$  avec  $g \in \Omega(q)$  et on a donc  $u(P) = \tau(P) = Q$ . On note que  $Q$  est invariant sous  $\Omega(q)$ . En effet, si  $g$  est dans  $\Omega(q)$  on a  $g\tau = \tau g'$  avec  $g' \in \Omega(q)$  (car  $\Omega(q)$  est un sous-groupe distingué), d'où  $g(Q) = g\tau(P) = \tau g'(P) = Q$ . Par ailleurs, on a  $\tau(Q) = \tau^2(P) = P$ . Comme

3. Et parce que le corps est infini.

4. Pour parler comme Grothendieck : la géométrie associée à  $\Omega(q)$  n'est pas "géométrique", au sens où elle dépend du corps de base.

$Q$  n'est pas invariant sous  $PO(q)$  on a  $P \neq Q$ , de sorte que  $F = P - Q$  est un polynôme non nul. On a  $\tau(F) = Q - P = -F$  et on en déduit, pour  $u \in PO(q)$ ,  $u(F) = \chi(u)F$  avec  $\chi(u) = \pm 1$  selon que  $u$  est dans  $\Omega(q)$  ou non. L'application  $\chi$  est alors un caractère. Il est rationnel comme on le voit en identifiant les coefficients d'un monôme non nul de  $F$  : c'est absurde en vertu de 9.1.13.

### Invariants projectifs

Rappelons que nous avons défini, dans la partie II, des fonctions rationnelles projectives ou géométriques  $\bar{R}(x_1, \dots, x_m)$  où les  $x_i$  sont des points de  $\mathbf{P}(E)$ . Une fraction rationnelle  $R(x_1, \dots, x_m)$  de  $m$  vecteurs de  $E$  est géométrique si et seulement si elle s'écrit  $R = F/G$  où  $F$  et  $G$  sont des polynômes en les  $x_{i,j}$ , homogènes en les variables correspondant au vecteur  $x_i$ , avec le même degré au numérateur et au dénominateur.

Avec le théorème précédent, il est maintenant facile de déterminer celles de ces fonctions qui sont invariantes :

**9.1.16 Proposition.** *Les fonctions rationnelles géométriques invariantes sous  $PO(q)$  sont des fractions  $F/G$  où  $F$  et  $G$  sont des polynômes en les crochets et les  $\varphi(x_i, x_j)$  homogènes de même degré par rapport à chaque vecteur  $x_i$ .*

*Démonstration.* Soit  $F/G$  une fonction rationnelle projective invariante sous  $PO(q) = O^+(q)$ , avec  $F, G$  premiers entre eux, homogènes de mêmes degrés en chaque vecteur  $x_i$ . On a alors  $u(F)G = u(G)F$ . Comme  $F$  est premier avec  $G$  il divise  $u(F)$  et, pour une raison de degré, on a  $u(F) = \chi(u)F$  avec  $\chi(u) \in k^*$  et on en déduit  $u(G) = \chi(u)G$ . On vérifie que  $\chi$  est un caractère de  $O^+(q)$  et il est rationnel comme on le voit en regardant un monôme non nul. La proposition précédente montre qu'on a  $\chi = 1$ , de sorte que  $F$  et  $G$  sont invariants sous  $O^+(q)$ . En vertu de 9.1.1 ce sont donc des polynômes en les crochets et les produits scalaires et l'assertion sur le degré résulte du fait que  $F/G$  est projective.

### 9.1.17 Exemples.

1) Avec un point  $a$  il y a un seul invariant vectoriel  $q(a)$  et pas d'invariant projectif.

2) Avec deux points  $a, b$ , les invariants vectoriels sont  $q(a), q(b), \varphi(a, b)$  et on a l'invariant projectif  $\frac{\varphi(a, b)^2}{q(a)q(b)} = I(a, b)$ . Nous allons montrer ci-dessous que tous les autres sont des fractions rationnelles en celui-là.

3) Avec trois points  $a, b, c$ , les invariants vectoriels sont  $q(a), q(b), q(c), \varphi(a, b),$

$\varphi(b, c)$ ,  $\varphi(c, a)$  et  $[a, b, c]$ . Parmi les invariants projectifs, outre les invariants  $I$ , on a le spin :  $S(a, b, c) = \frac{\varphi(b, c)\varphi(c, a)\varphi(a, b)}{q(a)q(b)q(c)}$ . Là encore, nous allons montrer que ce sont essentiellement les seuls.

**9.1.18 Théorème.** *Soient  $a_1, \dots, a_n$  des points de  $\mathbf{P}(E)$ . Les invariants projectifs de ces points sont des fractions rationnelles en les invariants  $I(a_i, a_j)$  et  $S(a_i, a_j, a_k)$ .*

*Démonstration.*

Soit  $F/G$  un invariant projectif. Les polynômes  $F$  et  $G$  sont des polynômes en les produits scalaires et les crochets, homogènes en les  $a_i$ , avec le même degré en  $a_i$  dans  $F$  et dans  $G$ . À cause de la relation  $\mathcal{S}'$  (voir ci-dessous 9.2.1), on peut remplacer les produits de deux crochets par des polynômes en les  $\varphi(x_i, x_j)$ . On se ramène donc au cas où  $F$  est de la forme  $F = F_0 + \sum[a_i, a_j, a_k]F_{i,j,k} := F_0 + F_1$ , et  $G = G_0 + \sum[a_i, a_j, a_k]G_{i,j,k} := G_0 + G_1$  où les  $F_0, F_{i,j,k}, G_0, G_{i,j,k}$  sont des polynômes en les seuls produits scalaires. Comme  $F$  est homogène,  $F_0$  ou  $F_1$  est nul car  $F_0$  est de degré total pair et  $F_1$  de degré total impair. Il en est de même pour  $G$ . Pour une raison de degrés,  $F_0$  et  $G_0$  (resp.  $F_1$  et  $G_1$ ) doivent être nuls en même temps. Si  $F_1$  et  $G_1$  sont nuls, la fraction ne fait intervenir que les produits scalaires. Si  $F_0$  et  $G_0$  sont nuls, il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par un même crochet et d'appliquer la relation  $\mathcal{S}'$  et on est ramené au cas précédent. En définitive, on peut supposer que les polynômes  $F$  et  $G$  ne font pas intervenir les crochets !

Notons  $i_1, \dots, i_n$  les degrés de  $F$  en  $a_1, \dots, a_n$ . La somme  $i_1 + \dots + i_n$  est paire (car elle l'est dans les polynômes de base  $q(a_1), \varphi(a_1, a_2)$ , etc.). Il y a donc un nombre pair de  $i_k$  impairs. Quitte à multiplier éventuellement  $F$  et  $G$  par les  $\varphi(a_k, a_l)$  correspondant aux  $i_k, i_l$  impairs, on se ramène au cas où tous les  $i_k$  sont pairs et on pose  $i_k = 2j_k$ . La fraction  $F/G$  est encore égale à  $F'/G'$  avec  $F' = \frac{F}{D}$  avec  $D = q(a_1)^{j_1} \dots q(a_n)^{j_n}$  et de même pour  $G'$ . Considérons un monôme de  $F$ . Il s'écrit  $M = q(a_1)^{\alpha_1} \dots q(a_n)^{\alpha_n} \varphi(a_1, a_2)^{\beta_{1,2}} \dots \varphi(a_{n-1}, a_n)^{\beta_{n-1,n}}$  et on a, pour tout  $k$ ,  $2\alpha_k + \sum_{j \neq k} \beta_{k,j} = 2j_k$ . Il suffit de montrer que tout monôme de la forme  $M/D$  peut s'écrire comme monôme en les invariants  $I$  et  $S$ . On raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a un monôme qui n'est pas de cette forme et on choisit un contre-exemple avec le moins d'exposants  $\beta$  impairs possible. Si tous les  $\beta_{k,l}$  sont pairs,  $\beta_{k,l} = 2\gamma_{k,l}$ , on vérifie que  $M/D$  est égal au produit des  $I(a_k, a_l)^{\gamma_{k,l}}$  et c'est une contradiction. Sinon, il y a au moins un exposant  $\beta$ , disons  $\beta_{1,2}$ , qui est impair. Comme  $a_1$  est en degré pair dans  $M$ , il y a un autre terme  $\varphi(a_1, a_k)$  qui est à une puissance impaire, disons  $\varphi(a_1, a_3)$ . Si  $\varphi(a_2, a_3)$  est aussi à une puissance impaire, le monôme

$M/DS(a_1, a_2, a_3)$  est de la même forme et a moins d'exposants  $\beta$  impairs, donc c'est un monôme en  $I$  et  $S$ , donc aussi  $M$  et on a une contradiction. Si  $\varphi(a_2, a_3)$  est à une puissance paire, on considère  $MI(a_2, a_3)/DS(a_1, a_2, a_3)$  et il a moins d'exposants impairs que  $M/D$  ( $\beta_{1,2}$  et  $\beta_{1,3}$  sont devenus pairs tandis que  $\beta_{2,3}$  est devenu impair). On conclut comme précédemment.

**9.1.19 Remarque.** Dans le cas général, les invariants de base sont essentiellement les invariants du type  $I$  et  $I^*$ . Lorsque le corps de base est  $\mathbf{R}$ , on a défini à partir de ces invariants les distances et les angles, qui en sont des racines carrées. Les invariants usuels ne sont donc pas dans l'anneau  $\mathcal{S}$  des invariants, mais dans des extensions quadratiques de celui-ci (ou de son corps des fractions). Nous reverrons ce phénomène avec les aires.

*On voit que les seuls invariants fondamentaux des géométries non euclidiennes sont ceux que nous avons étudiés aux chapitres précédents : les invariants  $I$ , qui donnent naissance aux longueurs et aux angles, et les invariants  $S$ , qui correspondent au spin. On ne peut que se réjouir de la convergence de l'algèbre et de la géométrie !*

## 9.1.4 Applications du premier théorème fondamental

### Retour sur quelques résultats antérieurs

De nombreux résultats obtenus ci-dessus peuvent être vus comme des applications du premier théorème fondamental. Il y a notamment tous les résultats autour du produit vectoriel. En effet, comme le produit vectoriel est un concomitant de  $O(q)$ , ses coordonnées sur une base concomitante sont des invariants (voir Partie II ??). Mais ces coordonnées s'expriment en fonction de termes du type  $\varphi(a \wedge b, c \wedge d)$  (voir 1.2.7) et ces termes se calculent en fonction des invariants au moyen des formules de 1.2.3, par exemple  $\Delta(q)\varphi(a \wedge b, c \wedge d) = \varphi(a, c)\varphi(b, d) - \varphi(a, d)\varphi(b, c)$ . La formule de Jacobi (voir 1.2.1 ou celle du double produit 1.2.6) sont des conséquences triviales de cette écriture des produits vectoriels à partir des invariants.

Parmi les applications les plus importantes du premier théorème fondamental on peut citer le calcul de l'invariant  $J$  (voir 4.7.15), celui du spin angulaire (voir 4.7.19) et surtout la formule d'Al-Kashi (voir 4.5.8), archétype de ces applications. On peut aussi considérer la formule de Laguerre (voir 4.3.10) comme une application du premier théorème fondamental puisque la quantité  $[[a, b, i, j]] + [[a, b, j, i]]$  est un invariant projectif (et donc se calcule à partir de l'invariant  $I$  comme l'atteste la formule de Laguerre).

## L'angle de parallélisme

Il s'agit d'une notion classique en géométrie hyperbolique réelle, que nous allons décrypter en termes d'invariants, pour illustrer ce qui précède. On considère deux points distincts  $a$  et  $b$  de  $\mathbf{K}$ , la droite  $(ab)$  et la perpendiculaire  $D$  à  $(ab)$  passant par  $a$ . La droite  $D$  coupe  $\Gamma$  en  $i$  et  $j$ . Alors, l'angle de parallélisme de  $a$  et  $b$  est l'angle  $\widehat{abi}$ . Une expérience rapide avec Cabri montre qu'il ne dépend pas du choix entre  $i$  et  $j$  et qu'il est le même si on échange les rôles de  $a$  et  $b$ , de sorte qu'on s'attend à ce que cet angle soit un invariant de  $a$  et  $b$ .

L'interprétation géométrique de cet angle est la suivante. On considère une demi-droite  $[bx)$  (resp.  $[by)$ ) issue de  $b$ . L'angle  $\widehat{aby}$  est plus petit que l'angle de parallélisme  $\widehat{abi}$  donc  $[by)$  coupe  $D = (ai)$ , l'angle  $\widehat{abx}$  est plus grand que  $\widehat{abi}$  donc  $D$  et  $(bx)$  ne se coupent pas.

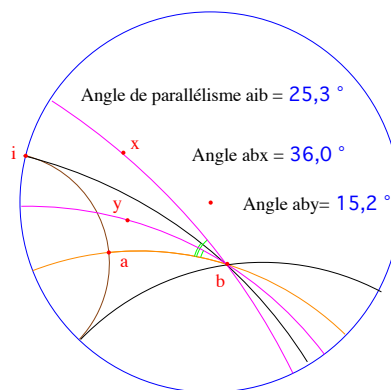


FIGURE 9.1 – L'angle de parallélisme

On sait (voir<sup>5</sup> 5.5.7) que l'angle de demi-droites  $\widehat{abi}$  est donné par la formule

$$\cos \widehat{abi} = \frac{\varphi(b \wedge a, b \wedge i)}{\sqrt{q(b \wedge a)q(b \wedge i)}}.$$

Rappelons que cette définition sous-entend que  $\varphi(a, b)$  et  $\varphi(b, i)$  sont de même signe et on peut les supposer tous deux positifs<sup>6</sup>. Il s'agit de calculer ce cosinus en fonction de  $a, b$ , donc d'éliminer  $i$ . Notons deux faits :

- Comme le point  $i$  est sur  $\Gamma$  on a  $q(i) = 0$ .
- Comme les droites  $(ai)$  et  $(ab)$  sont perpendiculaires on a  $\varphi(a \wedge i, a \wedge b) = 0$ , soit  $q(a)\varphi(i, b) = \varphi(a, i)\varphi(a, b)$ .

On peut alors calculer l'angle  $\widehat{abi}$ . Au numérateur on a  $\varphi(b \wedge a, b \wedge i) = \varphi(a, b)\varphi(b, i) - q(b)\varphi(a, i)$ , au dénominateur  $q(b \wedge i) = \varphi(b, i)^2 - q(b)q(i) =$

5. C'est la position limite de l'angle de demi-droites, dans le cas où l'un des points est sur le cercle. La formule s'obtient par passage à la limite.

6. Dérogeant à la convention usuelle, mais c'est sans importance.

$\varphi(b, i)^2$ . En multipliant numérateur et dénominateur par  $\varphi(a, b)/\varphi(b, i)$  on obtient

$$\cos \widehat{abi} = \frac{\varphi(a, b)^2 - q(a)q(b)}{\varphi(a, b)\sqrt{q(a \wedge b)}} = \frac{\sqrt{q(a \wedge b)}}{\varphi(a, b)}.$$

On note que le cosinus est positif, donc que l'angle de parallélisme est  $< \pi/2$  et qu'il ne dépend que de la paire  $\{a, b\}$ . On le note  $\theta(a, b)$ . Il revient au même de considérer le carré du cosinus de  $\theta(a, b)$ , c'est à dire la quantité  $\frac{q(a \wedge b)}{\varphi(a, b)^2}$ . Comme on a  $q(a \wedge b) = -q(a)q(b) + \varphi(a, b)^2$ , on a  $\cos^2 \theta(a, b) = 1 - \frac{1}{I(a, b)}$  et la donnée de  $\theta$  est équivalente à celle de l'invariant  $I$ . Bref, l'angle de parallélisme n'apporte aucune information nouvelle par rapport à la distance des points  $a, b$  comme le montre la formule  $\text{th } d(a, b) = \cos \theta(a, b)$  et on peut l'oublier sans encombre.

### 9.1.5 Aires et invariants

Rappelons, voir 9.1.1, que  $\mathcal{S}$  désigne l'anneau des invariants de  $m$  vecteurs génériques et notons  $L$  son corps des fractions.

Lorsque le corps de base est  $\mathbf{R}$ , nous avons défini, grâce au point de vue riemannien, les aires associées aux métriques non euclidiennes, et nous avons montré en 6.9.5 le théorème de Gauss-Bonnet qui affirme que l'aire d'un triangle est – essentiellement – la somme de ses angles (non orientés, de demi-droites). Nous avons aussi, au chapitre 8, donné une version algébrique de l'aire et, au moins dans le cas hyperbolique, une variante de Gauss-Bonnet avec des angles orientés de demi-droites. Le but de ce paragraphe est de discuter l'existence d'un invariant **polynomial**, défini de manière algébrique sur un corps quelconque, qui rende compte de l'aire, disons pour un triangle. La difficulté de cette approche est la suivante D'abord, il n'y a pas de quantité jouant de manière claire le rôle de l'aire, même si les crochets  $[a, b, c]$  vont lui être liés. Ensuite, le problème essentiel, c'est que l'aire, orientée ou non, n'est pas un invariant au sens polynomial du terme. En effet, par Gauss-Bonnet, elle s'exprime en fonction des angles. Dans le cas non orienté, ceux-ci, ou plutôt leurs lignes trigonométriques, sont déjà dans une extension quadratique du corps  $L$  des invariants (à cause des racines carrées intervenant dans les formules, voir 5.5.5 et 5.5.7). Cela va nous conduire à voir l'aire comme un élément d'une extension de degré 8 du corps  $L$  et à nous pencher sur ses conjugués. Dans le cas orienté, on a un candidat pour jouer le rôle de l'aire avec la quantité  $(B, C) + (C, A) + (A, B)$  (angles orientés de droites). Mais, là encore, les angles ne sont invariants qu'au signe près (voir 8.7.16) et il va

falloir utiliser les conjugués de la somme pour avoir des invariants. Même dans le cas hyperbolique réel où la somme des angles est un invariant sous  $\Omega(q)$  (mais pas sous  $PO(q)$ ), ce n'est pas un invariant polynomial en vertu de 9.1.15.

### Aires dans le cas affine et crochets

Rappelons que lorsqu'on travaille dans un plan affine, par exemple dans  $\mathbf{P}(E)$  muni d'une droite à l'infini d'équation  $l \in E^*$ , on a une définition de l'aire (orientée) d'un triangle  $abc$  par la formule  $\mathcal{A}(abc) = \frac{[a, b, c]}{2l(a)l(b)l(c)}$  (voir Partie II ?? ou ci-dessus 8.7.12; on notera que si on normalise les points du plan affine par  $l = 1$  on a simplement le crochet). Bien entendu, pour avoir cette définition, la donnée de la forme  $l$  est essentielle. Nous verrons que, dans le cas euclidien, on dispose effectivement d'une telle forme canonique, mais il n'y a rien de tel en non euclidien. Dès lors, il n'y a pas d'invariant évident pour jouer le rôle de l'aire. On peut bien sûr en imaginer, liés aux crochets et notamment les deux suivants :  $\mathcal{A}(a, b, c) = \frac{[a, b, c]^2}{q(a)q(b)q(c)}$  et son analogue côté droites :  $\mathcal{A}^*(A, B, C) = \frac{[A, B, C]^2}{q^*(A)q^*(B)q^*(C)}$ , mais aucun n'est vraiment l'aire, même s'il y a des formules les reliant à l'aire (voir par exemple 9.1.24)

### Conjugués

Nous allons donner une définition de l'aire d'un triangle, certes compliquée, mais valable sur un corps quelconque. Pour comprendre cette définition, supposons dans un premier temps que le corps de base est  $\mathbf{R}$ .

On considère trois points du plan elliptique  $\mathbf{E}$  ou du plan de Klein  $\mathbf{K}$  et un triangle  $abc$  dont on note  $A, B, C$  les côtés. *A priori*, il y a quatre sortes d'angles : de droites ou de demi-droites et orientés ou non. Prenons la variante la plus précise : celle des angles orientés de demi-droites. Ces angles sont dans  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  et sont déterminés par leur cosinus et leur sinus : un angle<sup>7</sup>  $a$  est défini par  $\cos a$  et  $\sin a$ . Ces quantités ne sont pas des invariants, mais leurs carrés le sont :  $\cos^2 a = I^*(B, C)$  et  $\sin^2 a = 1 - I^*(B, C)$ . Sur le corps des invariants  $L$ ,  $\cos a$  et  $\sin a$  sont donc algébriques de degré 2 et leurs conjugués sont leurs opposés. En termes d'angles,  $a$  admet quatre "conjugués" :  $a, -a, \pi - a$  et  $\pi + a$ .

Si maintenant on considère l'aire, qui est peu ou prou égale à la somme des angles,  $\theta_0 = a + b + c$ , elle (ou plutôt ses lignes trigonométriques) admet

---

7. Pour alléger les notations nous noterons simplement  $a, b, c$  les angles du triangle.

des conjugués qui sont les angles  $\theta_0 = a + b + c$ ,  $\theta_1 = a + b - c$ ,  $\theta_2 = a - b + c$ ,  $\theta_3 = -a + b + c$ , les opposés des  $\theta_i$ , ainsi que les  $\pi + \theta_i$  et  $\pi - \theta_i$ , soit en tout 16 éléments de  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ . Il suffit, en fait, de considérer les huit premiers car les cosinus et sinus des autres sont opposés. On a alors le résultat suivant :

**9.1.20 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{K}$  ou de  $\mathbf{E}$  (dans ce cas, on le suppose de spin positif). On note  $a, b, c$  ses angles orientés de demi-droites et  $A, B, C$  ses côtés, précisément, on pose  $A = b \wedge c$ ,  $B = c \wedge a$  et  $C = a \wedge b$ . On pose  $u = \cos^2 a = I^*(B, C)$ ,  $v = \cos^2 b = I^*(C, A)$ ,  $w = \cos^2 c = I^*(A, B)$  et  $s = S^*(A, B, C) = -\cos a \cos b \cos c$ . On a  $s^2 = uvw$ . Le cosinus de l'aire :  $\cos(a + b + c)$  est algébrique de degré 4 sur le corps  $L$  des invariants. Ses conjugués sont  $\cos(a + b - c)$ ,  $\cos(a - b + c)$ ,  $\cos(-a + b + c)$  et ils sont racines du polynôme :*

$$X^4 + 4sX^3 + (4(vw + wu + uv) - 2(u + v + w))X^2 + 4s(u + v + w - 2)X + 4uvw - 2(vw + wu + uv) + u^2 + v^2 + w^2$$

*Le sinus de l'aire :  $\sin(a + b + c)$  est algébrique de degré 8 sur le corps  $L$  des invariants. Ses conjugués sont  $\sin(a + b - c)$ ,  $\sin(a - b + c)$ ,  $\sin(-a + b + c)$  et leurs opposés et ils sont racines de l'équation :*

$$X^8 - (a_3 + 4)X^6 + (a_2 + 3a_3 + 6)X^4 - (a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4)X^2 + a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + 1$$

*où l'on a noté  $a_i$  le coefficient de  $X^i$  dans l'équation des cosinus.*

*Démonstration.* C'est une bonne occasion de proposer au lecteur une révision des formules de trigonométrie ! On part de la formule :

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c - \sin a \cos b \sin c - \cos a \sin b \sin c$$

et les autres s'obtiennent en changeant les signes de  $a, b$  ou  $c$ . On en déduit les fonctions symétriques par un calcul laborieux mais sans malice. D'un point de vue trigonométrique, il s'agit d'écrire les quantités cherchées en fonction des invariants  $I^*$ , par exemple  $I^*(B, C) = \cos^2 a$ , et

$$S^*(A, B, C) = \frac{\varphi^*(B, C)\varphi^*(C, A)\varphi^*(A, B)}{q^*(A)q^*(B)q^*(C)} = -\cos a \cos b \cos c$$

(attention au signe).

Pour les sinus, il suffit d'écrire l'équation vérifiée par  $\cos^2(a + b + c)$  et d'y faire le changement d'inconnue  $Y = 1 - X$ .



**9.1.21 Corollaire.** Avec les notations de la proposition précédente, les nombres  $e^{i(a+b+c)}$ ,  $e^{i(a+b-c)}$ ,  $e^{i(a-b+c)}$ ,  $e^{i(-a+b+c)}$  et leurs conjugués sont racines d'un polynôme réciproque<sup>8</sup>  $P_{abc}$ , de degré 8, dont les coefficients sont des polynômes invariants à coefficients rationnels, qui s'écrit :

$$P_{abc}(X) = X^8 + 2a_3X^7 + 4(a_2 + 1)X^6 + \dots + 4(a_2 + 1)X^2 + 2a_3X + 1.$$

### Une définition de l'aire ?

Dans le cas d'un corps quelconque, voici une définition – qui risque de ne pas plaire à tout le monde – de l'aire :

**9.1.22 Définition.** Soit  $abc$  un triangle de  $\mathbf{P}(E)$  formé de points non isotropes et à côtés non isotropes. On appelle aire de  $abc$  le polynôme à coefficients invariants  $P_{abc}$  du corollaire 9.1.21. (Ce polynôme est défini sur un corps quelconque.)

**9.1.23 Commentaire.** Comme on l'a dit, le point de départ c'est que la fonction  $(B, C) + (C, A) + (A, B)$ , disons  $a + b + c$ , (angles de droites orientés) est additive mais non invariante car  $g \in O(q)$  peut changer les angles en leurs opposés. L'idée pour la rendre invariante est de prendre toutes les sommes permutées :  $\pm a \pm b \pm c$  et leurs exponentielles imaginaires, ce qui donne le polynôme  $P_{abc}$ . Cette fois il est bien invariant, mais la difficulté est d'exprimer la propriété de découpage. Si l'on découpe  $abc$  en  $abd + dca$  comme expliqué en 8.7.1 ou 8.7.3, c'est-à-dire, en termes de droites si l'on considère  $ABC$ ,  $ABD$  et  $DCA$  avec  $B, C, D$  sont concourantes (ce qu'on peut écrire simplement  $D = B + C$  après normalisation), il s'agit de donner une relation liant le polynôme  $P_{ABC}$  à  $P_{AB(B+C)}$  et  $P_{(B+C)CA}$ . Ce qu'on peut dire, si l'on appelle  $z_i, z'_i$  et  $z''_i$  les racines de ces polynômes, c'est qu'il existe une permutation des  $z'_i$  et des  $z''_i$  telle que l'on ait  $z_i = z'_i z''_i$ . Mais je ne sais ni préciser cette permutation de manière satisfaisante, ni traduire cette condition en termes de fonctions symétriques.

En effet, on sait que  $a + b + c$  est additif, mais les autres ? C'est plus compliqué, si on a  $abc = abd + dca$ , on a  $a = a_1 + a_2$  et  $d_1 + d_2 = 0$  modulo  $\pi$ . Si on regarde les éléments  $\theta_0 = a + b + c$ ,  $\theta_1 = a + b - c$ ,  $\theta_2 = a - b + c$  et  $\theta_3 = -a + b + c$  et les analogues dans les petits triangles :  $\theta'_0 = a_1 + b + d_1$ ,  $\theta'_1 = a_1 + b - d_1$ ,  $\theta'_2 = a_1 - b + d_1$ ,  $\theta'_3 = -a_1 + b + d_1$ ,  $\theta''_0 = d_2 + c + a_2$ ,  $\theta''_1 = d_2 + c - a_2$ ,  $\theta''_2 = d_2 - c + a_2$ ,  $\theta''_3 = -d_2 + c + a_2$ , pour que les choses se recollent il faut avoir  $d_1 + d_2$  et  $a_1 + a_2$  et pas les signes  $-$ . Cela donne  $\theta_0 = \theta'_0 + \theta''_0$ ,  $\theta_1 = \theta'_0 + \theta''_2$ ,  $\theta_2 = \theta'_1 + \theta''_3$ ,  $\theta_3 = \theta'_2 + \theta''_1$ ,

8. C'est-à-dire tel que les coefficients de  $X^k$  et  $X^{8-k}$  sont égaux.

$\theta_1 = \theta'_1 - \theta''_1$  et  $-\theta_2 = \theta'_3 - \theta''_3$ . On a une sorte de loi de composition qui aux  $\theta'_i$  et  $\theta''_i$  associe les  $\theta_i$ , mais elle est bien peu lisible.

### La formule des quatre triangles

Dans le plan elliptique, on a une interprétation géométrique des conjugués de l'aire et l'on voit apparaître l'invariant crochet :

**9.1.24 Proposition.** *Soit  $abc$  un triangle de spin positif du plan elliptique réel  $\mathbf{E}$ . On considère les quatre triangles délimités par les droites  $(bc)$ ,  $(ca)$  et  $(ab)$ . Les aires de ces triangles valent, avec les notations précédentes,  $\mathcal{A}_0 = a + b + c - \pi = \theta_0 - \pi$ ,  $\mathcal{A}_1 = \pi - \theta_1$ ,  $\mathcal{A}_2 = \pi - \theta_2$  et  $\mathcal{A}_3 = \pi - \theta_3$ . On a  $\mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 = 2\pi$  et la formule :*

$$4 \sin \frac{\mathcal{A}_0}{2} \sin \frac{\mathcal{A}_1}{2} \sin \frac{\mathcal{A}_2}{2} \sin \frac{\mathcal{A}_3}{2} = \mathcal{A}^*(A, B, C) = \frac{[A, B, C]^2}{q^*(A)q^*(B)q^*(C)}.$$

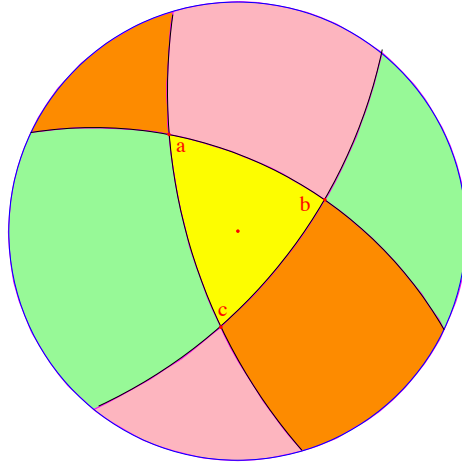


FIGURE 9.2 – Les quatre triangles  $abc$  sont en jaune, orange, rose et vert

*Démonstration.* Comme on a  $\sin \frac{\mathcal{A}_0}{2} = -\cos \frac{\theta_0}{2}$  et, pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $\sin \frac{\mathcal{A}_i}{2} = \cos \frac{\theta_i}{2}$  la proposition résulte de deux formules :

$$4 \cos \frac{a+b+c}{2} \cos \frac{a+b-c}{2} \cos \frac{a-b+c}{2} \cos \frac{-a+b+c}{2} =$$

$$-1 + 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = -\mathcal{A}^*(A, B, C).$$

(La dernière égalité n'est autre que la relation  $\mathcal{S}'$ , voir 1.1.6, 4.5.16 ou ci-dessous.)

## 9.2 Le second théorème fondamental

### 9.2.1 Énoncé

On s'intéresse maintenant aux relations entre les invariants. L'anneau  $R$  est encore l'anneau de polynômes en les coordonnées de  $m$  vecteurs génériques  $x_1, \dots, x_m$  et on a vu que l'anneau  $\mathcal{S}$  des invariants est engendré par deux types de polynômes : les crochets  $[x_i, x_j, x_k]$  avec  $1 \leq i < j < k \leq m$  et les "produits scalaires"  $\varphi(x_i, x_j)$  avec  $1 \leq i \leq j \leq m$ . On pose  $I = \{1, 2, \dots, m\}$ . Comme dans la partie<sup>9</sup> II nous introduisons deux anneaux de polynômes : l'anneau  $U$  des polynômes en les indéterminées  $X_{ijk}$  avec  $i, j, k \in I$  et  $Y_{ij}$  avec  $i, j \in I$ , à coefficients dans le corps de base et l'anneau  $V$  des polynômes en les indéterminées  $X_{ijk}$  avec  $1 \leq i < j < k \leq m$  et  $Y_{ij}$  avec  $1 \leq i \leq j \leq m$ , toujours à coefficients dans le corps de base. Comme dans la partie II, les vecteurs  $x_i$  pour  $i \in I$ , seront souvent notés simplement  $a, b, c, \dots$  et leur ensemble sera noté  $\mathcal{A}$ .

On a un homomorphisme  $\theta : U \rightarrow V$  défini sur les indéterminées  $X_{ijk}$  par  $\theta(X_{ijk}) = 0$  si deux des indices  $i, j, k$  sont égaux, et  $\theta(X_{ijk}) = \epsilon(\sigma)X_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}$  où  $\sigma$  est l'unique permutation de  $i, j, k$  telle que  $\sigma(i) < \sigma(j) < \sigma(k)$  et sur les indéterminées  $Y_{ij}$  par  $\theta(Y_{ij}) = Y_{ij}$  si  $i \leq j$  et  $\theta(Y_{ij}) = Y_{ji}$  si  $i > j$ . Cet homomorphisme est surjectif et son noyau est engendré par les polynômes  $X_{ijk}$  dans lesquels deux indices au moins coïncident, les  $X_{ijk} - \epsilon(\sigma)X_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}$  où  $\sigma$  est une permutation de  $i, j, k$  et les polynômes  $Y_{ij} - Y_{ji}$ .

On a un homomorphisme  $\Psi : V \rightarrow \mathcal{S}$  qui à  $X_{ijk}$  et  $Y_{ij}$  associe respectivement  $[x_i, x_j, x_k]$  et  $\varphi(x_i, x_j)$  et on pose  $\Phi = \Psi \circ \theta$ .

Le second théorème fondamental vise à déterminer le noyau de  $\Phi$  ou  $\Psi$  :

**9.2.1 Théorème. (Second théorème fondamental)** *L'idéal noyau de  $\Phi$  est l'idéal  $J$  engendré par  $\text{Ker } \theta$  et par trois types d'éléments :*

1) *Les éléments  $\mathcal{R}'(i, j, k, l; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$  de la forme :*

$$\begin{vmatrix} Y_{i\alpha} & Y_{i\beta} & Y_{i\gamma} & Y_{i\delta} \\ Y_{j\alpha} & Y_{j\beta} & Y_{j\gamma} & Y_{j\delta} \\ Y_{k\alpha} & Y_{k\beta} & Y_{k\gamma} & Y_{k\delta} \\ Y_{l\alpha} & Y_{l\beta} & Y_{l\gamma} & Y_{l\delta} \end{vmatrix}$$

*qui correspondent aux relations de la forme :*

$$R'(a, b, c, d; x, y, z, t) = \begin{vmatrix} \varphi(a, x) & \varphi(a, y) & \varphi(a, z) & \varphi(a, t) \\ \varphi(b, x) & \varphi(b, y) & \varphi(b, z) & \varphi(b, t) \\ \varphi(c, x) & \varphi(c, y) & \varphi(c, z) & \varphi(c, t) \\ \varphi(d, x) & \varphi(d, y) & \varphi(d, z) & \varphi(d, t) \end{vmatrix} = 0$$

---

9. À laquelle le lecteur est renvoyé pour toutes précisions.

pour huit vecteurs  $a, b, c, d; x, y, z, t$ .

2) Les éléments  $\mathcal{S}'(i, j, k; \alpha, \beta, \gamma)$  de la forme :

$$\Delta(q)X_{ijk}X_{\alpha\beta\gamma} - \begin{vmatrix} Y_{i\alpha} & Y_{i\beta} & Y_{i\gamma} \\ Y_{j\alpha} & Y_{j\beta} & Y_{j\gamma} \\ Y_{k\alpha} & Y_{k\beta} & Y_{k\gamma} \end{vmatrix}$$

qui correspondent aux relations  $\mathcal{S}'(a, b, c; x, y, z)$  vues en 9.1.2 :

$$\Delta(q)[a, b, c][x, y, z] = \begin{vmatrix} \varphi(a, x) & \varphi(a, y) & \varphi(a, z) \\ \varphi(b, x) & \varphi(b, y) & \varphi(b, z) \\ \varphi(c, x) & \varphi(c, y) & \varphi(c, z) \end{vmatrix}.$$

3) Enfin, les éléments  $\mathcal{T}'(i, j, k, l; \alpha)$  de la forme :

$$X_{jkl}Y_{i\alpha} - X_{ikl}Y_{j\alpha} + X_{ijl}Y_{k\alpha} - X_{ijk}Y_{l\alpha}$$

qui correspondent aux relations :

$$T'(a, b, c, d; x) = [b, c, d]\varphi(a, x) - [a, c, d]\varphi(b, x) + [a, b, d]\varphi(c, x) - [a, b, c]\varphi(d, x) = 0.$$

Le noyau de  $\Psi$  est l'image  $\theta(J)$ .

La démonstration de ce résultat occupe la fin de la section.

**9.2.2 Remarque.** Un lecteur attentif pourrait se demander ce que sont devenues les relations  $\mathcal{R}$  entre crochets vues au chapitre II :

$$X_{jkl}X_{ipq} - X_{ikl}X_{jpp} + X_{ijl}X_{kpp} - X_{ijk}X_{lpp}.$$

Cette relation, en remplaçant  $X_{ijk}X_{\alpha\beta\gamma}$  au moyen de la relation  $\mathcal{S}'$ , s'écrit comme somme de quatre déterminants en  $Y_{ij}$  qui sont des polynômes homogènes de degré 3. Cette somme est dans  $J$  si l'on en croit le théorème, ce qui est un peu paradoxal car les éléments de  $J$  qui sont des polynômes en les seuls  $Y_{ij}$  sont les  $\mathcal{R}'$  qui sont de degré 4. En fait, il n'y a pas de paradoxe : on vérifie par un petit calcul que l'élément en question est identiquement nul !

**9.2.3 Remarque.** Dans le cas de  $SL$ , les éléments de type  $\mathcal{R}$  ne suffisent pas à engendrer  $\text{Ker } \Psi$  (voir Partie II ??). Ici, vu la remarque précédente et la disparition des relations  $\mathcal{R}$  il est possible que le noyau de  $\Psi$  soit engendré par les éléments  $\mathcal{R}', \mathcal{S}', \mathcal{T}'$  précédents, vus dans  $V$ . J'ignore si c'est bien le cas, mais, de toute façon, le passage par  $U$  est utile dans la preuve du théorème.

**9.2.4 Remarque.** Les relations précédentes ne sont pas indépendantes. En particulier, en développant le déterminant qui définit  $\mathcal{R}'$  par rapport à sa dernière colonne on obtient :

$$\mathcal{R}'(i_1, i_2, i_3, i_4; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \sum_{k=1}^4 (-1)^{k+1} Y_{i_k, \delta} \mathcal{S}'(i_1, \dots, \widehat{i_k} \dots, i_4; \alpha, \beta, \gamma) \\ + \Delta(q) X_{\alpha\beta\gamma} \mathcal{T}'(i_1, i_2, i_3, i_4; \delta)$$

(le symbole  $\widehat{i_k}$  signifie que cet indice est omis.) Comme générateurs de l'idéal  $J$ , les relations  $\mathcal{R}'$  sont donc inutiles. En revanche, elles vont donner les relations dans le cas de l'anneau des invariants sous le groupe  $O(q)$  tout entier, voir 9.2.13 et elles joueront un rôle crucial dans la preuve de 9.2.1.

**9.2.5 Remarque.** Le théorème donné ici dans le cas des vecteurs donne aussi le résultat dans le cas des vecteurs et des formes. Il suffit en effet de remplacer chacune des formes  $f_i$  par un vecteur<sup>10</sup>  $y_i$ , et ce grâce à la forme  $\varphi$ , et d'utiliser le dictionnaire mis en place dans la preuve de 9.1.4. On verra une application de cette technique plus bas, voir paragraphe 9.3.1.

## 9.2.2 Démonstration de 9.2.1 : préliminaires

Nous aurons besoin des notations suivantes :

**9.2.6 Notation.** On note  $U_0$  (resp.  $V_0$ ) le sous-anneau de  $U$  engendré par les indéterminées  $Y_{ij}$  avec  $i, j \in I$  (resp.  $1 \leq i \leq j \leq m$ ). La restriction de  $\theta$  à  $U_0$  est à valeurs dans  $V_0$  et on la note  $\theta_0$ . On définit l'homomorphisme  $\Psi_0 : V_0 \rightarrow R$  par  $\Psi_0(Y_{ij}) = \varphi(x_i, x_j)$  et on pose  $\Phi_0 = \Psi_0 \circ \theta_0$ . Enfin, on note  $J_0$  l'idéal de  $U_0$  engendré par les éléments  $Y_{ij} - Y_{ji}$  et les éléments du type  $\mathcal{R}'(i, j, k, l; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ .

### Le sens direct

La première chose est de montrer qu'on a bien les relations annoncées. Pour  $\mathcal{S}'$  cela a déjà été fait. Il est clair que  $R'(a, b, c, d; x, y, z, t)$ , vu comme polynôme en  $x, y, z, t$ , est une forme quadrilinéaire alternée. Comme on est sur un espace vectoriel de dimension 3, elle est nulle. On peut appliquer le même raisonnement à  $T'(a, b, c, d; x)$  ou utiliser la relation fondamentale de dimension, voir Partie II, ??.

---

10. Les anciens auraient dit : remplacer un vecteur contravariant par un vecteur covariant.

## Polarisations

On renvoie le lecteur à la partie II pour tout ce qui concerne les polarisations. Si  $a$  et  $b$  sont des vecteurs de  $\mathcal{A}$  (ou, ce qui revient au même, des indices de  $I$ ), rappelons qu'on définit deux polarisations, notées toutes deux  $D_{ab}$ , l'une définie sur les indéterminées de  $R$  par  $D_{ab}(c_i) = 0$  pour  $c \neq b$  et  $D_{ab}(b_i) = a_i$ , l'autre définie sur  $U$  par  $D_{ab}(X_{ijk}) = 0$  si  $i, j, k \neq b$ ,  $D_{ab}(X_{ibk}) = X_{iak}$  si  $i, k \neq b$  (par exemple),  $D_{ab}(X_{bbk}) = X_{abk} + X_{bak}$ ,  $D_{ab}(Y_{ij}) = 0$  si  $b \neq i, j$ ,  $D_{ab}(Y_{ib}) = Y_{ia}$  si  $b \neq i$ ,  $D_{ab}(Y_{bb}) = Y_{ab} + Y_{ba}$  et les formules analogues pour les autres indéterminées.

Dans  $R$  on peut décrire l'effet de  $D_{xy}$  sur les crochets et les "produits scalaires". On a les formules :  $D_{xy}[a, b, c] = 0$  si  $y$  n'est pas l'un des vecteurs  $a, b, c$ ,  $D_{xa}[a, b, c] = [x, b, c]$  et les formules analogues en remplaçant  $a$  par  $b$  ou  $c$ . On a aussi  $D_{xy}(\varphi(a, b)) = 0$  si  $y \neq a, b$ ,  $D_{xy}(\varphi(a, y)) = \varphi(a, x)$  si  $a \neq y$ ,  $D_{xy}(\varphi(y, b)) = \varphi(x, b)$  si  $y \neq b$  et  $D_{xy}(q(y)) = 2\varphi(x, y)$ . Ces remarques donnent aussitôt les résultats suivants :

**9.2.7 Proposition.** *Pour tout  $F \in U$  (resp.  $F \in U_0$ ) et tous  $a, b \in I$ , on a  $D_{ab}(\Phi(F)) = \Phi(D_{ab}(F))$ .*

**9.2.8 Corollaire.** *On a  $D_{ab}(\text{Ker } \Phi) \subset \text{Ker } \Phi$  et  $D_{ab}(\text{Ker } \Phi_0) \subset \text{Ker } \Phi_0$ .*

On a aussi la proposition suivante :

**9.2.9 Proposition.** *On a  $D_{ab}(J) \subset J$  et  $D_{ab}(J_0) \subset J_0$ .*

*Démonstration.* On le vérifie sur chacun des générateurs de  $J$ . Attention, il faut distinguer les cas où plusieurs variables sont égales (on vérifie par exemple qu'on a  $D_{ab}(\mathcal{S}'(b, j, k; b, \beta, \gamma)) = \mathcal{S}'(a, j, k; b, \beta, \gamma) + \mathcal{S}'(b, j, k; a, \beta, \gamma)$ ).

## La congruence de Capelli

Le point essentiel de la preuve est encore la congruence de Capelli.

**9.2.10 Proposition.** *Soient  $a, b, c, d \in I$  et  $F \in U$  (resp.  $F \in U_0$ ). L'élément suivant est dans l'idéal  $J$  (resp.  $J_0$ ) :*

$$\Delta(F) = \begin{vmatrix} D_{dd} + 3\text{Id} & D_{dc} & D_{db} & D_{da} \\ D_{cd} & D_{cc} + 2\text{Id} & D_{cb} & D_{ca} \\ D_{bd} & D_{bc} & D_{bb} + \text{Id} & D_{ba} \\ D_{ad} & D_{ac} & D_{ab} & D_{aa} \end{vmatrix} (F).$$

*Démonstration.* La preuve est analogue à celles vues dans la Partie II (voir ?? et ??). On utilise essentiellement l'identité de Capelli pour le dédoublement.

Le point crucial est de montrer que certains déterminants sont dans  $J$  (resp.  $J_0$ ). Il y a déjà les  $\mathcal{R}'(i, j, k, l; \alpha, \beta, \gamma, \delta)$ , pour qui c'est évident, et ce sont les seuls dans le cas de  $U_0$ . Dans le cas de  $U$ , il y a aussi les déterminants analogues à ceux vus en II ??, en particulier les déterminants du type :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} X_{ast} & Y_{ar} & Y_{aq} & Y_{ap} \\ X_{bst} & Y_{br} & Y_{bq} & Y_{bp} \\ X_{cst} & Y_{cr} & Y_{cq} & Y_{cp} \\ X_{dst} & Y_{dr} & Y_{dq} & Y_{dp} \end{vmatrix}.$$

Pour montrer qu'ils sont dans  $J$  on peut soit faire un calcul direct, soit procéder comme dans la preuve de II ?? en introduisant des variables supplémentaires de type  $X_{ayz}$  que l'on envoie ensuite sur les variables de type  $Y_{ap}$ . Le point essentiel, pour se ramener à II ??, est de noter que les relations  $\mathcal{T}'$  sont les images par cet homomorphisme des relations  $\mathcal{R}$  de la partie II :

$$X_{jkl}X_{ipq} - X_{ikl}X_{jpp} + X_{ijl}X_{kpp} - X_{ijk}X_{lpq}.$$

**9.2.11 Remarque.** Si le polynôme  $F$  est de la forme  $\sum X_{ijk}F_{ijk}$  avec des polynômes  $F_{ijk}$  dans  $U_0$ , on vérifie aussitôt que  $\Delta(F)$  est de la même forme.

### 9.2.3 Démonstration de 9.2.1 : les relations sans crochets

L'étape suivante consiste à isoler les variables du type  $\varphi(x, y)$ . Cela revient en fait à étudier les invariants sous le groupe  $O(q)$  tout entier et pas seulement sous  $O^+(q)$  car les crochets sont seulement anti-invariants sous  $O^-(q)$ . Pour cela on travaille dans l'anneau de polynômes  $U_0$  introduit ci-dessus (9.2.6). On a le résultat suivant :

**9.2.12 Proposition.** *Le noyau de  $\Phi_0$  est l'idéal  $J_0$ .*

Ce résultat donne les relations dans le cas des invariants sous  $O(q)$  :

**9.2.13 Corollaire.** *Les seules relations dans l'anneau des invariants sous  $O(q)$  (dont on rappelle qu'il est engendré par les éléments  $\varphi(a, b)$ , voir 9.1.3) sont les relations de symétrie :  $\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$  et les relations  $\mathcal{R}'$  vues en 9.2.1.*

#### Preuve de 9.2.12 : le cas de trois vecteurs

La première étape de la preuve consiste à montrer que dans le cas de trois vecteurs il n'y a pas de relations entre les produits scalaires (autres que la symétrie).

**9.2.14 Lemme.** Soit  $F(X, Y, Z; U, V, W)$  un polynôme en 6 variables à coefficients dans  $k$ . On suppose que  $F$  vérifie :

$$F(q(a), q(b), q(c); \varphi(b, c), \varphi(c, a), \varphi(a, b)) = 0$$

pour tous les vecteurs  $a, b, c$  de  $E$ . Alors,  $F$  est identiquement nul.

*Démonstration.* Si  $F$  n'est pas identiquement nul, l'ensemble de ses zéros dans  $k^6$  est une hypersurface  $H$ . Soit  $(x_0, y_0, z_0; u_0, v_0, w_0) \notin H$ . L'intersection de  $H$  avec le sous-espace affine de dimension 3 de  $k^6$  défini par  $U = u_0, V = v_0, W = w_0$  est (en bijection avec) l'ensemble  $S$  des zéros de  $G(X, Y, Z) = F(X, Y, Z; u_0, v_0, w_0)$ . Comme  $S$  n'est pas égal à  $k^3$  (le point  $(x_0, y_0, z_0)$  n'est pas dans  $S$ ), c'est (au plus) une surface algébrique de  $k^3$ . Soit  $C$  l'ensemble des couples  $(x, y)$  de  $k^2$  tels que la droite  $X = x, Y = y$  soit contenue dans  $S$ . Alors  $C$  est contenu dans une courbe de  $k^2$ . En effet, dire que  $(x, y)$  est dans  $C$  signifie qu'on a, pour tout  $z \in k$ ,  $G(x, y, z) = 0$ , donc  $G(x, y, Z) = 0$  puisque le corps est infini. Comme  $G$  est non nul, cela s'écrit  $G(x, y, Z) = g_m(x, y)Z^m + \dots + g_0(x, y) = 0$  avec  $m \geq 0$  et  $g_m \neq 0$  et les points de  $C$  sont ceux qui annulent les polynômes  $g_i$ . En particulier, comme  $g_m$  est non nul, ils sont contenus dans la courbe définie par  $g_m(x, y) = 0$ .

On munit  $E$  d'une base orthogonale  $(e_1, e_2, e_3)$  avec  $q(e_i) = \alpha_i \in k^*$  et on considère des points  $a = a_1e_1, b = b_1e_1 + b_2e_2$  et  $c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$  de  $E$ . On a  $\varphi(a, b) = \alpha_1a_1b_1, \varphi(a, c) = \alpha_1a_1c_1, \varphi(b, c) = \alpha_1b_1c_1 + \alpha_2b_2c_2$ . Si on se donne  $a_1, b_2$  non nuls, il existe des scalaires  $b_1, c_1, c_2$ , uniques, tels que l'on ait  $\varphi(a, b) = w_0, \varphi(c, a) = v_0$  et  $\varphi(b, c) = u_0$ .

On peut choisir  $a_1$  et  $b_2$  de telle sorte que le point

$$(q(a) = \alpha_1a_1^2, q(b) = \alpha_1b_1^2 + \alpha_2b_2^2 = \frac{w_0^2}{\alpha_1a_1^2} + \alpha_2b_2^2)$$

de  $k^2$  ne soit pas dans  $C$ . En effet, comme  $C$  est contenu dans une courbe, il contient au plus un nombre fini de droites  $X = x$ . On peut donc choisir  $a_1$  pour que la droite  $D$  définie par  $X = \alpha_1a_1^2 = q(a)$  ne soit pas contenue dans  $C$  (car il y a une infinité de telles droites). Alors,  $D \cap C$  est fini et, comme  $q(b) = \alpha_1b_1^2 + \alpha_2b_2^2$  prend une infinité de valeurs quand  $b_2$  varie, il existe un  $b_2$  tel que  $(q(a), q(b)) \notin C$ . Dans ce cas, la droite verticale  $X = q(a), Y = q(b)$  n'est pas contenue dans  $S$ , donc son intersection avec  $S$  est finie. Comme il y a une infinité de valeurs de  $q(c)$  quand  $c_3$  varie, on peut choisir  $c_3$  pour que  $(q(a), q(b), q(c))$  ne soit pas dans  $S$ . Mais alors le point  $(q(a), q(b), q(c), \varphi(b, c), \varphi(c, a), \varphi(a, b))$  n'est pas dans  $H$  et c'est une contradiction.



**9.2.15 Corollaire.** *Pour  $m \leq 3$ , on a  $\text{Ker } \Phi_0 = \text{Ker } \theta_0$  et cet idéal est engendré par les  $Y_{ij} - Y_{ji}$ , donc égal à  $J_0$ .*

*Démonstration.* Le lemme 9.2.14 montre que le noyau de  $\Psi_0$  est nul et on conclut par la formule  $\Phi_0 = \Psi_0 \circ \theta_0$ . La dernière assertion vient du fait que s'il n'y a que trois indices, les éléments  $\mathcal{R}'$  sont nuls.

### Fin de la démonstration de 9.2.12

On commence par ordonner les polynômes homogènes de  $U_0$ , d'abord selon le degré total, puis selon les degrés des variables prises dans l'ordre lexicographique.

On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe  $F \in \text{Ker } \Phi_0$ ,  $F \notin J_0$ . On peut supposer  $F$  homogène. On choisit un tel  $F$  minimal pour l'ordre ci-dessus. En vertu de 9.2.15, le polynôme  $F$  met en jeu au moins 4 indices  $a < b < c < d$ . On applique alors la congruence de Capelli à  $F$ . On a donc  $\Delta(F) \in J_0$ . On raisonne comme dans la partie II (fin de la preuve de ??). Le polynôme  $\Delta(F)$  est une somme de termes, parmi lesquels le terme diagonal

$$(D_{dd} + 3\text{Id}) \circ (D_{cc} + 2\text{Id}) \circ (D_{bb} + \text{Id}) \circ D_{aa}(F),$$

qui est de la forme  $\lambda F$  où  $\lambda$  est un scalaire non nul (car  $F$  fait intervenir les 4 variables  $a, b, c, d$ ). Tous les autres termes sont dans  $J_0$ . En effet, considérons (par exemple) le terme  $t = D_{ad} \circ D_{bc} \circ D_{db} \circ D_{ca}(F)$ . Comme  $F$  est dans  $\text{Ker } \Phi_0$ , il en est de même de  $D_{ca}(F)$  en vertu de 9.2.8. Mais,  $D_{ca}(F)$  est de degré plus petit que  $F$  en  $a$ . Vu l'hypothèse de minimalité, il est donc dans  $J_0$ , donc aussi  $t$  en vertu de 9.2.9. On a donc  $\Delta(F) = \lambda F + G$  avec  $G$  et  $\Delta(F)$  dans  $J_0$ , donc aussi  $F$ , ce qui est absurde.

### 9.2.4 Fin de la démonstration de 9.2.1

Soit  $H \in U$  un élément de  $\text{Ker } \Phi$ . Il s'agit de montrer qu'il est dans  $J$ . En utilisant les éléments  $\mathcal{S}'$ , on voit qu'on peut éliminer les produits de deux crochets, donc supposer  $H$  de la forme  $F + G$ , avec  $F \in U_0$  et  $G = \sum X_{ijk} G_{ijk}$  où les polynômes  $G_{ijk}$  sont dans  $U_0$ . On sait que  $H$  est nul si l'on remplace chaque  $X_{ijk}$  par le crochet  $[x_i, x_j, x_k]$  et chaque  $Y_{ij}$  par  $\varphi(x_i, x_j)$ . Si on applique aux  $x_i$  un élément de  $O^-(q)$  (par exemple, si la base est orthogonale, en changeant une coordonnée de signe), l'image de  $H$  reste nulle, mais c'est aussi l'image de  $F - G$  (car les crochets changent de signe). On en déduit que  $F$  et  $G$  sont dans  $\text{Ker } \Phi$ . Comme  $F$  ne fait intervenir que les  $Y_{ij}$ , la proposition 9.2.12 montre que  $F$  est dans l'idéal engendré par les éléments  $\mathcal{R}'$ .

Il reste à montrer que si un élément du type de la forme  $G = \sum X_{ijk}G_{ijk}$  est dans  $\text{Ker } \Phi$  il est dans  $J$ . On raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a un  $G$  qui ne vérifie pas cette assertion et on le choisit minimum dans l'ordre lexicographique. Si  $G$  ne fait intervenir que trois indices  $a, b, c$  il est de la forme  $G = X_{abc}G_0$  avec  $G_0 \in U_0$  et on a  $G_0 \in \text{Ker } \Phi_0 = J_0 \subset J$ , ce qui est absurde. Si  $G$  fait intervenir au moins quatre indices on applique la congruence de Capelli et on raisonne comme à la fin de la démonstration de 9.2.12 : on a  $\Delta(G) \in J$  (et ce polynôme est encore de la forme voulue, voir 9.2.11). On montre encore que  $\Delta(G)$  contient un terme non nul de la forme  $\lambda G$  et que tous les autres termes sont dans  $J$ . On en déduit que  $G$  est dans  $J$ , ce qui est absurde.

### 9.3 Applications géométriques

Notons déjà que certaines relations, qui ne figurent pas dans la liste du théorème 9.2.1 parce qu'elles sont triviales, peuvent cependant être importantes. C'est le cas de la relation  $S(a, b, c)^2 = I(b, c)I(c, a)I(a, b)$ . Ramenée aux invariants  $q$  et  $\varphi$  cette relation revient à  $0 = 0$ , mais elle décrit cependant le corps  $L$  des invariants projectifs comme extension quadratique du sous-corps engendré par les invariants  $I$ .

#### 9.3.1 Le calcul de $q(a \wedge b)$

Ce calcul (qui mène tout droit à Al-Kashi) est une variante de la relation  $\mathcal{S}'$ . Appliquons en effet la formule  $\mathcal{S}'$  aux points  $a, b, a \wedge b$ ;  $a, b, a \wedge b$ . Comme  $a \wedge b$  est orthogonal à  $a$  et  $b$  le déterminant du second membre vaut  $(q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2)q(a \wedge b)$ . Par ailleurs, dans le premier membre, le crochet  $[a, b, a \wedge b]$  est, par définition du produit vectoriel, égal à  $q(a \wedge b)$ . On en déduit la relation  $\Delta(q)q(a \wedge b) = q(a)q(b) - \varphi(a, b)^2$ .

#### 9.3.2 La relation sur quatre points

Il s'agit d'interpréter géométriquement la relation  $\mathcal{R}'$ , dans le cas où les points  $a, b, c, d$  et  $x, y, z, t$  coïncident. Rappelons qu'on a, pour  $a, b, c, d \in E$  :

$$R'(a, b, c, d; a, b, c, d) = \begin{vmatrix} q(a) & \varphi(a, b) & \varphi(a, c) & \varphi(a, d) \\ \varphi(b, a) & q(b) & \varphi(b, c) & \varphi(b, d) \\ \varphi(c, a) & \varphi(c, b) & q(c) & \varphi(c, d) \\ \varphi(d, a) & \varphi(d, b) & \varphi(d, c) & q(d) \end{vmatrix} = 0$$

On notera qu'il s'agit d'un déterminant de Gram. Comme on est dans un espace vectoriel de dimension 3, les quatre vecteurs  $a, b, c, d$  sont dépendants,

donc par exemple  $d$  est combinaison linéaire des autres et il en est de même de la dernière colonne du déterminant, qui est donc nul.

Si on suppose que les points en question sont non isotropes, on peut diviser cette relation par  $q(a)q(b)q(c)q(d)$  et le développement du déterminant conduit à la relation suivante :

$$\begin{aligned} & 1 - I(a, b) - I(a, c) - I(a, d) - I(b, c) - I(b, d) - I(c, d) \\ & \quad + I(a, b)I(c, d) + I(a, c)I(b, d) + I(a, d)I(b, c) \\ & \quad + 2S(a, b, c) + 2S(a, b, d) + 2S(a, c, d) + 2S(b, c, d) \\ & - 2\frac{S(a, b, c)S(a, b, d)}{I(a, b)} - 2\frac{S(a, c, b)S(a, c, d)}{I(a, c)} - 2\frac{S(a, d, b)S(a, d, c)}{I(a, d)} = 0. \end{aligned}$$

L'interprétation géométrique de cette relation est la suivante. On a quatre points  $a, b, c, d$  et on écrit les trois formules d'Al-Kashi obtenues avec les trois droites passant par  $a$ . Par exemple, on a :

$$I^*((ab), (ac)) = \frac{I(b, c) + I(a, b)I(a, c) - 2S(a, b, c)}{(1 - I(a, b))(1 - I(a, c))}$$

et les relations analogues avec  $(ab), (ad)$  et  $(ac), (ad)$ . Par ailleurs, les droites  $(ab), (ac), (ad)$  sont concourantes, ce qui se traduit dans le dual par le fait que les points correspondants sont alignés. On a donc la relation d'alignement vue en 4.5.13 :

$$2S^*((ab), (ac), (ad)) = I^*((ab), (ac)) + I^*((ac), (ad)) + I^*((ad), (ab)) - 1.$$

On calcule aisément la quantité  $S^*((ab), (ac), (ad))$  comme  $S(a \wedge b, a \wedge c, a \wedge d)$  à l'aide des formules de 1.2.3, voir aussi 4.7.19. En mettant toutes ces formules ensemble on trouve exactement la relation  $\mathcal{R}'$ .

**9.3.1 Remarque.** Nous retrouverons la relation  $\mathcal{R}'$  dans la Partie VI (voir ??) où elle aura comme conséquence le fait que si  $a, b, c, d$  sont cocycliques, il en est de même de  $a, d, b, c$  !

**9.3.2 Remarque.** Étant donnés quatre points  $a, b, c, d$  de  $\mathbf{P}(E)$ , on leur associe 10 invariants (6 invariants du type  $I(a, b)$  et 4 du type  $S(a, b, c)$ ), liés par 5 relations (les relations du type  $S(a, b, c)^2 = I(b, c)I(c, a)I(a, b)$  et la relation  $\mathcal{R}'$ ). Cela est cohérent avec le fait que l'espace des quadrilatères est de dimension 5 (les 4 points forment une variété de dimension 8 et le groupe des isométries est de dimension 3), voir 4.1.2. On peut d'ailleurs retrouver ce fait en éliminant les termes en  $S$  dans la relation  $\mathcal{R}'$ , par quatre élévations au carré successives, pour rester avec les 6 invariants  $I$  et une seule relation, mais celle-ci est très compliquée, à la différence de la relation analogue du cas euclidien (déterminant de Cayley-Menger, voir Partie V).

### 9.3.3 La relation de cocyclicité

On a vu en 7.5.4 une belle formulation de la cocyclicité de quatre points en termes de relations entre des termes de la forme  $[b, c, d]^2 q(a)$ . En divisant cette relation par  $q(a)q(b)q(c)q(d)$  et en remplaçant les termes du type  $[b, c, d]^2$  au moyen de  $\mathcal{S}'$ , on obtient une relation – pas vraiment simple<sup>11</sup> – entre les invariants  $I$  et  $S$  assurant la cocyclicité.

### 9.3.4 Invariants et birapports

Dans ce paragraphe on suppose que  $q$  est une forme de Lorentz.

#### Calcul du carré du birapport

On a vu dans la Partie III que le groupe  $PO(q)$  est isomorphe à  $PGL(2, k)$ , la preuve de ce résultat consistant à faire opérer  $PO(q)$  sur la conique  $\Gamma = V(q)$  et à utiliser le birapport sur cette conique. Cet isomorphisme a une traduction en termes d'invariants : le birapport de 4 points de la conique  $\Gamma$  (ou plutôt son carré) s'exprime en fonction des invariants  $q$  et  $\varphi$  étudiés ci-dessus :

**9.3.3 Proposition.** *Soient  $a, b, c, d$  quatre points de  $\Gamma$ . On a la formule :*

$$\llbracket a, b, c, d \rrbracket^2 = \frac{\varphi(a, c)\varphi(b, d)}{\varphi(b, c)\varphi(a, d)}.$$

*Démonstration.* C'est essentiellement la relation  $\mathcal{S}'$ . En effet, on sait que le birapport  $\llbracket a, b, c, d \rrbracket$  de quatre points de la conique se calcule en prenant un point  $o \in \Gamma$  et en posant  $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \llbracket (oa), (ob), (oc), (od) \rrbracket$  (voir Partie III ??). Mais, ce birapport de quatre droites se calcule avec les crochets :  $\llbracket (oa), (ob), (oc), (od) \rrbracket = \frac{[o, a, c][o, b, d]}{[o, b, c][o, a, d]}$  (voir Partie II ??). Pour obtenir la formule souhaitée, il ne reste plus qu'à utiliser la relation  $\mathcal{S}'$  qui donne par exemple, dans le cas de vecteurs isotropes, la formule :  $\Delta(q)[o, a, c]^2 = 2\varphi(o, a)\varphi(o, c)\varphi(a, c)$ .

**9.3.4 Remarque.** Bien entendu, en vertu de 9.1.18, la quantité  $\frac{\varphi(a, c)\varphi(b, d)}{\varphi(b, c)\varphi(a, d)}$ , écrite avec  $a, b, c, d$  indéterminés<sup>12</sup>, est un invariant projectif, donc se calcule

11. À ma connaissance, il n'y a pas d'analogie simple de la formule de Ptolémée du cas euclidien.

12. Avec  $a, b, c, d$  isotropes les invariants  $I$  et  $S$  n'ont pas de sens.

avec les invariants  $I$  et  $S$ , et on a (par exemple) :

$$\llbracket a, b, c, d \rrbracket^2 = \frac{S(a, b, c)I(b, d)}{S(a, b, d)I(b, c)}.$$

Cet invariant, en un sens, est le plus beau de tous : c'est le seul dont le numérateur et le dénominateur sont de degré 1 en toutes les variables.

### Calcul du birapport

On a trouvé une écriture simple du carré du birapport  $r^2$  en fonction des invariants. On va voir qu'on peut aussi écrire  $r$  en fonction des invariants, de manière un peu plus compliquée, grâce à la ruse suivante (que nous reverrons aussi dans la Partie VI) :

**9.3.5 Lemme.** *Soit  $r \in k$ . On a la formule  $2r = r^2 + 1 - (1 - r)^2$ .*

**9.3.6 Corollaire.** *Soient  $a, b, c, d$  quatre points de  $\Gamma$ . On a la formule :*

$$\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \frac{\varphi(b, c)\varphi(a, d) + \varphi(a, c)\varphi(b, d) - \varphi(a, b)\varphi(c, d)}{2\varphi(b, c)\varphi(a, d)}.$$

*Démonstration.* Si l'on pose  $r = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$ , cela résulte du lemme, de la formule donnant  $r^2$  et de la propriété de permutation du birapport au milieu :  $\llbracket a, c, b, d \rrbracket = 1 - r$ .

### Birapport et angles

La donnée de quatre points  $a, b, c, d$  distincts de  $\Gamma$  détermine trois autres points comme intersection des côtés et des diagonales de  $abcd$  :  $u = (ab) \cap (cd)$ ,  $v = (ac) \cap (bd)$  et  $w = (ad) \cap (bc)$ . Les angles de droites en  $u, v, w$  s'expriment en termes de birapports :

**9.3.7 Proposition.** *Soient  $a, b, c, d$  quatre points distincts de  $\Gamma$ . On pose  $r = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$ . On a les formules :  $I^*((ad), (bc)) = (2r - 1)^2 = 4r^2 - 4r + 1$ ,  $I^*((ab), (cd)) = \left(\frac{r+1}{r-1}\right)^2$  et  $I^*((ac), (bd)) = \left(\frac{r-2}{r}\right)^2$ . On peut encore dire que, si l'on nomme  $r_1, r_2, r_3, 1 - r_1, 1 - r_2, 1 - r_3$  les six valeurs des birapports des points  $a, b, c, d$ , les trois valeurs des invariants angulaires  $I^*$  en  $u, v, w$  sont les  $(r_i^2 - (1 - r_i)^2)^2 = (2r_i - 1)^2$  pour  $i = 1, 2, 3$ .*

*Démonstration.* On a, par définition :

$$I^*((ad), (bc)) = \frac{\varphi(a \wedge d, b \wedge c)^2}{q(a \wedge d)q(b \wedge c)} = \frac{[\varphi(a, b)\varphi(c, d) - \varphi(a, c)\varphi(b, d)]^2}{\varphi(a, d)^2\varphi(b, c)^2}$$

et on voit apparaître dans cette expression les carrés des birapports  $r$  et  $\llbracket a, c, b, d \rrbracket = (1 - r)$ .

**9.3.8 Remarque.** La formule donnant  $I^*((ab), (cd))$  a été prouvée Partie III ?? (en remplaçant les droites  $(ab)$  et  $(cd)$  par leurs pôles  $x = \Psi(a, b)$  et  $y = \Psi(c, d)$ , intersections des tangentes en  $a, b$  et  $c, d$ ).

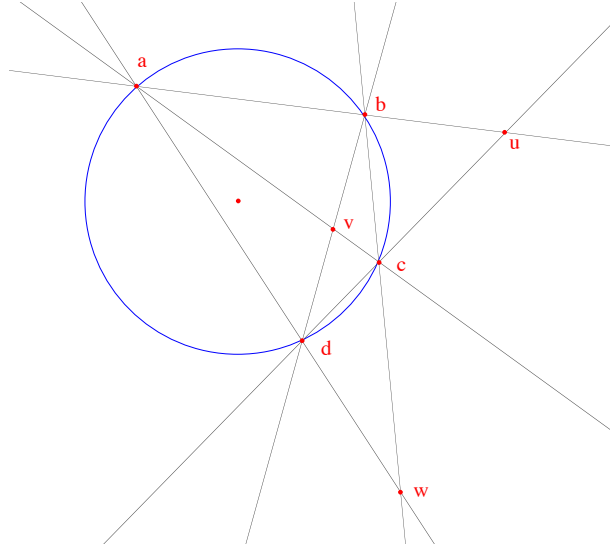


FIGURE 9.3 – Les points  $a, b, c, d$  et leurs compères  $u, v, w$

**9.3.9 Corollaire.** Avec les notations précédentes, si l'on note  $\theta$  l'angle non orienté des droites  $(ad)$  et  $(bc)$ , on a les formules suivantes :  $\cos \theta = |2r - 1|$ ,  $\sin^2 \theta = 4r(1 - r)$ ,  $r = \cos^2 \theta / 2$  et  $1 - r = \sin^2 \theta / 2$  ou l'inverse.

**9.3.10 Remarque.** La relation  $I^* = 4r^2 - 4r + 1$  apparaît dans la relation  $\mathcal{R}'(a, b, c, d; a, b, c, d)$ , écrite avec des points isotropes. En effet, cette relation s'écrit :

$$\varphi(a, c)^2 \varphi(b, d)^2 + \varphi(a, b)^2 \varphi(c, d)^2 + \varphi(b, c)^2 \varphi(a, d)^2 =$$

$$2\varphi(a, c)\varphi(a, d)\varphi(b, c)\varphi(b, d) + 2\varphi(a, b)\varphi(a, d)\varphi(b, c)\varphi(c, d) + 2\varphi(a, c)\varphi(a, b)\varphi(c, d)\varphi(b, d)$$

et, si l'on divise par  $\varphi(b, c)^2 \varphi(a, d)^2$ , on obtient :

$$[[a, b, c, d]]^4 + [[a, c, b, d]]^4 + 1 = 2[[a, b, c, d]]^2 + 2[[a, c, b, d]]^2 + 2[[a, b, c, d]]^2 [[a, c, b, d]]^2.$$

Comme on a  $[[a, c, b, d]] = 1 - [[a, b, c, d]] = 1 - r$  et  $I^* = (r^2 - (1 - r)^2)^2$ , on retrouve exactement la relation  $I^* = 4r^2 - 4r + 1$ .

## 9.4 Exercices

**9.4.1 Exercice.** On suppose que l'espace  $E$  est de dimension 2, muni d'une forme hyperbolique. On choisit une base  $e_1, e_2$  de  $E$  formée de vecteurs isotropes et on identifie  $E$  à  $k^2$  via cette base. On a alors  $q(x, y) = xy$ . Montrer par le calcul qu'un polynôme  $F(a)$  (avec  $a = (a_1, a_2)$ ), invariant par  $O^+(q)$  est un polynôme en  $q(a)$ . (On utilisera les matrices diagonales  $(\lambda, 1/\lambda)$ .)

**9.4.2 Exercice.** On suppose  $k = \mathbf{R}$ ,  $E$  de dimension 2 et la forme euclidienne. Montrer que tout polynôme  $F(a)$  invariant est un polynôme en  $q(a)$ . (Si on pose  $a = (x, y)$  on introduira les variables complexes  $z = x + iy$  et  $\bar{z} = x - iy$  sur lesquelles  $O^+(q)$  agit par multiplication par  $\lambda \in \mathbf{U}$ . On montrera alors que  $F$  est un polynôme en  $z\bar{z}$ .)

**9.4.3 Exercice.** On travaille dans le plan hyperbolique. On suppose que  $a, b, c, d$  sont quatre points de  $\Gamma$  et on pose  $x = \varphi(a, b)$ ,  $y = \varphi(a, c)$ ,  $z = \varphi(a, d)$ ,  $w = \varphi(b, c)$ ,  $v = \varphi(b, d)$  et  $u = \varphi(c, d)$ . On se propose de montrer que la relation fondamentale des birapports :  $\llbracket a, c, b, d \rrbracket = 1 - \llbracket a, b, c, d \rrbracket$  (traduite sur les carrés) est conséquence des relations  $\mathcal{S}'$  et  $\mathcal{T}'$ .

1) Montrer que la relation sur les birapports s'écrit :

$$x^2u^2 + y^2v^2 + z^2w^2 - 2yzvw - 2zxwu - 2xyuv = 0.$$

2) En utilisant les relations  $\mathcal{S}'$ , montrer que cette relation se ramène à :

$$y[a, b, d] [b, c, d] - w[a, b, d] [a, c, d] - x[a, c, d] [b, c, d] = 0.$$

3) Montrer cette relation en utilisant les quatre relations  $\mathcal{T}'(a, b, c, d; t)$  obtenues en prenant pour point mobile  $t$  les points  $a, b, c, d$  et en les multipliant chacune par un crochet convenable.





# Bibliographie

- [Bac59] Friedrich Bachmann. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*. Springer Verlag, 1959.
- [Bea83] Alan F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. Springer, 1983.
- [Ber90] Marcel Berger. *Géométrie*. Nathan, Paris, 1990.
- [Car61] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, 1961.
- [Car76] Manfredo Do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [Die70] Jean Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Springer, Berlin, 1970.
- [DL82] Carlos Sacré Daniel Lehmann. *Géométrie et topologie des surfaces*. PUF, Paris, 1982.
- [Gra71] André Gramain. *Topologie des surfaces*. PUF, Paris, 1971.
- [Had98] Jacques Hadamard. *Leçons de géométrie I, géométrie plane*. Jacques Gabay, Paris, 1988, première édition 1898.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer, Berlin, 1977.
- [Har00] Robin Hartshorne. *Geometry : Euclidean and beyond*. Springer, Berlin, 2000.
- [Kle79] Felix Klein. Ueber die transformationen siebenter ordnung der elliptischen funktionen. *Math. Ann.*, 14 : 428–471, 1879.
- [Leb75] Henri Lebesgue. *La mesure des grandeurs*. Blanchard, Paris, 1975.
- [Lio01] Georges Lion. *Géométrie du plan*. Vuibert, 2001.
- [Mar02] Yves Martin. *Conception et mise en oeuvre de micromondes de géométries non-euclidienne dans le cadre de la géométrie dynamique, illustrées avec Cabri-géomètre. Expérimentation en formation des maîtres*. PhD thesis, Université de Grenoble, 2002.

- [Mum65] David Mumford. *Geometric invariant theory*. Springer, Berlin, 1965.
- [Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique, une introduction*. Interéditions, Paris, 1995.
- [Per96] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, Paris, 1996.
- [Per11] Daniel Perrin. *Mathématiques d'École*. Cassini, Paris, 2011.
- [RD89] Daniel Caire Robert Deltheil. *Compléments de géométrie*. Jacques Gabay, Paris, 1989.
- [Ric89] David R. Richman. The fundamental theorems of vector invariants. *Advances in mathematics*, 73 : 43–78, 1989.
- [Ser70] Jean-Pierre Serre. *Cours d'arithmétique*. PUF, 1970.
- [SG93] J. Lafontaine S. Gallot, D. Hulin. *Riemannian Geometry*. Springer, 1993.
- [Spi79] Michaël Spivak. *A comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, 1979.