

Partie VI. LA GÉOMÉTRIE ANALLAGMATIQUE

Introduction historique

La géométrie anallagmatique¹ est essentiellement celle de l'inversion et l'étude de cette transformation remonte à la première moitié du XIX-ième siècle. Mes sources historiques proviennent principalement du livre de Michel Chasles [Cha70] *Rapport sur les progrès de la géométrie*, qui date de 1870.

Comme souvent avec une notion nouvelle, il est difficile de dire qui est le premier à en avoir eu l'idée. Pour certains auteurs, il s'agit de Jacob Steiner (1796-1863) qui l'utilise dès 1826. C'est à la fois vrai et faux. Faux parce que Steiner ne considère pas la transformation² au sens moderne du terme, mais vrai parce qu'il a reconnu la situation géométrique correspondante. Comme Chasles ne parle pas de Steiner, je donne quelques précisions à son sujet. L'article où l'on voit apparaître quelque chose qui ressemble à l'inversion est [Ste26] *Einige geometrische Betrachtungen* dans lequel il prouve notamment au paragraphe 22 ce qu'on appelle maintenant l'alternative de Steiner sur les chaînes de cercles tangents (voir ci-dessous 4.3.6). Le lemme crucial apparaît au paragraphe 12. Le lecteur en trouvera un énoncé en 1.5.17 ci-dessous.

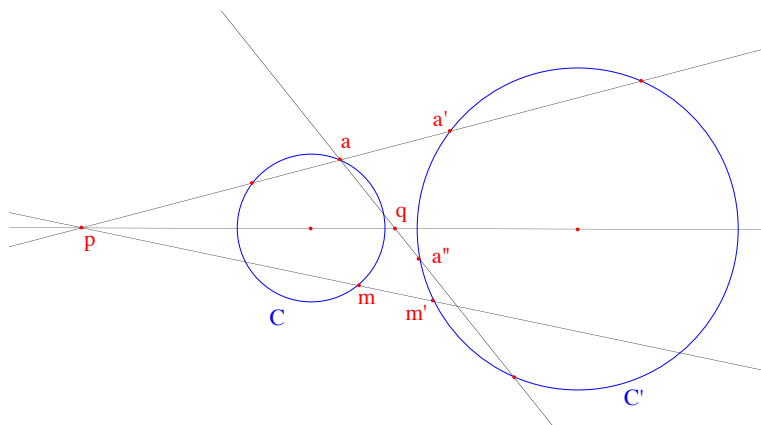


FIGURE 1 – Steiner et l'inversion

Steiner considère deux cercles C et C' et il introduit deux points p et q (qu'il appelle³ *Aehnlichkeitpunkte*), qui sont les centres d'homothéties échangeant les cercles, mais qu'il n'utilise pas comme tels, mais plutôt comme

1. Ce mot vient du grec *allasso* qui désigne une transformation et dont le dérivé nominal est *allagma*. Merci à Monique Trédé de ces précisions.

2. Ce concept n'était pas encore vraiment apparu à l'époque, mais on commence à parler de *figures homographiques*, par exemple.

3. Je reproduis l'orthographe de 1826. Dans l'édition de 1901 le mot est écrit *Punkt*.

pôles des inversions échangeant les cercles. En effet, il montre la propriété suivante (voir figure ci-dessus) : $pm.pm' = pa.pa' = k$ où k est une constante indépendante de la sécante (et de même avec $qa.qa''$). De plus, il donne un nom à cette position de deux points $m \in C$ et $m' \in C'$ alignés avec p et vérifiant $pm.pm' = k$ (et qui sont donc, en langage moderne, inverses dans l'inversion de pôle p et de puissance k) : *sie seien potenzhaltend in Bezug auf den Aehnlichkeitpunct p*, ce qu'on peut traduire très approximativement par *ils sont liés par la puissance relativement au point p* : le point p (le pôle), la puissance, tout y est. Steiner utilise de manière essentielle cette notion au paragraphe 22 (la fameuse alternative) pour passer d'un cercle à un autre en conservant les propriétés (notamment les contacts). S'il n'a pas inventé l'inversion en tant que transformation, on doit reconnaître qu'il en est bien le précurseur.

Chasles, qui désigne l'inversion sous le nom de *transformation par rayons vecteurs réciproques*⁴, attribue la première apparition du concept à Adolphe Quételet (1796-1874), l'un des représentants de l'école belge (avec Dandelin), dans un mémoire de 1827 intitulé *Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques*, où ce qui est en cause me semble surtout être la projection stéréographique. Il est à noter que Quételet emploie le mot moderne d'inversion, à la différence de Chasles.

Mais Chasles attribue principalement la découverte de l'inversion au géomètre italien⁵ Giusto Bellavitis (1803-1880) dans un mémoire de 1836 *Teoria delle figure inverse, e loro uso nella Geometria elementare*. Chasles signale aussi des contributions de Stubbs et Ingram.

Le physicien anglais William Thomson (qui deviendra Lord Kelvin) utilise lui aussi cette transformation vers 1845 sous le nom de *principe des images électriques* pour préciser la distribution des charges sur une calotte sphérique. Je cite Chasles ici : *Si le point a appartient à une sphère, le point a' est sur une seconde sphère, que Monsieur Thomson appelle l'image de la première. Serait-ce l'acte de naissance du mot image, qui nous est si familier ?*

La première théorie complète de l'inversion semble cependant être due à Joseph Liouville (1809-1882), vers 1847. Il établit en particulier que le groupe des transformations conformes (i.e. conservant les angles) d'un espace de dimension ≥ 3 est engendré par les similitudes et les inversions.

S'agissant de géométrie anallagmatique, on ne peut oublier qu'elle est un des exemples importants qui illustrent le programme d'Erlangen de Felix Klein et que son groupe⁶ est l'un des premiers exemples de groupes

4. *Son nom actuel*, dit-il ! Elle semble avoir été nommée ainsi par Liouville.

5. Connue aussi pour avoir donné une définition de *lignes équipollentes* qui préfigure celle des vecteurs.

6. Que nous dirons circulaire, mais qui est parfois appelé groupe de Möbius en l'honneur

géométriques non triviaux. Voici ce que dit Klein dans le paragraphe *Géométrie des rayons vecteurs réciproques* :

La géométrie des rayons vecteurs réciproques⁷ et la géométrie projective sur une surface du second degré sont une seule et même chose et plus loin :

La géométrie des formes binaires d'une variable complexe trouve sa représentation dans la géométrie d'une surface sphérique réelle.

Nous interpréterons ci-dessous ces phrases en termes d'isomorphisme du groupe circulaire et de deux groupes : le groupe $PSL(2, \mathbf{C})$ des homographies de la droite projective complexe (les formes binaires) et le groupe $PO^+(q)$ pour une forme de Lorentz de dimension 4 (la surface sphérique de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$).

De ce point de vue, l'un des intérêts principaux de la géométrie anallagmatique est d'illustrer une conséquence essentielle du programme d'Erlangen (même si elle n'est pas explicite dans le texte de Klein) : dans l'interprétation d'une géométrie comme l'opération d'un groupe sur un ensemble, lorsque le même groupe apparaît sous deux habits différents et avec des représentations différentes, la géométrie est **riche**, au sens où elle renferme deux types de propriétés, liées aux deux aspects du groupe. Nous verrons que c'est le cas ici avec le groupe circulaire. Quand on le voit comme $PSL(2, \mathbf{C})$ avec comme invariant naturel le birapport, les propriétés naturelles sont celles de cocyclicité et d'alignement, voir par exemple le lemme des six birapports 2.2.3 et ses conséquences. Mais quand on le voit comme $PO^+(q)$, les invariants sont liés à la forme quadratique (on a notamment l'invariant anallagmatique, voir 3.2.6) et les propriétés sont toutes celles qui concernent l'orthogonalité et les contacts, voir par exemple le théorème de Feuerbach 1.4.1.

d'August Möbius (1790-1868).

7. Rappelons que c'est l'ancien mot pour la géométrie de l'inversion.

Le contenu de cette partie

Cette partie comprend sept chapitres assez différents. Dans le premier, on présente le traitement élémentaire de l'inversion, essentiellement tel qu'on pouvait le trouver dans les manuels de terminale des années 1950. Ce chapitre culmine avec le théorème de Feuerbach, l'un des joyaux de la géométrie plane.

Le second chapitre est dévolu à l'approche complexe, autrement dit à la vision du groupe circulaire (direct) comme le groupe des homographies complexes $PSL(2, \mathbf{C})$. Qui parle des homographies de la droite projective ne peut manquer d'évoquer le birapport et il occupe effectivement une place de choix dans ce chapitre, notamment avec le lemme des six birapports et sa kyrielle d'applications. L'entrée par la droite projective complexe est aussi l'occasion de traiter les problèmes de conjugaison.

Le troisième chapitre change radicalement de point de vue avec l'introduction de l'espace \mathcal{E} des cercles-droites et de la forme quadratique q associée au carré du rayon. Points, droites et cercles se mettent à jouer sur un pied d'égalité et des notions comme les pinceaux deviennent bien naturelles dans ce cadre. Ce chapitre est l'occasion de prouver l'isomorphisme fondamental entre $PO^+(q)$ et $PSL(2, \mathbf{C})$, que Klein évoque dans le programme d'Erlangen.

Les chapitres suivants s'appliquent à montrer que cette théorie ne manque pas d'applications. Au chapitre 4, on traite de toutes celles qui tournent autour des pinceaux : représentation conforme des couronnes, cercles tangents à trois cercles, alternative de Steiner. La vision de l'inversion comme réflexion de l'espace des cercles montre ici toute sa puissance.

Le chapitre 5 porte sur les réseaux de cercles, c'est-à-dire les plans de \mathcal{E} . On y retrouve, avec émerveillement, toutes les géométries métriques étudiées dans les parties précédentes : hyperbolique, elliptique, euclidienne, avec le sentiment de mieux percevoir leur unité, notamment sur la question de la somme des angles d'un triangle.

Le chapitre 6 revient sur les questions de cocyclicité et d'alignement, mais avec l'entrée par l'espace des cercles, dont l'intérêt est de rendre linéaire cette propriété. On y voit à l'œuvre des techniques de géométrie algébrique, d'abord élémentaires, puis plus sophistiquées, avec un théorème très général, qui englobe à la fois les théorèmes de Pappus, Pascal et ceux des six cercles. Pour le résumer en un mot, ce théorème affirme que si deux ensembles finis sont liés par une intersection complète⁸ l'un est spécial si et seulement si

8. On appelle intersection complète dans \mathbf{P}^n une variété de dimension d qui est intersection de $n - d$ hypersurfaces exactement. Deux variétés V, W de dimension d dont la réunion est une intersection complète X sont dites liées par X .

l'autre l'est.

Enfin, le dernier chapitre reprend l'étude des invariants, comme dans les parties précédentes, avec ici un accent particulier mis sur le birapport et sa traduction dans l'espace des cercles. Il se termine par un retour sur le théorème de Feuerbach, abordé de manière analytique et cela permet de discuter encore une fois des liens entre théorèmes et relations entre les invariants.

Cette introduction est l'occasion d'insister sur l'un des choix de ce livre, celui de s'en tenir à la dimension 2. Certes, on peut tout à fait définir l'inversion en toutes dimensions (d'ailleurs un livre comme [DC51] l'étudiait non seulement dans le plan, mais dans l'espace). Bien sûr, il y a alors des résultats intéressants, notamment le fait que cette transformation échange (hyper) sphères et (hyper) plans. On peut même définir l'espace des sphères et des plans comme nous le ferons au chapitre 3 et voir le groupe "circulaire" comme le groupe d'automorphismes $PO(q)$ pour une forme q de Lorentz, voir [Ber90]. Cependant, on perd de manière définitive l'un des points cruciaux que nous allons utiliser ici : l'intervention des nombres complexes. En effet, il n'y a pratiquement rien de tel en dimension plus grande faute d'isomorphisme analogue⁹ à celui de $PO(q)$ et de $PSL(2, \mathbf{C})$. Bref, la géométrie anallagmatique existe encore en dimension plus grande que 2, mais elle est devenue ordinaire, générique, pauvre en un mot, et elle a perdu beaucoup de son charme.

Un autre choix opéré dans cette partie (contrairement aux précédentes) est de ne travailler que sur le corps des réels. Il y a plusieurs raisons à cela. La première est que cette partie est très géométrique et que les plus beaux des résultats étudiés ici ne sont pas d'un grand intérêt en dehors du cas réel.

La seconde raison, peut-être la plus importante, est que l'isomorphisme entre $PGL(2, \mathbf{C})$ et $PO(q)$ qui sous-tend la géométrie anallagmatique est viscéralement attaché à la conjugaison complexe (ou au corps des réels, si l'on préfère) : la géométrie anallagmatique est une géométrie de la conjugaison. C'est une différence fondamentale avec un autre isomorphisme important, mettant en jeu le même groupe, celui de $PSL(2, \mathbf{C})$ et de $O^+(Q)$, où Q est la forme $Y^2 - XT$, isomorphisme que nous avons rencontré Parties III et IV. Celui-là, en effet, est valable sur n'importe quel corps, donc aussi sur \mathbf{C} , mais, peut-être à cause de son universalité, il ne joue pas un grand rôle ici.

Bien sûr, sur le plan algébrique, bon nombre de résultats peuvent s'étendre au cas d'un corps quelconque k dans lequel -1 n'est pas un carré, par exemple un sous-corps de \mathbf{R} et notamment le corps des rationnels. En particulier

9. En dimension vectorielle 5 et 6 cependant, il y a des isomorphismes utilisant les quaternions, voir [Die70] Ch. IV §8, exemples 3 et 6, avec sans doute des propriétés géométriques intéressantes sur lesquelles je ne me suis pas penché.

l'isomorphisme évoqué ci-dessus avec le groupe de la forme de Lorentz en dimension 4 reste valable dans ce cadre plus général, comme le lecteur n'aura aucune peine à le montrer. Mais il y a cependant un autre bémol important, déjà rencontré dans la Partie IV, et qui justifie la restriction au corps des réels : les classes de conjugaison du groupe circulaire sont très liées aux propriétés arithmétiques du corps (notamment au groupe k^*/k^{*2}) et alors qu'elles sont très simples dans le cas réel, elles deviennent totalement inextricables dans le cas d'un corps comme celui des rationnels ou d'autres corps de nombres.

Chapitre 1

Rappels sur l'inversion

Dans ce chapitre, on rappelle, le plus brièvement possible, quelques propriétés élémentaires de l'inversion, en prélude à une étude plus approfondie et plus sophistiquée qui se déroulera dans les chapitres suivants. Le lecteur est censé être familier avec la géométrie euclidienne. Pour rafraîchir sa mémoire, on le renvoie, comme pour la partie V, à divers ouvrages : [Aud06], [Ber90], [Lad03], [DHP07], [Per96], [Eid09], [Ped70a], [Gug67], [Mar82], etc. En vérité, sur le sujet particulier de l'inversion, la meilleure référence reste le livre de terminale [DC51] de Deltheil et Caire, résolument moderne bien qu'il date des années 1940-50 (et même de 1939 pour la première édition). Je me suis d'ailleurs largement inspiré de ce livre, au moins dans le présent chapitre.

On donne dans ce chapitre quelques applications de l'inversion, dont le théorème de Feuerbach, mais de nombreuses autres apparaîtront dans les chapitres suivants.

Dans tout ce chapitre, X désigne le plan¹ affine euclidien (réel) et \vec{X} l'espace vectoriel associé. On note $(\vec{v}|\vec{w})$ le produit scalaire des vecteurs \vec{v} et \vec{w} et $\|\vec{v}\|$ la norme de \vec{v} . On notera $ab = \|\vec{ab}\|$ la distance des deux points a et b , c'est aussi la longueur du segment $[ab]$. On sait qu'il existe dans X des repères orthonormés et lorsqu'on utilisera des coordonnées et des équations, ce sera toujours par rapport à un tel repère. Si o, \vec{i}, \vec{j} est un repère orthonormé, l'application qui à $m \in X$ associe le couple $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $\vec{om} = x\vec{i} + y\vec{j}$ permet d'identifier X et \mathbf{R}^2 .

1. Mais beaucoup de choses se généralisent sans difficulté en toute dimension.

1.1 Quelques rappels sur les cercles

Les rappels qui suivent étant très classiques, le lecteur est averti que les démonstrations seront parfois sommaires.

1.1.1 Angle de deux courbes planes

Pour des précisions sur les courbes paramétrées le lecteur consultera les manuels de premier cycle des universités, ou les innombrables textes disponibles sur Internet.

1.1.1 Définition. On appelle **courbe plane** (paramétrée) l'image d'une application $f : I \rightarrow X$ où I désigne un intervalle de \mathbf{R} , non vide et non réduit à un point, et où f est de classe C^1 par morceaux. Dans un repère de X , on a $f(t) = (x(t), y(t))$ avec x, y de classe C^1 par morceaux.

1.1.2 Remarques. 1) Cette définition comprend le cas des courbes d'équation $y = f(x)$ (poser $x = t$) et $x = f(y)$ et, localement, les courbes d'équation $F(x, y) = 0$ lisses, en vertu du théorème des fonctions implicites. Bien entendu, les droites et les cercles sont des courbes de classe C^∞ , le cercle unité par exemple étant paramétré par $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $y = \frac{2t}{1+t^2}$.

2) En un point où f est de classe C^1 , le vecteur tangent à la courbe est le vecteur $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$.

1.1.3 Définition. Soient C_1, C_2 deux courbes paramétrées par les applications f_1 et f_2 , de classe C^1 , et soit m un point d'intersection de C_1 et C_2 . On appelle **angle** de C_1 et C_2 en m l'angle de leurs vecteurs tangents \vec{v}_1 et \vec{v}_2 en ce point.

1.1.4 Remarque. Cette notion a autant d'avatars que celle d'angle : il peut s'agir d'angle orienté ou non, des vecteurs ou des droites qui les portent.

1.1.5 Définition. Deux courbes C_1 et C_2 sont dites **tangentes** (resp. **orthogonales**) en $m \in C_1 \cap C_2$ si leur angle est nul (resp. égal à $\pi/2$) modulo π . On dit que C_1 et C_2 sont tangentes si elles le sont en au moins un point.

1.1.2 Cercles et droites tangents

On rappelle que, dans le cas des cercles et des droites, la notion de tangence peut être définie en termes de cardinal :

1.1.6 Proposition. 1) Soit C un cercle et D une droite. Les courbes C et D sont tangentes si et seulement si l'on a $|C \cap D| = 1$.

2) Soient C, C' deux cercles. Ils sont tangents si et seulement si l'on a $|C \cap C'| = 1$.

On rappelle aussi que si un cercle C de centre o et une droite D sont tangents en m , la droite D est perpendiculaire à (om) .

1.1.3 Puissance d'un point par rapport à un cercle

Voir aussi Partie IV chapitre 7, exercice ?? pour comparer avec la situation en géométrie non euclidienne.

La définition

1.1.7 Proposition-Définition. Soit C un cercle de centre ω et de rayon R et soit m un point de X . On pose $d = m\omega$. Soit D une droite passant par m et coupant C en deux points a et a' (éventuellement confondus). Alors, la quantité $(\overrightarrow{ma} | \overrightarrow{ma'}) = \overline{ma} \cdot \overline{ma'}$ est indépendante du choix de la sécante, elle est égale à $d^2 - R^2$ et s'appelle la **puissance** de m par rapport à C . On la note $p(m, C)$.

Démonstration. Soit h le milieu de $[aa']$. On a $\overrightarrow{ma} = \overrightarrow{mh} + \overrightarrow{ha}$ et $\overrightarrow{ma'} = \overrightarrow{mh} + \overrightarrow{ha'} = \overrightarrow{mh} - \overrightarrow{ha}$, d'où $p = (\overrightarrow{ma} | \overrightarrow{ma'}) = mh^2 - ha^2$. Par ailleurs, on a $\overrightarrow{wa} = \overrightarrow{wh} + \overrightarrow{ha}$ et $\overrightarrow{wa'} = \overrightarrow{wh} + \overrightarrow{ha'} = \overrightarrow{wh} - \overrightarrow{ha}$. De l'égalité des carrés des rayons $\omega a^2 = (\omega a')^2$ on déduit qu'on a $(\overrightarrow{wh} | \overrightarrow{ha}) = 0$. Comme m, h, a sont alignés, on a aussi $(\overrightarrow{wh} | \overrightarrow{mh}) = 0$. Le théorème de Pythagore donne alors $mh^2 = m\omega^2 - \omega h^2$ et $ha^2 = \omega a^2 - \omega h^2$. En définitive, on a bien $p = m\omega^2 - \omega a^2 = d^2 - R^2$.

1.1.8 Remarque. La puissance $p(m, C)$ est positive (resp. nulle, resp. négative) si et seulement si m est extérieur à C (resp. sur C , resp. intérieur à C). Si (mt) est tangente en t au cercle, on a $p(m, C) = mt^2$.

Expression analytique de la puissance

1.1.9 Proposition. Soit C un cercle d'équation $P(X, Y) = X^2 + Y^2 - 2bX - 2cY + d = 0$ dans un repère orthonormé et soit $m = (x, y)$ un point de \mathbf{R}^2 . Alors, on a $p(m, C) = x^2 + y^2 - 2bx - 2cy + d = P(m)$.

2. On peut bien entendu donner une variante de cette démonstration à l'aide de la géométrie élémentaire et notamment des propriétés du triangle isocèle $\omega aa'$. Attention toutefois aux cas particuliers (par exemple le cas où D passe par ω). On peut aussi montrer la formule $\overline{ma} \cdot \overline{ma'} = \overline{mb} \cdot \overline{mb'}$ grâce à la similitude des triangles mab' et mba' .

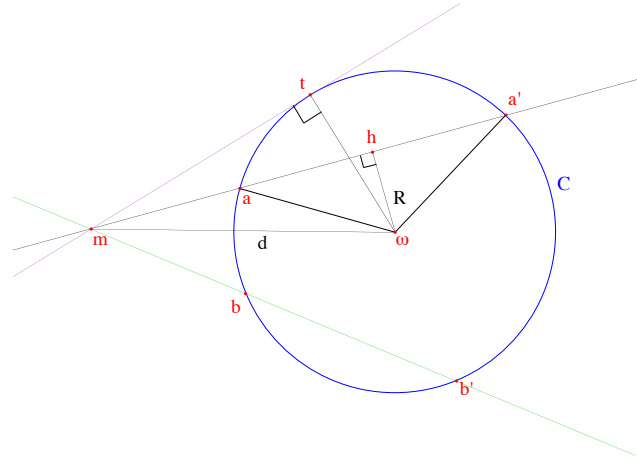


FIGURE 1.1 – Puissance : $\overline{ma} \cdot \overline{mb} = \overline{mt}^2 = d^2 - R^2$

Démonstration. Le cercle C a pour centre $\omega = (b, c)$ et son rayon est donné par $R^2 = b^2 + c^2 - d$. Le résultat est conséquence de la formule $p(m, C) = m\omega^2 - R^2$.

1.1.10 Remarque. On retrouve le fait que la puissance $p(m, C)$ est nulle si et seulement si m est sur C .

Axe radical de deux cercles

1.1.11 Proposition-Définition. Soient C et C' deux cercles non concentriques. L'ensemble des points m du plan qui ont même puissance par rapport à C et C' est une droite $\Delta(C, C')$, appelée **axe radical** de C et C' .

Démonstration. Le plus simple est d'utiliser la version analytique. Si C et C' ont pour équations³ respectives $P(X, Y) = X^2 + Y^2 - 2bX - 2cY + d = 0$ et $P'(X, Y) = X^2 + Y^2 - 2b'X - 2c'Y + d' = 0$, les points $m = (x, y)$ qui vérifient $P(m) = P'(m)$ sont donnés par l'équation $2(b' - b)x + 2(c' - c)y + d - d' = 0$. Comme les centres (b, c) et (b', c') de C et C' sont distincts c'est bien l'équation d'une droite.

1.1.12 Remarques.

- 1) Si les cercles C, C' sont concentriques et distincts, on a $p(m, C) \neq p(m, C')$ pour tout m .
- 2) Si C, C' se coupent en des points distincts m et n , leur axe radical est la droite (mn) . En effet, on a $p(m, C) = p(m, C') = 0$, et de même pour n , de sorte que m et n sont sur l'axe radical. Pour une construction dans le cas

3. Les équations de ce type seront dites normalisées.

général, voir exercice 1.5.2.

3) Dans tous les cas, l'équation de la droite $\Delta(C, C')$ montre qu'elle est orthogonale à la droite joignant les centres de C et C' . En particulier, si les cercles sont tangents, l'axe radical est la tangente commune.

1.1.4 Orthogonalité

Rappelons, voir 1.1.5, que deux courbes planes C et C' qui se coupent en un point a sont dites orthogonales en a si les tangentes à C et C' en a sont perpendiculaires. Dans le cas des cercles et des droites on a la traduction suivante :

1.1.13 Proposition.

1) Soit C un cercle de centre o et D une droite. Alors, C et D sont orthogonaux si et seulement si D est un diamètre de C (i.e. passe par o).

2) Soient C et C' deux cercles de centres o et o' et de rayons R et R' respectivement. On note d la longueur oo' . Alors C et C' sont orthogonaux si et seulement si on a $d^2 = R^2 + R'^2$.

Démonstration. 1) Soit a un point d'intersection de C et D . La tangente à D en a est D elle-même et elle doit être perpendiculaire à la tangente à C en a . Or, on sait que celle-ci est perpendiculaire au rayon, c'est-à-dire à (oa) . On a donc $D = (oa)$.

2) Soit a un point d'intersection de C et C' . Comme les tangentes en a à C et C' sont perpendiculaires, ce sont respectivement les droites $(o'a)$ et (oa) . Le triangle oao' est donc rectangle en a et la conclusion vient du théorème de Pythagore.

Les réciproques sont immédiates.

Le corollaire suivant traduit la relation $d^2 = R^2 + R'^2$ (cf. [DC51]) :

1.1.14 Corollaire. Deux cercles sont orthogonaux si et seulement si la puissance du centre de l'un par rapport à l'autre est égale au carré de son propre rayon.

1.1.15 Remarque. On peut étendre la définition au cas où l'un des cercles est un cercle-point, i.e. de rayon nul. Dans ce cas, les cercles sont orthogonaux si et seulement si le cercle point est sur l'autre cercle. Cette propriété jouera un rôle important au chapitre 3.

1.1.5 Pinceaux de cercles

Définition

La notion de pinceau⁴ de cercles est très ancienne. Une définition élémentaire passe par la notion d'axe radical, voir [DC51]. On préfère donner ici une définition analytique, dans l'esprit du chapitre 3.

1.1.16 Définition. Soient C_1 et C_2 deux cercles distincts d'équations P_1 et P_2 . Le **pinceau** de cercles défini par C_1 et C_2 est l'ensemble des "cercles" d'équations $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ où les λ_i sont des réels non tous deux nuls. On le note (C_1, C_2) .

1.1.17 Remarques. 1) Cette définition mérite un mot d'explication. Si on pose :

$$P_i(X, Y) = X^2 + Y^2 - 2b_i X - 2c_i Y + d_i$$

on a $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = (\lambda_1 + \lambda_2)(X^2 + Y^2) - 2(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2)X - 2(\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2)Y + (\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2)$. Posons $a = \lambda_1 + \lambda_2$, $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, $c = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2$ et $d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$. L'équation $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = a(X^2 + Y^2) - 2bX - 2cY + d = 0$ définit un cercle si et seulement si a est non nul et $b^2 + c^2 - ad > 0$. Si a est nul on a (en général) l'équation d'une droite, si $b^2 + c^2 - ad$ est nul il reste seulement un point, si cette quantité est négative l'équation définit le vide. C'est ce qui explique la présence des guillemets autour du mot cercle dans la définition.

2) Sur cette définition, on voit que les équations des cercles du pinceau ne sont définies qu'à un scalaire près (nous verrons au chapitre 3 qu'un pinceau est une droite projective de l'espace des cercles). En particulier, si l'équation est bien celle d'un cercle, ce qui impose que $a = \lambda_1 + \lambda_2$ est non nul, on peut la normaliser en divisant ses coefficients par a .

Les trois types de pinceaux

1.1.18 Proposition. Soient C_1 et C_2 deux cercles non concentriques, Δ leur axe radical et $\mathcal{F} = (C_1, C_2)$ le pinceau défini par C_1 et C_2 .

1) L'axe radical est un élément de \mathcal{F} et c'est la seule droite de \mathcal{F} .

2) Si C est un cercle de \mathcal{F} , distinct de C_1 , l'axe radical⁵ de C et C_1 est la droite Δ .

4. On parlait autrefois de faisceaux de cercles. J'ai choisi d'utiliser la terminologie plus moderne de pinceau, car le mot faisceau a pris en géométrie (algébrique) une telle importance (en un sens tout à fait différent), qu'il m'est difficile de l'utiliser. Toutefois, les pinceaux s'appelleront souvent \mathcal{F} ...

5. C'est cette propriété qui servait autrefois de définition.

3) Si C_1 et C_2 sont sécants en a, b avec $a \neq b$, les “cercles” du pinceau sont les cercles passant par a et b , ainsi que la droite (ab) . Les points a et b sont appelés **points-base** du pinceau.

4) Si C_1 et C_2 sont tangents en a , et si D est leur tangente commune en a , les “cercles” du pinceau sont les cercles tangents à D en a et la droite D . Le point a est le **point limite** du pinceau.

5) Si C_1 et C_2 sont extérieurs ou intérieurs, les cercles du pinceau sont disjoints, le pinceau contient deux cercles-points a, b (de rayon nul) appelés **points de Poncelet** du pinceau. Les cercles du pinceau (C_1, C_2) sont orthogonaux aux cercles du pinceau à points-base a, b .

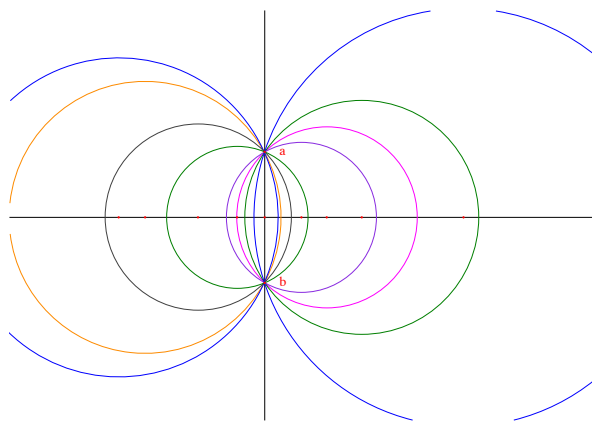


FIGURE 1.2 – Un pinceau à points-base

Démonstration. On note P_1 et P_2 les équations normalisées de C_1 et C_2 .

1) On a vu dans la preuve de 1.1.11, qu’une équation de Δ est $P_1 - P_2$, ce qui montre que Δ est dans le pinceau. Inversement, $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ n’est l’équation d’une droite que si l’on a $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, ce qui, comme les coefficients sont définis à un scalaire près, définit une unique droite.

2) Le cercle C a pour équation normalisée $P := \frac{\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$. L’axe radical de C et C_1 a alors pour équation $P - P_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} (P_2 - P_1)$ qui est bien une équation de Δ .

3) Il est clair que les cercles du pinceau passent par a et b . Inversement, soit C un cercle passant par a et b et soit c un point de C distinct de a, b . Les

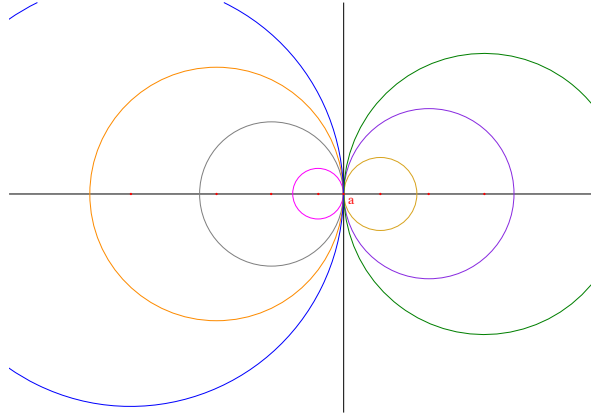


FIGURE 1.3 – Un pinceau à point limite

nombres $P_1(c)$ et $P_2(c)$ ne sont pas tous deux nuls, donc il existe λ_1, λ_2 non tous deux nuls tels que $P(c) := (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)(c) = 0$. Le cercle d'équation P est dans le pinceau et circonscrit à abc , donc égal à C .

4) La tangente commune a pour équation $D = P_1 - P_2$. Soit C un cercle du pinceau différent de D . Son équation est $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ avec $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$ et $C \cap D$ est défini par les équations $P_1 - P_2 = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ qui donnent $P_1 = P_2 = 0$, donc l'unique point a , ce qui signifie que C est tangent à D en a .

5) Il est clair que les cercles du pinceau sont disjoints. On note R_i le rayon de C_i et d la distance des centres. On cherche les cercles points du pinceau \mathcal{F} , donc les cercles $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$ de rayon nul. Rappelons que le carré du rayon d'un cercle d'équation $a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$ est donné par la formule $a^2 R^2 = b^2 + c^2 - ad$. Un petit calcul montre alors que les couples (λ_1, λ_2) sont solutions de l'équation homogène du second degré :

$$\lambda_1^2(b_1^2 + c_1^2 - d_1) + \lambda_1 \lambda_2(2b_1 b_2 + 2c_1 c_2 - d_1 - d_2) + \lambda_2^2(b_2^2 + c_2^2 - d_2) = 0,$$

soit $R_1^2 \lambda_1^2 + (R_1^2 + R_2^2 - d^2) \lambda_1 \lambda_2 + R_2^2 \lambda_2^2 = 0$, dont le discriminant Δ est égal à $(R_1^2 + R_2^2 - d^2)^2 - 4R_1^2 R_2^2 = ((R_1 - R_2)^2 - d^2)((R_1 + R_2)^2 - d^2)$ et, comme les cercles sont disjoints, on a $d < |R_1 - R_2|$ ou $d > R_1 + R_2$, de sorte que Δ est positif et l'équation admet deux solutions.

Pour la dernière assertion, on a besoin d'un lemme :

1.1.19 Lemme. *Soient C_1, C_2, C trois cercles. Si C est orthogonal à C_1 et C_2 , il est orthogonal à tous les cercles du pinceau (C_1, C_2) .*

Démonstration. Le lecteur qui souhaite une preuve élémentaire résoudra l'exercice 1.5.5. Pour les autres, voir 3.2.3.

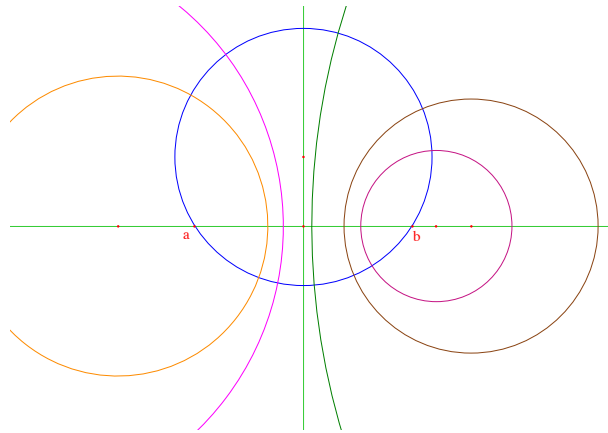


FIGURE 1.4 – Un pinceau à points de Poncelet

La fin du point 5) résulte alors de 1.1.15. En effet, les cercles-points a, b sont sur les cercles du pinceau \mathcal{F}' à points-base a, b , donc ils leur sont orthogonaux. Comme a, b engendrent \mathcal{F} , la conclusion vient du lemme.

1.1.20 Remarque. En comparant avec l'excellent livre de Deltheil et Caire, le lecteur constatera combien les techniques linéaires du chapitre 3 simplifient et éclairent ces questions. C'est particulièrement frappant pour le lemme ci-dessus.

1.1.21 Remarque. Nous verrons au chapitre 3 que les trois types de pinceaux définis ci-dessus correspondent aux orbites du groupe circulaire dans son opération sur les pinceaux et nous mettrons en évidence des représentants privilégiés pour chaque type (droites concourantes, droites parallèles, cercles concentriques), voir 4.2.4.

1.2 L'inversion : définition et premières propriétés

Nous donnons ici une définition élémentaire de l'inversion, telle qu'elle était enseignée autrefois dans les lycées.

1.2.1 Définition

1.2.1 Définition. Soit o un point de X et k un réel non nul. On appelle **inversion de pôle o et de puissance k** l'application :

$$i(o, k) = X - \{o\} \rightarrow X - \{o\}$$

définie par $i(o, k)(m) = m'$ avec $\overrightarrow{om'} = k \frac{\overrightarrow{om}}{\|\overrightarrow{om}\|^2}$.

1.2.2 Remarques. Dans les remarques qui suivent, i est l'inversion de pôle o et de puissance k .

1) Il revient au même de dire que les points o, m, m' sont alignés et vérifient $\overline{om} \cdot \overline{om'} = k$. C'est cette définition qui était utilisée autrefois au lycée⁶. Si l'on restreint i à une droite D passant par o et qu'on pose $\overline{om} = x$ on a donc, en coordonnées $i(x) = k/x$ (d'où le nom d'inversion). On voit que $i|_D$ définit une homographie (une involution) de la droite projective associée à D . En particulier, i conserve le birapport sur D .

2) On vérifie aussitôt qu'on a $om' = \frac{|k|}{om}$ (inversion des longueurs).

3) Si on pose $m'' = i(m')$, on a :

$$\overrightarrow{om''} = k \frac{\overrightarrow{om'}}{\|\overrightarrow{om'}\|^2} = k^2 \frac{\overrightarrow{om}}{\|\overrightarrow{om}\|^2} \frac{\|\overrightarrow{om}\|^2}{|k|^2} = \overrightarrow{om},$$

donc $m'' = m$, de sorte que i est une **involution** de $X - \{o\}$ (et donc une bijection).

4) Si l'on adjoint à X un unique point à l'infini, noté ∞ , et si l'on pose $\widehat{X} = X \cup \{\infty\}$ (on parle alors de \widehat{X} comme du **plan anallagmatique** associé à X), on peut prolonger i en une bijection de \widehat{X} en posant $i(o) = \infty$ et $i(\infty) = o$.

5) L'application $i : X - \{o\} \rightarrow X - \{o\}$ est continue. Si l'on munit \widehat{X} de la topologie⁷ pour laquelle les voisinages de ∞ sont les complémentaires des compacts de X , la bijection obtenue à la remarque précédente est un homéomorphisme de \widehat{X} . Nous reviendrons sur ce point au chapitre 2.

1.2.2 Quelques propriétés

Composition

Le produit de deux inversions n'en est pas une en général. Le groupe engendré par les inversions sera étudié aux chapitres suivants. Notons seulement :

6. Je vous parle d'un temps que les moins de vingt ans (voire de cinquante) ne peuvent pas connaître ...

7. Cette topologie en fait le compactifié d'Alexandroff de X .

1.2.3 Proposition.

1) La composée⁸ $i(o, k) \circ i(o, k')$ est l'homothétie $h(o, k/k')$. Ces transformations ne commutent que si on a $k = \pm k'$.

2) En particulier, on a $i(o, -k) = \sigma_o \circ i(o, k) = i(o, k) \circ \sigma_o$ où σ_o désigne la symétrie de centre o .

Démonstration. La preuve est analogue à celle de $i^2 = \text{Id}$. On notera que le second point permet très souvent de se ramener au cas des inversions de puissance positive⁹.

Points fixes, cercles invariants

1.2.4 Proposition. Les points fixes de $i(o, k)$ sont les points m qui vérifient $om^2 = k$. Si k est négatif il n'y a pas de points fixes, si k est > 0 on obtient le cercle Γ de centre o et de rayon \sqrt{k} . On dit encore que $i(o, k)$ est l'**inversion de cercle** Γ et on la note aussi i_Γ .

1.2.5 Remarque. Le complémentaire du cercle Γ a deux composantes connexes, le disque, qui est borné et contient le centre, et l'extérieur, qui est non borné et contient le point ∞ . Si i est l'inversion de cercle Γ , elle laisse fixe Γ , mais comme elle échange le centre de Γ et le point à l'infini, elle échange l'intérieur et l'extérieur de Γ , autre raison qui justifie son nom.

Il y a d'autres cercles qui sont globalement conservés par une inversion :

1.2.6 Proposition. Soit $i = i(o, k)$ une inversion et C un cercle ne passant pas par o . Si k est égale à la puissance de o par rapport à C , C est invariant par i . Il suffit pour cela que C contienne deux points m, m' inverses l'un de l'autre.

Si k est > 0 , et si Γ est le cercle d'inversion de i , les cercles C orthogonaux à Γ sont invariants par i .

Démonstration. En effet, si m est un point de C et si m' est l'autre¹⁰ point d'intersection de (om) et de C , on a $\overline{om} \cdot \overline{om'} = p(o, C) = k$, donc $i(m) = m'$. Le dernier point résulte de 1.1.14.

Inversion et cocyclicité

La propriété suivante est essentielle :

8. Prolongée en envoyant o sur o .

9. On parlera souvent d'inversion positive ou négative au lieu d'inversion de puissance positive ou négative.

10. Si (om) est tangente à C en m , le point m est fixe par i .

1.2.7 Proposition. Soit $i = i(o, k)$ une inversion, soient $p, q \in X - \{o\}$ des points non alignés avec o et soient $p' = i(p)$ et $q' = i(q)$ leurs transformés. On suppose $p \neq p'$. Alors, les quatre points p, q, p', q' sont cocycliques.

Démonstration. Soit C le cercle circonscrit à p, q, p' et soit q'' le point d'intersection de C et de (oq) autre que q . Par définition de l'inversion, on a $\overline{op} \overline{op'} = \overline{oq} \overline{oq'}$. La propriété de la puissance de o par rapport à C donne aussi $\overline{op} \overline{op'} = \overline{oq} \overline{oq''}$ et on en déduit $\overline{oq'} = \overline{oq''}$, de sorte que $q' = q''$ est sur C .

1.2.8 Remarques. 1) Cette proposition fournit une construction de l'image d'un point par une inversion dont on connaît le pôle et un couple de points homologues.

2) Il se peut qu'on ait $q = q'$, auquel cas la droite (oq) est tangente au cercle $(pp'q)$ en q et on a $oq^2 = k$.

Calcul de longueurs

1.2.9 Proposition. Soit $i = i(o, k)$ une inversion, soient $p, q \in X - \{o\}$ et $p' = i(p)$ et $q' = i(q)$ leurs transformés. On a la formule $p'q' = \frac{|k|pq}{op \cdot oq}$.

Démonstration.

C'est facile si o, p, q sont alignés. Sinon, on note que les triangles opq et $op'q'$ sont semblables (comme les points p, q, p', q' sont cocycliques, c'est le théorème de l'angle inscrit, dans diverses positions selon les cas de figure). On en déduit $\frac{pq}{p'q'} = \frac{op}{oq'}$ d'où le résultat par 1.2.2.2.

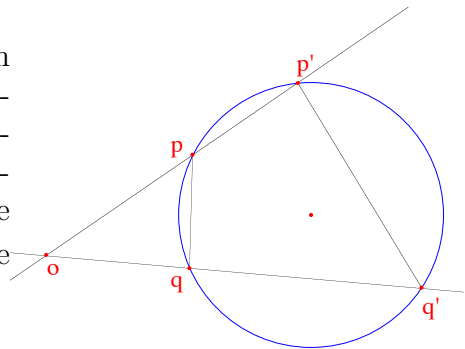


FIGURE 1.5 – Inversion, cocyclicité, longueurs

(On peut aussi faire un calcul vectoriel directement, voir exercice 1.5.7.)

1.3 Images des cercles et des droites

1.3.1 Images des droites, images des cercles passant par le pôle

Le charme de l'inversion, par rapport aux transformations euclidiennes usuelles, c'est qu'elle peut changer les droites en cercles et inversement :

1.3.1 Proposition. Soit $i = i(o, k)$ une inversion et D une droite.

- 1) Si D passe par le pôle, l'image de D (privée de o) est elle-même.
- 2) Si D ne passe pas par o , l'image de D est un cercle C passant par o , privé de o . La tangente en o à ce cercle est parallèle à D .
- 3) Inversement, l'image d'un cercle passant par o (privé de o) est une droite, ne passant pas par o et parallèle à la tangente au cercle en o .

Démonstration. Le premier point est clair. Pour le second, on donne deux preuves.

1) *Géométriquement.* Soit h le projeté orthogonal de o sur D , soit $h' = i(h)$, soit $m \in D$ quelconque, distinct de h et posons $m' = i(m)$. On a vu en 1.2.7 que les points h, h', m, m' sont cocycliques et, en vertu du théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{mhh'} = \widehat{mm'h'} = \pi/2$. Mais, cela montre que l'angle $\widehat{om'h'}$ est droit, de sorte que m' est sur le cercle (fixe) C de diamètre $[oh']$. Réciproquement, on vérifie que tout point de ce cercle, à l'exception de o , est sur $i(D)$. Comme le cercle est de diamètre $[oh']$, la tangente en o est perpendiculaire à (oh') , donc parallèle à D .

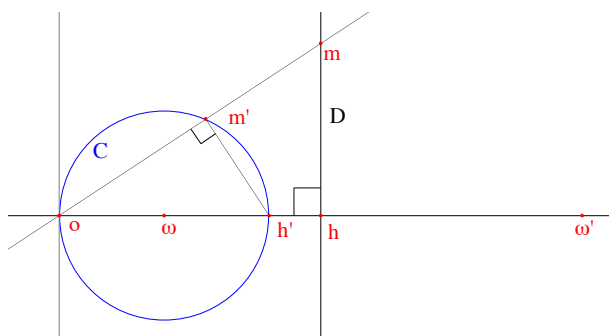


FIGURE 1.6 – Inverse d'une droite

2) *Analytiquement.* Prenons o comme origine du plan, $x = a$ (avec $a \neq 0$) comme équation de D et soit $m = (a, y) \in D$. On calcule $m' = i(m) = (x', y')$

avec la définition vectorielle et on a $x' = \frac{ka}{a^2 + y^2}$ et $y' = \frac{ky}{a^2 + y^2}$. On obtient ainsi une représentation paramétrique de $i(C)$ en fonction de y . On élimine $y = ay'/x'$ pour obtenir l'équation cartésienne : $a(x'^2 + y'^2) - kx' = 0$, qui est l'équation d'un cercle passant par o , centré sur (ox) et recoupant cet axe en $(k/a, 0)$, inverse de $(a, 0)$.

Le point 3) résulte du fait que i est involutive.

1.3.2 Corollaire. *Si un cercle de centre ω est transformé en une droite D par une inversion de pôle o , l'image $\omega' = i(\omega)$ du centre du cercle est le symétrique de o par rapport à D .*

Démonstration. On reprend les notations de la proposition précédente. On a donc $\overline{o\omega} \cdot \overline{o\omega'} = \overline{oh} \cdot \overline{oh'} = k$. Comme $[oh']$ est un diamètre de C , on a $\overline{oh'} = 2\overline{o\omega}$, d'où $\overline{o\omega'} = 2\overline{oh}$ et le résultat.

1.3.2 Application : le théorème de Ptolémée

L'usage de l'inversion permet de retrouver facilement le théorème de Ptolémée (voir aussi Partie V, ?? et ?? et ci-dessous 2.6.4 et 7.2.8).

1.3.3 Théorème. *Soient a, b, c, d quatre points de X , trois à trois non alignés. On suppose que $abcd$ est un quadrilatère convexe. Alors, a, b, c, d sont cocycliques si et seulement si on a $ac \cdot bd = ab \cdot cd + ad \cdot bc$ (le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés).*

Démonstration. On effectue une inversion i de pôle a et de puissance positive quelconque. Supposons d'abord a, b, c, d cocycliques, de sorte que les images b', c', d' de b, c, d sont alignées. De plus, comme $[bd]$ coupe la demi-droite $[ac]$ par convexité, c' est entre b' et d' . On a donc $b'd' = b'c' + c'd'$. On conclut en utilisant la formule de 1.2.9.

Réciproquement, le même calcul montre qu'on a $b'd' = b'c' + c'd'$, de sorte que b', c' et d' sont alignés. Alors, leurs images b, c, d par i (qui ne sont pas alignées) sont sur un cercle passant par a : cqfd.

1.3.3 Images des cercles ne passant pas par le pôle

1.3.4 Proposition. *Soit $i = i(o, k)$ une inversion et soit C un cercle ne passant pas par o . Alors, l'image de C est un cercle C' ne passant pas par o .*

Démonstration. 1) Supposons d'abord $k = \lambda := p(o, C)$ (puissance de o par rapport à C). Alors, C est globalement invariant par i en vertu de 1.2.6.

2) Passons au cas général. On a vu la formule $i(o, k) = h(o, k/\lambda) \circ i(o, \lambda)$. Il en résulte que $i(C)$ est l'image de C par l'homothétie de centre o et de rapport k/λ , d'où la conclusion.

La proposition suivante précise les inversions échangeant deux cercles :

1.3.5 Proposition. *Soient C, C' deux cercles de rayons distincts et non tangents. Il existe deux inversions échangeant ces cercles, dont les pôles sont les centres des homothéties transformant C en C' (voir Partie V, exercice ??), donc situés sur la droite¹¹ des centres.*

Démonstration. On traite le cas de deux cercles extérieurs, le lecteur se convaincra que les autres sont analogues. Soit a le centre¹² de l'homothétie de rapport $k = R'/R$ qui transforme C en C' et soit p la puissance de a par rapport à C' . Considérons une sécante (am) avec $m \in C$ qui recoupe C' en deux points, $m' = h(m)$, qui est tel que $(o'm')$ et (om) soient parallèles, et m'' . Alors, on a $\frac{\overline{am}}{\overline{am'}} = \frac{1}{k}$ et $\overline{am'} \cdot \overline{am''} = p$. On en déduit $\overline{am} \cdot \overline{am''} = p/k$, ce qui montre que m'' est l'image de m dans l'inversion de pôle a et de puissance p/k . En appliquant cela avec trois points de C on voit qu'on a $i(C) = C'$.

Inversement, si l'inversion i de pôle a transforme C en C' , si on pose $i(m) = m''$ et qu'on appelle m' l'autre point d'intersection de (am) et de C' , le même calcul montre que m' est l'image de m par l'une des homothéties échangeant les cercles.

1.3.6 Remarques. 1) Lorsque les cercles sont sécants, les cercles d'inversion qui les échangent passent par les points d'intersection, voir figure ci-dessous. En effet, ces points sont soit fixés par les inversions, soit échangés, mais ce dernier cas est impossible car les pôles sont sur la droite des centres donc ne sont pas alignés avec les points d'intersection.

2) Pour une autre approche, dans laquelle les divers cas particuliers apparaissent peut-être plus naturellement, voir 4.1.8.

1.3.4 Conservation des contacts

Dans la proposition suivante, on appelle cercle-droite un ensemble qui est soit un cercle, soit une droite et on convient de dire que deux cercles-droites sont tangents s'ils le sont au sens ordinaire ou si ce sont deux droites parallèles.

11. Si les cercles sont concentriques, tout ce beau monde est agglutiné en un seul point.

12. Le raisonnement est identique avec le centre b de l'homothétie négative qui transforme C en C' .

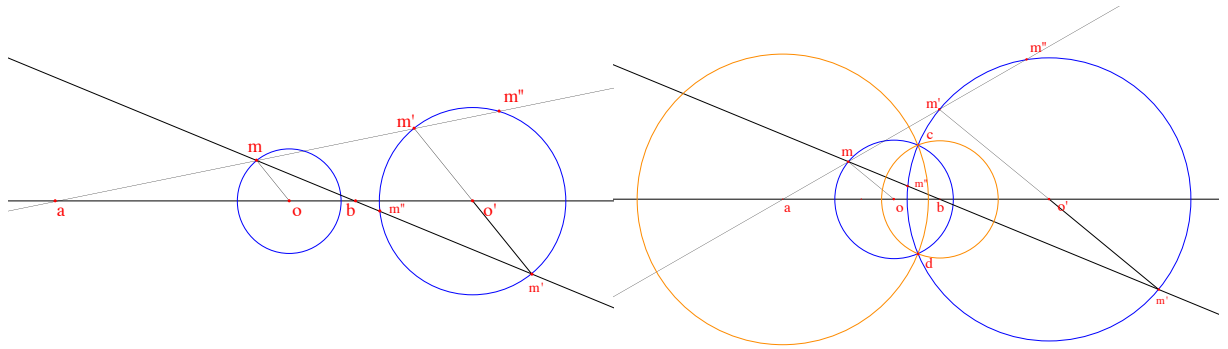


FIGURE 1.7 – Inversions et homothéties

1.3.7 Proposition. *L'image par une inversion de deux cercles-droites tangents est formée de deux cercles-droites tangents.*

Démonstration. On prolonge l'inversion au compactifié \widehat{X} . La condition de contact de C, C' s'exprime alors comme une condition de cardinal : $|C \cap C'| = 1$ et elle est conservée par l'inversion qui est une bijection.

1.3.8 Remarque. Plus généralement, on a défini en 1.1.3, l'angle de deux courbes C, C' de classe C^1 . Nous verrons au chapitre 2 que l'inversion s'écrit en complexes sous la forme $z \mapsto a/\bar{z}$. C'est donc une transformation antiholomorphe, de sorte que son application linéaire tangente est une similitude indirecte et elle conserve les angles non orientés, donc le contact et l'orthogonalité, mais change en leurs opposés les angles orientés, voir ci-dessous exercice 1.5.13 et proposition 2.5.2.

1.4 Le théorème de Feuerbach

Nous terminons ce chapitre en prouvant l'un des plus beaux théorèmes de la géométrie élémentaire :

1.4.1 Théorème. (Feuerbach¹³)

Dans un triangle, le cercle des 9 points (voir Partie V ??) est tangent aux cercles inscrit et exinscrits.

13. Karl Wilhelm Feuerbach (1800-1834). À ne pas confondre avec le philosophe Ludwig Feuerbach. Il semble bien que la découverte du cercle des 9 points, attribuée à Euler, soit en fait due à Feuerbach.

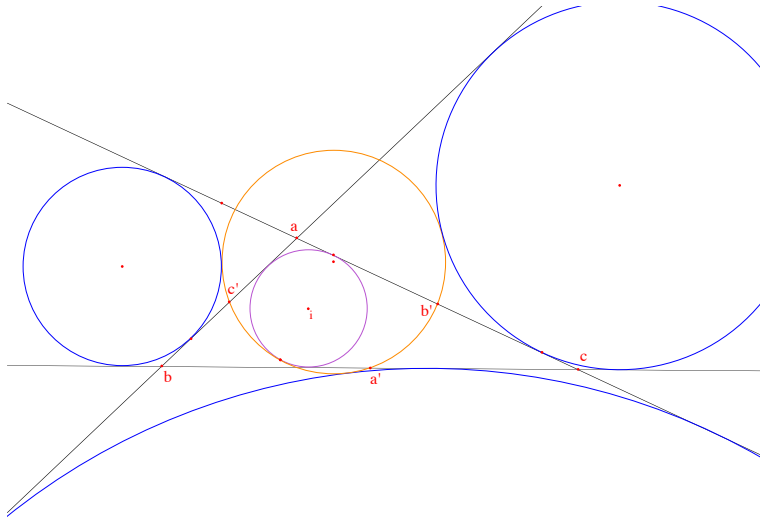


FIGURE 1.8 – Le théorème de Feuerbach

1.4.1 Notations, rappels et préliminaires

Notations

On considère un triangle abc , on note a', b', c' les milieux des côtés $[bc]$, $[ca]$ et $[ab]$ respectivement, a_1, b_1, c_1 les pieds des hauteurs issues de a, b, c respectivement, o le centre du cercle circonscrit Ω au triangle. On note C le cercle inscrit dans abc . Son centre i est l'intersection des bissectrices intérieures du triangle, voir Partie V ???. On note C' le cercle exinscrit dans l'angle \hat{a} . Son centre j est l'intersection de la bissectrice intérieure de \hat{a} et des bissectrices extérieures de \hat{b} et \hat{c} . Les cercles C et C' sont tangents à (bc) respectivement en h et k .

On considère aussi les points d , intersection de la bissectrice (ai) et de (bc) et e , milieu de $[ij]$, voir figure 1.9.

Rappels

- Rappelons que le cercle des neuf points Γ est le cercle qui passe par les milieux des côtés a', b', c' . Il passe aussi par les pieds des hauteurs a_1, b_1, c_1 . Ce cercle est l'image du cercle circonscrit Ω par l'homothétie de centre g (centre de gravité du triangle abc) et de rapport $-1/2$ car cette homothétie transforme respectivement a, b, c en a', b', c' .

- Le résultat suivant, qui concerne les divisions harmoniques, était autrefois classique :

1.4.2 Lemme. Soient a, b, c, d quatre points distincts d'une droite D formant une division harmonique (ce qui signifie qu'on a $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = -1$) et soit m le milieu de $[ab]$. On a la formule $ma^2 = mb^2 = \overline{mc} \times \overline{md}$.

Démonstration. Il est facile de prouver cette propriété en écrivant $\overline{ca} \cdot \overline{db} = -\overline{cb} \cdot \overline{da}$ et en introduisant m grâce à la relation de Chasles.

On peut aussi considérer l'inversion f de pôle m et de puissance $k = ma^2 = mb^2$. Restreinte à D avec m comme origine, c'est simplement l'application $x \mapsto k/x$ et c'est une involution homographique qui fixe a et b . Comme on a $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = -1$, f échange c et d (voir Partie I ??) et on a bien $\overline{mc} \cdot \overline{md} = k$.

- Soit C un cercle de centre o , m un point extérieur à C , A et B les deux tangentes à C issues de m qui touchent C en a et b . Il est clair que les droites A et B sont symétriques par rapport à $D = (mo)$. De plus, leurs directions sont symétriques par rapport à la direction de la corde (ab) . En effet, si u est le milieu de $[ab]$, on a $\tau_{(ab)} = \sigma_u \circ \tau_D$, où τ_D , $\tau_{(ab)}$ sont les symétries d'axes D , (ab) et σ_u la symétrie de centre u , et le résultat vient du fait que σ_u transforme une droite en une droite parallèle.

1.4.2 Démonstration du théorème de Feuerbach

On se reportera à la figure 1.9.

Le principe : l'inversion f

L'idée de la démonstration consiste à effectuer l'inversion f de pôle a' et de puissance $a'h^2$ (dont on montrera qu'elle est aussi égale à $a'k^2$). Comme le pôle est sur le cercle Γ , l'inversion transforme Γ en une droite Δ ; comme $(a'h)$ est tangente à C en h , $a'h^2$ est la puissance de a' par rapport à C , de sorte que C est invariant par f , et de même pour C' . Comme l'inversion conserve les contacts (voir 1.3.7), il suffit de montrer que Δ est tangente à C et C' .

Le point e et le cercle Ω

Rappelons que e est le milieu de $[ij]$. Comme (bi) et (bj) sont les bissectrices intérieures et extérieures de \widehat{abc} , elles sont perpendiculaires, donc bij est rectangle en b et on a $eb = ei = ej$. On a, de même, $ec = ei$, ce qui montre que e est sur la médiatrice de $[bc]$. Les égalités précédentes montrent que le cercle de centre e passant par b passe aussi par c, i, j . On a donc $\widehat{iec} = 2\widehat{ibc}$

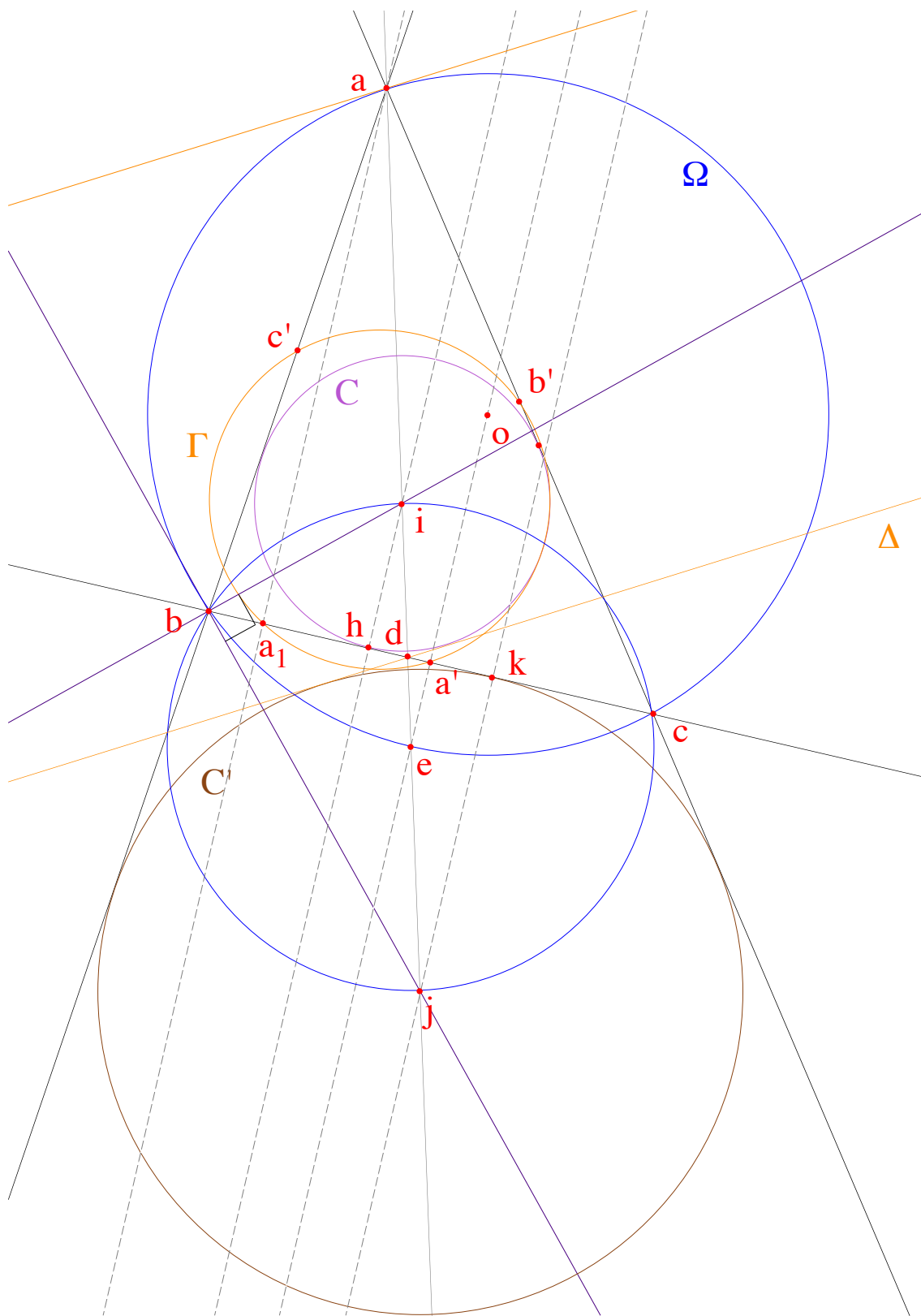


FIGURE 1.9 – La preuve de Feuerbach

(l'angle au centre est double de l'angle inscrit). Mais, comme (bi) est bissectrice de \widehat{abc} , cet angle est encore égal à \widehat{abc} . On a donc $\widehat{abc} = \widehat{iec} = \widehat{aec}$ car $(ae) = (ie)$ et cela montre¹⁴ que les points a, e, b, c sont cocycliques : e est sur le cercle circonscrit Ω à abc .

Divisions harmoniques

On sait que les bissectrices et les côtés d'un angle forment un pinceau harmonique (voir Partie I exercice ??). On a donc $\llbracket (ba), (bc), (bi), (bj) \rrbracket = -1$. En coupant le pinceau par (ai) on en déduit $\llbracket a, d, i, j \rrbracket = -1$. Soit p la projection orthogonale de (ai) sur (bc) . Elle conserve le birapport. Les images de a, d, i, j par p sont respectivement a_1, d, h et k (pour ces derniers c'est le fait que la tangente à un cercle est perpendiculaire au rayon). On a donc $\llbracket a_1, d, h, k \rrbracket = -1$. De plus, comme e est sur la médiatrice de $[bc]$, il se projette en a' , mais comme il est milieu de $[ij]$, cela montre que a' est milieu de $[hk]$. En vertu du lemme 1.4.2 on a donc $a'h^2 = a'k^2 = \overline{a'a_1} \cdot \overline{a'd}$.

La droite Δ

La formule précédente montre que l'inversion f de pôle a' et de puissance $a'h^2$ est aussi de puissance $a'k^2$ et qu'elle transforme a_1 en d . Comme Γ passe par a_1 , la droite $\Delta = f(\Gamma)$ passe par d . Comme la droite (bc) est tangente à C et C' et passe aussi par d , pour voir que Δ est l'autre tangente à ces cercles passant par d , il suffit de montrer que (bc) et Δ sont symétriques par rapport à $(di) = (ij)$.

Comme ces droites passent toutes deux par d , il suffit de voir que leurs directions sont symétriques. Or, comme Δ est l'inverse de Γ dans une inversion de pôle a' , on sait que Δ est parallèle à la tangente à Γ en a' (voir 1.3.1). Par le premier rappel ci-dessus, c'est-à-dire l'homothétie de Ω et Γ , cette direction est aussi celle de la tangente à Ω en a . Mais, par le troisième rappel, les tangentes à Ω en a et e ont des directions symétriques par rapport à la corde $(ae) = (ij)$. Comme la tangente en e est perpendiculaire à $(oe) = (oa')$, donc parallèle à (bc) , les directions de (bc) et Δ sont bien symétriques par rapport à (ij) .

1.4.3 Remarque. Pour une approche analytique du théorème de Feuerbach, voir l'exercice 3.4.3. Pour son expression en termes de relations entre les invariants, voir paragraphe 7.3.3.

14. Car b et e sont dans le même demi-plan limité par (ac) .

1.5 Exercices

1.5.1 Puissance, axe radical, pinceaux

1.5.1 *Exercice.* Soit C un cercle.

- 1) Construire un cercle C' orthogonal à C , de centre o' donné. Discuter.
- 2) Soit a un point fixe n'appartenant pas à C . Quel est le lieu des centres des cercles orthogonaux à C et passant par a ? Construire le deuxième point de Poncelet du pinceau (C, a) .
- 3) Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles non en pinceau. Construire le cercle du pinceau (C_1, C_2) orthogonal à C_3 .

1.5.2 *Exercice.* On considère deux cercles disjoints.

- 1) Construire leur axe radical. (Utiliser un cercle auxiliaire coupant les deux cercles.)
- 2) Construire les points de Poncelet du pinceau \mathcal{F} défini par ces cercles. (Construire un cercle orthogonal aux deux, par exemple de centre le point d'intersection de l'axe radical et de la droite des centres. Il passe par les points de Poncelet.)
- 3) Soit a un point quelconque. Construire le cercle du pinceau \mathcal{F} qui passe par a (utiliser 1.5.1).

1.5.3 *Exercice.* 1) Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles dont les centres ne sont pas alignés. Montrer qu'il existe un unique point m qui vérifie $p(m, C_1) = p(m, C_2) = p(m, C_3)$. Ce point est le **centre radical** des trois cercles. En donner une construction dans les divers cas possibles. Que se passe-t-il si les centres sont alignés?

2) Soient A, B, C trois cercles. On suppose que B, C (resp. C, A , resp. A, B) se coupent en a, a' (resp. b, b' , resp. c, c'). Montrer que les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes. (On retrouve ainsi le théorème facile des six cercles, voir 6.2.1 et 6.6.1).

1.5.4 *Exercice.* Soit abc un triangle, a', b', c' trois points distincts des sommets et situés respectivement sur (bc) , (ca) , (ab) . On suppose que les droites (aa') , (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles. Le cercle circonscrit à $a'b'c'$ recoupe (bc) , (ca) , (ab) en a'', b'', c'' . Montrer que les droites (aa'') , (bb'') et (cc'') sont concourantes ou parallèles. (Théorème de Terquem¹⁵; utiliser le théorème de Céva, voir Partie I ?? et la puissance).

15. Olry Terquem, mathématicien français, 1782-1862, bien oublié de nos jours.

1.5.5 Exercice. On se propose de prouver directement le lemme 1.1.19.

1) Soient C_1, C_2 deux cercles et Δ leur axe radical. Montrer que le pinceau (C_1, C_2) est l'ensemble¹⁶ des cercles C tels que l'axe radical de C et C_1 soit égal à Δ .

2) Prouver le lemme 1.1.19 (si C est un cercle de centre o orthogonal à C_1 et C_2 , on considérera les puissances de o par rapport à C_1 et C_2).

1.5.2 Généralités sur l'inversion

1.5.6 Exercice. Soit i l'inversion de cercle Γ de centre o . Soit a un point extérieur à Γ , t, t' les points de contacts des tangentes à Γ issues de a . La droite (tt') coupe (oa) en a' . Montrer qu'on a $i(a) = a'$ et en déduire une construction de l'inverse d'un point quelconque.

1.5.7 Exercice. Montrer par un calcul vectoriel direct la formule de 1.2.9 donnant $p'q'$ (on écrira $\vec{p'q'} = \vec{oq'} - \vec{op}$ et de même pour $\vec{p'q'}$).

1.5.8 Exercice. 1) Soient i une inversion de cercle C , m' l'image d'un point $m \notin C$ et Γ un cercle passant par m, m' . Montrer que Γ est orthogonal à C (utiliser 1.1.14).

2) Soit C un cercle de centre o et a, b deux points distincts et distincts de o . Montrer qu'il existe un unique cercle Γ orthogonal à C (ou une droite) et passant par a, b et le construire. (On utilisera l'inversion de cercle C .)

1.5.9 Exercice. ¶ On trouve dans le livre de Deltheil et Caire [DC51], p. 179, l'assertion suivante (cf. 1.2.7) :

La propriété de deux couples homologues d'appartenir à un même cercle, supposée vérifiée par tout système de deux tels couples, est caractéristique de l'inversion et de la réflexion.

1) Critiquer cette assertion¹⁷. (Outre le cas des points alignés, le lecteur considérera avec effroi les exemples suivants. Soient i une inversion de pôle o , K une réunion de droites passant par o et L son complémentaire. On considère l'application f définie sur le plan privé de o qui est égale à i sur K et à l'identité sur L . Elle vérifie la condition de [DC51]. Il en est de même de l'application définie comme une bijection quelconque d'une droite D et comme l'identité en dehors.)

2) Pour réparer ce théorème, on se place dans le plan anallagmatique $\widehat{X} = X \cup \infty$ (voir 1.2.2). On convient (voir Chapitre 2) d'appeler droites de

16. Plus l'axe lui-même.

17. Malgré tout le respect que j'ai pour Deltheil et Caire, il faut reconnaître qu'ici leur énoncé est bien bancal! Les canons de la rigueur ont bien évolué depuis 1940.

\widehat{X} les réunions des droites de X et du point à l'infini. Soit $f : \widehat{X} \rightarrow \widehat{X}$ une bijection. On note m' l'image du point m par f .

a) On fait les deux hypothèses suivantes :

(DC) Pour tous $p, q \in \widehat{X}$ les points p, q, p', q' sont cocycliques ou alignés.

(T) Il existe quatre tels points p, q, p', q' distincts et non alignés.

Montrer qu'il existe une inversion ou une réflexion σ telle que l'on ait $\sigma(m) = m' = f(m)$ dès que m et m' sont distincts. (On utilisera les quatre points p, p', q, q' distincts et non alignés, on distinguera selon que les droites (pp') et (qq') sont sécantes ou parallèles et on utilisera 1.5.3.)

b) On suppose que f vérifie (DC) et qu'elle est sans point fixe. Montrer que f est une inversion ou une réflexion.

c) On suppose que f vérifie (DC) et qu'elle est continue et différente de l'identité. Montrer que f est une inversion ou une réflexion.

1.5.10 Exercice. (Théorème de Coolidge) Soit i une inversion de pôle o , a, a' ; b, b' et m, m' trois couples de points homologues par i . Montrer l'égalité d'angles de droites : $(ma, mb) + (m'a', m'b') = (oa, ob)$. Utiliser ce résultat pour retrouver le fait que si m décrit un cercle passant par a , et b , m' décrit un cercle ou une droite passant par a' et b' .

1.5.11 Exercice. Soient i une inversion de pôle o , abc un triangle, $a'b'c'$ son image, a'', b'', c'' les projetés orthogonaux de o sur les droites (bc) , (ca) , (ab) respectivement.

Montrer que les triangles $a'b'c'$ et a'', b'', c'' sont semblables. (Indication : partager les angles de ces triangles en deux à l'aide de o et utiliser la cocyclicité des points o, a'', c, b'' et a, b, a', b' notamment.)

1.5.3 Conservation des contacts et des angles

1.5.12 Exercice. Soit i une inversion de pôle o et de puissance k . Soit C un cercle ne passant pas par o , C' son image, m un point de C et $m' = i(m)$. Montrer que les tangentes à C et C' en m et m' respectivement sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[mm']$. (Considérer le cercle¹⁸ Γ passant par m, m' et tangent à C en m . Montrer qu'il est invariant par i , qu'il est tangent à C' en m' et conclure.)

Que se passe-t-il dans le cas où le cercle C passe par o ?

1.5.13 Exercice. Soit i une inversion. On s'intéresse ici aux angles des droites et des cercles, vus comme angles (de droites) de leurs tangentes dans le cas des cercles. Montrer que i conserve les angles non orientés mais qu'elle change le signe des angles orientés (utiliser l'exercice précédent). (Voir aussi 2.5.2.)

18. Le lecteur prendra garde au cas où m' est sur la tangente à C en m .

1.5.14 Exercice. Soient C un cercle de centre o et de rayon R et D une droite. On note d la distance de o à D . Soit a un point de $C - D$ et i une inversion de pôle a qui transforme C en une droite D' et D en un cercle C' de centre o' et de rayon R' . On note d' la distance de o' à D' . Montrer qu'on a $d/R = d'/R'$. (Le calcul est assez saumâtre. On pourra par exemple supposer que o est l'origine, D la droite d'équation $x = d$ et que a est le point $(R \cos \theta, R \sin \theta)$. Voir 4.2.10 pour des éclaircissements.)

1.5.4 Inverseurs

1.5.15 Exercice. (L'inverseur de Hart)

On considère un trapèze isocèle convexe $abcd$ et on suppose qu'on a un dispositif articulé formé des quatre barres $[ad]$, $[db]$, $[bc]$ et $[ca]$, les points a et d étant fixes. On fixe sur $[bd]$ un point m et on porte sur $[ac]$ le point m' défini par $m'c = md$. Montrer que, quand le dispositif articulé bouge (par exemple en bougeant b), les points m, m' sont inverses l'un de l'autre dans une inversion que l'on précisera. (Indication : le pôle est le point o d'intersection de (mm') et (ad) , on montrera qu'il est fixe. La puissance se calcule avec Thalès. On se ramène à montrer que $ab \times cd$ est constant et c'est Ptolémée.)

1.5.16 Exercice. (L'inverseur de Peaucellier) Il s'agit d'un dispositif articulé comme sur la figure ci-dessous : $ambm'$ est un losange et les longueurs oa et ob sont égales. On pose $r = am$ et $d = oa$.

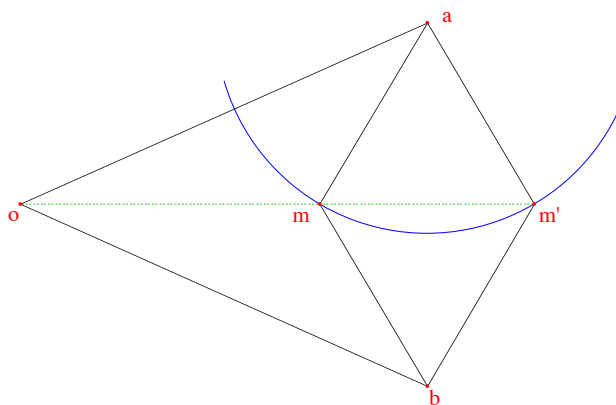


FIGURE 1.10 – L'inverseur de Peaucellier

Montrer qu'on a $m' = i(m)$, où i désigne l'inversion de pôle o et de puissance $d^2 - r^2$. Indiquer comment on peut utiliser ce dispositif pour tracer l'inverse d'une courbe donnée.

1.5.5 Un lemme de Steiner

1.5.17 Exercice. Soient C_1 et C_2 deux cercles, avec C_1 intérieur à C_2 et soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles tangents à C_1 et C_2 . On note respectivement a, b, c, d les contacts de C_1, Γ_1 ; C_1, Γ_2 ; C_2, Γ_1 et C_2, Γ_2 . Montrer que (ab) et (cd) se coupent en un point de l'axe radical Δ de C_1 et C_2 . (On notera o le point d'intersection de (ab) et Δ et on considérera¹⁹ l'inversion de pôle o et de puissance $\overline{oa} \cdot \overline{ob}$.)

1.5.6 Inversion et polaire

1.5.18 Exercice. Cet exercice rappelle la définition de la polaire d'un point par rapport à un cercle. Soit C un cercle de centre ω et de rayon $R > 0$, soit o un point du plan, distinct de ω , et soit D une droite.

Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La droite D est la polaire de o par rapport à C au sens des coniques (voir Partie III, ??).

ii) Si une droite Δ passant par o coupe C en m, n et D en p , on a $[[o, p, m, n]] = -1$.

iii) La droite D est perpendiculaire à $(o\omega)$ au point h défini par $\overline{\omega h} \cdot \overline{\omega o} = R^2$.

(Pour montrer *iii*) on utilisera la réflexion d'axe $(o\omega)$ et 1.4.2.)

On dit alors que D est la **polaire** de o par rapport au cercle C .

1.5.19 Exercice. Soient C un cercle de centre ω , o un point du plan non situé sur C et distinct de ω et D la polaire de o par rapport à C (voir 1.5.18). On note p la puissance de o par rapport à C et on considère l'inversion $i = i(o, p)$.

1) Montrer qu'on a $i(C) = C$.

2) Montrer que $h = i(\omega)$ est le point d'intersection de D et de $(o\omega)$.

3) Montrer que l'image du cercle de diamètre $[o\omega]$ par i est la droite D .

1.5.7 Chapple et Poncelet

1.5.20 Exercice. Soit i une inversion de pôle a et de puissance positive p , C un cercle de centre o et de rayon R ne passant pas par a et C' son image, qui est un cercle de rayon R' . Montrer la formule $R' = \frac{pR}{oa^2 - R^2}$.

19. Steiner n'utilise pas vraiment l'inversion pour montrer ce lemme, mais cela revient essentiellement au même, voir l'introduction historique ci-dessus.

1.5.21 Exercice. Soit abc un triangle, C son cercle circonscrit, de centre o et de rayon R , Γ son cercle inscrit, de centre u et de rayon r . On pose $d = ou$. On note a', b', c' les points de contact du cercle Γ avec les côtés (bc) , (ca) et (ab) respectivement.

1) Montrer que l'inversion i de cercle Γ transforme C en le cercle C' des neuf points du triangle $a'b'c'$. (On montrera par exemple que l'image de a est le milieu m de $(b'c')$.)

2) En déduire la formule de Chapple : $d^2 - R^2 = 2rR$ (on se souviendra que le rayon de C' est $r/2$ et on utilisera l'exercice précédent).

3) Montrer le grand théorème de Poncelet dans le cas de deux cercles et un triangle : s'il existe un triangle abc inscrit dans C et circonscrit à Γ , il en existe une infinité (voir Partie III, chapitre 4, §4.5).

1.5.8 Le problème de Napoléon

1.5.22 Exercice. Le problème est de construire le centre d'un cercle donné, à l'aide du compas seulement. Soit C un cercle de centre o (inconnu). Montrer que la procédure suivante permet de construire le point o .

On choisit un point $a \in C$ quelconque, on trace un cercle Γ de centre a , qui coupe C en e et f . Les cercles de centres e, f passant par a se recoupent en b . On considère le cercle Σ , de centre b , passant par a qui coupe Γ en m, n . Alors, les cercles de centres m et n passant par a se recoupent en o .

Indication : On considérera l'inversion i de pôle a et de cercle d'inversion Γ . On montrera que l'on a $i(o) = b$ (voir 1.3.2) et que o est symétrique de a par rapport à (mn) .

1.5.9 Un lieu géométrique classique

1.5.23 Exercice. Soient a, b deux points distincts du plan et soit k un nombre réel positif. On se propose de déterminer l'ensemble des points m du plan vérifiant $\frac{ma}{mb} = k$.

1) Traiter le cas où k est égal à 1.

2) On suppose $k \neq 1$.

a) Montrer qu'il existe exactement deux points $m_1, m_2 \in (ab)$ vérifiant $\frac{m_1a}{m_1b} = \frac{m_2a}{m_2b} = k$.

On considère l'inversion i de pôle m_1 et de puissance $\overline{m_1a} \cdot \overline{m_1b}$.

b) Montrer que i transforme m_2 en le milieu p de $[ab]$ (on peut par exemple utiliser le birapport, voir 1.2.2), puis qu'elle échange la médiatrice de $[ab]$ et le cercle de diamètre $[m_1m_2]$.

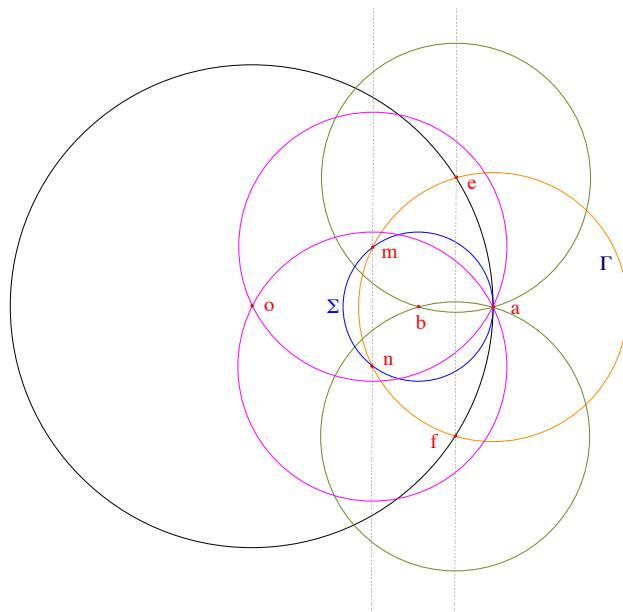


FIGURE 1.11 – Le problème de Napoléon

c) Soit m un point du plan et posons $m' = i(m)$. Montrer qu'on a $\frac{m'a}{m'b} = k \frac{mb}{ma}$ et conclure.

1.5.10 Applications de Ptolémée

1.5.24 Exercice. 1) Soit abc un triangle équilatéral et m un point de son cercle circonscrit situé dans l'arc \widehat{bc} . Montrer l'égalité $ma = mb + mc$. (On pourra utiliser le théorème de Ptolémée ou proposer une preuve directe.)

2) Soit abc un triangle, m un point de (bc) , p et q ses projetés orthogonaux sur (ab) et (ac) respectivement. Pour quelle position de m la longueur pq est-elle minimale? (Considérer le quadrilatère $apmq$.)

1.5.11 Feuerbach généralisé

1.5.25 Exercice. Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles sécants deux à deux et **admettant un unique point commun** o . Le ressort de l'exercice est de transformer la situation par une inversion de pôle o .

1) Montrer qu'il existe exactement quatre cercles-droites tangents aux C_i (les cercles tangents aux côtés du "triangle").

2) Montrer qu'il existe exactement un cercle H_k du pinceau (C_i, C_j) qui soit orthogonal à C_k (les hauteurs). Montrer que les trois cercles H_k passent par o et sont en pinceau (elles sont concourantes).

3) On appelle a_i le point d'intersection de C_i et H_i autre que o (les pieds des hauteurs) et Γ le cercle circonscrit à $a_1a_2a_3$ (le cercle d'Euler). Montrer que Γ est tangent aux quatre cercles de la question 1 (Feuerbach).

Dans le cas général où les cercles n'ont plus un point en commun, il ne semble pas y avoir de résultat qui généralise Feuerbach. On peut encore définir les "hauteurs" H_i , et elles sont en pinceau, voir 5.2.11. Cette fois on a six points d'intersection avec les "côtés" C_i et huit cercles d'Euler possibles, mais ils ne sont pas tangents (en général), même à un seul des cercles tangents aux C_i , comme le montre l'expérience avec Cabri²⁰.

20. Comme on le verra au chapitre 5, on se retrouve alors en géométrie hyperbolique ou elliptique. En géométrie hyperbolique, les deux cercles ont "l'air tangents", mais si l'on demande à Cabri les points d'intersection, il en affiche deux, voisins mais distincts.

Chapitre 2

La droite projective complexe

*Ce second chapitre vise à identifier la géométrie anallagmatique plane réelle (c'est-à-dire la géométrie de l'inversion) et celle de la droite projective complexe. On y retrouve donc les objets rencontrés dans la partie I : homographies, birapport, etc. Sur un corps quelconque, la géométrie de la droite projective est bien pauvre et on pourrait penser qu'il en est de même ici. Ce n'est pourtant pas le cas, comme on l'a déjà entr'aperçu et comme en aura confirmation au chapitre 5, puisque l'on verra que la géométrie anallagmatique contient **toutes** les autres géométries planes réelles. En fait, la seule différence avec le cas général de la géométrie de $\mathbf{P}^1(k)$ tient à l'existence dans \mathbf{C} de la **conjugaison** (ou du sous-corps \mathbf{R} si l'on préfère), mais cette différence est décisive. Par exemple, on retrouve les parties remarquables du plan que sont les droites et les cercles par le biais de la réalité du birapport, avec comme application le merveilleux lemme des six birapports. Ce chapitre est aussi l'occasion d'une première étude du groupe circulaire, vu ici comme le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ des homographies et anti-homographies de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$. Là encore, la présence de la conjugaison joue un rôle essentiel.*

2.1 Introduction

Le plan euclidien réel, lorsqu'il est muni d'un repère orthonormé direct, s'identifie au plan complexe \mathbf{C} . L'intérêt de cette identification c'est que \mathbf{C} est muni d'une structure de corps, donc d'une multiplication, dont on a déjà vu la traduction géométrique en termes de similitudes, voir Partie V, ??, mais aussi, et c'est cela qui va nous être utile ici, du passage à l'inverse. De plus, le corps des complexes est, par construction, livré avec un automorphisme : la conjugaison. Ces deux derniers points permettent de représenter de manière

très simple les inversions. Ainsi, l'inversion de pôle l'origine et de puissance 1 s'écrit en complexes sous la forme $z' = i(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. En effet, la formule $z' = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{|z|^2}$ est la traduction de l'égalité vectorielle $\overrightarrow{om'} = \frac{k \overrightarrow{om}}{\|\overrightarrow{om}\|^2}$ avec $k = 1$.

Plus généralement, l'inversion $i = i(a, k)$ de pôle a et de puissance k est donnée, pour $z \neq a$, par la formule $i(z) = z'$ avec $z' - a = \frac{k}{\bar{z} - \bar{a}}$.

On constate ainsi que les inversions sont des **anti-homographies**, i.e. des transformations de la forme $\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ et $ad - bc \neq 0$, (voir Partie I, chapitre 4). Cela nous conduit évidemment à travailler non pas sur la droite affine \mathbf{C} mais sur la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, c'est-à-dire ce qu'on appelle encore la sphère de Riemann¹. Cet espace est muni d'une topologie naturelle, dans laquelle les voisinages de ∞ sont les complémentaires des compacts de \mathbf{C} , et il est compact (c'est le compactifié d'Alexandroff de \mathbf{C}). Les homographies et anti-homographies s'étendent en des homéomorphismes de $\widehat{\mathbf{C}}$. Par exemple, si $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ avec $c \neq 0$, on pose $f(-d/c) = \infty$ et $f(\infty) = a/c$. C'est le cas, en particulier, des inversions, en posant $i(a, k)(a) = \infty$ et $i(a, k)(\infty) = a$.

On renvoie le lecteur à la partie I pour tout ce qui concerne les homographies et leur triple transitivité sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, les involutions, le birapport, etc. Rappelons simplement que les homographies et anti-homographies forment un groupe² noté $P\Gamma L(2, \mathbf{C})$ (Partie I, Ch. 4), dont le groupe des homographies $PGL(2, \mathbf{C})$ est un sous-groupe d'indice 2, que les homographies conservent le birapport, mais que les anti-homographies le changent en son conjugué. On rappelle aussi que le groupe $PGL(2, \mathbf{C}) \simeq PSL(2, \mathbf{C})$ est simple (voir [Per96] ou ci-dessous exercice 2.6.8).

2.1.1 Remarque. Le fait que $PGL(2, \mathbf{C})$ soit triplement transitif sur $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ (avec le fixateur de trois points réduit à l'identité) montre que ce groupe est une variété de dimension 3 complexe, donc 6 réelle. C'est un point qu'il est utile de garder en tête dans toutes les questions de transitivité. Par ailleurs, on voit que la géométrie anallagmatique, avec un groupe de dimension 6, contre 3 (resp.4) seulement pour les géométries non euclidiennes (resp. euclidienne, avec le groupe des similitudes) est une géométrie plus riche que les autres. On verra d'ailleurs au chapitre 5 qu'elle les renferme toutes.

1. La projection stéréographique, cf. Partie IV chapitre 2, §3, montre que cet espace est bien homéomorphe à la sphère réelle \mathbf{S}^2 .

2. Qu'on appellera **groupe circulaire** plus loin.

La notion de pôle d'une inversion s'étend au cas d'une (anti) homographie générale :

2.1.2 Définition. Soit $f \in PGL(2, \mathbf{C})$ une homographie (resp. une anti-homographie), écrite sous la forme $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ (resp. $f(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$) avec $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ et $ad - bc \neq 0$. On appelle **pôle** de f le point $f^{-1}(\infty)$. Dans le cas d'une homographie, ce point est égal à $-\frac{d}{c}$ si c est non nul et à ∞ sinon. Dans le cas d'une anti-homographie il vaut $-\frac{\bar{d}}{\bar{c}}$ si c est non nul et ∞ sinon.

2.2 Birapport et conservation des droites et cercles

2.2.1 Interprétation géométrique du birapport

2.2.1 Proposition. Soient a, b, c, d quatre éléments de $\widehat{\mathbf{C}}$, avec a, b, c distincts et soit $r = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$ leur birapport, qui est un élément de $\widehat{\mathbf{C}}$. Si a, b, c, d sont distincts de ∞ on note A, B, C, D les points du plan affine d'affixes a, b, c, d .

1) Si on a $d = a$ (resp. $d = b$, resp. $d = c$), le birapport vaut ∞ (resp. 0, resp. 1).

On suppose désormais les points a, b, c, d distincts.

2) Si l'un des points est égal à ∞ , on peut supposer, quitte à effectuer une permutation produit de deux transpositions qui ne change pas le birapport, qu'il s'agit de d . On a alors $r = \frac{c-a}{c-b}$. Le module $|r|$ est égal à $\frac{CA}{CB}$ et l'argument $\text{Arg } r$ est l'angle orienté de vecteurs $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$. Le birapport est réel si et seulement si les points A, B, C sont alignés.

On suppose désormais que a, b, c, d sont distincts de ∞ .

3) On a $r = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$, $|r| = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB}$ et

$\text{Arg } r = (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) - (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$. Le birapport est réel si et seulement si les points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés.

4) Soient f une homographie (resp. une anti-homographie) de $\widehat{\mathbf{C}}$ et a, b, c, d quatre points de $\widehat{\mathbf{C}}$. On pose $r = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$. Alors, on a $\llbracket f(a), f(b), f(c), f(d) \rrbracket = r$ (resp. \bar{r}).

Démonstration. Le point 1) a été vu dans la partie I ainsi que l'assertion sur les permutations, les calculs de birapports et la conservation du birapport

par homographie. Les assertions sur les modules et arguments résultent de l'interprétation classique des complexes. Dire que le birapport est réel c'est dire que son argument vaut 0 ou π et, en termes d'angles, cela donne l'égalité d'angles (orientés) de droites : $(CB, CA) = (DB, DA)$ qui est une condition nécessaire et suffisante d'alignement ou de cocyclicité (voir Partie V ??).

2.2.2 Remarque. Si le birapport de quatre points est réel, il est conservé à la fois par les homographies et les anti-homographies.

2.2.2 Mon application favorite : le lemme des six birapports

Il s'agit du lemme³ évident suivant :

2.2.3 Lemme. Soient a, b, c, d, p, q, r, s huit points distincts de \widehat{C} . On a la formule :

$$[abrs][bcps][caqs][pqcd][grad][rpbd] = 1.$$

Démonstration. Un vrai plaisir ! On écrit le produit en question :

$$\begin{aligned} & \frac{r-a}{r-b} \times \frac{s-b}{s-a} \times \frac{p-b}{p-c} \times \frac{s-c}{s-b} \times \frac{q-c}{q-a} \times \frac{s-a}{s-c} \\ & \times \frac{c-p}{c-q} \times \frac{d-q}{d-p} \times \frac{a-q}{a-r} \times \frac{d-r}{d-q} \times \frac{b-r}{b-p} \times \frac{d-p}{d-r} \end{aligned}$$

et on simplifie les termes deux à deux.

Avec ce lemme, on retrouve aussitôt le théorème du pivot (cf. Partie V, ??) :

2.2.4 Corollaire. Soit a, b, c trois points non alignés de E . Soient p, q, r trois points distincts de a, b, c , situés respectivement sur les droites (bc) , (ca) , (ab) . Les cercles circonscrits aux triangles cpq, brp, aqr ont un point commun d (appelé le "pivot").

3. J'ai découvert tout seul, et avec émerveillement, ce lemme, au début des années 1980, en analysant la situation du théorème du pivot. Pendant longtemps je n'ai pas su si ce résultat était connu auparavant et j'en ai fait la promotion auprès de nombreux collègues, à tel point qu'on a fini par me l'attribuer (sans que j'en aie jamais revendiqué la paternité). C'est ainsi qu'on trouve sur Internet des allusions au lemme des six birapports de Perrin. Las, j'ai fini par apprendre il y a quelque temps auprès de collègues lillois que ce résultat était en tous cas en exercice dans un livre de géométrie de Daniel Pedoe (1910-1998) datant de 1970 (voir [Ped70a] exercices 53.8 et 53.9). La question qui demeure est de savoir si Pedoe lui-même en était l'inventeur !

Démonstration. On applique le lemme en prenant pour d le point d'intersection des cercles circonscrits à cpq et brp autre⁴ que p et pour s le point ∞ .

2.2.5 Remarques. 1) On peut aussi retrouver les autres résultats vus dans la partie V (droite de Simson, théorème des six cercles de Miquel), grâce à la proposition ci-dessous, voir exercices 2.6.2 et 2.6.3.

2) Ce lemme est sans doute le plus bel exemple du fait qu'une relation entre des invariants donne naissance à un théorème (voire à plusieurs). On relira avec profit la discussion de la partie II sur ce sujet.

La proposition combinatoire suivante est la recette d'utilisation du lemme des six birapports (avec la convention 2.2.7) :

2.2.6 Proposition. *Si huit points de $\widehat{\mathbf{C}}$ sont en bijection avec les sommets d'un cube et si les points correspondant à cinq des faces sont cocycliques ou alignés, il en est de même de ceux de la sixième face.*

Démonstration. Voir l'exercice 2.6.2.

2.2.3 Application : la conservation de l'ensemble droites-cercles

2.2.7 Convention. *On adopte les conventions suivantes concernant les cercles et les droites du plan. Un cercle de $\widehat{\mathbf{C}}$ est un cercle ordinaire. Il ne contient pas le point ∞ . Une droite de $\widehat{\mathbf{C}}$ est une droite ordinaire de \mathbf{C} à laquelle on adjoint le point ∞ .*

La conservation du birapport fournit une autre preuve de la conservation de l'ensemble droites-cercles (voir 1.3.1 et 1.3.4) :

2.2.8 Proposition. *Soit $f \in PGL(2, \mathbf{C})$ et soit o son pôle. Alors f transforme un cercle ou une droite (au sens de 2.2.7) en un cercle ou une droite. Précisément, si C est un cercle et D une droite :*

- 1) *Si $o \in D$ (resp. si $o \notin D$), $f(D)$ est une droite (resp. un cercle).*
- 2) *Si $o \in C$ (resp. si $o \notin C$), $f(C)$ est une droite (resp. un cercle).*

Démonstration. Montrons par exemple le deuxième point dans le cas où o n'est pas sur C . Soient a, b, c trois points distincts (fixés) de C et soit $m \in C$ un point quelconque. On note que les points a, b, c sont non alignés. Soient a', b', c', m' les images de ces points par f . On remarque d'abord que a', b', c' ne

4. Le lecteur examinera le cas où ces cercles sont tangents.

sont pas alignés non plus. Sinon, le birapport $\llbracket a', b', c', \infty \rrbracket$ serait réel en vertu de 2.2.1.2. Comme f^{-1} est une (anti) homographie, elle conserve ce birapport et $\llbracket a, b, c, o \rrbracket$ est donc réel, ce qui signifie que a, b, c, o sont cocycliques ou alignés, ce qui est absurde puisque a, b, c ne sont pas alignés et que o n'est pas sur C . Soit C' le cercle circonscrit à a', b', c' . Le birapport $r' = \llbracket a', b', c', m' \rrbracket$ est *a priori* égal à $r := \llbracket a, b, c, m \rrbracket$ ou à son conjugué, mais comme r est réel, ils sont égaux et r' est réel, de sorte que m' est sur C' et on a $f(C) \subset C'$. On a, de même, $f^{-1}(C') \subset C$, donc $f(C) = C'$. Les autres cas se montrent de manière analogue.

2.3 Étude du groupe $P\Gamma L(2, \mathbf{C})$

2.3.1 Le groupe affine

Les transformations de $P\Gamma L(2, \mathbf{C})$ qui fixent le point à l'infini sont les applications affines (au sens complexe) : $z \mapsto az + b$ ou $z \mapsto a\bar{z} + b$. Il s'agit des similitudes pour la structure euclidienne naturelle de \mathbf{C} , directes ou indirectes, selon que la formule fait intervenir z ou \bar{z} (voir Partie V, ??). Dans les deux cas, la transformation est une isométrie si et seulement si a est de module 1. Parmi ces transformations on trouve les symétries axiales ou réflexions⁵. Ainsi, la symétrie τ par rapport à la droite (ab) ($a \neq b$) est donnée par $\tau(z) = \alpha\bar{z} + \beta$ où les coefficients α, β se calculent en écrivant que a et b sont fixes : $\alpha = \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}$ et $\beta = a - \alpha\bar{a}$.

Les similitudes directes sont produits d'isométries et d'homothéties. Les isométries directes sont les rotations et les translations et elles sont produits de deux symétries axiales. Les isométries indirectes sont les symétries axiales et les symétries glissées. Ces dernières sont composées d'une symétrie d'axe D et d'une translation de vecteur parallèle à D . Elles sont donc produits de trois symétries.

2.3.2 Involutions de $P\Gamma L(2, \mathbf{C})$

Les involutions de $P\Gamma L(2, \mathbf{C})$ ayant été étudiées en détail dans la partie I (voir §3.5), nous nous limitons ici à la recherche des anti-homographies qui sont des involutions. Nous en avons déjà exhibé deux types : les symétries

5. Exceptionnellement, dans cette partie, nous utiliserons plutôt l'appellation symétrie axiale (voire symétrie tout court s'il n'y a pas d'ambiguïté) pour éviter la confusion avec les réflexions de l'espace des cercles que nous rencontrerons au chapitre 3.

axiales, et les inversions, puisque l'inversion de pôle a et de puissance k est donnée par la formule $i(z) = a + \frac{k}{\bar{z} - \bar{a}}$. En vérité, ce sont les seules :

2.3.1 Proposition. *Les involutions de $PGL(2, \mathbf{C}) - PGL(2, \mathbf{C})$ sont les inversions et les symétries axiales. Précisément, si une involution admet des points fixes c'est une inversion de puissance positive ou une symétrie, sinon, c'est une inversion de puissance négative.*

Démonstration. Rappelons, cf. Partie I ??, qu'une anti-homographie est déterminée par ses valeurs en 3 points distincts. Soit f une anti-homographie.

1) On suppose que f admet 3 points fixes distincts a, b, c . Alors f est une symétrie ou une inversion⁶. En effet si a, b, c sont alignés sur une droite D , f et τ_D coïncident en a, b, c donc elles sont égales. Sinon, soit C le cercle circonscrit à a, b, c , alors on a⁷ $f = i_C$ par le même argument.

2) Désormais on suppose qu'on a $f^2 = \text{Id}$ et que f admet au plus deux points fixes. Soit $a \in \mathbf{C}$, différent du pôle de f et non fixe. On pose $a' = f(a)$. Soit $b \in \mathbf{C}$, non situé sur la droite (aa') et non fixe (l'existence de ces points est évidente puisque f admet au plus deux points fixes). On pose $b' = f(b)$. On a donc $f(a') = a$ et $f(b') = b$. On considère le birapport $r = \llbracket a, a', b, b' \rrbracket$. Comme f est une anti-homographie, elle transforme r en son conjugué : $\bar{r} = \llbracket f(a), f(a'), f(b), f(b') \rrbracket = \llbracket a', a, b', b \rrbracket$. Mais, ce dernier birapport est obtenu par une double transposition à partir de r et il est donc égal à r (voir Partie I ??). On a ainsi $r = \bar{r}$, ce qui signifie que a, a', b, b' sont cocycliques (car ils ne sont pas alignés) en vertu de 2.2.1. Soit C le cercle en question et ω son centre. On distingue deux cas :

- Les droites (aa') et (bb') sont parallèles. La médiatrice D de $[aa']$ est alors la droite perpendiculaire à (aa') passant par ω et c'est aussi la médiatrice de $[bb']$ puisque (aa') et (bb') sont parallèles. Il en résulte que f et τ_D ont même effet sur a, a', b, b' , donc qu'elles sont égales et f est une symétrie⁸.

- Les droites (aa') et (bb') sont concourantes en o . Si p est la puissance de o par rapport à C , on a $p = \overline{oa} \cdot \overline{oa'} = \overline{ob} \cdot \overline{ob'}$, de sorte que l'inversion de pôle o et de puissance p échange a et a' d'une part et b et b' d'autre part. Elle est donc égale à f et on a gagné.

Le complément sur les points fixes est évident.

6. On ne suppose même pas $f^2 = \text{Id}$ ici.

7. Si C est le cercle de centre o et de rayon R , rappelons, voir 1.2.4, qu'on note i_C l'inversion de pôle o et de puissance R^2 .

8. En fait, on a une contradiction puisque f est supposée n'avoir que deux points fixes, donc ce cas est impossible.

2.3.3 Conjugaison des inversions et des symétries

2.3.2 Proposition.

1) Soit D une droite, τ_D la symétrie de droite D et soit $g \in PGL(2, \mathbf{C})$. L'image $g(D)$ est soit une droite Δ , soit un cercle C . Dans le premier cas, la conjuguée $g\tau_Dg^{-1}$ est la symétrie d'axe Δ , dans le second l'inversion de cercle C .

2) Soit C un cercle, i_C l'inversion de cercle C et soit $g \in PGL(2, \mathbf{C})$. L'image $g(C)$ est soit une droite Δ , soit un cercle Γ . Dans le premier cas, la conjuguée gi_Cg^{-1} est la symétrie d'axe Δ , dans le second l'inversion de cercle Γ .

3) Soit i une inversion de puissance négative et soit $g \in PGL(2, \mathbf{C})$. Alors, la conjuguée $gi g^{-1}$ est une inversion de puissance négative.

Démonstration. Comme la conjugaison conserve le fait d'être une anti-homographie et une involution, la proposition 2.3.1 montre que les conjuguées sont bien des inversions ou des symétries. Lorsqu'on a affaire à des transformations qui ont des points fixes, le principe de conjugaison montre qu'ils sont transportés par g (si f admet l'ensemble A comme ensemble de points fixes, gfg^{-1} fixe l'ensemble $g(A)$). Dans ce cas, les transformations sont déterminées par leurs points fixes, ce qui donne 1) et 2). Le point 3) vient du rabiote de 2.3.1.

2.3.3 Remarque. Attention, si i_o est une inversion de pôle o , et si g est dans $PGL(2, \mathbf{C})$, $gi_o g^{-1}$ est une inversion, mais son pôle n'est pas $g(o)$, sauf si g fixe ∞ , c'est-à-dire est une similitude.

Pour un panorama sur les classes de conjugaison dans PGL et PGL , voir exercice 2.6.9. On y verra en particulier qu'il y a deux classes d'involutions dans $PGL(2, \mathbf{C})$: la classe des inversions positives et des symétries axiales et celle des inversions négatives.

2.3.4 Génération de PGL

On a le résultat suivant :

2.3.4 Théorème. (Cartan-Dieudonné) *Les symétries axiales et les inversions engendrent le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$. Plus précisément :*

1) *Une homographie est produit de zéro, deux ou quatre inversions ou symétries.*

2) *Une anti-homographie est produit d'une ou trois inversions ou symétries.*

Démonstration. Montrons déjà le point 1). On a rappelé ci-dessus que les isométries directes sont produit de deux symétries. De plus, on a vu en 1.2.3 que toute homothétie est produit de deux inversions : $h(o, k) = i(o, k)i(o, 1)$.

Il en résulte que toute similitude directe est produit de deux inversions et deux symétries. Le cas d'une homographie quelconque résulte alors du lemme suivant par conjugaison :

2.3.5 Lemme. *Toute homographie distincte de l'identité admet un ou deux points fixes dans $\widehat{\mathbf{C}}$. Si elle admet un seul point fixe (resp. deux) elle est conjuguée d'une translation (resp. d'une similitude directe $z \mapsto az$) dans $PGL(2, \mathbf{C})$.*

Démonstration. On écrit $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ avec $ad - bc \neq 0$. Si c est nul, f est une similitude, elle fixe ∞ et est de la forme $f(z) = az + b$. On vérifie qu'elle a un autre point fixe dans \mathbf{C} , sauf si a est égal à 1 auquel cas elle n'en a pas (car b est non nul) et f est alors une translation. Si c n'est pas nul, on cherche $z \in \mathbf{C}$ tel que $z = f(z)$, ce qui conduit à résoudre $cz^2 + (d - a)z - b = 0$. C'est une équation du second degré (car c est non nul) et elle admet une ou deux racines complexes.

Le fait que f soit conjuguée d'une translation ou d'une similitude de la forme $z \mapsto az$ résulte alors de Partie I, ??, mais il est facile de le montrer directement en conjuguant par une homographie du type⁹ $z \mapsto \frac{z - a}{z - b}$ qui envoie les points fixes b et (éventuellement) a en ∞ et (éventuellement) 0 .

En effet, si f admet ∞ comme unique point fixe on a vu que c'est une translation et si elle admet ∞ et 0 comme points fixes, elle est de la forme $z \mapsto az$.

Passons au point 2). Soit f une anti-homographie et supposons d'abord que f fixe ∞ , donc est une similitude. Si c'est une isométrie, elle est produit de trois symétries axiales au plus. Sinon, on vérifie¹⁰ qu'elle admet un point fixe a dans \mathbf{C} . En composant f par une homothétie h de centre a et de rapport convenable, on obtient une isométrie négative fixant a , donc une symétrie τ , et $f = h^{-1}\tau$ est produit de deux inversions et une symétrie.

Si f ne fixe pas ∞ , on a $f(\infty) = a \in \mathbf{C}$ et, en conjuguant f par une similitude qui envoie a en 0 , on se ramène au cas $a = 0$, donc à f de la forme $f(z) = \frac{1}{c\bar{z} + d}$ avec $c \neq 0$. Si on compose f par l'inversion g de pôle 0 et de puissance k on obtient $gf(z) = k(\bar{c}z + \bar{d})$ et, si on choisit k tel que $k\bar{c}$ soit de module 1, gf est une isométrie directe. Mais alors, gf est produit de deux symétries, donc f d'une inversion et deux symétries.

9. Le lecteur examinera les cas où a ou b est à l'infini.

10. Soit par un calcul direct en revenant aux parties réelles et imaginaires, soit en notant que son application linéaire associée n'a pas la valeur propre 1, voir [DHP07] 7.2.3.

2.3.6 Remarques.

1) Le maximum requis de trois inversions ou symétries est acquis pour les symétries glissées qui sont produit de trois symétries et pas moins et pour leurs conjuguées. Dans le cas des homographies, le maximum de quatre est atteint pour une similitude qui n'est ni une isométrie, ni une homothétie, voir exercice 2.6.11.

2) On peut montrer que les seules inversions, et même les inversions de puissances positives (resp. négatives), engendrent $PGL(2, \mathbf{C})$, voir 2.6.11. Bien entendu, le nombre d'inversions nécessaires pour écrire une transformation peut alors augmenter. Par exemple, une homothétie de rapport négatif est produit d'une inversion positive et une négative, mais pas de deux inversions positives.

3) La justification du nom de Cartan-Dieudonné attribué à ce théorème apparaîtra au chapitre suivant où l'on verra que symétries et inversions sont toutes deux des avatars des réflexions de l'espace des cercles.

4) Pour une étude des produits de deux inversions-symétries, voir 3.3.8.

2.4 Retour sur l'isomorphisme entre $PGL(2, \mathbf{C})$ et le groupe de Lorentz à trois variables

Nous avons vu dans les Parties III (voir ?? et ??) et IV que le groupe $PGL(2, k)$, sur un corps quelconque, est isomorphe au groupe $PO(Q) \simeq O^+(Q)$ où Q est une forme¹¹ de rang 3 et d'indice 1 (donc correspondant à une conique propre non vide), par exemple $Q(X, Y, T) = Y^2 - XT$. Bien entendu, ceci vaut aussi sur le corps des complexes et il est donc légitime d'examiner ce que donne cet isomorphisme pour le groupe circulaire direct $PGL(2, \mathbf{C})$ (ici isomorphe à $PSL(2, \mathbf{C})$). En fait, il ne donne pas grand chose. En effet, le groupe crucial dans la géométrie anallagmatique est plutôt $P\Gamma L(2, \mathbf{C})$, puisque c'est lui qui contient les inversions. Bien entendu, on peut prolonger l'isomorphisme ci-dessus à $P\Gamma L(2, \mathbf{C})$, et nous allons le faire, mais le groupe obtenu n'est pas très commode et son action¹² naturelle sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ est mal adaptée au point de vue anallagmatique.

11. Nous utilisons ici la notation avec une majuscule pour réserver la lettre q à la forme sur l'espace des droites et cercles qui interviendra au chapitre suivant.

12. On retrouve ici le fait qu'une géométrie ce n'est pas seulement un groupe, mais une opération.

2.4.1 Les aspects algébriques

L'isomorphisme explicite

Commençons par expliciter l'isomorphisme¹³ entre le groupe $PSL(2, \mathbf{C})$ et le groupe $O^+(Q)$ où Q est la forme $Y^2 - XT$. Une façon simple de l'obtenir est de considérer l'espace vectoriel M des matrices 2×2 symétriques¹⁴ à coefficients dans \mathbf{C} : $\begin{pmatrix} x & y \\ y & t \end{pmatrix}$ muni de la forme déterminant $xt - y^2$ (qui n'est autre que $-Q$) et de faire opérer $SL(2, \mathbf{C})$ sur M par $s.m = sm^t s$. On obtient ainsi l'homomorphisme ξ qui à l'élément $s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $SL(2, \mathbf{C})$

associe $\xi(s) = \begin{pmatrix} a^2 & ac & c^2 \\ 2ab & ad + bc & 2cd \\ b^2 & bd & d^2 \end{pmatrix}$ élément de $O^+(Q)$ (le déterminant de $\xi(s)$ est $(ad - bc)^3$) et cet homomorphisme est surjectif de noyau $\{\pm \text{Id}\}$, de sorte que $SL(2, \mathbf{C})$ est un revêtement de degré 2 de $PSL(2, \mathbf{C}) \simeq O^+(Q)$.

PGL vu comme extension de PSL

On a vu qu'on a une suite exacte de groupes :

$$1 \rightarrow PSL(2, \mathbf{C}) \rightarrow PGL(2, \mathbf{C}) \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow 1.$$

On peut reconstruire $PGL(2, \mathbf{C})$ à partir de $PSL(2, \mathbf{C})$ car cette suite est scindée. En effet, PGL contient des éléments τ d'ordre 2 (les inversions-symétries, positives ou négatives). Le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ est donc isomorphe au produit semi-direct $PSL(2, \mathbf{C}) \rtimes \{\pm 1\}$ et l'élément -1 du quotient opère sur $PSL(2, \mathbf{C})$ par un automorphisme involutif, qui est la conjugaison par τ dans $PGL(2, \mathbf{C})$, $i_\tau(g) = \tau g \tau^{-1}$.

Rappels sur les produits semi-directs

Lorsque l'on dispose d'un automorphisme involutif σ d'un groupe G , on peut construire le produit semi-direct $\widehat{G} = G \rtimes \{\pm 1\}$ en définissant sur l'ensemble produit la loi de groupe par la formule $(g, \epsilon).(h, \eta) = (gh, \epsilon\eta)$ si $\epsilon = 1$ et $(g, \epsilon).(h, \eta) = (g\sigma(h), \epsilon\eta)$ si $\epsilon = -1$, voir par exemple [Per96], Ch. 1 §6. Si l'on a deux automorphismes σ_1 et σ_2 de G , le lemme suivant explicite deux cas où les produits correspondants sont isomorphes :

13. Cette description vaut sur tout corps.

14. On comparera à l'exercice 3.4.7.

2.4.1 Lemme. Soient σ_i ($i = 1, 2$) deux automorphismes involutifs de G et notons $G \rtimes_i \{\pm 1\}$ les produits semi-directs correspondants.

1) On suppose qu'il existe un automorphisme u de G tel que $\sigma_2 = u\sigma_1u^{-1}$. Alors, l'application de $G \rtimes_1 \{\pm 1\}$ dans $G \rtimes_2 \{\pm 1\}$ qui à (g, ϵ) associe $(u(g), \epsilon)$ est un isomorphisme de groupes.

2) On suppose qu'il existe $\tau \in G$, d'ordre 2, fixé par σ_1 et σ_2 , qui vérifie $\sigma_1 = i_\tau \circ \sigma_2$ où i_τ désigne l'automorphisme intérieur associé. Alors, l'application de $G \rtimes_1 \{\pm 1\}$ dans $G \rtimes_2 \{\pm 1\}$ qui à $(g, 1)$ associe $(g, 1)$ et à $(g, -1)$ associe $(g\tau, -1)$ est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. C'est une vérification sans difficulté.

Ce lemme permet de comprendre pourquoi les diverses involutions de $PGL(2, \mathbf{C})$ donnent toutes la même extension :

2.4.2 Corollaire. Soient τ_1 et τ_2 deux éléments d'ordre 2 de $PGL(2, \mathbf{C})$, c'est-à-dire deux inversions-symétries positives ou négatives, et soient σ_1 et σ_2 les automorphismes de $PSL(2, \mathbf{C})$ associés.

1) Si τ_1 et τ_2 sont de même nature (i.e. toutes deux positives ou toutes deux négatives), les produits semi-directs associés à σ_1 et σ_2 sont isomorphes par le premier point du lemme.

2) Si τ_1 et τ_2 ne sont pas de même nature, les produits semi-directs associés à σ_1 et σ_2 sont isomorphes par le second point du lemme.

Démonstration. En effet, si les τ_i sont conjugués, il en est de même des automorphismes intérieurs associés et dans l'autre cas, il suffit de constater que les éléments $z \mapsto \bar{z}$ et $z \mapsto -1/\bar{z}$ de $PGL(2, \mathbf{C})$ diffèrent de l'élément $\tau : z \mapsto -1/z$ de $PSL(2, \mathbf{C})$ pour appliquer le second point du lemme.

2.4.3 Remarque. On peut montrer qu'il n'y a pas d'autres automorphismes d'ordre 2 de $PSL(2, \mathbf{C})$ que ceux envisagés ci-dessus, voir l'exercice 2.6.14.

L'extension de $O^+(Q)$

Pour construire, dans le cas de $O^+(Q)$, l'extension correspondant à $PGL(2, \mathbf{C})$ dans le cas de $PSL(2, \mathbf{C})$, il suffit de trouver l'image d'un automorphisme involutif de PSL , et on peut prendre par exemple la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$. Cet automorphisme est induit par la conjugaison $A \mapsto \bar{A}$ sur les matrices de $SL(2, \mathbf{C})$ et le calcul explicite de l'isomorphisme montre qu'il s'envoie sur l'automorphisme de conjugaison de $O^+(Q)$ c'est-à-dire l'application $A \mapsto \bar{A}$. Cela permet de calculer le produit semi-direct :

2.4.4 Proposition. Le produit semi-direct $O^+(Q) \rtimes \{\pm 1\}$ associé à la conjugaison est le groupe formé des transformations $Z = (x, y, t) \mapsto AZ$ de \mathbf{C}^3 dans \mathbf{C}^3 , avec $A \in O^+(Q)$ et des transformations $Z \mapsto \bar{AZ}$ avec $A \in O^+(Q)$.

Démonstration. On vérifie qu'il s'agit bien d'un groupe, qui contient $O^+(Q)$ comme sous-groupe d'indice deux et qui contient un élément d'ordre deux relevant le -1 du quotient, à savoir la conjugaison $Z \mapsto \bar{Z}$.

2.4.2 Des applications géométriques ?

Bien que les groupes $PSL(2, \mathbf{C})$ et $O^+(Q)$ soient isomorphes, le second n'est que peu efficace en géométrie anallagmatique. En effet, il opère naturellement sur $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$, en conservant la conique $\Gamma = V(Q)$, que l'on peut identifier à la droite projective $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \widehat{\mathbf{C}}$, mais les objets intéressants de $\widehat{\mathbf{C}}$ (droites, cercles), ne sont pas apparents dans cette représentation. La seule notion que l'on peut récupérer aisément dans le cadre de $O^+(Q)$ est celle de birapport de quatre points, comme nous l'avons vu dans les Parties III et IV. Il apparaît de deux manières distinctes que nous rappelons maintenant. On note Φ la forme polaire de Q .

Birapport 1

Cette version fait intervenir les points de Γ , rappelons le résultat de la Partie IV ?? :

2.4.5 Proposition. *Soient a, b, c, d quatre points de Γ . On a la formule :*

$$[[a, b, c, d]]^2 = \frac{\Phi(a, c)\Phi(b, d)}{\Phi(b, c)\Phi(a, d)}.$$

On a vu Partie IV que cette quantité est un invariant du groupe $O^+(Q)$ qui s'exprime à l'aide des invariants anallagmatiques et des Spin.

2.4.6 Corollaire. *Soient a, b, c, d quatre points de Γ . Alors, a, b, c, d sont cocycliques ou alignés dans $\widehat{\mathbf{C}}$ si et seulement si l'invariant $\frac{\Phi(a, c)\Phi(b, d)}{\Phi(b, c)\Phi(a, d)}$ est réel positif.*

Avec cette description, le lemme des six birapports correspond comme en 2.2.3 à une relation triviale, mais cette fois entre les invariants Φ .

Birapport 2

Cette fois on fait intervenir les droites joignant deux points de Γ , ou encore leurs pôles, comme on l'a vu Partie III, ?? dont nous reprenons les notations. On identifie $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et Γ par l'application $(\lambda, \mu) \mapsto (\lambda^2, \lambda\mu, \mu^2)$. Rappelons qu'on a défini une application $\Psi : \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ qui

à deux points de Γ , identifié à \mathbf{P}^1 , associe l'intersection des tangentes en ces points (le pôle de la droite qui les joint s'ils sont distincts et le point lui-même s'ils sont confondus).

Le résultat suivant vient de Partie III ?? :

2.4.7 Proposition. Soient a, b, c, d quatre points de Γ et posons $x = \Psi(a, b)$ et $y = \Psi(c, d)$. Soit $I(x, y)$ l'invariant anallagmatique de x, y , $I(x, y) := \frac{\Phi(x, y)^2}{Q(x)Q(y)}$. Si $r = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$, on a $I(x, y) = \frac{(1+r)^2}{(1-r)^2}$. Les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés dans $\widehat{\mathbf{C}}$ si et seulement si $I(x, y)$ est réel positif.

2.4.8 Remarque. Bien entendu, dire que a, b, c, d sont cocycliques est équivalent à dire que a, d, b, c le sont. Si l'on pose $z = \Psi(a, d)$ et $t = \Psi(b, c)$ on doit donc se convaincre que $I(z, t)$ est réel positif si et seulement si $I(x, y)$ l'est. C'est une conséquence de la relation \mathcal{R}' vue dans la Partie IV (voir ??) :

$$\begin{vmatrix} Q(x) & \Phi(x, y) & \Phi(x, z) & \Phi(x, t) \\ \Phi(y, x) & Q(y) & \Phi(y, z) & \Phi(y, t) \\ \Phi(z, x) & \Phi(z, y) & Q(z) & \Phi(z, t) \\ \Phi(t, x) & \Phi(t, y) & \Phi(t, z) & Q(t) \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, comme $x = \Psi(a, b)$ est défini comme le point d'intersection des tangentes à la conique $\Gamma = V(Q)$ en a, b et de même pour les autres, les droites (xz) , (xt) , (yz) et (yt) sont tangentes à Γ . Cela se traduit par le fait qu'on a $Q(x)Q(z) = \Phi(x, z)^2$ (voir Partie III, ??). Comme on est sur \mathbf{C} , les valeurs de Q en x, y, z, t sont des carrés non nuls et on peut les supposer toutes égales à 1, quitte à changer de représentants de x, y, z, t . Les produits $\Phi(x, z)$, $\Phi(x, t)$, $\Phi(y, z)$, $\Phi(y, t)$ sont alors égaux à ± 1 et on peut supposer les trois premiers égaux à 1 en choisissant les signes de x , puis t , puis y . Si $\Phi(y, t)$ vaut -1 , on arrive à $\Phi(x, y)^2 = 1$ ou $\Phi(z, t)^2 = 1$, ce qui est absurde car (xy) et (zt) ne sont pas tangentes à Γ . On a donc aussi $\Phi(y, t) = 1$ et on en déduit la relation $\Phi(z, t) = \frac{3 - \Phi(x, y)}{\Phi(x, y) + 1}$, ce qui montre que $\Phi(z, t)$ est réel si et seulement si $\Phi(x, y)$ l'est et la conclusion s'ensuit.

Distance

Lorsqu'on travaille dans le plan anallagmatique $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, on utilise les invariants euclidiens (distance, angle). Pour cela il faut commencer par se donner un point $\infty = (1, 0)$ par exemple. Les autres points s'écrivent alors sous la forme $a = (\lambda, 1)$ et la distance de deux tels points $a_1 a_2$ est égale à $|\lambda_1 - \lambda_2|$. Dans $\mathbf{P}^2(\mathbf{C})$ muni de Q et Φ , avec l'identification de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ et de Γ , on obtient aussitôt le résultat suivant :

2.4.9 Proposition. Soient $a_i = (\lambda_i, 1)$ deux points de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, que l'on envoie sur les points $m_i = (\lambda_i^2, \lambda_i, 1)$ de Γ . Alors, on a la formule $-2\Phi(m_1, m_2) = (a_1 a_2)^2$.

2.4.10 Remarque. Nous verrons au chapitre suivant que cette formule est identique à celle obtenue dans l'espace des cercles et droites. On a aussi $\Phi(\infty, a) = -1/2$ comme au chapitre 3.

Le quadrangle harmonique

On retrouve avec Q, Φ les résultats sur le quadrangle harmonique, voir l'exercice 2.6.6 :

2.4.11 Proposition. Soient a, b, c, d quatre points distincts de Γ . On pose $x = \Psi(a, b)$ et $y = \Psi(c, d)$. Alors, le quadrangle $abcd$ est harmonique (autrement dit on a $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = -1$) si et seulement si $\Phi(x, y)$ est nul. Si les points a, b, c, d ne sont pas à l'infini, on a la condition $ac \times bd = ad \times bc$.

Démonstration. Le premier point a été vu Partie III ???. Le second résulte du fait que $\Psi(a, b)$ est le produit vectoriel $a \wedge b$ et de même pour $\Psi(c, d)$. Or, on a calculé, Partie IV ??? : $\Delta(Q)\Phi(a \wedge b, c \wedge d) = \Phi(a, c)\Phi(b, d) - \Phi(a, d)\Phi(b, c)$. Comme cette expression est nulle, l'interprétation de Φ en termes de distances donne le résultat.

2.5 Le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ et les transformations conformes

Nous aurons besoin de quelques rappels concernant les fonctions holomorphes d'une variable complexe, que le lecteur pourra trouver dans [Car61] ou [Rud98].

2.5.1 Fonctions holomorphes

Rappelons qu'une fonction f définie sur un ouvert de \mathbf{C} et à valeurs dans \mathbf{C} est dite **holomorphe** si elle est dérivable au sens complexe. Si l'on écrit $f(x + iy) = P(x, y) + iQ(x, y)$, cela équivaut aux conditions de Cauchy : P et Q ont des dérivées partielles au sens réel qui vérifient $\frac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$ et $\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)$. Ces conditions signifient que f , vue comme application de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}^2 est différentiable et que sa différentielle

est une similitude directe. Une application f est anti-holomorphe si $f(\bar{z})$ est holomorphe. Cette fois, sa différentielle est une similitude indirecte. On en déduit la proposition suivante :

2.5.1 Proposition-Définition. *Une application holomorphe (resp. anti-holomorphe) conserve les angles orientés des courbes planes (resp. les change en leurs opposés). On dit que f est **conforme** (resp. **anti-conforme**). Si $f : U \rightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe et injective, son image est un ouvert et l'application f est un homéomorphisme de U sur $f(U)$ dont la réciproque est holomorphe. On dit que f est une **représentation conforme** de U sur $f(U)$.*

2.5.2 La sphère de Riemann comme variété analytique

On définit sur $\widehat{\mathbf{C}}$ une structure de variété analytique complexe en se donnant les deux cartes $U = \mathbf{C}$ et $V = \widehat{\mathbf{C}} - \{0\}$, toutes deux en bijection avec \mathbf{C} , la première de manière évidente, la seconde par $z \mapsto 1/z$ et le passage d'une carte à l'autre est holomorphe. Si on a $f : \widehat{\mathbf{C}} \rightarrow \widehat{\mathbf{C}}$, elle sera dite holomorphe si elle l'est localement en restriction aux cartes U et V . On vérifie alors que les homographies sont des bijections holomorphes de $\widehat{\mathbf{C}}$ dans lui-même. On définit de même les applications anti-holomorphes et on vérifie que les anti-homographies le sont et ce sont donc des transformations conformes ou anti-conformes.

2.5.3 Transformations conformes

En fait, les homographies sont les seules transformations conformes de la sphère de Riemann (voir [Car61]) :

2.5.2 Proposition. *Les bijections conformes (resp. anti-conformes) de $\widehat{\mathbf{C}}$ sur lui-même sont les homographies (resp. les anti-homographies).*

Rappelons enfin, pour mémoire, le théorème fondamental de la représentation conforme :

2.5.3 Théorème. *Si U est un ouvert simplement connexe¹⁵ de \mathbf{C} , distinct de \mathbf{C} , il existe une représentation conforme de U sur le disque unité ouvert.*

15. Un tel ouvert est non vide par définition.

2.6 Exercices

2.6.1 Deux sens du birapport sur un cercle

2.6.1 Exercice. Soit Γ un cercle et a, b, c, d quatre points distincts de Γ . Montrer que le birapport $[[a, b, c, d]]$ au sens complexe est le même que le birapport au sens des coniques, c'est-à-dire, pour tout point $s \in \Gamma$ distinct de a, b, c, d , le birapport des quatre droites $[(sa), (sb), (sc), (sd)]$. (On effectuera une inversion de pôle s .)

2.6.2 Autour du lemme des six birapports

2.6.2 Exercice. (Systèmes cubiques)

On appelle **système cubique** la donnée d'un ensemble X à 8 éléments et de trois parties A, B, C de X , à 4 éléments, vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) $B \cap C, C \cap A, A \cap B$ sont de cardinal 2 et distinctes,
- 2) $A \cap B \cap C$ est de cardinal 1.

1) Montrer si X est l'ensemble des 8 sommets d'un cube et si A, B, C sont trois faces passant par un même sommet, $X; A, B, C$ est un système cubique et que les trois autres faces du cube sont $X - A, X - B$ et $X - C$.

2) Si l'on a un système cubique, montrer qu'on peut noter a, b, c, d, p, q, r, s les éléments de X , de sorte que l'on ait $A = \{b, c, p, s\}, B = \{c, a, q, s\}, C = \{a, b, r, s\}$ et que tout système cubique est en bijection avec un système cubique du type étudié en 1).

3) Si huit points de la sphère de Riemann sont en bijection avec les sommets d'un cube et si les points correspondant à cinq des faces sont cocycliques ou alignés, montrer qu'il en est de même de ceux de la sixième face (utiliser la question 2) et le lemme des six birapports).

2.6.3 Exercice. (Applications)

Utiliser l'exercice précédent pour retrouver les théorèmes de la droite de Simson et des six cercles de Miquel (voir Partie V, ?? et ??).

2.6.3 Retour sur Ptolémée

2.6.4 Exercice. 1) Soient $a, b, c, d \in \mathbf{C}$. Vérifier la relation :

$$(a - c)(b - d) = (a - b)(c - d) + (a - d)(b - c).$$

En déduire, sur les longueurs, l'inégalité $ac \cdot bd \leq ab \cdot cd + ad \cdot bc$.

2) Soient $u, v \in \mathbf{C}^*$. Montrer qu'on a $|u + v| = |u| + |v|$ si et seulement si u/v est un réel positif.

3) Soient a, b, c, d quatre points distincts de \mathbf{C} . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) On a l'égalité de longueurs $ac \times bd = ab \times cd + ad \times bc$.

ii) Le birapport $\llbracket a, c, b, d \rrbracket$ est un réel négatif.

iii) Les points a, b, c, d sont soit cocycliques, avec le quadrilatère $abcd$ convexe, soit alignés, les points b et d étant l'un extérieur et l'autre intérieur par rapport à $[ac]$.

2.6.4 Division et quadrangle harmoniques

2.6.5 Exercice. Soit i une inversion de pôle o , soient a, b, m trois points alignés avec o tels que m soit le milieu de $[ab]$ et soient a', b', m' leurs images par i . Montrer que a', b', m', o est une division harmonique.

2.6.6 Exercice. Soient a, b, c, d quatre points distincts de $\widehat{\mathbf{C}}$. On dit que $abcd$ est un **quadrangle harmonique** si on a $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = -1$.

1) À quelle configuration classique a-t-on affaire si les points sont alignés ?

2) Montrer que $abcd$ est un quadrangle harmonique si et seulement si c 'est l'image par $f \in PGL(2, \mathbf{C})$ (resp. par une inversion) de quatre points alignés formant une division harmonique.

On se donne trois points a, b, c distincts. Montrer qu'il existe un unique point d tel que $abcd$ soit un quadrangle harmonique.

3) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

i) $abcd$ est un quadrangle harmonique,

ii) a, b, c, d sont cocycliques ou alignés et on a l'égalité de longueurs $ac \times bd = ad \times bc$,

iii) on a les égalités de longueurs $ab \times cd = 2ad \times bc = 2ac \times bd$.

(On utilisera le théorème de Ptolémée.)

4) Montrer que $abcd$ est un quadrangle harmonique si et seulement si il existe un élément de $PGL(2, \mathbf{C})$ (resp. une inversion) i qui transforme les points a, b, c, d en les sommets a', b', c', d' d'un carré, de telle sorte que a', c', b', d' soient consécutifs. (Pour la réciproque, on commencera par montrer l'existence d'un élément de $PGL(2, \mathbf{C})$ qui transforme $acbd$ en un carré et on regardera l'image du point à l'infini pour traiter le cas de l'inversion.)

5) On considère un carré $abcd$, son cercle circonscrit Γ et un point o du plan. Les droites (oa) , (ob) , (oc) , (od) recoupent Γ en a', b', c', d' . Montrer que $a'c'b'd'$ est un quadrangle harmonique. (On utilisera 2.6.1 et les involutions de Frégier, voir Partie III ??).

6) Soit Γ un cercle, $s \in \Gamma$, D une droite et a, b, c trois points distincts de D tels que c soit le milieu de $[ab]$. Les droites (sa) , (sb) , (sc) et la parallèle à D passant par s recoupent Γ en a', b', c', d' . Montrer que $a'b'c'd'$ est un quadrangle harmonique.

En déduire que si a, b, c, d sont cocycliques, si m est le milieu de $[ab]$ et si on a $\widehat{cma} = \widehat{dma}$ le quadrangle $abcd$ est harmonique.

7) Soient a, b, c, d quatre points cocycliques. Montrer que $abcd$ est un quadrangle harmonique si et seulement si les tangentes en a et b se coupent sur (cd) (voir Partie III, ??).

8) On se donne trois points distincts a, b, c . En utilisant les questions précédentes, proposer plusieurs constructions du quatrième point d tel que $abcd$ soit un quadrangle harmonique.

2.6.7 Exercice. Soit abc un triangle, A, B, C les hauteurs issues de a, b, c , On note respectivement u, u' ; v, v' et w, w' les points d'intersection de A, B, C et des cercles de diamètres $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$. Montrer que $vv'ww'$, $ww'uu'$ et $uu'vv'$ sont des quadrangles harmoniques¹⁶.

2.6.5 La simplicité de $PGL(2, \mathbf{C})$

2.6.8 Exercice. Rappelons qu'on appelle $PGL(2, \mathbf{C})$ le quotient du groupe $GL(2, \mathbf{C})$ des matrices 2×2 inversibles par le groupe des homothéties complexes (ou des matrices scalaires), isomorphe à \mathbf{C}^* . Ce groupe est isomorphe au groupe des homographies de $\widehat{\mathbf{C}}$, voir Partie I, ??.

1) Montrer que $PGL(2, \mathbf{C}) = GL(2, \mathbf{C})/\mathbf{C}^*$ est isomorphe à $PSL(2, \mathbf{C}) = SL(2, \mathbf{C})/\{\text{Id}, -\text{Id}\}$.

2) On se propose de montrer que $PSL(2, \mathbf{C})$ est simple. Soit N un sous-groupe distingué de $SL(2, \mathbf{C})$ contenant le centre $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$, mais non réduit au centre. Il s'agit de montrer que N est égal à $SL(2, \mathbf{C})$. On rappelle que $SL(2, \mathbf{C})$ est engendré par les transvections et que toute transvection est conjuguée dans SL de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (voir [Per96] IV 2.11 et 2.18).

a) On suppose que N contient une transvection ou l'opposée d'une transvection. Conclure.

b) Soit g un élément diagonalisable de N qui n'est pas une homothétie. Montrer que N contient une matrice diagonale g' avec des coefficients $\lambda, 1/\lambda$, $\lambda \neq \pm 1$. Montrer que N contient une transvection (utiliser un commutateur $tg't^{-1}g'^{-1}$ où t est une transvection admettant un vecteur propre commun avec g').

16. Voir au besoin les *Éléments de géométrie* de R. Mneimné, Cassini 1997, p. 131.

c) Conclure.

2.6.6 Classes de conjugaison

2.6.9 Exercice. Cet exercice complète 2.3.5.

1) On rappelle que toute homographie est conjuguée dans $PGL(2, \mathbf{C})$ d'une translation $z \mapsto z + b$ ou d'une similitude directe $z \mapsto az$.

a) Montrer que les translations distinctes de l'identité sont toutes conjuguées dans $PGL(2, \mathbf{C})$ (utiliser les similitudes).

b) Montrer que deux similitudes $z \mapsto az$ et $z \mapsto bz$ sont conjuguées dans $PGL(2, \mathbf{C})$ si et seulement si on a $a = b$ ou $a = b^{-1}$.

c) Montrer que les similitudes précédentes sont conjuguées dans $PTL(2, \mathbf{C})$ si et seulement si on a $a = b$ ou $a = b^{-1}$ ou $a = \bar{b}$ ou $a = \bar{b}^{-1}$. Étudier les cas où il y a moins de quatre conjugués distincts.

2) On étudie maintenant les classes de conjugaison de $PTL(2, \mathbf{C})$. Soit f une anti-homographie.

a) On suppose que f admet un point fixe. Montrer que f est conjuguée d'une similitude indirecte $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $a \neq 0$. Il y a alors trois cas de figure.

- Si $|a| \neq 1$, f admet un deuxième point fixe, elle est conjuguée de la similitude $z \mapsto a\bar{z}$ et les similitudes $z \mapsto a\bar{z}$ et $z \mapsto b\bar{z}$ sont conjuguées si et seulement si on a $|b| = |a|$ ou $|b| = |a|^{-1}$.

- Si $|a|$ est égal à 1 et si f admet un point fixe (autre que ∞) c'est une symétrie axiale. Montrer que ces transformations sont toutes conjuguées. (Cette classe de conjugaison contient toutes les inversions positives.)

- Si $|a|$ est égal à 1 et si f n'admet aucun point fixe (autre que ∞) c'est une symétrie glissée $\tau_D \circ t_{\vec{v}}$ où le vecteur \vec{v} est colinéaire à D . Montrer que ces transformations sont toutes conjuguées.

b) On suppose maintenant que f n'a aucun point fixe dans $\widehat{\mathbf{C}}$. Montrer qu'il existe des points z, w distincts tels que f échange z et w (considérer f^2). En déduire que f est conjuguée d'une transformation $s_a(z) := z \mapsto a/\bar{z}$ avec $a \notin \mathbf{R}^+$. Montrer que s_a et s_b sont conjuguées si et seulement si les arguments de a et b sont égaux ou opposés. En particulier, toutes les inversions de puissance négative (qui correspondent au cas où a est un réel négatif) sont conjuguées.

2.6.10 Exercice. Cet exercice est inspiré du livre d'Hadamard, voir [Had98].

1) Soient C_1, C_2 deux cercles. Déterminer les centres des inversions qui transforment les C_i en deux cercles de même rayon. Discuter. (Considérer les

inversions qui échangent les C_i et les transformer en symétries axiales, attention au signe de la puissance, cf. 4.1.8. Cet exercice est une belle application du principe de conjugaison.)

2) Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles. Existe-t-il une inversion qui transforme les C_i en des cercles de même rayon? Si oui, construire le centre d'une telle inversion. Voir aussi 5.4.5 où l'on disposera de meilleurs outils pour aborder cette question.

2.6.7 Conjugaison et suites récurrentes

Soit $f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ un élément de $PGL(2, \mathbf{C})$. On définit une suite récurrente (u_n) de $\widehat{\mathbf{C}}$ en se donnant une valeur initiale u_0 et en posant $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) On suppose que f admet un unique point fixe $c \in \mathbf{C}$. On pose $v_n = \frac{1}{u_n - c}$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

2) On suppose que f admet deux points fixes $a, b \in \mathbf{C}$. On pose $v_n = \frac{u_n - a}{u_n - b}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique (complexe).

2.6.8 Compléments sur Cartan-Dieudonné

2.6.11 Exercice. 0) Montrer qu'une similitude directe qui n'est ni une isométrie, ni une homothétie, n'est pas produit de deux inversions ou symétries. (Distinguer les cas et considérer le point à l'infini.)

1) Montrer que toute symétrie τ_D est produit de trois inversions de puissances positives (conjuguer τ_D par une inversion positive de pôle non situé sur D).

2) Montrer que les inversions seules engendrent $PGL(2, \mathbf{C})$.

3) Montrer que les inversions positives engendrent $PGL(2, \mathbf{C})$ (utiliser 1.2.3).

4) Montrer que les inversions négatives engendrent $PGL(2, \mathbf{C})$. Indication : considérer le sous-groupe G de $PGL(2, \mathbf{C})$ engendré par les produits pairs d'isométries négatives, montrer qu'il est distingué et en déduire¹⁷ qu'il est égal à $PGL(2, \mathbf{C})$. Conclure.

5) ¶ Retrouver le résultat précédent sans utiliser la simplicité du groupe $PGL(2, \mathbf{C})$. On montrera successivement :

17. Le lemme général est le suivant : Si G est un groupe simple et C une classe de conjugaison non réduite à l'identité, elle engendre G .

a) Si τ_C et τ'_C sont deux inversions positives ou symétries axiales et si C, C' se coupent, $g = \tau_C \tau_{C'}$ est produit de quatre inversions positives ou symétries axiales $\tau_{C_1} \tau_{C_2} \tau_{C_3} \tau_{C_4}$ avec C_1, C_2 et C_3, C_4 disjoints.

b) Si τ_C et τ'_C sont deux inversions positives ou symétries axiales et si C, C' sont disjoints, $g = \tau_C \tau_{C'}$ est produit de deux inversions négatives.

c) Une symétrie centrale est produit de quatre inversions négatives.

d) Une inversion positive est produit de cinq inversions négatives.

On voit que cette preuve est nettement plus compliquée que l'autre, et il ne semble pas facile de la simplifier¹⁸. On a là un très bel exemple d'une conséquence géométrique d'un résultat pourtant très algébrique.

2.6.9 Le théorème fondamental de la géométrie analagmatique

On note ici \mathcal{C} l'ensembles des cercles et des droites de $\widehat{\mathbb{C}}$. On rappelle que le point à l'infini est sur toutes les droites, mais sur aucun cercle (voir la convention 2.2.7). L'exercice suivant a pour but de prouver le théorème suivant :

2.6.12 Théorème. *Soit $f : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ une bijection conservant l'ensemble \mathcal{C} des droites et des cercles. Alors, f est une homographie ou une anti-homographie.*

2.6.13 Exercice. Soit f une bijection conservant \mathcal{C} . On pose $a = f(\infty)$, $b = f(0)$, $c = f(1)$.

1) Montrer que f^{-1} conserve \mathcal{C} .

2) Montrer qu'on peut se ramener au cas où f fixe $\infty, 0$ et 1 (utiliser une homographie g qui ramène a, b, c en $\infty, 0$ et 1).

On suppose désormais qu'on est dans ce cas.

3) a) Montrer que f conserve séparément l'ensemble des droites et celui des cercles.

b) Montrer que f transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles, deux cercles tangents en deux cercles tangents, une droite et un cercle tangents en une droite et un cercle tangents.

c) Montrer que l'image par f et f^{-1} d'un disque ouvert est un disque ouvert (on caractérisera les points du disque ouvert comme les points du plan par lesquels il ne passe pas de tangente au cercle). En déduire que f est un homéomorphisme.

¹⁸. Le lecteur courageux montrera notamment qu'un produit de trois inversions négatives n'est jamais une inversion positive.

4) a) Montrer que, si a et b sont deux points d'un cercle C , les tangentes en a et b sont parallèles si et seulement si (ab) est un diamètre de C . En déduire que si D est un diamètre de C , $f(D)$ est un diamètre de $f(C)$.

b) Montrer que si C est un cercle de centre ω , $f(C)$ est un cercle de centre $f(\omega)$.

c) Montrer que f conserve l'orthogonalité des droites.

Soit C le cercle de centre 0 passant par 1.

5) a) Montrer que C est stable par f ainsi que l'axe réel et l'axe imaginaire pur.

b) Montrer qu'on a $f(i) = \pm i$. Quitte à composer f par la symétrie $z \mapsto \bar{z}$, on peut supposer qu'on a $f(i) = i$, ce que nous ferons désormais.

c) Montrer qu'on a $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ (pour $n > 0$, on raisonnera par récurrence en utilisant le cercle centré en n et passant par 1).

d) Montrer qu'on a $f(r) = r$ pour tout $r \in \mathbf{Q}$ (utiliser le théorème de Thalès).

e) En déduire qu'on a $f(z) = z$ pour $z \in \mathbf{R}$ (utiliser la continuité de f).

6) Conclure.

2.6.10 Automorphismes et extensions de $PSL(2, \mathbf{C})$

2.6.14 Exercice. ¶ 1) Montrer que tout automorphisme de $SL(2, \mathbf{C})$ est de la forme $A \mapsto PAP^{-1}$ où P est un élément de $GL(2, \mathbf{C})$ (ou encore que le groupe des automorphismes de $SL(2; \mathbf{C})$ est engendré par les automorphismes intérieurs et par les automorphismes $\theta_\sigma : A \mapsto \sigma(A)$ provenant d'un automorphisme¹⁹ de corps de \mathbf{C}). On consultera [Die70] Ch. IV au besoin.

2) Montrer que l'automorphisme $\chi : A \mapsto {}^tA^{-1}$ est intérieur (c'est la conjugaison par $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$).

3) Montrer que tout automorphisme de $SL(2, \mathbf{C})$ induit un automorphisme de $PSL(2, \mathbf{C})$ et que, réciproquement, tout automorphisme du quotient provient d'un automorphisme de $SL(2, \mathbf{C})$ (voir [Die70]).

4) En déduire qu'il n'y a pas d'autre extension scindée non triviale de $PSL(2, \mathbf{C})$ par $\{\pm 1\}$ que $PGL(2, \mathbf{C})$.

5) Montrer que l'automorphisme de $O^+(Q)$ associé à l'homomorphisme $A \mapsto {}^tA^{-1}$ de $SL(2, \mathbf{C})$ est l'automorphisme intérieur associé à la matrice

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. L'identité et la conjugaison sont les seuls automorphismes continus de \mathbf{C} .

Chapitre 3

L'espace des cercles et des droites : généralités et isomorphisme de groupes

Dans ce chapitre et les suivants, on étudie l'espace \mathcal{E} des cercles et des droites. Il s'agit là, par rapport au traitement élémentaire de l'inversion, d'un changement radical de point de vue. En effet, dans l'approche usuelle, on traite d'objets situés à deux niveaux : les points, qui sont des éléments du plan, et les cercles-droites, qui en sont des parties. Dans l'espace \mathcal{E} , en revanche, tous ces objets sont au même niveau puisque sont éléments de \mathcal{E} à la fois les cercles, les droites et les points. Cet espace est muni d'une forme quadratique naturelle (qui correspond au carré du rayon dans le cas des cercles) et l'orthogonalité pour cette forme redonne à la fois l'incidence entre points et cercles-droites et l'orthogonalité au sens usuel pour les cercles et les droites.

Ce point de vue présente de nombreux avantages. Dans ce chapitre, nous verrons surtout qu'il permet de montrer l'un des isomorphismes entre deux groupes classiques de petite dimension (ou leurs avatars) : le groupe orthogonal associé à une forme de Lorentz réelle de rang 4 et le groupe des homographies de la droite projective complexe. Cela permet notamment d'interpréter l'inversion comme une réflexion et d'éclairer certains résultats précédents. Par ailleurs, le point de vue de l'espace des cercles rend très naturelle la notion de pinceau, vue comme droite projective, ainsi que la classification de ces objets.

Introduction

Lorsqu'on travaille dans le plan \mathbf{R}^2 formé des couples (x, y) et muni du produit scalaire ordinaire donné par la formule $xx' + yy'$, l'équation du cercle C de centre $(b, c) \in \mathbf{R}^2$ et de rayon $R > 0$ est donnée par $(x - b)^2 + (y - c)^2 = R^2$. Cette équation s'écrit encore sous la forme :

$$x^2 + y^2 - 2bx - 2cy + d = 0,$$

où l'on a posé $d = b^2 + c^2 - R^2$. Réciproquement, une telle équation, avec $b, c, d \in \mathbf{R}$, définit un cercle pourvu qu'on ait $b^2 + c^2 - d > 0$.

Il en est de même d'une équation de la forme $a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$, pourvu que a soit non nul et que l'on ait $b^2 + c^2 - ad = a^2R^2 > 0$. Sous cette forme, bien entendu, deux quadruplets (a, b, c, d) et (a', b', c', d') définissent le même cercle si et seulement si ils sont proportionnels, ce qui conduit à interpréter C comme un point de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$. De plus, les points de $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ qui vérifient $a = 0$ correspondent aux équations $-2bx - 2cy + d = 0$ et il s'agit des droites de \mathbf{R}^2 , au moins si le couple (b, c) n'est pas nul. On voit donc apparaître ici cercles et droites comme points d'un espace projectif de dimension 3, muni de deux données supplémentaires : un plan "à l'infini" défini par l'équation $a = 0$, qui correspond aux droites, et une forme quadratique $q(a, b, c, d) = b^2 + c^2 - ad$, qui correspond au carré du rayon, et qui est une forme de Lorentz, c'est-à-dire de signature $(3, 1)$, en vertu de la formule :

$$b^2 + c^2 - ad = b^2 + c^2 + \left(\frac{a-d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+d}{2}\right)^2.$$

Dans ce qui suit, nous allons renverser cette présentation en prenant comme donnée initiale un tel espace projectif, muni d'un plan à l'infini et d'une forme de Lorentz.

3.1 L'espace des cercles et des droites

3.1.1 Les données

3.1.1 Définition. *On considère un espace vectoriel réel E , de dimension 4 et on pose $\mathcal{E} = \mathbf{P}(E)$. On note p la projection de $E - \{0\}$ dans \mathcal{E} . On se donne une forme quadratique q sur E , de rang 4 et de signature $(3, 1)$. Enfin, on fixe un hyperplan H de E , on note \mathcal{D} l'image de H dans \mathcal{E} , et on suppose que la restriction $q|_H$ est une forme de rang 2 (donc dégénérée), positive¹. On note φ la forme polaire de q .*

1. En fait, cette hypothèse est inutile, voir 3.4.1.

L'espace projectif \mathcal{E} , muni de la forme q et du plan projectif \mathcal{D} , est appelé **espace des droites-cercles**.

3.1.2 Remarque. Le groupe naturellement associé à (\mathcal{E}, q) est le groupe $PO(q)$ des homographies qui conservent la forme q , voir 3.3.1.

La proposition suivante montre que ces données permettent de retrouver l'écriture vue dans l'introduction :

3.1.3 Proposition. *Il existe une base de E telle que, si (a, b, c, d) sont les coordonnées d'un vecteur dans cette base, la forme q soit donnée par la formule $q(a, b, c, d) = b^2 + c^2 - ad$ et l'hyperplan H par l'équation $a = 0$.*

Démonstration. On appelle e_4 un vecteur du noyau de $q|_H$. Comme la forme $q|_H$ est positive de rang 2, on peut compléter e_4 en une base e_2, e_3, e_4 de H telle que, si les coordonnées dans cette base sont b, c, d , on ait $q|_H(b, c, d) = b^2 + c^2$. Soit P le plan (e_2, e_3) . Il est non dégénéré et défini positif, donc de signature $(2, 0)$. Comme la forme q est de signature $(3, 1)$, le théorème de Sylvester² montre que l'orthogonal P^\perp est un plan hyperbolique (i.e. de signature $(1, 1)$) et qu'on a $E = P \oplus P^\perp$. Comme e_4 est un vecteur isotrope de P^\perp , on peut le compléter avec un vecteur isotrope e_1 pour former une base hyperbolique de P^\perp , ce qui signifie, si les coordonnées sur e_1, e_4 sont a, d , qu'on a $q|_{P^\perp}(a, d) = ad$ (sur tous ces points, voir par exemple [Per96] Ch. VIII). La base $-e_1, e_2, e_3, e_4$ réalise alors les conditions de l'énoncé.

3.1.2 La quadrique fondamentale

3.1.4 Définition. *On note \mathcal{P} la quadrique de \mathcal{E} définie par q c'est-à-dire l'ensemble des points $m \in \mathcal{E}$ vérifiant³ $q(m) = 0$. Dans la base définie en 3.1.3, cette quadrique a pour équation $b^2 + c^2 - ad = 0$.*

3.1.5 Proposition. *La quadrique \mathcal{P} est formée de deux types de points :*

- 1) *un unique point situé dans le plan \mathcal{D} , donné en coordonnées par $(0, 0, 0, 1)$,*
- 2) *les points $(1, b, c, b^2 + c^2)$, pour $(b, c) \in \mathbf{R}^2$.*

Si $\mathbf{P}(E)$ est muni de la topologie quotient de celle de $E \simeq \mathbf{R}^4$, la quadrique \mathcal{P} est compacte et homéomorphe à la sphère \mathbf{S}^2 .

2. Voir par exemple [Per96] Ch. V. Nous désignerons aussi sous ce nom le corollaire suivant : Soit E un espace vectoriel réel muni d'une forme quadratique non dégénérée de signature (p, q) . Si F est un sous-espace non isotrope de E de signature (k, l) , son orthogonal est de signature $(p - k, q - l)$.

3. La situation est analogue au cas des coniques : si m est l'image de $\hat{m} \in E - \{0\}$, le fait de vérifier $q(\hat{m}) = 0$ ne dépend pas du choix du représentant \hat{m} de m et on écrit alors $q(m) = 0$.

Démonstration. Si on coupe \mathcal{P} par l'hyperplan $a = 0$, il reste l'équation $b^2 + c^2 = 0$ dont la seule solution est $b = c = 0$, autrement dit on a l'unique point $(0, 0, 0, 1)$. On cherche maintenant les points de \mathbf{P} qui vérifient $a \neq 0$. On peut supposer $a = 1$ et on trouve les points $(1, b, c, d)$ avec $b^2 + c^2 - d = 0$ comme annoncé. Comme l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ est compact et que \mathcal{P} est définie par l'équation polynomiale $b^2 + c^2 - ad = 0$, \mathcal{P} est un fermé de $\mathbf{P}(E)$ donc un compact. L'application $(b, c) \mapsto (1, b, c, b^2 + c^2)$ est un homéomorphisme de \mathbf{R}^2 sur $\mathcal{P} - \{(0, 0, 0, 1)\}$. Il en résulte que \mathcal{P} est un compactifié d'Alexandroff de \mathbf{R}^2 , donc homéomorphe à la sphère (voir par exemple [Bou65] Ch. I, §9, Th. 4).

3.1.6 Définition. La quadrique \mathcal{P} est appelée **plan anallagmatique**, ses éléments sont appelés **points** (ou **cercles-points**). Ils correspondent aux points de \mathbf{R}^2 (ou de \mathbf{C}), avec en plus le point $\infty = (0, 0, 0, 1)$. On pose $\mathcal{C} = \mathcal{E} - \mathcal{P} - \mathcal{D}$ et $\mathcal{D}^* = \mathcal{D} - \{\infty\}$. Les éléments $C \in \mathcal{C}$ vérifiant $q(C) > 0$ sont appelés **cercles** (sous-entendu réels) et leur ensemble est noté \mathcal{C}^+ , ceux qui vérifient $q(\Gamma) < 0$ sont appelés **cercles imaginaires**⁴ et leur ensemble est noté \mathcal{C}^- ; les éléments de \mathcal{D}^* sont appelés **droites**, ils vérifient $q(D) > 0$.

3.1.7 Scolie. Interprétation des éléments de \mathcal{E}

On peut maintenant interpréter⁵ les divers éléments de \mathcal{E} en termes de points ou de parties de $\widehat{\mathbf{C}}$.

- On interprète les points de \mathcal{P} comme ceux de $\widehat{\mathbf{C}}$ de manière évidente : ∞ correspond à ∞ et le point $(1, b, c, b^2 + c^2)$ à $b + ic$.
- La droite $D = (0, b, c, d)$ s'interprète comme la droite de $\widehat{\mathbf{C}}$ d'équation $-2bx - 2cy + d = 0$.
- Un cercle réel $C = (a, b, c, d)$ ($a \neq 0, b^2 + c^2 - ad > 0$) apparaît comme le cercle de $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$ d'équation $a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy + d = 0$. C'est le cercle de centre $(b/a, c/a)$ et de rayon R avec $a^2 R^2 = b^2 + c^2 - ad = q(C)$.
- Enfin, pour un cercle imaginaire $\Gamma = (a, b, c, d)$ ($a \neq 0, b^2 + c^2 - ad < 0$), le centre est toujours le point $(b/a, c/a)$, mais le carré du rayon étant négatif, le cercle n'a pas de points réels.

Pour les cercles, qu'ils soient réels ou imaginaires, comme a est non nul, on peut normaliser les équations par $a = 1$.

3.1.8 Commentaire. Désormais, tout le jeu va consister à penser aux éléments de \mathcal{E} comme des points, des cercles et des droites de $\widehat{\mathbf{C}}$ (on parlera encore de cercles-droites) et à interpréter les relations dans \mathcal{E} avec cette

4. On essaiera, dans la mesure du possible, d'utiliser toujours ces notations : des lettres minuscules pour les éléments de \mathcal{P} , des majuscules romaines pour ceux de \mathcal{C}^+ ou de \mathcal{D}^* et des majuscules grecques pour ceux de \mathcal{C}^- .

5. Si l'on veut être précis, on est en train de construire une application Φ de $\mathcal{E} - \mathcal{C}^-$ dans $\widehat{\mathbf{C}} \cup \mathcal{P}(\widehat{\mathbf{C}})$ qui envoie \mathcal{P} sur $\widehat{\mathbf{C}}$ et les éléments de $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{D}^*$ sur les cercles-droites.

description, ou encore d'établir un dictionnaire entre ces deux entrées dans la géométrie anallagmatique. Il est amusant de noter que, comme un vrai dictionnaire, on l'utilise dans les deux sens. On verra aussi combien l'usage de ce dictionnaire est profitable. En particulier, il va donner l'un des isomorphismes essentiels des groupes classiques entre le groupe $PO(q)$ associé à \mathcal{E} et le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ provenant de $\widehat{\mathbf{C}}$.

3.1.3 Interprétation des valeurs de q et φ

Soient $C = (a, b, c, d)$ et $C' = (a', b', c', d')$ deux éléments de E . Rappelons qu'on a les formules $q(C) = b^2 + c^2 - ad$ et $\varphi(C, C') = bb' + cc' - \frac{1}{2}(ad' + a'd)$.

Comme on est dans un espace projectif, les coordonnées des divers points ne sont définies qu'à un scalaire réel près, de sorte que les valeurs de q et φ n'ont pas de sens géométrique en général. Il y a toutefois plusieurs exceptions à cette règle.

- La valeur 0 a un sens indépendant des représentants. Dans le cas de q elle définit les points isotropes rencontrés ci-dessus. Dans le cas de φ elle définit l'orthogonalité que l'on étudiera au paragraphe suivant.

- Comme on a, pour $\lambda \in \mathbf{R}$, $q(\lambda C) = \lambda^2 q(C)$, le signe de q a un sens géométrique, il permet de distinguer les cercles-droites réels des cercles imaginaires.

- Dans le cas des cercles et des points (autres que ∞) les valeurs de φ et q ont un sens pourvu que l'on normalise les objets par $a = 1$.

- Dans tous les cas, les quotients de deux expressions homogènes de même degré (comme l'invariant anallagmatique, voir plus loin) ont un sens indépendant des représentants.

Les deux propositions suivantes, qui résultent aussitôt des formules donnant q et φ , donnent une interprétation de certaines quantités, la première avec la normalisation, la seconde avec les quotients.

3.1.9 Proposition. *Dans cette proposition les points $m \neq \infty$ et les cercles $C \in \mathcal{C}$ sont normalisés par $a = 1$ et le point ∞ par $(0, 0, 0, 1)$. On note d la distance euclidienne de \mathbf{R}^2 : $d((x, y), (x', y'))^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ et on pose encore $mm' = d(m, m')$. Pour deux cercles C, C' on note $\Delta(C, C')$ la distance de leurs centres.*

0) Pour un cercle réel⁶ on a $q(C) = R^2$ (carré du rayon).

1) Soient $m, m' \in \mathcal{P} - \{\infty\}$ des points normalisés. On a $\varphi(m, \infty) = -1/2$ et $d(m, m')^2 = mm'^2 = -2\varphi(m, m')$.

6. On notera aussi parfois R^2 le carré du rayon d'un cercle imaginaire.

2) Pour un point et un cercle réel ou imaginaire on a $-2\varphi(m, C) = p(m, C)$ (puissance⁷ de m par rapport à C).

3) Pour deux cercles C, C' (réels ou non) on a $-2\varphi(C, C') = \Delta^2 - R^2 - R'^2$. Si les cercles sont de centres o, o' et se coupent en m on a $\varphi(C, C') = RR' \cos \widehat{om o'}$.

4) Pour un cercle C (réel ou non), de centre ω , et une droite D , on a $\varphi(C, D) = \varphi(\omega, D)$.

Démonstration. Cela résulte des définitions. On notera que la dernière assertion de 3) vient de la formule d'Al-Kashi.

3.1.10 Proposition. 1) Soient m un point, normalisé par $a = 1$, et D une droite. On note $d(m, D)$ la distance euclidienne du point à la droite. On a la formule $d(m, D)^2 = \frac{\varphi(m, D)^2}{q(D)}$.

2) Soit C un cercle, normalisé par $a = 1$, ω son centre et soit D une droite. On a $d(\omega, D)^2 = \frac{\varphi(C, D)^2}{q(D)}$.

Démonstration. 1) Si le point a pour coordonnées (x, y) et la droite pour équation $-2bx - 2cy + d$, cela résulte de la formule $d(m, D) = \frac{|-2bx - 2cy + d|}{\sqrt{4(b^2 + c^2)}}$.

Le point 2) vient de la formule $\varphi(C, D) = \varphi(\omega, D)$.

3.1.11 Remarques. 1) Si m est un point et Γ un cercle imaginaire de centre ω et de carré du rayon $R^2 < 0$, on a $-2\varphi(m, \Gamma) = d^2 - R^2$ avec $d = d(m, \omega)$ et $\varphi(m, \Gamma)$ est donc < 0 .

2) Si m, m' sont deux points du plan, on a vu ci-dessus qu'on retrouve la longueur du segment mm' grâce à $\varphi(m, m')$. On en déduit aussi le produit scalaire ordinaire de deux vecteurs grâce à la formule $2(\vec{ab} | \vec{ac}) = ab^2 + ac^2 - bc^2$.

3) Pour une discussion sur le signe de φ , voir 3.2.10.

Parmi les invariants que l'on retrouve grâce à φ on retrouve aussitôt, sinon le birapport de quatre points, du moins le carré de son module :

3.1.12 Corollaire. Soient a, b, c, d quatre points de \mathcal{P} et $r = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$ leur birapport en tant que points de $\widehat{\mathbf{C}}$. On a la formule :

$$|r|^2 = \frac{\varphi(c, a)\varphi(d, b)}{\varphi(c, b)\varphi(d, a)}.$$

7. Dans le cas imaginaire, la puissance est définie par l'analogie de la formule $d^2 - R^2$.

Démonstration. Cela résulte de la formule $-2\varphi(a, b) = ab^2$.

Pour une étude plus approfondie des liens entre le birapport et les invariants de $O(q)$, voir le chapitre 7.

3.1.4 Interprétation de l'orthogonalité dans \mathcal{E}

Forts des calculs précédents, nous interprétons l'orthogonalité vis à vis de la forme q en termes des points et des cercles-droites de $\widehat{\mathbf{C}}$. Le dictionnaire va donc de \mathcal{E} vers $\widehat{\mathbf{C}}$ ici. Commençons par une définition :

3.1.13 Définition. Soit Γ un cercle imaginaire, normalisé par $a = 1$ et de "carré du rayon" $q(\Gamma) = -r^2$, avec $r > 0$. On appelle⁸ **ombre** de Γ le cercle réel K de même centre et de carré du rayon $r^2 = -q(\Gamma)$.

Le théorème suivant résume les propriétés des éléments de \mathcal{E} vis à vis de l'orthogonalité :

3.1.14 Théorème.

- 1) Deux points distincts (c'est-à-dire deux éléments de \mathcal{P}) ne sont jamais orthogonaux.
- 2) Un point de $\mathcal{P} - \{\infty\} = \mathbf{R}^2$ est orthogonal à un cercle ou une droite si et seulement si, dans l'interprétation 3.1.7, il lui appartient. Le point ∞ est orthogonal (donc appartient) à toutes les droites, mais à aucun cercle. Aucun point de \mathcal{P} n'est orthogonal à un cercle imaginaire.
- 3) Deux droites, un cercle et une droite, deux cercles sont orthogonaux si et seulement si, dans l'interprétation 3.1.7, ils le sont au sens usuel.
- 4) Deux cercles imaginaires ne sont jamais orthogonaux. Un cercle imaginaire est orthogonal à une droite si et seulement si son "centre" est sur la droite. Enfin, un cercle imaginaire Γ et un cercle réel C , tous deux normalisés par $a = 1$, sont orthogonaux si et seulement si on a $\Delta^2 - q(C) - q(\Gamma) = 0$, où Δ est la distance de leurs centres. Si K est l'ombre du cercle Γ la condition d'orthogonalité de C et Γ se traduit comme suit :
 - Si Γ et C ont même centre, ils sont orthogonaux si et seulement si C est l'ombre de Γ , autrement dit si l'on a $C = K$.
 - Sinon, ils sont orthogonaux si et seulement si le cercle C coupe K en des points diamétralement opposés⁹.

Démonstration. 1) On peut utiliser la formule de 3.1.9 : $mm'^2 = -2\varphi(m, m')$.

8. C'est un vieux débat : l'homme invisible a-t-il une ombre ?

9. On voit ici revenir la géométrie elliptique.

Mais on peut aussi ¹⁰, utiliser les formes quadratiques. Si deux points m et m' étaient orthogonaux, leurs représentants $\widehat{m}, \widehat{m}'$ seraient des vecteurs isotropes orthogonaux, de sorte que le plan $(\widehat{m}, \widehat{m}')$ serait totalement isotrope. L'indice de la forme quadratique q serait donc ≥ 2 contrairement à l'hypothèse (l'indice d'une forme $(3, 1)$ est égal à 1, voir [Per96] Ch. V).

2) Considérons d'abord le point à l'infini $\infty = (0, 0, 0, 1)$. Si $C = (a, b, c, d)$ est un élément de E , on a $\varphi(\infty, C) = -\frac{1}{2}a$. On voit que ∞ est orthogonal à toutes les droites, mais à aucun cercle, ce qui, avec l'interprétation 3.1.7, est bien conforme aux conventions usuelles.

Pour un point m à distance finie, on utilise 3.1.9. Si C est un cercle on a $-2\varphi(m, C) = p(m, C)$ et cette puissance est nulle si et seulement si le point est sur le cercle. Si D est une droite, on a $\varphi(m, D)^2 = q(D)d(m, D)^2$ d'après 3.1.10 et là encore φ est nul si et seulement si m est sur D .

Le cas d'un cercle imaginaire résulte du calcul de la puissance, mais on peut aussi le traiter en utilisant la forme quadratique. Si Γ est un cercle imaginaire, on a $q(\Gamma) < 0$. Comme q est de signature $(3, 1)$, le théorème de Sylvester montre que Γ^\perp est de signature $(3, 0)$, donc défini positif, et il n'y a donc pas d'isotropes dans Γ^\perp . C'est bien conforme à ce que l'on attend dans l'interprétation 3.1.7.

3) Utilisons de nouveau les coordonnées. Dire que $D = (0, b, c, d)$ et $D' = (0, b', c', d')$ sont orthogonales c'est dire qu'on a $\varphi(D, D') = bb' + cc' = 0$. Mais, dans l'interprétation 3.1.7, les vecteurs (b, c) et (b', c') sont des vecteurs normaux de D et D' et ils sont donc orthogonaux au sens du produit scalaire de \mathbf{R}^2 , ce qui signifie que les droites sont orthogonales.

Pour un cercle réel $C = (a, b, c, d)$ on peut supposer $a = 1$. Dire que la droite $D' = (0, b', c', d')$ est orthogonale à C s'écrit alors $-2b'b - 2c'c + d' = 0$, ce qui signifie que le centre (b, c) de C est sur D' : c'est bien la définition de l'orthogonalité, voir 1.1.13.

Si on a deux cercles réels, C, C' , avec $a = a' = 1$, on a vu en 3.1.9 qu'on a $-2\varphi(C, C') = \Delta^2 - R^2 - R'^2$ où Δ est la distance des centres. Là encore, dans la traduction 3.1.7, on retrouve la définition usuelle de l'orthogonalité, cf. 1.1.13.

4) Pour voir que deux cercles imaginaires ne peuvent être orthogonaux, le mieux est d'utiliser de nouveau le théorème de Sylvester : on aurait dans E un plan défini négatif, ce qui contredirait le fait que la signature est $(3, 1)$.

10. Il y a deux façons de faire les choses que nous allons utiliser selon les circonstances, voire selon notre humeur du moment : l'une consiste à calculer avec les coordonnées, l'autre à utiliser la théorie des formes quadratiques. Le lecteur appréciera la souplesse que confère cette inconstance, mais s'il préfère la fidélité, il pourra toujours s'essayer à utiliser l'autre voie à titre d'exercice.

Le calcul pour l'orthogonalité d'une droite ou un cercle avec un cercle imaginaire est identique au cas réel.

Montrons la propriété relative à K . Appelons o et ω (resp. r et R) les centres des cercles K et C respectivement (resp. leurs rayons).

Comme on a $q(\Gamma) = -r^2$, la condition d'orthogonalité s'écrit $R^2 = \Delta^2 + r^2 = o\omega^2 + r^2$. Si l'on a $o = \omega$ on en déduit $R = r$, donc $C = K$. Pour les cercles de centres $\omega \neq o$, on a $\Delta > 0$, donc $r < R$, et $R - r < \Delta < R + r$, de sorte que les cercles C et K sont sécants¹¹ en a et b .

Mais alors, dans le triangle $a\omega o$ on a $\omega a^2 = R^2 = \Delta^2 + r^2 = o\omega^2 + oa^2$, ce qui montre que le triangle est rectangle en o . Le même argument appliqué avec b montre que a, o, b sont alignés et $[ab]$ est bien un diamètre de K .

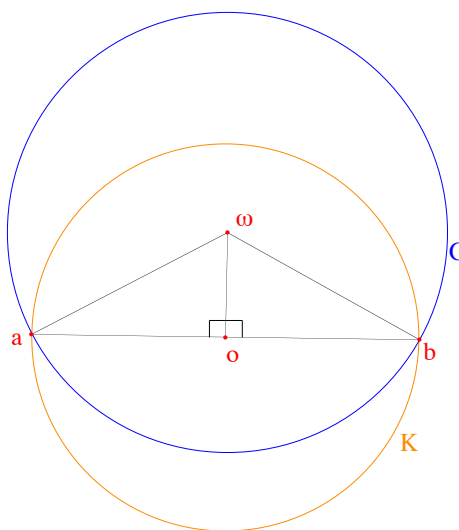


FIGURE 3.1 – L'orthogonalité pour le cas imaginaire

Faisons le bilan de ce qui précède dans le cas des points :

3.1.15 *Scolie.*

Les éléments de \mathcal{P} , c'est-à-dire les isotropes de \mathcal{E} , correspondent aux points de $\widehat{\mathcal{C}}$.

Si m est dans \mathcal{P} et C dans \mathcal{E} , m **appartient** à C au sens de $\widehat{\mathcal{C}}$

si et seulement si m est **orthogonal** à C au sens de \mathcal{E} .

11. On peut aussi noter que la formule $-2\varphi(C, K) = \Delta^2 - q(C) - q(K)$ donne $\varphi(C, K) = r^2$, ce qui montre que l'invariant anallagmatique $I^*(C, K)$, voir 3.2.6, vaut $r^2/R^2 < 1$ et on a la même conclusion.

3.2 Pinceaux de cercles-droites

3.2.1 Positions relatives de deux cercles-droites

Cette fois, le dictionnaire va en sens inverse. Nous cherchons à traduire en termes de la forme quadratique q les positions relatives des couples de cercles-droites au sens usuel.

3.2.1 Proposition-Définition. *Soient C_1, C_2 deux cercles-droites distincts que l'on voit à la fois comme éléments de \mathcal{E} et comme parties de \mathcal{P} . On dit qu'ils sont **sécants**¹², **tangents** ou **disjoints** s'ils le sont en tant que parties de \mathcal{P} , c'est-à-dire si leur intersection contient 2, 1 ou 0 éléments.*

En termes de \mathcal{E} il s'agit de compter le nombre de points m isotropes orthogonaux à C_1 et C_2 .

Pinceaux

Nous aurons besoin, notamment pour la démonstration de 3.3.3, de la notion de pinceau, que nous avons déjà vue en 1.1.16, mais dont nous donnons une nouvelle approche en termes de sous-espaces de \mathcal{E} :

3.2.2 Définition. *On appelle **pinceau** de cercles-droites une droite projective \mathcal{F} de $\mathcal{E} = \mathbf{P}(E)$, image d'un plan vectoriel F de E . Si C_1 et C_2 sont deux points distincts de \mathcal{E} , le pinceau défini par C_1 et C_2 est noté (C_1, C_2) . Si $\mathcal{F} = p(F)$ est un pinceau, son orthogonal est le pinceau $\mathcal{F}^\perp = p(F^\perp)$.*

*On dit que trois points C_1, C_2, C_3 de \mathcal{E} sont **en pinceau** si le sous-espace projectif (C_1, C_2, C_3) qu'ils engendrent est de dimension ≤ 1 .*

3.2.3 Remarques. 1) Le pinceau $\mathcal{F} = (C_1, C_2)$ est l'image du plan vectoriel F engendré par C_1 et C_2 , c'est-à-dire des éléments de la forme $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$. On retrouve bien la définition de 1.1.16.

2) On peut maintenant prouver le lemme 1.1.19 que nous avons admis au chapitre 1 : si C est orthogonal à C_1 et C_2 il est orthogonal à tous les cercles du pinceau (C_1, C_2) . Cela résulte de la formule $\varphi(C, \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2) = \lambda_1 \varphi(C, C_1) + \lambda_2 \varphi(C, C_2)$. La même formule appliquée à un point m montre aussi que la position relative de C_1 et C_2 ne dépend que du pinceau (C_1, C_2) et pas des cercles pris comme base du pinceau.

La proposition suivante est évidente avec la définition, mais importante :

3.2.4 Proposition. *Soient $C_1, C_2, C_3 \in E$. Leurs images dans \mathcal{E} sont en pinceau si et seulement si les C_i sont linéairement dépendants dans E .*

12. On notera que, comme les droites contiennent toutes le point ∞ , on retrouve le sens usuel de droites sécantes.

Rang, indice, invariant anallagmatique

On a vu que la position relative de deux droites-cercles est une propriété du pinceau engendré. On va maintenant caractériser cette position en termes de la forme quadratique q .

3.2.5 Proposition-Définition. *Soit $F \subset E$ un plan vectoriel. On note r_F le rang de la forme $q|_F$ et i_F son indice. On a $r_F = 2$ ou 1 et, si r_F est égal à 2 , $i_F = 0$ ou 1 .*

Le calcul des nombres r_F et i_F amène à introduire un invariant fondamental¹³ :

3.2.6 Proposition-Définition. *Soient A, B deux éléments non colinéaires de E et $F = (A, B)$ le plan vectoriel engendré. Si A, B sont non isotropes on définit leur **invariant anallagmatique** comme l'élément $I^*(A, B) = \frac{\varphi(A, B)^2}{q(A)q(B)}$. Il ne dépend que des images de A, B dans \mathcal{E} .*

1) *On a $r_F = 1$ si et seulement si $q(A)q(B) = \varphi(A, B)^2$. Si A et B sont non isotropes c'est encore équivalent à $I^*(A, B) = 1$.*

2) *On a $r_F = 2$ et $i_F = 0$ si et seulement si $q(A)q(B) > \varphi(A, B)^2$. Si A et B sont non isotropes c'est encore équivalent à $I^*(A, B) < 1$.*

3) *On a $r_F = 2$ et $i_F = 1$ si et seulement si $q(A)q(B) < \varphi(A, B)^2$. Si A et B sont non isotropes c'est encore équivalent à $I^*(A, B) > 1$.*

Démonstration. Comme E, q est de signature $(3, 1)$, il n'y a pas de plans totalement isotropes, les plans isotropes sont positifs et les plans non isotropes contenus dans E peuvent être de signature $(2, 0)$ ou $(1, 1)$ seulement. La distinction entre les trois cas se fait selon la nullité du discriminant de la forme $q|_F$ et selon son signe, or ce discriminant est égal à $q(A)q(B) - \varphi(A, B)^2$.

3.2.7 Remarque. Si C_1 et C_2 sont deux cercles normalisés par $a = 1$, de rayons R_1 et R_2 et de distance des centres Δ , on a, en vertu de 3.1.9, $I^*(C_1, C_2) = \frac{(\Delta^2 - R_1^2 - R_2^2)^2}{4R_1^2R_2^2}$. Pour une interprétation géométrique, voir 4.2.8.

On a maintenant la caractérisation attendue :

13. Nous avons rencontré dans la partie IV un invariant noté I et défini par la même formule et nous avons vu que sa donnée était essentiellement équivalente à celle de la distance dans les plans hyperbolique et elliptique. Nous verrons au chapitre 5 que ces invariants sont essentiellement les mêmes.

3.2.8 Proposition. Soient C_1, C_2 deux cercles-droites distincts et $F = (C_1, C_2)$ le plan vectoriel engendré. Alors, C_1 et C_2 sont sécants (resp. tangents, resp. disjoints) si et seulement si on a $r_F = 2$ et $i_F = 0$ (resp. $r_F = 1$, resp. $r_F = 2$ et $i_F = 1$) ou encore si l'invariant anallagmatique $I^*(C_1, C_2)$ est < 1 (resp. $= 1$, resp. > 1). En particulier, les cercles-droites C_1 et C_2 sont tangents si et seulement si on a la relation $\varphi(C_1, C_2)^2 - q(C_1)q(C_2) = 0$.

Démonstration. En effet, le nombre de points d'intersection de C_1 et C_2 n'est autre que le nombre de droites isotropes de l'orthogonal F^\perp .

3.2.9 Remarque. Les conditions données ci-dessus en termes de q et φ se traduisent de manière élémentaire : si on suppose que les C_i sont des cercles et qu'on les normalise par $a = 1$, la condition $\varphi(C_1, C_2)^2 < q(C_1)q(C_2)$ devient, en utilisant la distance des centres Δ et 3.1.9, $(\Delta^2 - R_1^2 - R_2^2)^2 < 4R_1^2R_2^2$ ou encore :

$$(\Delta^2 - (R_1 + R_2)^2)(\Delta^2 - (R_1 - R_2)^2) < 0$$

c'est-à-dire $|R_1 - R_2| < \Delta < R_1 + R_2$, qui est la condition usuelle pour les cercles sécants.

Pour l'application de la caractérisation des cercles tangents au théorème de Feuerbach, voir l'exercice 3.4.3 ou le paragraphe 7.3.3.

Discussion sur le signe de φ

Nous avons donné ci-dessus des conditions pour que deux cercles soient sécants, tangents ou disjoints. En géométrie euclidienne, on sait bien que ces conditions peuvent être raffinées, notamment pour les cercles disjoints qui peuvent être extérieurs ou intérieurs (i.e. l'un intérieur à l'autre). Ces conditions n'ont pas de sens en géométrie anallagmatique, comme nous allons le voir. Commençons par discuter le signe de φ :

3.2.10 Proposition. Soient C, C' deux cercles **normalisés** par $a = 1$.

1) On suppose C, C' sécants. On note o, o' leurs centres et m l'un de leurs points d'intersection. Alors $\varphi(C, C')$ est positif (resp. nul, resp. négatif) si et seulement si l'angle $\widehat{omo'}$ est aigu (resp. droit, resp. obtus).

2) On suppose C, C' tangents. Alors $\varphi(C, C')$ est positif (resp. négatif) si et seulement s'ils sont tangents intérieurement (resp. extérieurement).

3) On suppose C, C' disjoints. Alors $\varphi(C, C')$ est positif (resp. négatif) si et seulement s'ils sont intérieurs (resp. extérieurs).

Démonstration. C'est clair avec les formules $2\varphi(C, C') = R^2 + R'^2 - \Delta^2$ et, dans le cas sécant, $\varphi(C, C') = RR' \cos \widehat{omo'}$, voir 3.1.9.

3.2.11 Remarque. Attention, cette proposition requiert la normalisation par $a = 1$ qui ne se conserve pas par une transformation du groupe circulaire. On ne peut donc pas espérer que la position de deux cercles (par exemple intérieurs ou extérieurs) se conserve par une telle transformation. Précisément, considérons l'inversion¹⁴ de cercle C . Déjà, on a vu en 1.2.5 qu'elle échange les composantes connexes du complémentaire de C , transformant ainsi un cercle C' intérieur à C en un cercle C'' de la composante non bornée. Plus précisément, les cercles C, C'' peuvent être soit extérieurs, soit tels que C soit intérieur à C'' , voir ci-dessous 3.2.12 et exercice 3.4.6. On voit ainsi que le signe "normalisé" de $\varphi(C, C')$ n'est pas conservé. Voir cependant 5.1.25.

3.2.12 Proposition. *Soit u une transformation circulaire et soit a son pôle c'est-à-dire l'unique point tel que $f(a) = \infty$. Soit C' un cercle ne contenant pas a et $C'' = u(C')$ son image. L'extérieur de C' s'envoie sur l'extérieur de C'' (resp. sur l'intérieur) si et seulement si a est extérieur à C' (resp. intérieur).*

3.2.2 Classification des pincesaux

On se propose maintenant de classifier les pincesaux en tenant compte essentiellement de la forme quadratique q , qui décrit l'incidence, mais aussi de l'hyperplan \mathcal{D} . Nous verrons au chapitre suivant que les types de cette classification correspondent bien aux orbites dans l'action du groupe circulaire sur les pincesaux.

3.2.13 Définition. *Soit $\mathcal{F} = p(F)$ un pinceau. On dit que \mathcal{F} est :*

- 1) un pinceau **dégénéré** si on a $r_F = 1$,
- 2) un pinceau à **points-base** si on a $r_F = 2$ et $i_F = 0$,
- 3) un pinceau à **points de Poncelet** si on a $r_F = 2$ et $i_F = 1$.

3.2.14 Proposition. *Si \mathcal{F} est dégénéré (resp. à points-base, resp. à points de Poncelet), son orthogonal \mathcal{F}^\perp est dégénéré (resp. à points de Poncelet, resp. à points-base).*

Démonstration. Il suffit de traduire algébriquement les propriétés. Dire que \mathcal{F} est dégénéré c'est dire que le sous-espace F est isotrope, c'est-à-dire qu'on a $F \cap F^\perp \neq (0)$, propriété évidemment partagée par F^\perp . Dire que \mathcal{F} est à points-base c'est dire que F est non isotrope et de signature $(2, 0)$ (la signature totale étant $(3, 1)$, le cas $(0, 2)$ est impossible). Comme on a $E =$

14. Dont nous verrons en 3.3.6 qu'elle est l'image d'une réflexion de E , qui conserve q et φ .

$F \perp F^\perp$, l'orthogonal est de signature $(1, 1)$ en vertu de Sylvester, donc d'indice 1.

Pinceaux et cercles points

Si $\mathcal{F} = p(F)$ est un pinceau, la présence d'isotropes dans F correspond à la présence de cercles-points dans le pinceau :

3.2.15 Proposition. *Soit $\mathcal{F} = p(F)$ un pinceau.*

- 1) *Si \mathcal{F} est dégénéré il contient un unique (cercle) point m qui est contenu¹⁵ dans tous les éléments de \mathcal{F} .*
- 2) *Si \mathcal{F} est à points de Poncelet, il contient deux (cercles) points distincts m_1 et m_2 et on a $\mathcal{F} = (m_1, m_2)$. Ces points sont les **points de Poncelet** de \mathcal{F} . Les éléments de \mathcal{F} sont disjoints dans $\widehat{\mathbf{C}}$.*
- 3) *Si \mathcal{F} est à points-base, il ne contient aucun cercle point, son orthogonal \mathcal{F}^\perp en contient deux : m_1 et m_2 et \mathcal{F} est l'ensemble des éléments de \mathcal{E} qui contiennent (au sens de l'incidence usuelle) les points m_1 et m_2 . Ces points sont les **points-base** de \mathcal{F} .*

Démonstration. 1) Si \mathcal{F} est dégénéré, F est un plan vectoriel muni de la forme $q|_F$ de rang 1. Si on prend une base de F dont le premier vecteur est dans le noyau de $q|_F$, et si (x, y) sont les coordonnées dans cette base, la forme q est équivalente à λx^2 et la seule droite isotrope est $x = 0$.

2) Si \mathcal{F} est à points de Poncelet, le plan F est hyperbolique et la forme q en restriction à F est équivalente à xy , avec les droites $x = 0$ et $y = 0$ comme isotropes (voir [Per96] Ch. VIII).

3) Enfin, si \mathcal{F} est à points-base, il provient d'un plan F anisotrope, de sorte que \mathcal{F} ne contient aucun cercle point.

Les assertions sur l'incidence des éléments de \mathcal{F} dans $\widehat{\mathbf{C}}$ sont des traductions des propriétés algébriques : dire que deux éléments de \mathcal{F} ont un point m en commun dans $\widehat{\mathbf{C}}$, signifie qu'il existe m isotrope orthogonal à ces deux éléments, donc à \mathcal{F} , ou encore que \mathcal{F}^\perp contient un isotrope.

Description en termes de cercles et droites

Dans ce paragraphe nous prenons en compte, non seulement la position du pinceau vis à vis de la forme quadratique q , mais aussi par rapport à l'hyperplan \mathcal{D} .

15. Au sens de l'incidence usuelle ou de l'orthogonalité dans \mathcal{E} .

3.2.16 Proposition. Soit $\mathcal{F} = p(F)$ un pinceau dégénéré et soit m l'unique point appartenant à \mathcal{F} .

1) Si m est le point ∞ , les éléments de \mathcal{F} sont des droites. Si D est un élément de \mathcal{F} on a $\mathcal{F} = (\infty, D)$ et \mathcal{F} est le pinceau des droites parallèles à D .

2) Si m n'est pas le point à l'infini, le pinceau contient une unique droite D , qui passe par m et les autres éléments de \mathcal{F} sont les cercles tangents à D en m .

Démonstration. 1) Que les éléments de \mathcal{F} soient des droites résulte de 3.1.14. Les droites en question sont parallèles car leur unique point d'intersection (c'est-à-dire l'unique isotrope qui leur est orthogonal) est le point ∞ .

2) Deux éléments distincts de \mathcal{F} n'ont que m en commun. Cela exclut que \mathcal{F} contienne deux droites (car elles auraient aussi ∞ en commun). Il en contient une car, dans $\mathbf{P}(E)$, espace projectif de dimension 3, le plan projectif \mathcal{D} et la droite \mathcal{F} se coupent en un point. Enfin, il résulte de 1.1.6 que les éléments de \mathcal{F} sont tangents.

3.2.17 Proposition. Soit $\mathcal{F} = p(F)$ un pinceau à points-base m_1, m_2 .

1) Si l'un des points, disons m_1 , est ∞ , le pinceau \mathcal{F} est l'ensemble des droites passant par m_2 .

2) Si les points m_i ne sont pas à l'infini, le pinceau \mathcal{F} est formé des cercles passant par m_1 et m_2 et de la droite (m_1m_2) .

Démonstration. C'est essentiellement 3.1.15.

3.2.18 Proposition. Soit $\mathcal{F} = p(F)$ un pinceau à points de Poncelet m_1, m_2 .

1) Si l'un des points, disons m_1 est ∞ , le pinceau \mathcal{F} est l'ensemble des cercles concentriques de centre m_2 .

2) Si les points m_i ne sont pas à l'infini, le pinceau \mathcal{F} est formé des cercles orthogonaux aux cercles passant par m_1 et m_2 et de la médiatrice de $[m_1m_2]$.

Démonstration. 1) Le pinceau \mathcal{F}^\perp est à points-base ∞, m_2 et c'est donc le pinceau des droites passant par m_2 . Le pinceau \mathcal{F} est formé des cercles orthogonaux à toutes ces droites, donc les admettant pour diamètres. C'est donc le pinceau des cercles de centre m_2 .

2) Le pinceau \mathcal{F}^\perp est formé des cercles passant par m_1, m_2 et de la droite (m_1m_2) . Le pinceau \mathcal{F} est donc formé des cercles-droites orthogonaux à tous ceux de \mathcal{F}^\perp . Il contient l'unique droite qui passe par les centres de tous les cercles de \mathcal{F}^\perp , c'est-à-dire la médiatrice de $[m_1m_2]$.

3.3 Le groupe circulaire

3.3.1 Définition et énoncé du théorème fondamental

Rappelons (voir Partie III, ??) que le groupe $O(q)$ est le groupe des isométries relatives à q (c'est-à-dire des automorphismes de E qui conservent la forme q), $O^+(q)$ le sous-groupe des isométries positives (de déterminant 1) et $PO(q)$ le quotient $O(q)/\{\text{Id}, -\text{Id}\}$, image de $O(q)$ dans le groupe des homographies de $\mathcal{E} = \mathbf{P}(E)$. Comme on l'a noté en 3.1.2, ce groupe est le groupe naturel¹⁶ associé à la donnée de \mathcal{E} et q :

3.3.1 Définition. *Le groupe $PO(q)$ (resp. $PO^+(q)$) est appelé **groupe circulaire** (resp. **groupe circulaire direct**).*

3.3.2 Remarque. Le groupe $O(q)$ opère sur E en conservant les formes q et φ . Sur l'espace projectif \mathcal{E} , ces formes n'ont plus de sens géométrique en général, toutefois le groupe circulaire opère sur \mathcal{E} en conservant la nullité de q et φ et le signe de q . On en déduit qu'il laisse invariants :

- l'ensemble $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{D}^*$ des cercles-droites qui vérifient $q > 0$,
- l'ensemble \mathcal{C}^- des cercles imaginaires qui vérifient $q < 0$,
- l'ensemble \mathcal{P} des isotropes de \mathcal{E} qui vérifient $q = 0$.

De plus, comme les éléments de $PO(q)$ conservent la nullité de φ , ils conservent l'orthogonalité entre les éléments ci-dessus. En particulier, il conserve la relation d'incidence entre les points $m \in \mathcal{P}$ et les cercles-droites (voir 3.1.14).

L'opération du groupe $PO(q)$ sur le plan anallagmatique $\mathcal{P} \simeq \widehat{\mathbf{C}}$ mène au théorème fondamental suivant :

3.3.3 Théorème. *L'opération de $PO(q)$ sur \mathcal{P} induit un isomorphisme ψ de $PO(q)$ sur le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ des homographies et anti-homographies de la droite projective complexe. On en déduit des isomorphismes :*

$$PO^+(q) \simeq \Omega(q) \simeq PGL(2, \mathbf{C}) \simeq PSL(2, \mathbf{C}).$$

(Rappelons, voir par exemple [Per96] Ch. VIII, qu'on note $\Omega(q)$ le groupe des commutateurs de $O(q)$.)

16. On pourrait aussi considérer le groupe $PGO(q)$ image du groupe $GO(q)$ des similitudes relatives à q , *a priori* plus grand, mais, dans le cas présent, $GO(q)$ est produit direct du groupe des isométries et du groupe des homothéties (voir [Per96] Ch. V Ex. 5.3), de sorte qu'on a $PO(q) = PGO(q)$.

3.3.2 Démonstration du théorème fondamental

L'opération de $PO(q)$ sur \mathcal{P} induit un homomorphisme de groupes $\psi : PO(q) \rightarrow \mathfrak{S}(\mathcal{P})$ à valeurs dans le groupe des bijections de \mathcal{P} qui associe à u sa restriction à \mathcal{P} .

Injectivité de ψ

Soit $u \in PO(q)$ tel que $u|_{\mathcal{P}} = \text{Id}_{\mathcal{P}}$. Il s'agit de montrer que u est aussi l'identité sur $\mathcal{E} - \mathcal{P}$. Si C est un cercle (réel) ou une droite il est transformé en un cercle ou une droite en vertu de 3.3.2. Mais C est déterminé par trois de ses points a, b, c , qui sont dans \mathcal{P} , donc fixes par u et comme u conserve l'incidence (puisque l'incidence n'est rien d'autre que l'orthogonalité), a, b, c sont dans $u(C)$ qui est donc égal à C .

Il reste le cas où Γ est un cercle imaginaire. On peut le traiter en notant que Γ^\perp est contenu dans $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{D}^*$, donc fixé par u , donc Γ aussi. Voici un argument un peu plus géométrique. Soit ω le centre de Γ . On sait que les droites orthogonales à Γ sont celles qui passent par ω . Par conservation de l'orthogonalité et des droites, on voit que $u(\Gamma)$ est orthogonal à toutes ces droites, donc a pour centre ω . Par ailleurs, en vertu de 3.1.14.4, il y a un unique cercle réel K de centre ω orthogonal à Γ (l'ombre de Γ , dont le carré du rayon est $-q(\Gamma)$). Comme il est fixe par u et que u conserve l'orthogonalité, on voit que $u(\Gamma)$ a aussi pour "carré du rayon" $q(\Gamma)$. Il est donc égal à Γ .

Les involutions

Rappelons que, pour $a \in E$ non isotrope, on note τ_a la réflexion d'hyperplan a^\perp . C'est un élément de $O(q)$ et on a la formule, pour $x \in E$:

$$\tau_a(x) = x - 2 \frac{\varphi(a, x)}{q(a)} a.$$

Le ressort de la preuve de 3.3.3 est de montrer que les images des réflexions de $PO(q)$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{P})$ sont les inversions et des symétries axiales¹⁷. On commence par quelques précisions sur les inversions :

3.3.4 Définition. Soit i une inversion de pôle ω et de puissance négative $-R^2$, $R > 0$. Soit Γ le cercle imaginaire¹⁸ de centre ω qui vérifie $q(\Gamma) = -R^2$. On dit que i est l'inversion de cercle Γ et on la note i_Γ .

17. Attention, le mot réflexion désigne *a priori* deux types d'objets, d'une part les réflexions dans l'espace E de dimension 4 muni de la forme q et d'autre part les réflexions de l'espace euclidien $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$ au sens ordinaire. Pour éviter les confusions, on parlera donc de *symétries axiales* à propos de ces dernières.

18. On suppose son équation normalisée par $a = 1$.

On a alors le résultat suivant :

3.3.5 Proposition. *On désigne par C un cercle (réel ou imaginaire) ou une droite et par i_C l'inversion ou la symétrie axiale associée. Soit C' un cercle réel ou une droite orthogonal à C . Alors C' est invariant par i_C .*

Démonstration. Le cas où C est une droite est immédiat et celui où C est un cercle réel a été vu en 1.2.6. Il reste le cas où C est un cercle imaginaire, que nous noterons plutôt Γ . On a vu en 3.1.14.4 que la condition d'orthogonalité se traduit par $\Delta^2 - q(\Gamma) - q(C') = 0$, soit $\Delta^2 - q(C') = q(\Gamma)$, où Δ désigne la distance des centres ω et ω' de Γ et C' . On voit que la puissance de ω par rapport à C' est égale à la puissance $q(\Gamma)$ de l'inversion i_Γ et cela implique que C' est invariant, toujours en vertu de 1.2.6.

On peut alors montrer le lemme suivant :

3.3.6 Lemme. 1) *Soit $C \in \mathcal{C}^+$ un cercle de centre ω et de rayon $R > 0$. L'image par ψ de la réflexion τ_C est l'inversion de pôle ω et de puissance $q(C) = R^2$ (c'est-à-dire l'inversion i_C de cercle C).*

2) *Soit $D \in \mathcal{D}^*$ une droite. L'image par ψ de la réflexion τ_D de $PO(q)$ est la symétrie axiale (euclidienne) d'axe D .*

3) *Soit $\Gamma \in \mathcal{C}^-$ un cercle imaginaire de centre ω . L'image par ψ de la réflexion τ_Γ est l'inversion de pôle ω et de puissance $q(\Gamma)$ (c'est-à-dire l'inversion i_Γ de cercle imaginaire Γ).*

Démonstration. Pour une preuve par le calcul, voir exercice 3.4.5. On donne ici une démonstration plus géométrique. On traite les trois cas à la fois en notant toujours C le cercle (réel ou imaginaire) ou la droite qui définit la réflexion et i_C l'inversion ou la symétrie axiale définie par C .

Comme on l'a rappelé, si m est un point de \mathcal{P} on a :

$$(*) \quad \tau_C(m) = m - 2 \frac{\varphi(m, C)}{q(C)} C.$$

Tout l'intérêt de l'usage de l'espace \mathcal{E} , qui met au même niveau les points et les cercles, apparaît dans cette formule.

On étudie d'abord les points fixes de τ_C sur \mathcal{P} . La formule (*) ci-dessus montre que si m est sur C (c'est-à-dire si l'on a $\varphi(m, C) = 0$), le point m est fixe. Inversement, dire que m est fixe dans $\mathbf{P}(E)$, c'est dire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}^*$ tel que $\tau_C(m) = \lambda m$, ce qui conduit à la formule $(1 - \lambda)m = 2 \frac{\varphi(m, C)}{q(C)} C$.

Si $\varphi(m, C)$ est non nul, C est colinéaire à m , donc isotrope, et c'est absurde. On voit que les points de \mathcal{P} fixes par τ_C sont exactement ceux de C et ce sont bien les mêmes que ceux de i_C .

Soient maintenant $m, n \in \mathcal{P}$, non situés sur C , tels que $\tau_C(m) = n$. Les points m et n sont donc distincts. Comme m n'est pas sur C , $\varphi(m, C)$ est non nul, et la formule (*) montre que C est combinaison linéaire de m et n . Autrement dit, C est dans le pinceau à points de Poncelet $\mathcal{F} = (m, n)$. En vertu de 3.2.14, il en résulte que le pinceau des cercles orthogonaux à \mathcal{F} est le pinceau des cercles-droites passant par m et n et ces cercles sont en particulier orthogonaux à C .

Considérons maintenant l'inversion i_C . En vertu de 3.3.5, elle laisse les cercles C' orthogonaux à C invariants. Si C' et C'' sont deux cercles distincts passant par m et n , ils sont dans \mathcal{F}^\perp , donc orthogonaux à C et invariants par i_C . Mais on a $C' \cap C'' = \{m, n\}$, de sorte que la paire $\{m, n\}$ est invariante par i_C . Comme m n'est pas sur C , on a $i_C(m) \neq m$, donc $i_C(m) = n = \tau_C(m)$. On a bien montré que i_C et la restriction de τ_C à \mathcal{P} sont égales.

3.3.7 Remarque. Un mot sur les notations. Comme la réflexion τ_C et l'inversion i_C sont égales sur \mathcal{P} , nous utiliserons souvent les deux notations de manière indifférente. Toutefois il sera important d'utiliser la notation τ_C quand on parlera de la transformation de \mathcal{E} et, plus encore, de E .

Conclusion

On sait que les réflexions engendrent $O(q)$ (voir [Per96] Ch. VIII ou exercice 3.4.4 ci-dessous), de sorte que l'image de ψ est le groupe engendré par les inversions et les réflexions de $\widehat{\mathbf{C}}$ et on a vu en 2.3.4 que ce groupe est égal à $PGL(2, \mathbf{C})$. On a donc l'isomorphisme annoncé. Pour une description de ψ^{-1} , voir exercice 3.4.7.

Le groupe circulaire direct

Montrons d'abord que l'image de $PO^+(q)$ dans $PGL(2, \mathbf{C})$ n'est autre que $PGL(2, \mathbf{C})$. On sait que $O^+(q)$ est engendré par les produits pairs de réflexions. Son image est donc engendrée par les produits pairs d'inversions ou de symétries et c'est $PGL(2, \mathbf{C})$ en vertu de 2.3.4.

Le fait que $PGL(2, \mathbf{C})$ soit isomorphe à $PSL(2, \mathbf{C})$ vient de ce que tout nombre complexe est un carré. Si on a $u \in GL(2, \mathbf{C})$ il existe donc $\lambda \in \mathbf{C}^*$ tel que $\det(\lambda u) = \lambda^2 \det u = 1$, donc $\lambda u \in SL(2, \mathbf{C})$ et u et λu sont égaux dans PGL .

Enfin, l'isomorphisme de $PO^+(q)$ et de $\Omega(q)$ résulte de deux faits :

- $\Omega(q)$ est d'indice 2 dans $O^+(q)$ (c'est une affaire de norme spinorielle, voir [Per96] Ch. VIII Th. 9.1),
- $-\text{Id}$ est dans $O^+(q)$ mais pas dans $\Omega(q)$ (c'est le fait que le discriminant de q n'est pas un carré, voir [Per96] Ch. VIII Th. 9.2).

3.3.3 Quelques conséquences algébriques

Cercles invariants

Avec l'interprétation de l'inversion i_C de cercle C comme la réflexion τ_C de E , et l'expression analytique de τ_C vue ci-dessus, on retrouve le fait que les cercles stables par i_C sont C lui-même et les cercles orthogonaux à C .

Conjugaison des involutions

L'interprétation des inversions-symétries comme des réflexions de \mathcal{E} redonne aussitôt le résultat de 2.3.2. En effet, si C est un élément non isotrope de E (droite, cercle réel ou imaginaire), et si g est dans $PO(q)$, le principe de conjugaison montre que $g\tau_Cg^{-1}$ est la réflexion $\tau_{g(C)}$ et le lemme 3.3.6 conclut.

Cartan-Dieudonné

Le théorème de Cartan-Dieudonné pour $PGL(2, \mathbf{C})$, voir 2.3.4, est une conséquence du théorème du même nom pour $O(q)$ (voir [Per96] Ch. VIII).

Produits de deux inversions-symétries

Le résultat suivant précise les produits de deux inversions-symétries :

3.3.8 Proposition. *Soient C_1, C_2 deux éléments non isotropes de \mathcal{E} (cercles, droites ou cercles imaginaires), distincts, $\tau_i := \tau_{C_i}$ les réflexions associées et σ le produit $\tau_1\tau_2$. On note \mathcal{F} le pinceau (C_1, C_2) .*

1) *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- i) σ est une involution,*
- ii) τ_1 et τ_2 commutent,*
- iii) C_i est stable par τ_j avec $i \neq j$,*
- iv) les cercles C_1 et C_2 sont orthogonaux.*

2) *Dans tous les cas, la transformation σ induit une homographie de $\widehat{\mathbf{C}}$ distincte de l'identité dont les points fixes sont les cercles-points du pinceau \mathcal{F} ou du pinceau \mathcal{F}^\perp .*

Démonstration. 1) L'équivalence de *i)* et *ii)* est une propriété générale des involutions, le point *iii)* vient de la formule de conjugaison : $\tau_1\tau_{C_2}\tau_1 = \tau_{\tau_1(C_2)}$ et le point *iv)* résulte du premier point du présent paragraphe.

2) Il est clair que σ est dans $PGL(2, \mathbf{C})$. Comme les cercles sont distincts, elle n'est pas égale à l'identité, donc admet un ou deux points fixes dans $\widehat{\mathbf{C}}$. On sait que, si C est orthogonal à C_i on a $\tau_i(C) = C$. Cela montre que \mathcal{F}^\perp est

fixe par σ , donc que \mathcal{F} est stable par σ . Si les cercles C_i sont sécants en a, b , les cercles-points a, b sont dans \mathcal{F}^\perp et ce sont donc¹⁹ les points fixes de σ . Si les cercles sont disjoints (donc non orthogonaux), le pinceau \mathcal{F} est à points de Poncelet et les cercles-points a, b de \mathcal{F} sont fixés par σ ou échangés. Mais, dans ce dernier cas, σ serait une involution (voir Partie I ??) et c'est impossible par 1.iv. Enfin, si les cercles sont tangents, il est clair que le point de contact est fixe et facile de montrer que c'est le seul (par exemple en envoyant ce point à l'infini, on se ramène au cas de deux symétries euclidiennes d'axes parallèles, qui est une translation, donc ne fixe que ∞).

On retrouve ainsi le résultat de 1.2.6 :

3.3.9 Corollaire. *Soit i une inversion, m et m' deux points distincts inverses l'un de l'autre et C un cercle passant par m, m' . Alors C est invariant par i .*

Démonstration. On suppose que i est de cercle Γ et on considère $\sigma = i_C i_\Gamma$. Comme σ échange m et m' , c'est une involution, et on conclut par la proposition précédente.

Le résultat suivant sera utile au chapitre 5 :

3.3.10 Proposition. *Soit \mathcal{F} un pinceau non dégénéré et \mathcal{F}^\perp son orthogonal. Si C_1, C_2 (resp. D_1, D_2) sont deux cercles-droites de \mathcal{F} (resp. de \mathcal{F}^\perp) orthogonaux, on a l'égalité $\tau_{C_1}\tau_{C_2} = \tau_{D_1}\tau_{D_2}$ dans le quotient $PO(q)$.*

Démonstration. La famille C_1, C_2, D_1, D_2 définit une base orthogonale de E et on vérifie aussitôt sur les matrices l'égalité $\tau_{C_1}\tau_{C_2} = -\tau_{D_1}\tau_{D_2}$ dans $O(q)$.

3.4 Exercices

3.4.1 Généralités

3.4.1 Exercice. Soit E un espace vectoriel réel de dimension 4 muni d'une forme de Lorentz q et soit H un hyperplan de E . Montrer que la restriction de q à H est soit une forme définie positive, soit une forme de Lorentz $(2, 1)$, soit une forme de rang 2 positive.

3.4.2 Cercles imaginaires

3.4.2 Exercice. Soit Γ un cercle imaginaire d'ombre K .

1) Soit C un cercle-droite réel. Construire les points de Poncelet du pinceau (Γ, C) . (On construira un cercle orthogonal à Γ et C en prenant deux

19. C'est d'ailleurs évident directement.

points diamétralement opposés de K et leurs inverses par rapport à C .) Étudier le cas où C est orthogonal à Γ .

- 2) Même question pour deux cercles imaginaires donnés par leurs ombres.
- 3) Même question avec un cercle imaginaire et un point.

3.4.3 Le théorème de Feuerbach par le calcul

3.4.3 Exercice. ¶¶

Dans cet exercice on se propose de prouver le théorème de Feuerbach 1.4.1 par le calcul en utilisant 3.2.8. Voir aussi §7.3.3. On considère un triangle abc et il s'agit de montrer que le cercle d'Euler est tangent aux cercles inscrit et exinscrits. On voit les points a, b, c comme des points de \mathcal{P} et on pose $\alpha = \varphi(b, c)$, $\beta = \varphi(c, a)$ et $\gamma = \varphi(a, b)$.

1) Montrer que a, b, c, ∞ forment une base de E .

2) Montrer qu'on peut supposer qu'on a $a = (0, 0)$, $b = (1, 0)$ et $c = (u, v)$ dans \mathbf{R}^2 , soit $a = (1, 0, 0, 0)$, $b = (1, 1, 0, 1)$ et $c = (1, u, v, u^2 + v^2)$ dans \mathcal{E} . Calculer α, β, γ dans ce cas.

2) On note $A = (bc)$, $B = (ca)$, $C = (ab)$ les côtés du triangle. Montrer qu'on a, dans le cas général :

$$A = -2\alpha a + (\alpha + \beta - \gamma)b + (\alpha - \beta + \gamma)c + 2\alpha(\alpha - \beta - \gamma)\infty$$

et de même pour les autres par permutation circulaire. Calculer A, B, C dans le cas de 1). (Réponse : $A = (0, -v, u - 1, -2v)$, $B = (0, v, -u, 0)$ et $C = (0, 0, 1, 0)$.)

3) Soit $X = (x, y, z, t) \in E$. On pose $F_A(X) = \varphi(A, X)^2 - q(A)q(X)$ et on rappelle que $F_A(X) = 0$ est l'équation déterminant les cercles-droites tangents à A . Calculer $F_A(X)$, $F_B(X)$, $F_C(X)$ dans le cas de la question 1). (Réponses : $F_A = u^2xt - 2uxt + v^2xt + xt - u^2y^2 + 2uvxz - 2uvyz + 2uy^2 + v^2x^2 - 2v^2xy - v^2z^2 - 2vzx + 2vyz - y^2$, $F_B = v^2(xt - z^2) + u^2(xt - y^2) - 2uvyz$, $F_C = xt - y^2$.) On suppose v non nul (autrement dit inversible dans l'anneau). Montrer que l'idéal I engendré par F_A, F_B, F_C peut s'écrire :

$$I = (2uxz + vx^2 - 2vxy - 2xz + 2yz, v(xt - z^2) - 2uyz, xt - y^2).$$

Vérifier²⁰ que $V(I)$, vu dans l'espace projectif associé à l'anneau des polynômes en x, y, z, t, u, v , est de codimension 3 et de degré 18 et qu'il

20. Pour toute la fin de l'exercice, il est vivement conseillé d'utiliser un logiciel de calcul formel adapté, par exemple *Macaulay 2*. Même avec cela, les choses ne sont pas si faciles : en comparant à 1.4.1, on voit que la géométrie élémentaire ce n'est pas si mal !

contient le point ∞ quadruple, d'idéal $K = (x^2, xy, xz, yz, y^2 - xt, z^2 - xt)$. Montrer que, pour u, v fixés, $V(I)$ est de codimension 3 et de degré 8 et qu'il est réunion de $V(K)$ et des cercles inscrit et exinscrits dans abc .

4) Déterminer le cercle d'Euler dans le cas général, puis dans le cas de 1). (Réponse : $\Gamma = (2v, uv + \frac{v}{2}, \frac{v^2 - u^2 + u}{2}, uv)$.) En déduire l'équation $F_\Gamma(X)$ des cercles tangents à Γ .

5) Soit J l'idéal $I + (F_\Gamma)$ (il définit les cercles tangents à la fois aux côtés et au cercle d'Euler). Montrer que le transporteur²¹ de J dans I (c'est-à-dire l'ensemble des f tels que $fJ \subset I$) est l'idéal K . En déduire le théorème de Feuerbach.

3.4.4 Générateurs de $O(q)$

3.4.4 Exercice. Dans cet exercice, E est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'une forme quadratique q non dégénérée et on se propose de montrer que $O(q)$ est engendré par les réflexions. Soit $u \in O(q)$ et E_u l'espace vectoriel des $x \in E$ tels que $u(x) = x$.

1) On suppose que E_u est un hyperplan non isotrope. Montrer que u est la réflexion d'hyperplan E_u .

2) Soit $x \in E$ un vecteur non isotrope et posons $y = u(x)$. On suppose $x \neq y$.

a) Montrer que l'un des vecteurs $x + y$ ou $x - y$ est non isotrope.

b) En déduire qu'il existe une réflexion ou un produit de deux réflexions f tel que $f \circ u$ fixe x .

3) Conclure en raisonnant par récurrence descendante sur $\dim E_u$.

3.4.5 Exercice. On se propose de montrer par le calcul le résultat de 3.3.6.

1) Soit $C \in \mathcal{C}$ un cercle réel ou imaginaire, écrit sous la forme $C = (1, b, c, d)$. On note $\gamma = b + ic$ le centre de C que l'on voit comme un point de \mathbf{C} et on pose $R^2 = b^2 + c^2 - d$ (avec R réel ou imaginaire). On se propose de calculer l'image par ψ de la réflexion τ_C .

Soit m un point de \mathcal{P} écrit sous la forme $m = (1, x, y, x^2 + y^2)$ et identifié à $z = x + iy \in \mathbf{C}$ et soit $n = \tau_C(m)$ écrit sous la forme $n = (1, X, Y, X^2 + Y^2)$ et identifié à $Z = X + iY \in \mathbf{C}$. Montrer la formule : $Z - \gamma = \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{\gamma}}$ et en déduire que $\psi(\tau_C)$ est l'inversion de pôle γ et de puissance R^2 (on utilisera la formule $\tau_C(m) = m - 2\frac{\varphi(m, C)}{q(C)}C$).

²¹. On peut vérifier que $V(J)$ est de codimension 3 et de degré 14 sur $\mathbf{R}[x, y, z, t, u, v]$ et qu'il ne contient plus le point à l'infini.

2) Soit $D \in \mathcal{D}^*$ une droite, écrite sous la forme $D = (0, b, c, d)$. On pose $\gamma = b + ic$ et on reprend les notations précédentes pour z et Z . Montrer que l'image par ψ de la réflexion τ_D est donnée par la formule $Z = -\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\bar{z} + \frac{d}{\bar{\gamma}}$ et qu'il s'agit de la symétrie d'axe D .

3.4.6 Exercice. (Le signe de φ) On considère le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$ qui correspond au point $C = (1, 0, 0, -1)$ de \mathcal{E} et le cercle C' d'équation $x^2 + y^2 - 2bx + d = 0$ qui correspond à $C' = (1, b, 0, d)$.

1) Calculer $\varphi(C, C')$ et discuter la position des deux cercles avec 3.2.10.

2) Soit τ_C l'inversion de cercle C . Montrer qu'on a $C'' = \tau_C(C') = (d, b, 0, 1)$, soit en version normalisée $C''_n = (1, b/d, 0, 1/d)$. Montrer qu'on a $\varphi(C, C''_n) = -\frac{1}{d}\varphi(C, C')$ et montrer que le fait d'être intérieur ou extérieur n'est pas, en général, conservé par inversion. Discuter selon la position du centre de C par rapport à C' .

3.4.5 L'isomorphisme ψ^{-1}

3.4.7 Exercice. Dans cet exercice, on donne une autre preuve de l'isomorphisme de $PSL(2, \mathbf{C})$ et de $PO^+(q)$ en construisant une flèche en sens inverse.

Soit $m \in \mathbf{M}(2, \mathbf{C})$ une matrice hermitienne, i.e. vérifiant ${}^t m = \bar{m}$.

1) Montrer que m peut s'écrire sous la forme $m = \begin{pmatrix} t & w \\ \bar{w} & x \end{pmatrix}$ avec $x, t \in \mathbf{R}$ et $w = y + iz \in \mathbf{C}$. Montrer qu'on a $\det m = xt - y^2 - z^2$.

On note E l'espace des matrices hermitiennes, qui est donc isomorphe à \mathbf{R}^4 , \mathcal{E} l'espace projectif associé et q la forme quadratique $xt - y^2 - z^2$.

2) Montrer que le groupe $SL(2, \mathbf{C})$ opère sur E par la formule $s.m = sm{}^t\bar{s}$ et que cette opération conserve le déterminant, donc la forme q . Montrer qu'on obtient ainsi un isomorphisme de $PSL(2, \mathbf{C})$ sur $PO^+(q)$. (Voir au besoin [Per96] Ch. VIII §9, exercice 4.)

3) On note \mathcal{P} la partie de E formée des matrices de déterminant nul et $\hat{\mathcal{P}}$ son image dans \mathcal{E} . Montrer que les éléments de $\hat{\mathcal{P}}$ sont les images des matrices $\begin{pmatrix} w\bar{w} & w \\ \bar{w} & 1 \end{pmatrix}$, avec $w \in \mathbf{C}$, ainsi que de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On obtient ainsi une bijection de $\hat{\mathcal{P}}$ avec $\hat{\mathbf{C}}$. Avec cette identification, montrer que l'opération de $s = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbf{C})$ sur $\hat{\mathcal{P}}$ n'est autre que l'opération usuelle $w \mapsto \frac{aw + b}{cw + d}$.

Chapitre 4

L'espace des cercles et des droites : pincesaux, transitivité et applications géométriques

Nous poursuivons l'étude de l'espace \mathcal{E} des cercles et des droites. La description du groupe circulaire vue au chapitre précédent permet de revisiter certains résultats qui le concernent (conservation des cercles-droites, transitivité sur les objets et les pincesaux, avec l'omniprésence du théorème de Witt et l'intervention de l'invariant anallagmatique, etc.) et d'en découvrir d'autres (notamment l'existence et l'alignement des "cercles-milieux", autre version du concours des bissectrices, que nous reverrons au chapitre suivant). Nous allons ensuite appliquer ces résultats, et notamment ceux sur les pincesaux, pour traiter quelques problèmes classiques : la représentation conforme des couronnes, la construction des cercles tangents à trois cercles donnés, qui remonte à Apollonius et où se sont illustrés les plus grands géomètres du XIX-ième siècle (Poncelet, Gergonne) et enfin, l'alternative de Steiner, dont on a vu dans l'introduction qu'elle a joué un rôle important dans la genèse de la notion d'inversion.

4.1 Transitivité sur les objets

Beaucoup des résultats que nous énonçons ici ont déjà été rencontrés, mais le cadre de l'espace des cercles permet de les regarder autrement.

4.1.1 Conservation des droites-cercles

L'identification de l'incidence et de l'orthogonalité permet d'abord de retrouver le résultat de 2.2.8 :

4.1.1 Proposition. *Soit $f \in PGL(2, \mathbf{C})$. Alors f transforme un cercle ou une droite en un cercle ou une droite.*

Démonstration. En effet, par le théorème fondamental, f est l'image d'un élément u de $PO(q)$, qui opère sur $\mathcal{P} = \widehat{\mathbf{C}}$. Si C est un cercle ou une droite, on peut le voir comme un élément de $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{D}^*$ ou comme une partie de \mathcal{P} et l'image $u(C)$ correspond à l'image $f(C)$ dans \mathcal{P} par conservation de l'orthogonalité. Comme $u(C)$ est encore dans $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{D}^*$, cette image est bien un cercle ou une droite et on peut préciser sa nature selon l'image du point ∞ comme en 2.2.8.

4.1.2 Transitivité sur les objets

L'outil principal : le théorème de Witt

L'intérêt du cadre de l'espace \mathcal{E} et du groupe $PO(q)$ en ce qui concerne les résultats de transitivité est de permettre d'utiliser le théorème de Witt. Rappelons ce théorème (voir [Per96] Ch. VIII Th. 4.1 ou aussi *infra* Partie IV ??) :

4.1.2 Proposition. (Witt) *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) *Il existe $u \in O(q)$ tel que $u(F) = G$.*
- 2) *Il existe une isométrie (linéaire) $u_0 : F \rightarrow G$ relative aux formes $q|_F$ et $q|_G$.*
- 3) *Les formes $q|_F$ et $q|_G$ sont équivalentes.*

Transitivité sur les objets : le cas général

4.1.3 Théorème. *Soient C_1, C_2 deux éléments de \mathcal{E} de même nature vis à vis de q (c'est-à-dire vérifiant tous deux $q > 0$ ou $q = 0$ ou $q < 0$). Il existe un élément du groupe circulaire qui envoie C_1 sur C_2 .*

Démonstration. En effet, quitte à multiplier par un scalaire, on peut alors supposer $q(C_1) = q(C_2)$ et Witt conclut.

La transitivité redonne immédiatement les résultats de conjugaison de 2.3.2 et 2.6.9 :

4.1.4 Corollaire. *Deux inversions ou symétries i_C et $i_{C'}$ sont conjuguées si et seulement si leurs cercles sont tous deux réels ou tous deux imaginaires.*

Démonstration. C'est la formule $g\tau_Cg^{-1} = \tau_{g(C)}$.

Le cas des points

L'identification du groupe circulaire direct et du groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ de 3.3.3 donne non seulement la transitivité, mais la triple transitivité¹ sur les points :

4.1.5 Corollaire. *Le groupe circulaire direct est triplement transitif sur \mathcal{P} (ou sur $\widehat{\mathbf{C}}$).*

Démonstration. Cela résulte de Partie I, ??.

En termes d'inversions on peut préciser :

4.1.6 Corollaire. *Si m, n sont deux points distincts de \mathcal{P} , il existe une infinité d'inversions² qui envoient m sur n .*

Démonstration. On peut évidemment montrer ce résultat avec les outils des chapitres précédents. On peut aussi utiliser les réflexions de E . Notons encore m, n des représentants des points dans E . Pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, les éléments $m + \lambda n$ et $m - \lambda n$ sont tous deux non isotropes et ils sont orthogonaux, de sorte que la réflexion $\tau_{m-\lambda n}$ fixe $m + \lambda n$ et change $m - \lambda n$ en $\lambda n - m$, donc transforme m en λn (donc en n en projectif). On vérifie que, pour des λ distincts, les cercles-droites $m + \lambda n$ sont distincts.

4.1.7 Remarque. Comme il y a une infinité d'inversions qui échangent deux points, on peut imposer une condition supplémentaire, par exemple que le "cercle" d'inversion soit orthogonal à un élément donné (cercle-droite, cercle imaginaire, point). Nous étudierons cette situation au chapitre suivant et nous verrons qu'elle revient à étudier les médiatrices dans les trois géométries euclidienne, hyperbolique et elliptique.

4.1.3 Les cercles-milieux

Échange de cercles

Dans le cas des cercles-droites, le résultat suivant précise 4.1.3. Ce résultat a déjà été vu en 1.3.5, mais l'écriture des cercles d'inversion dans l'espace \mathcal{E}

1. Le résultat est beaucoup plus simple à prouver dans le cadre du groupe PGL que dans celui de $PO(q)$, voir exercice 4.4.1.

2. On englobe dans ce cas les symétries axiales.

va nous permettre de les voir autrement (voir 4.1.10) et d'en découvrir des propriétés nouvelles (voir 4.1.12).

4.1.8 Corollaire. *Soient C', C'' deux cercles-droites. Si C' et C'' sont sécants (resp. tangents, resp. disjoints) il existe deux inversions³ positives (resp. une inversion positive, resp. une inversion positive et une négative) qui transforment C' en C'' .*

Lorsqu'il y a deux telles inversions-symétries, leurs cercles (ou droites ou cercles imaginaires) sont donnés par les formules :

$$A^+ = \frac{C'}{\sqrt{q(C')}} + \frac{C''}{\sqrt{q(C'')}} \quad \text{et} \quad A^- = \frac{C'}{\sqrt{q(C')}} - \frac{C''}{\sqrt{q(C'')}}$$

et ils sont orthogonaux.

Démonstration. Notons encore C' et C'' des éléments de E qui relèvent les cercles-droites C' et C'' . Quitte à diviser par $\sqrt{q(C')}$ et $\sqrt{q(C'')}$, on peut supposer $q(C') = q(C'') > 0$. En vertu de 3.3.6, on cherche $A \in E$, non isotrope, tel que $\tau_A(C') = \epsilon C''$ avec $\epsilon \neq 0$. Comme on a supposé $q(C') = q(C'')$ on a nécessairement $\epsilon = \pm 1$. Si A est convenable, la formule donnant la réflexion s'écrit $\tau_A(C') = C' - 2\frac{\varphi(A, C')}{q(A)}A = \epsilon C''$. Cela nous conduit à prendre $A = C' - \epsilon C''$ et on a alors $q(A) = 2(q(C') - \epsilon\varphi(C', C''))$. Si cette quantité est non nulle, on vérifie que la formule précédente donne bien $\tau_A(C') = \epsilon C''$. De plus, lorsqu'on a deux solutions, elles sont bien orthogonales. Il reste donc à préciser les valeurs de $q(A)$. Rappelons que l'invariant anallagmatique de C' et C'' vaut $I^*(C', C'') = \frac{\varphi(C', C'')^2}{q(C')q(C'')}$ et qu'il est < 1 (resp. $= 1$, resp. > 1) selon que les cercles sont sécants, tangents ou disjoints. Si les cercles sont sécants on voit que les deux valeurs de ϵ donnent deux solutions pour A avec $q(A) > 0$ (car on a $|\varphi(C', C'')| < q(C')$), s'ils sont tangents, l'une des valeurs donne une solution positive et l'autre un isotrope, enfin s'ils sont disjoints le ϵ du signe opposé à $\varphi(C', C'')$ donne $q(A) > 0$ tandis que l'autre donne $q(A) < 0$.

4.1.9 Remarques. 1) Le signe dans A^+, A^- a une signification géométrique. En effet, on a vu en 1.3.5 que les pôles des inversions échangeant C' et C'' (c'est-à-dire les centres de A^+ et A^-) sont aussi les centres des homothéties échangeant ces cercles. Ce sont donc les barycentres des centres o' et o'' de C' et C'' affectés des coefficients R'' et R' , au signe près. Or, on voit aussitôt sur l'expression analytique que le centre de A^+ est barycentre à coefficients

3. Ou symétries axiales.

positifs de o' et o'' , c'est donc celui des deux pôles qui est situé entre o' et o'' , tandis que le centre de A^- est situé à l'extérieur de $[o'o'']$.

2) En particulier, dans le cas où les cercles sont disjoints, si l'on suppose C', C'' normalisés, l'inversion positive correspond à A^+ (resp. A^-) si les cercles sont intérieurs (resp. extérieurs).

Cercles-milieux ou bissectrices ?

Deux cercles C' et C'' étant donnés, il n'est pas si simple de donner un nom raisonnable aux cercles A^+ et A^- des inversions qui les échangent. Lorsque C' et C'' se coupent en a et b , les cercles A^+ et A^- passent par a et b et la conservation des angles par inversion montre que les angles (non orientés de droites) des tangentes à C' et A^+ et à A^+ et C'' sont égaux. On peut donc à bon droit considérer A^+ et A^- comme les bissectrices de C', C'' . En revanche, cette analogie disparaît lorsque C' et C'' sont disjoints. On peut aussi, par analogie avec la situation rencontrée notamment dans le chapitre 3 de la partie IV, considérer A^+ et A^- comme des "milieux" de C', C'' dans l'espace des cercles. Émule de Buridan, à moins que ce ne soit de Salomon, nous avons décidé de ne pas choisir :

4.1.10 Définition. Soient C', C'' deux cercles-droites. On appelle **cercle milieu ou bissectrice** de C', C'' un élément A non isotrope (cercle, droite ou cercle imaginaire) de \mathcal{E} vérifiant $i_A(C') = C''$ où i_A désigne l'inversion ou symétrie associée à A .

4.1.11 Remarque. Lorsque les cercles sont tangents on appellera milieu généralisé le point correspondant à celui des éléments A^+, A^- de 4.1.8 qui est isotrope.

4.1.4 Alignement des cercles-milieux ou concours des bissectrices ?

La proposition suivante, si elle n'est pas d'une importance cruciale, est néanmoins révélatrice de la puissance du point de vue adopté. À partir du moment où l'on dispose de trois objets et des symétries qui les échangent, on a un théorème de dépendance linéaire (donc de concours ou d'alignement) entre les supports de ces symétries. Comme toujours⁴ pour ces propriétés de concours (ou d'alignement) des droites (ou des points) remarquables du triangle c'est simplement la relation de Chasles, et elle est complètement gratuite dans le cadre adopté ici. Nous verrons au chapitre suivant que ce

4. Voir par exemple Partie IV, ??.

résultat n'est rien d'autre que le concours des bissectrices dans les diverses géométries métriques, mais il apparaît ici de manière totalement unifiée.

4.1.12 Proposition. Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles-droites et soient U^+ et U^- (resp. V^+ et V^- , resp. W^+ et W^-) les cercles milieux de C_2, C_3 (resp. C_3, C_1 , resp. C_1, C_2), éventuellement généralisés. Alors, les "cercles" U^-, V^-, W^- (resp. U^-, V^+, W^+ , resp. U^+, V^-, W^+ , resp. U^+, V^+, W^-) sont "alignés" dans \mathcal{E} , c'est-à-dire font partie d'un même pinceau.

Démonstration. On a par exemple $U^- = \frac{C_2}{\sqrt{q(C_2)}} - \frac{C_3}{\sqrt{q(C_3)}}$, $V^- = \frac{C_3}{\sqrt{q(C_3)}} - \frac{C_1}{\sqrt{q(C_1)}}$ et $W^- = \frac{C_1}{\sqrt{q(C_1)}} - \frac{C_2}{\sqrt{q(C_2)}}$, d'où $U^- + V^- + W^- = 0$ et la conclusion en vertu de 3.2.4.

4.1.13 Remarque. Cette proposition se décline dans de nombreuses positions qui apparaissent dans les trois figures ci-dessous. Un premier cas est celui de trois cercles sécants tels que les trois disques associés se rencontrent. Dans ce cas, les quatre pinceaux ci-dessus sont à points-base et le résultat se lit sur la figure : les cercles se coupent trois à trois en deux points, autrement dit : les bissectrices sont concourantes. Un second cas est celui de trois cercles sécants deux à deux, mais avec les disques correspondants sans intersection trois à trois. On a encore un des pinceaux qui est à points-base, mais les trois autres sont à points de Poncelet.

Enfin, si l'on part de trois cercles extérieurs, les cercles U^-, V^- et W^- sont réels, mais U^+, V^+ et W^+ sont imaginaires. Dans ce cas, le fait que U^-, V^+ et W^+ soient dans le même pinceau se traduit par l'existence d'un cercle réel C (en rose sur la figure) qui est orthogonal à ces trois cercles, ce qui, pour les cercles imaginaires, signifie qu'il coupe leurs ombres selon un diamètre (voir 3.1.14).

4.2 Transitivité sur les pinceaux

4.2.1 Transitivité et classification

Dans le cas des pinceaux, le théorème de Witt ramène la transitivité à l'équivalence des formes :

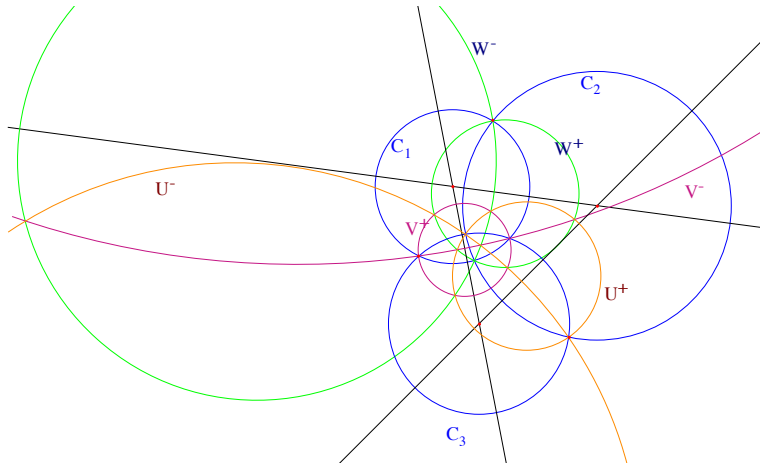


FIGURE 4.1 – Le premier cas des cercles milieux

4.2.1 Proposition. *Si $\mathcal{F} = p(F)$ et $\mathcal{G} = p(G)$ sont deux pinceaux de \mathcal{E} , images des plans vectoriels F et G de E , il existe $\bar{u} \in PO(q)$ tel que $\bar{u}(\mathcal{F}) = \mathcal{G}$ si et seulement si les formes $q|_F$ et $q|_G$ sont équivalentes.*

En vertu de Sylvester, l'équivalence est déterminée par le rang et l'indice :

4.2.2 Proposition. *On reprend les notations de 3.2.5. Si F et G sont deux plans vectoriels, les formes $q|_F$ et $q|_G$ sont équivalentes si et seulement si on a $r_F = r_G$ et $i_F = i_G$.*

Il en résulte que la classification des pinceaux donnée en 3.2.13 est aussi une description des orbites :

4.2.3 Corollaire. *Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux pinceaux. Ils sont équivalents sous $PO(q)$ si et seulement si ils sont de même nature (à points-base, point limite ou points de Poncelet).*

Un corollaire de ce résultat (essentiel dans les applications) est le suivant :

4.2.4 Corollaire. *Soient C_1, C_2 deux cercles-droites distincts et \mathcal{F} le pinceau engendré.*

1) *Si C_1 et C_2 sont sécants, il existe un élément du groupe circulaire qui les transforme en deux droites sécantes en a et qui envoie \mathcal{F} sur le pinceau à points-base a et ∞ .*

2) *Si C_1 et C_2 sont tangents, il existe un élément du groupe circulaire qui les transforme en deux droites parallèles et qui envoie \mathcal{F} sur un pinceau à point limite ∞ .*

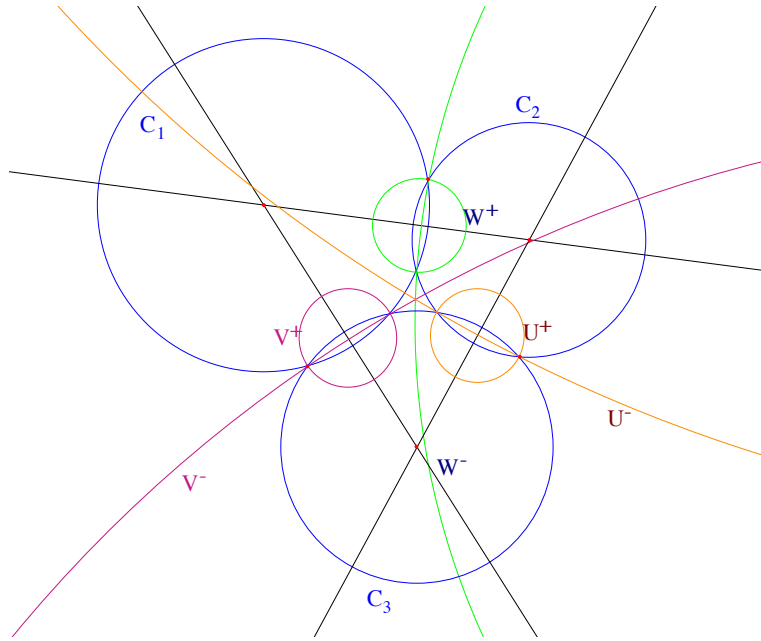


FIGURE 4.2 – Le second cas des cercles milieux

3) Si C_1 et C_2 sont disjoints, il existe un élément du groupe circulaire qui les transforme en deux cercles concentriques de centre a et qui envoie \mathcal{F} sur le pinceau à points de Poncelet a et ∞ .

Démonstration. C'est clair avec Witt. De manière élémentaire, les deux premiers cas se traitent en utilisant une inversion de pôle l'un des points communs et le troisième cas résulte du premier en utilisant le pinceau orthogonal.

4.2.5 Remarque. Si l'on a un cercle-droite réel C et un cercle imaginaire Γ , ou deux cercles imaginaires Γ, Γ' , on peut les transformer en des objets de même nature, mais concentriques de centre a . En effet, le pinceau défini par les deux cercles est nécessairement à points de Poncelet et il suffit alors d'envoyer ces points sur a et ∞ .

4.2.2 Double transitivité

Pour la double transitivité sur les objets non isotropes, il y a une obstruction qui est bien sûr l'invariant anallagmatique (voir 3.2.6) :

4.2.6 Proposition. Soient C_1, C_2 (resp. C'_1, C'_2) des cercles-droites distincts. Il existe $u \in PO(q)$ tel que $u(C_i) = C'_i$ pour $i = 1, 2$ si et seulement si on a $I^*(C_1, C_2) = I^*(C'_1, C'_2)$.

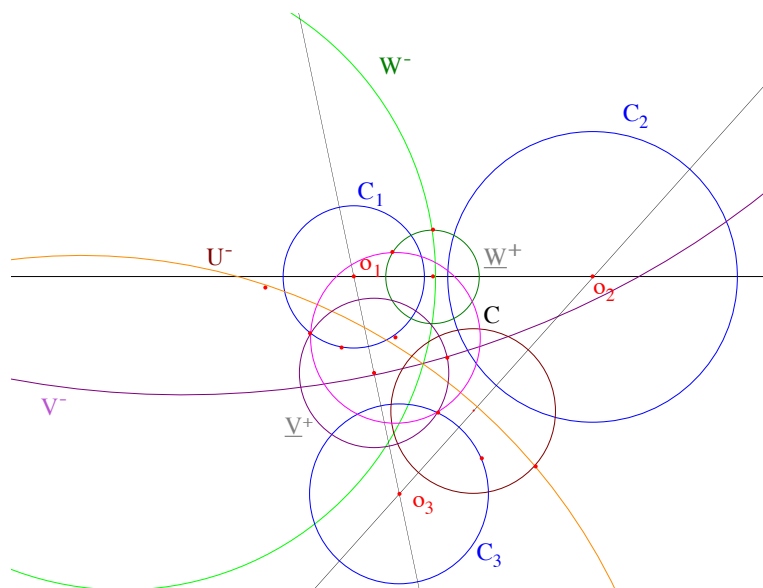


FIGURE 4.3 – Le troisième cas des cercles milieux ; attention, les cercles plus foncés (soulignés) sont les ombres de cercles imaginaires.

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire par conservation de q . Inversement, le résultat est l'analogue de Partie IV ?? et provient aussi du théorème de Witt (voir 4.1.2). En effet, quitte à changer C_i en λC_i on peut supposer $q(C_i) = q(C'_i)$. L'égalité des invariants anallagmatiques donne alors $\varphi(C_1, C_2)^2 = \varphi(C'_1, C'_2)^2$ et quitte à changer C_1 en son opposé on peut supposer qu'on a $\varphi(C_1, C_2) = \varphi(C'_1, C'_2)$. L'application de (C_1, C_2) sur (C'_1, C'_2) qui envoie C_i sur C'_i est une isométrie pour les formes restreintes et on la prolonge par Witt.

Pour une preuve directe, voir exercice 4.4.2.

4.2.7 Remarque. L'existence de cet invariant, vu comme obstruction à la double transitivité, mérite discussion. En effet, on a vu en 2.1.1 que le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ est de dimension réelle 6, tout comme l'ensemble des couples de cercles. On s'attendrait donc, *a priori*, à une opération transitive. L'existence d'une obstruction vient du fait que le stabilisateur de deux cercles est un groupe de dimension 1 (voir exercice 4.4.3), de sorte que l'orbite n'est que de dimension 5.

On a vu en 3.2.8 que deux cercles-droites sont tangents si et seulement si leur invariant anallagmatique est égal à 1. Dans le cas sécant on a une interprétation géométrique de cet invariant :

4.2.8 Proposition. (Interprétation de l'invariant anallagmatique)

1) Soient C_1 et C_2 deux cercles de centres o_1, o_2 et de rayons R_1, R_2 , sécants en a et b . On a la formule $I^*(C_1, C_2) = \cos^2 \theta$ où $\theta \in]0, \pi/2]$ est l'angle (non orienté) des tangentes à C_1 et C_2 en a (ou en b), ou encore l'angle des rayons (o_1a) et (o_2a) .

2) Soit C un cercle et D une droite sécants en a et b . On note T_a et T_b les tangentes à C en a et b . On a la formule $I^*(C, D) = \cos^2 \theta$ où $\theta \in]0, \pi/2]$ est l'angle (non orienté) de D avec T_a ou T_b .

3) Soient D_1, D_2 deux droites sécantes. On a la formule $I^*(C, D) = \cos^2 \theta$ où $\theta \in]0, \pi/2]$ est l'angle (non orienté) de D_1 et D_2 .

Démonstration. 1) En vertu de 3.2.7, on a $I^*(C_1, C_2) = \frac{(\Delta^2 - R_1^2 - R_2^2)^2}{4R_1^2R_2^2}$ avec $\Delta = o_1o_2$, $R_1 = o_1a$ et $R_2 = o_2a$, et le résultat vient de la formule d'Al-Kashi.

2) Soit ω le centre de C et h son projeté orthogonal sur D . On a $\theta = \widehat{a\omega h}$ (car tous deux sont complémentaires de $\widehat{\omega ah}$). On en déduit $\cos^2 \theta = \frac{\omega h^2}{\omega a^2} = \frac{d(\omega, D)^2}{R^2}$. On conclut avec 3.1.10.

3) Posons $D_i = (0, b_i, c_i, d_i)$. Le vecteur $\vec{n}_i = (b_i, c_i)$ est un vecteur normal à D_i et on a $\varphi(D_1, D_2) = (\vec{n}_1 | \vec{n}_2)$ et $q(D_i) = \|\vec{n}_i\|^2$. La formule en résulte.

Dans le cas de deux cercles disjoints, l'interprétation de l'invariant anallagmatique est moins claire, sauf dans le cas des cercles concentriques :

4.2.9 Proposition. Si C_1 et C_2 sont deux cercles concentriques, la donnée de leur invariant anallagmatique est équivalente à celle du rapport de leurs rayons. Précisément, si les rayons sont R_1, R_2 et si l'on pose $k = R_1/R_2$, on a $I^*(C_1, C_2) = \frac{1}{4} \left(k + \frac{1}{k}\right)^2$.

Enfin, dans le cas d'une droite et d'un cercle, disjoints ou non, on a le résultat suivant :

4.2.10 Proposition. Soit C un cercle de centre o et de rayon R et D une droite. On note d la distance de o à d . Alors on a $I^*(C, D) = \frac{d^2}{R^2}$.

Démonstration. Quitte à faire une transformation circulaire, on peut supposer que le cercle a pour équation $x^2 + y^2 - R^2$ et la droite $x = d$ et le résultat est évident.

4.2.11 Remarque. L'exercice 1.5.14 qui affirme que d/R est invariant par inversion devient maintenant transparent !

4.3 Applications géométriques de la transitivité

Les applications qui suivent reposent toutes sur le même principe : quand on a deux cercles-droites, on peut toujours, par un élément du groupe circulaire, les transformer en deux droites concourantes, ou en deux droites parallèles, ou en deux cercles concentriques.

4.3.1 Application 1 : représentation conforme des couronnes

Nous avons vu en 2.5.3 que tous les ouverts simplement connexes du plan (distincts de \mathbf{C}) sont équivalents par une application biholomorphe.

Dans le cas où les ouverts ne sont plus simplement connexes, la situation est plus compliquée. L'exemple le plus simple est celui des couronnes. On a le résultat suivant :

4.3.1 Théorème. *On note U_{a,R_1,R_2} la couronne ouverte, de centre a et de rayons R_1 et R_2 avec $0 < R_1 < R_2$.*

1) *Les couronnes U_{a,R_1,R_2} et U_{a',R'_1,R'_2} sont conformément équivalentes si et seulement si on a $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R'_1}{R'_2}$.*

2) *Si C, C' sont deux cercles, avec C' intérieur à C , et D, D' les disques ouverts correspondants, l'ouvert $D - \overline{D'}$ est conformément équivalent à une couronne U_{0,R_1,R_2} . Si les cercles sont extérieurs, c'est l'ouvert complémentaire de la réunion des disques qui est conformément équivalent à une couronne.*

Démonstration. Notons que le complémentaire de la réunion de deux cercles de centre a est formé de trois composantes connexes : le disque intérieur, qui contient a , la couronne, et le complémentaire du disque extérieur qui contient ∞ , en abrégé : l'intérieur, la couronne, l'extérieur.

1) Le sens direct de l'assertion 1) est facile. En effet, pour envoyer $U := U_{a,R_1,R_2}$ sur $U' := U_{a',R'_1,R'_2}$, on commence par effectuer la translation de vecteur $\overrightarrow{aa'}$ qui nous ramène au cas $a' = a$. On effectue ensuite l'inversion i de pôle a et de puissance $k = R_1R'_2 = R_2R'_1$. Cette inversion transforme le cercle intérieur de U en le cercle extérieur de U' et inversement. Comme elle échange a et ∞ elle échange les composantes intérieures et extérieures, donc aussi les couronnes. On a ainsi une application anti-holomorphe qui envoie U sur U' . Pour avoir une application holomorphe il suffit de composer par une symétrie d'axe passant par a' , qui laisse U' invariante.

Inversement, si les rapports des rayons sont différents, on ne peut pas envoyer les cercles frontières les uns sur les autres par un élément du groupe

circulaire car leur invariant anallagmatique est différent (voir 4.2.9) et donc pas non plus les couronnes. En fait, on peut montrer que, même avec des applications holomorphes (ou anti-holomorphes) quelconques, on ne peut échanger deux couronnes que si les rapports des rayons sont égaux. Nous admettrons ce point, voir par exemple [Rud98] Th. 14.22.

2) Cela résulte de la transitivité sur les pinceaux : une paire de cercles disjoints est transformée en une paire de cercles concentriques (de centre a et rayons R_1, R_2) par un élément du groupe circulaire, donc aussi l'ouvert complémentaire. Or celui-ci est formé de trois composantes connexes. Parmi celles-ci, deux sont simplement connexes (le petit disque et l'extérieur du grand dans le cas intérieur, les deux disques dans le cas extérieur). La dernière (non simplement connexe) est donc équivalente à la couronne U_{a,R_1,R_2} .

4.3.2 Application 2 : cercles tangents

Introduction

L'inversion permet de résoudre nombre de problèmes classiques de construction de cercles tangents, par exemple le problème de construire les cercles tangents à trois cercles C_1, C_2, C_3 donnés. Ce problème, qui remonte à Apollonius, a notamment été résolu par Poncelet et Gergonne au XIX-ième siècle. Commençons par un résultat théorique qui éclaire la situation, même si sa preuve est, pour l'essentiel, au-delà du niveau de cet ouvrage :

4.3.2 Proposition. 1) *L'ensemble des cercles-droites tangents à un cercle donné est une quadrique de $\mathcal{E} = \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ (c'est-à-dire une surface de degré 2).*

2) *L'ensemble des cercles-droites tangents à deux cercles donnés est en général une courbe de degré 4 de \mathcal{E} .*

3) *L'ensemble des cercles-droites tangents à trois cercles donnés est en général un sous-ensemble fini de \mathcal{E} , de cardinal ≤ 8 .*

Démonstration. En vertu de 3.2.8, l'ensemble des C tangents à un cercle C_1 donné est défini par l'équation $\varphi(C, C_1)^2 - q(C)q(C_1) = 0$ qui est bien polynomiale de degré 2 en les coordonnées de C , donc définit une quadrique de \mathcal{E} . Cela montre le point 1). Le reste est bien naturel : l'intersection de deux surfaces de degré 2 est une courbe de degré 4, l'intersection de trois est formée de 8 points. Bien naturel (et évident lorsque les surfaces en question sont des réunions de deux plans en position générale), mais pas du tout évident à démontrer. On est là dans le domaine de la géométrie algébrique, essentiellement le théorème de Bézout et la théorie de l'intersection. Le lecteur courageux ira regarder la littérature et notamment [Ful84], exemple 10.4.2 qui traite explicitement le problème des cercles tangents.

4.3.3 Remarque. Préciser le nombre exact de cercles tangents à trois cercles dans les cas non génériques est encore plus difficile *a priori*. C'est un exemple relativement simple de ce qu'on appelle la géométrie énumérative⁵. On peut toutefois signaler un cas où le nombre de cercles est < 8 , c'est celui où les cercles sont des droites. En effet, on a alors un triangle et il y a quatre cercles tangents aux côtés : le cercle inscrit et les trois cercles exinscrits. Bien entendu, ce cas est particulier car les trois éléments ont ici un point commun à l'infini⁶. Par conjugaison, on en déduit que trois cercles admettant un point commun (et génériques pour cette propriété) admettent quatre cercles tangents.

Construction

L'approche théorique étant inabordable, revenons à l'étude élémentaire des cercles tangents à trois cercles C_1, C_2, C_3 donnés. Nous traitons ici le cas où deux au moins de ces cercles sont sécants, disons C_1, C_2 (les autres cas sont plutôt plus faciles⁷, voir les exercices 4.4.6 et 4.4.7). On effectue une inversion i de pôle l'une des intersections qui transforme les cercles en deux droites D_1 et D_2 et il reste à trouver les cercles tangents à D_1, D_2 et C'_3 (image de C_3 par i). C'est un problème classique, voir par exemple [DC51] Ch. 2 numéro 76 dont nous recopions la solution.

On cherche donc les cercles tangents à deux droites D_1, D_2 , sécantes en o , et à un cercle C'_3 de centre c . On commence par construire un cercle Γ quelconque tangent aux deux droites (il y en a deux familles, centrés sur les deux bissectrices des droites, que l'on construit en choisissant le centre, puis en trouvant les contacts par projection sur les droites).

Rappelons que lorsque deux cercles C, C' sont donnés, il y a toujours deux homothéties qui les échangent, voir Partie V ???. On construit les centres de ces homothéties en prenant un point b sur C , la droite qui le joint au centre de C et la parallèle à cette droite passant par le centre de C' . Cette droite coupe C' en b', b'' et les centres d'homothéties sont les intersections de la droite des centres avec les droites (bb') et (bb'') .

Dans le cas qui nous intéresse, on a trois cercles : C'_3, Γ et le cercle cherché C . Si a est le point de contact de C et C'_3 , c'est le centre d'une homothétie h

5. Dont le plus beau fleuron est sans doute le théorème de Chasles affirmant qu'il y a exactement 3264 coniques tangentes à 5 coniques données, voir [Ful84].

6. Ce point est d'ailleurs dans l'intersection des quadriques où il compte avec multiplicité 4. Au chapitre suivant on dira que le réseau engendré par les trois éléments est euclidien.

7. Car, dans les cas particuliers de deux droites parallèles ou de deux cercles concentriques auxquels on se ramène, le rayon du cercle cherché est connu.

de C sur C'_3 . Par ailleurs, on connaît le centre d'une homothétie k de Γ sur C qui est o . La composée $h \circ k$ est une homothétie, qui envoie Γ sur C'_3 et son centre ω est donc aligné avec o et a .

La construction est maintenant facile : on construit le point ω comme centre d'une homothétie envoyant Γ sur C'_3 comme expliqué ci-dessus (il y a deux solutions), puis le point a , à l'intersection de $(o\omega)$ et de C'_3 (deux solutions encore) et enfin le centre de C à l'intersection des bissectrices des D_i et de (ac) (toujours deux solutions). Il y a donc au maximum huit cercles répondant à la question et la figure 4.5 ci-dessous montre qu'il peut y en avoir huit. À partir des huit cercles tangents à deux droites et un cercle, on retrouve par inversion ceux tangents à trois cercles, voir figure 4.3.2.

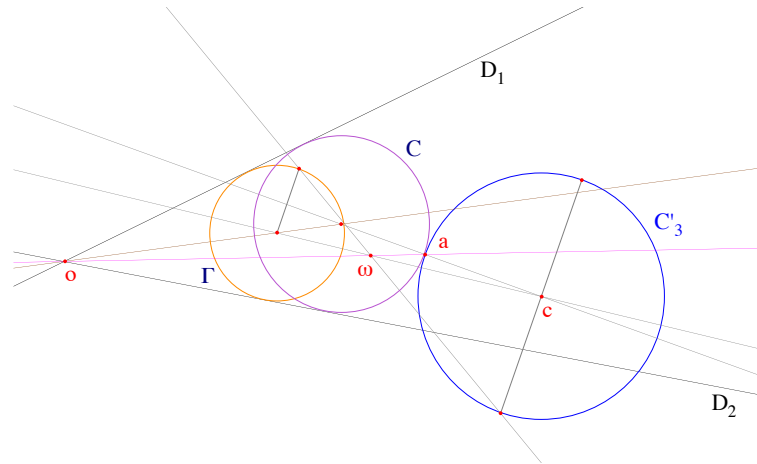


FIGURE 4.4 – Construction d'un cercle tangent à deux droites et un cercle

4.3.3 Application 3 : l'alternative de Steiner

Comme on l'a dit dans l'introduction, ce problème a suscité la première apparition de la notion d'inversion. À ce titre, et même si cette première tentative était encore timide, il mérite toute notre attention.

4.3.4 Définition. Soient⁸ K_1, K_2 deux cercles disjoints. Une chaîne de cercles relative à K_1, K_2 est une suite de cercles C_n ($n \in \mathbf{Z}$) tangents à K_1 et K_2 et tels que, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, C_i soit tangent à C_{i+1} . Une telle chaîne

8. K comme *Kreis* en hommage à Steiner.

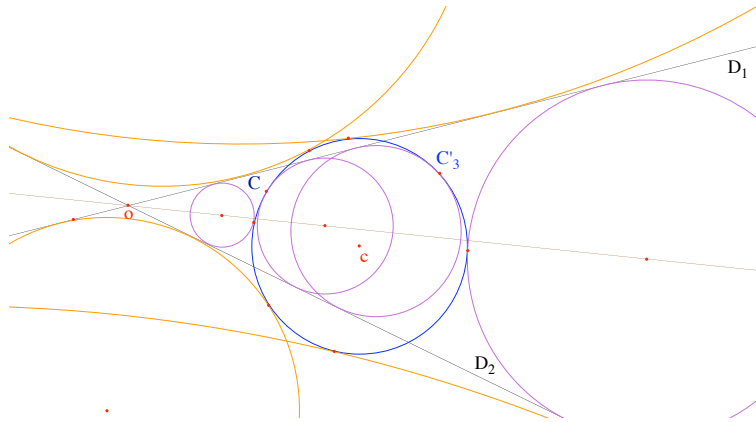


FIGURE 4.5 – Les huit cercles tangents à deux droites et un cercle

est dite **fermée** de longueur $n > 0$ si l'on a $C_i = C_{i+n}$ pour tout $i \in \mathbf{Z}$. On dit que c'est une **chaîne de Steiner** si, de plus, pour chaque i pris modulo n et pour $\alpha = 1, 2$, les cercles C_i, C_{i+1}, K_α ne sont pas en pinceau.

4.3.5 Remarque. La dernière condition signifie que les trois cercles, qui sont tangents deux à deux, ne sont pas tangents en un même point. Elle permet d'éviter des cas parasites comme le suivant. On part de K_1 et K_2 , par exemple concentriques de centre o , avec K_1 intérieur, et d'un cercle C_1 tangent aux deux (tangent à K_2 en a) et situé dans la couronne, on prend pour C_2 le cercle tangent à C_1 et K_2 en a , tangent à K_1 et contenant K_1 . On complète la chaîne en prenant pour C_3 et C_4 les symétriques de C_1 et C_2 par rapport à o , voir figure 4.3.3 ci-dessous. On a ainsi une chaîne fermée de longueur 4 (qui n'est pas une chaîne de Steiner) sans aucune condition sur les rapports des rayons des K_i contrairement à 4.3.6.

Le résultat essentiel est alors le suivant :

4.3.6 Théorème. (Steiner) Soient K_1 et K_2 deux cercles disjoints, I^* leur invariant anallagmatique et soit n un entier ≥ 3 . Il existe une chaîne de Steiner fermée de longueur n relative à K_1 et K_2 si et seulement si on a l'égalité $I^* = (1 + 2 \tan^2 \frac{p\pi}{n})^2$ avec $1 \leq p < n/2$. De plus, si cette condition est remplie, on peut prendre n'importe quel cercle tangent à K_1 et K_2 comme premier maillon de la chaîne. Si les cercles sont concentriques et si $k > 1$ est le rapport de leurs rayons, la condition s'écrit $k = \frac{1 + \sin \frac{p\pi}{n}}{1 - \sin \frac{p\pi}{n}}$.

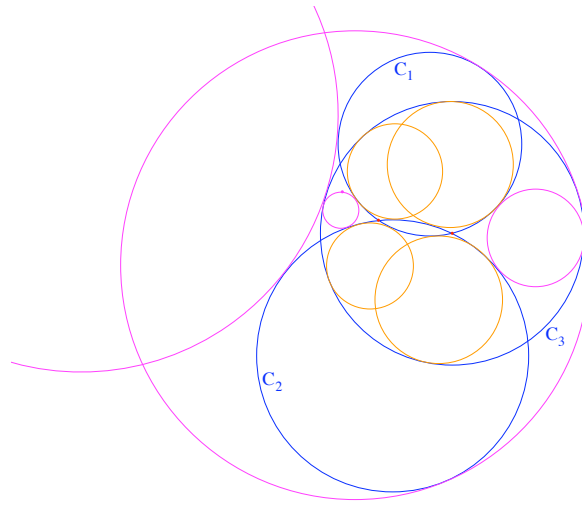


FIGURE 4.6 – Les huit cercles tangents à trois cercles

Démonstration. En vertu de 4.2.4, on se ramène où K_1 et K_2 sont concentriques de centre o et on a vu en 4.2.6 que l'invariant anallagmatique est conservé. Dans le cas concentrique, on sait d'après 4.2.9 que cet invariant vaut $\frac{1}{4}(k + \frac{1}{k})^2$ où k désigne le rapport des rayons des cercles, disons du grand sur le petit, $k = \frac{R_2}{R_1}$. Le lemme suivant explicite les propriétés des cercles tangents à K_1 et K_2 (voir aussi exercice 4.4.7) :

4.3.7 Lemme. 1) Il y a deux familles de cercles C tangents à K_1 et K_2 :

- Les cercles dont le centre est à la distance $(R_1 + R_2)/2$ de o et dont le rayon vaut $(R_2 - R_1)/2$. On les désignera sous le nom de “petits cercles”.

- Les cercles dont le centre est à la distance $(R_2 - R_1)/2$ de o et dont le rayon vaut $(R_1 + R_2)/2$. On les désignera sous le nom de “gros cercles”.

2) Deux gros cercles ne sont jamais tangents ; un petit cercle et un gros cercles sont tangents si et seulement si leurs contacts avec K_1 ou K_2 sont les mêmes. Il y a exactement deux petits cercles tangents à un petit cercle donné.

3) Si deux petits cercles de centres a et b sont tangents, l'angle $\theta = \widehat{aob}$ vérifie $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{k - 1}{k + 1}$.

Démonstration. Les points 1) et 2) sont faciles en se souvenant que deux cercles de rayons R, r , avec $r \leq R$, et de distance des centres d , sont tangents extérieurement (resp. intérieurement) si et seulement si on a $d = R + r$ (resp. $d = R - r$).

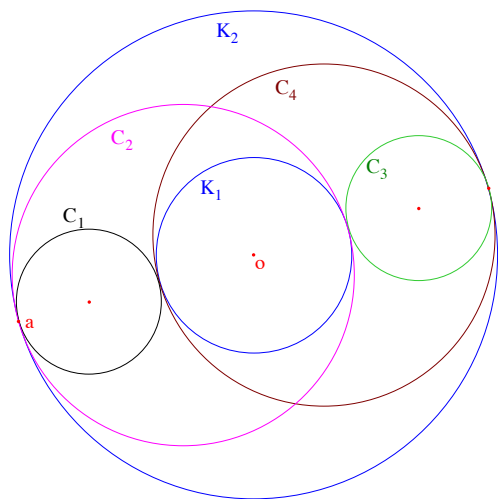


FIGURE 4.7 – Une chaîne de longueur 4 qui n'est pas de Steiner

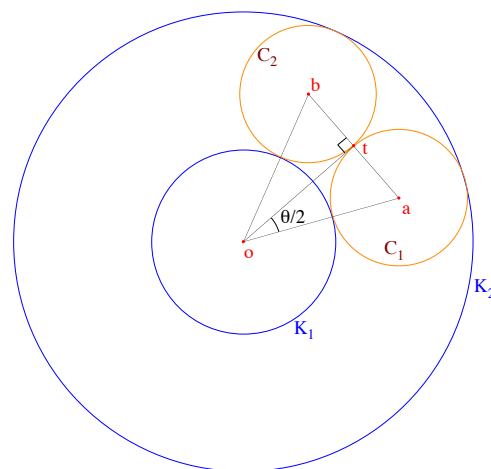


FIGURE 4.8 – Les petits cercles tangents

Pour 3), on considère le triangle isocèle oab , d'angle au sommet θ . Si t est le point de contact des petits cercles, c'est le milieu de $[ab]$, de sorte que le triangle oat est rectangle en t et on a $oa = \frac{R_1 + R_2}{2}$ et $at = \frac{R_2 - R_1}{2}$. On en déduit $\frac{at}{oa} = \frac{R_2 - R_1}{R_2 + R_1} = \sin \frac{\theta}{2}$ soit $\frac{k-1}{k+1} = \sin \frac{\theta}{2}$.

Revenons alors au théorème de Steiner. Le point 2) du lemme montre qu'une chaîne de Steiner ne contient que des petits cercles. Le point 3) montre que si l'on a deux cercles successifs d'une chaîne, de centres a, b , on a, quitte à les échanger, $(\vec{oa}, \vec{ob}) = \theta \in]0, \pi[$, avec θ défini comme dans 4.3.7. On passe donc de l'un à l'autre par la rotation ρ de centre o et d'angle θ , donc de C_1 à C_j par la rotation $\rho(o, j\theta)$. La chaîne est fermée de longueur n si et seulement si C_{n+1} est égal à C_1 , c'est-à-dire si ρ^n est l'identité, donc si l'on a $n\theta = 2p\pi$, soit $\theta/2 = p\pi/n$ avec $0 < p < n/2$. Cela signifie qu'on a $\frac{k-1}{k+1} = \sin \frac{p\pi}{n}$ et finalement $k = \frac{1 + \sin \frac{p\pi}{n}}{1 - \sin \frac{p\pi}{n}}$. La valeur de I^* en découle et on voit que l'existence d'une chaîne fermée ne dépend que de la position des cercles K_i et pas du choix du cercle initial de la chaîne.

4.3.8 Remarques. 1) Dans le théorème précédent, le nombre p correspond au nombre de tours que fait la chaîne de cercles autour de K_1 , voir figure 4.10.

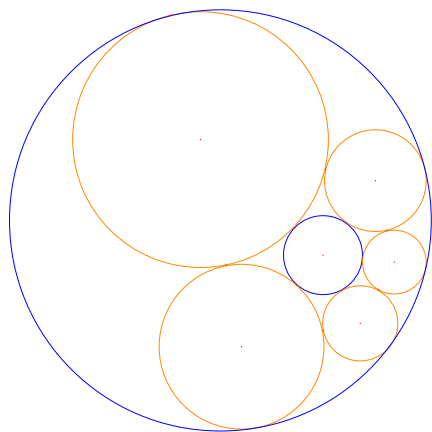


FIGURE 4.9 – Une chaîne de Steiner de longueur 5 dans le cas général

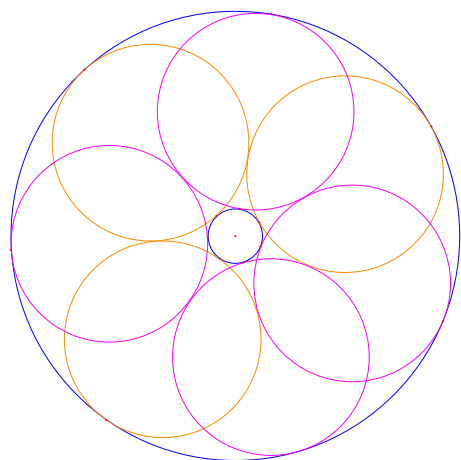


FIGURE 4.10 – Une chaîne de Steiner de longueur 7 à deux tours dans le cas concentrique

2) Les cercles K_i sont disjoints, mais pas nécessairement intérieurs. Voir figure 4.11 pour un exemple avec des cercles extérieurs.

3) La preuve de Steiner (voir [Ste26] §22) n'est pas celle-là. En langage moderne, il montre que si C, C' sont deux cercles tangents à K_1, K_2 il existe une inversion i (dont le pôle est sur l'axe radical des K_i , extérieur aux K_i) qui échange C, C' (voir 1.5.17). Mais alors, si l'on a une chaîne de Steiner \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}') de point de départ C (resp. C') et tournant par exemple dans le sens trigonométrique, le n -ième cercle de \mathcal{C} s'envoie par i sur le n -ième cercle⁹ de \mathcal{C}' et, en particulier, si l'une est fermée, l'autre aussi.

4) Le théorème de Steiner n'a été énoncé que dans le cas de deux cercles disjoints. Le lecteur se convaincra qu'il n'y a pas de chaînes de Steiner dans les autres cas. Une explication de ce phénomène est la suivante. Deux cercles étant donnés, l'existence d'une chaîne de Steiner de longueur n associée dépend, comme on l'a vu, de celle d'un sous-groupe cyclique d'ordre n dans le stabilisateur des deux cercles dans $PO^+(q)$. Or, voir exercice 4.4.3, si dans le cas des cercles concentriques ce stabilisateur est le groupe des rotations de centre o qui contient des sous-groupes cycliques d'ordre n quelconque, il n'en est plus de même dans les autres cas. Lorsqu'on a deux cercles sécants, on se ramène au cas de deux droites sécantes en o , et le stabilisateur est le groupe des homothéties de centre o qui n'a d'autre sous-groupe cyclique

9. Le lecteur notera que, comme l'axe radical est extérieur, les petits cercles et les gros ne peuvent s'échanger.

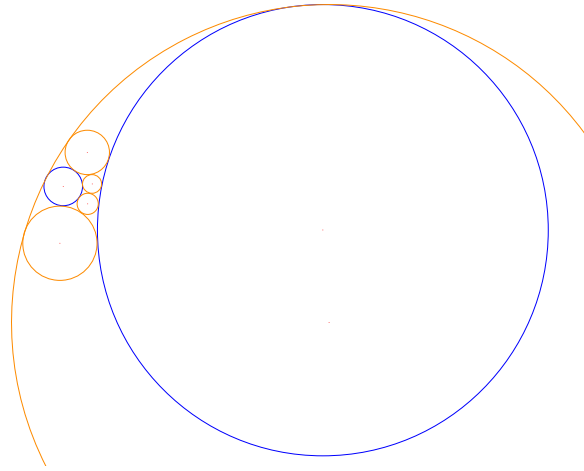


FIGURE 4.11 – Une chaîne de Steiner de longueur 5 avec des cercles extérieurs

que $\{\pm\text{Id}\}$. Lorsqu'ils sont tangents, on se ramène à deux droites parallèles et le stabilisateur, qui est formé de translations, ne contient aucun élément d'ordre fini.

4.4 Exercices

4.4.1 Triple transitivité sur \mathcal{P}

4.4.1 Exercice. On se propose de montrer directement que le groupe $PO(q)$ est triplement transitif sur \mathcal{P} .

1) Soient $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathcal{P}$ trois points distincts, de représentants $a, b, c \in E$. Montrer que les vecteurs a, b, c sont linéairement indépendants et que la forme q restreinte au sous-espace (a, b, c) est une forme de signature 2, 1. On pose $\alpha = \varphi(b, c)$, $\beta = \varphi(c, a)$, $\gamma = \varphi(a, b)$. Montrer que le produit $\alpha\beta\gamma$ est < 0 .

2) Montrer qu'il existe des représentants $a' = \lambda a$, $b' = \mu b$ et $c' = \nu c$ tels que l'on ait $\varphi(b', c') = \varphi(c', a') = 1$ et $\varphi(a', b') = -1$.

3) En déduire que $PO(q)$ (resp. $PO^+(q)$) est triplement transitif sur \mathcal{P} (utiliser le théorème de Witt).

4.4.2 Double transitivité

4.4.2 Exercice. On se propose de prouver directement le résultat de 4.2.6 dont on reprend notations et hypothèses.

1) Montrer qu'il existe une réflexion $\tau_A \in PO(q)$ qui envoie C_1 sur C'_1 (utiliser 4.1.8).

2) Dans cette question on suppose qu'on a $C_1 = C'_1$ (dans E) et $q(C_2) = q(C'_2)$.

a) Montrer que l'un des vecteurs $C_2 - C'_2$ ou $C_2 + C'_2$ est non isotrope et que ces vecteurs sont orthogonaux.

b) En utilisant l'égalité des invariants anallagmatiques, montrer que l'un des vecteurs précédents est orthogonal à C_1 .

c) On suppose par exemple que $A = C_2 - C'_2$ est non isotrope et orthogonal à C_1 . Montrer que la réflexion τ_A fixe C_1 et transforme C_2 en C'_2 .

d) On suppose que $m = C_2 - C'_2$ est isotrope et orthogonal à C_1 . Montrer que les cercles C_2 et C'_2 sont tangents en m et que C_1 passe par m . Montrer que, sauf dans deux cas particuliers que l'on précisera, il n'existe pas de réflexion laissant stable C_1 et envoyant C_2 sur C'_2 , mais seulement un produit de deux réflexions (on se ramènera au cas où C_2 et C'_2 sont deux droites parallèles et où C_1 est une autre droite).

3) Conclure.

4) On suppose $I^*(C_1, C_2) = I^*(C'_1, C'_2)$. Peut-on toujours envoyer C_1 sur C'_1 et C_2 sur C'_2 par un produit d'au plus deux inversions-symétries? (La réponse est non : considérer deux droites sécantes C_1, C_2 et leurs transformées par une symétrie glissée.)

4.4.3 Stabilisateur de deux cercles-droites

4.4.3 Exercice. Soient C_1, C_2 deux cercles-droites distincts. Montrer que le stabilisateur S du couple (C_1, C_2) est un sous-groupe de $PGL(2, \mathbf{C})$ de dimension 1. On se ramènera aux trois cas suivants :

- C_1 et C_2 sont deux droites sécantes en a (S contient le groupe des homothéties de centre a),
- C_1 et C_2 sont deux droites parallèles (S contient le groupe des translations de vecteurs parallèles aux droites),
- C_1 et C_2 sont deux cercles de même centre a (S contient le groupe des rotations de centre a).

(Préciser dans chaque cas le groupe S^+ des transformations directes. Attention aux cas particuliers, par exemple celui de deux droites perpendiculaires.)

4.4.4 Produit de deux réflexions

4.4.4 Exercice. Soient C_1, C_2 deux éléments non isotropes distincts de \mathcal{E} , \mathcal{F} le pinceau engendré par les C_i et τ_i la réflexion associée à C_i . Soit $D \in \mathcal{F}$ non isotrope quelconque. Montrer qu'il existe $D', D'' \in \mathcal{F}$, non isotropes, tels que l'on ait $\tau_1\tau_2 = \tau_D\tau_{D'} = \tau_{D''}\tau_D$.

4.4.5 Le théorème de Bachmann anallagmatique

4.4.5 Exercice. Le but de l'exercice est de prouver le théorème suivant :

Soient C_1, C_2, C_3 trois éléments non isotropes de \mathcal{E} , τ_1, τ_2, τ_3 les inversions-symétries¹⁰ correspondantes. Alors le produit $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3$ est une inversion-symétrie si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est réalisée :

- les trois cercles C_i sont dans un même pinceau,
- les trois cercles C_i sont deux à deux orthogonaux.

1) a) Montrer que si $\tau_1\tau_2\tau_3$ est une inversion il en est de même de $\tau_3\tau_2\tau_1$ et de $\tau_3\tau_1\tau_2$.

Cette remarque permet, lorsqu'on a deux cercles vérifiant une propriété, de supposer que ce sont C_1 et C_2 .

b) Montrer qu'on peut supposer les C_i distincts.

2) On suppose que $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3$ est une inversion.

a) On suppose que C_1 et C_2 sont deux cercles réels se coupant en deux points. Montrer qu'on peut se ramener au cas où C_1 et C_2 sont deux droites sécantes en o . Montrer que C_3 est soit une droite passant par o soit un cercle de centre o (écrire $\tau_1\tau_2 = \tau\tau_3$ et distinguer selon l'image de ∞ par τ_3 .)

b) On suppose que C_1 et C_2 sont deux cercles réels se coupant en un seul point. Montrer qu'on peut se ramener au cas où C_1 et C_2 sont deux droites parallèles et conclure.

c) On suppose que C_1 et C_2 sont deux cercles réels disjoints. Montrer qu'on peut se ramener au cas où C_1 et C_2 sont deux cercles concentriques et conclure.

d) Traiter de même le cas où deux des cercles sont imaginaires.

3) Montrer la réciproque en se ramenant aux cas particuliers évoqués ci-dessus.

4) Montrer que, si les τ_i et $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3$ sont des inversions positives ou des symétries axiales, le cas d'orthogonalité est impossible. (On montrera qu'à conjugaison près, le seul cas relevant de l'orthogonalité est celui de deux

10. Dans cet exercice, le mot inversion signifiera toujours inversion ou symétrie et le mot cercle vaudra pour cercle ou droite.

droites perpendiculaires en o , d'un cercle imaginaire de centre o et de son ombre.)

4.4.6 Cercles tangents

4.4.6 Exercice. On considère deux droites parallèles D_1, D_2 , de distance $2d$ et un cercle C de centre c et de rayon R , et on se propose de construire un cercle Ω de centre ω tangent à D_1, D_2 et C .

1) Montrer que Ω est nécessairement centré sur la parallèle à D_1, D_2 équidistante de ces droites, que l'on note D , et que son rayon est égal à d . En déduire que la distance ωc est égale à $R + d$ ou $|R - d|$.

2) Construire les cercles Ω tangents aux D_i et à C et discuter. (Si on note δ la distance de c à D on montrera que l'on a au plus quatre cercles tangents à D_1, D_2, C et que leur nombre est déterminé par la position de δ par rapport à $R + d$ et $|R - d|$.)

3) Déduire de ce qui précède la construction des cercles tangents à trois cercles C_1, C_2, C_3 dans le cas où C_1 et C_2 sont tangents et discuter.

4.4.7 Exercice. On considère deux cercles C_1, C_2 concentriques, de centre o , de rayons R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$, et un cercle C de centre c et de rayon R et on se propose de construire un cercle Ω de centre ω , tangent aux C_i et à C .

1) Montrer que le centre de Ω est sur le cercle de centre o et de rayon $(R_1 + R_2)/2$ ou $(R_2 - R_1)/2$ et que son rayon est égal respectivement à $r = (R_2 - R_1)/2$ ou $r = (R_2 + R_1)/2$ (voir 4.3.7).

2) Montrer que la distance ωc est égale à $R + r$ ou $|R - r|$ et en déduire une construction de Ω . Discuter selon les valeurs des R_i , de R et de la distance $\delta = oc$.

3) Déduire de ce qui précède la construction des cercles tangents à trois cercles C_1, C_2, C_3 dans le cas où C_1 et C_2 sont disjoints et discuter (on donnera notamment des exemples où il y a 2, 4, 6 ou 8 solutions).

Chapitre 5

Les plans de l'espace des cercles ou l'unité des géométries

Après avoir abondamment étudié les pincesaux, c'est-à-dire les droites de l'espace (de dimension 3) des cercles, dans les chapitres précédents, nous franchissons une étape en étudiant maintenant les réseaux, autrement dit les plans cet espace. L'intérêt principal de cette étude est qu'elle permet de retrouver les trois géométries métriques étudiées dans les parties précédentes : hyperbolique, elliptique et euclidienne. En particulier, les groupes associées à ces géométries sont tous des sous-groupes du groupe circulaire. D'une certaine manière, la géométrie anallagmatique est donc aussi une géométrie-mère, comme la géométrie projective, les autres géométries étant obtenues à partir d'elle avec une donnée supplémentaire (comme le prévoit le programme d'Erlangen) : un point dans le cas euclidien, une droite ou un cercle dans le cas hyperbolique, un cercle imaginaire dans le cas elliptique. Cette fraternité des trois géométries permettra de voir de manière unifiée les résultats concernant le concours des droites remarquables ou la somme des angles d'un triangle. On verra toutefois qu'il y a des différences essentielles entre les deux approches : la topologie de l'espace ambiant est différente, le groupe qui englobe les autres est plus petit que dans l'approche projective et les droites sont privilégiées par rapport aux points.

5.1 Les plans de l'espace des cercles

5.1.1 Introduction

Il y a deux façons de se convaincre de l'intérêt de l'étude des plans de l'espace \mathcal{E} des cercles et des droites.

La première, un peu naïve, consiste à dire que cet espace est un espace projectif de dimension 3, dont les droites projectives, c'est-à-dire les pincesaux, ont joué un grand rôle dans les chapitres précédents et qu'il n'y a pas de raison de ne pas étudier aussi les plans de cet espace.

La seconde est de penser à Euclide. En effet, dans l'espace \mathcal{E} on a la chance de disposer d'un ensemble de points \mathcal{P} et de parties remarquables : les droites-cercles, donc des deux ingrédients de base d'une géométrie (des points et des parties ayant vocation à s'appeler droites). Cependant, il est clair que cette approche n'est pas satisfaisante telle quelle car dans une géométrie plane digne de ce nom, l'ensemble des droites doit être, comme celui des points, de dimension 2 et ici l'ensemble des droites et cercles est de dimension 3. Pour dire cela autrement, l'ensemble des droites-cercles passant par deux points est un pinceau, donc de dimension 1, au lieu d'être réduit à un seul élément. Pour limiter cette trop grande richesse des droites-cercles, une idée naturelle est de les taxer en se limitant aux droites-cercles qui sont dans un plan de \mathcal{E} . C'est ce que nous allons faire maintenant, en constatant avec émerveillement que cette notion nous ramène à l'étude des trois géométries qui ont fait l'objet des parties IV et V : elliptique, hyperbolique et euclidienne, l'entrée dans ces géométries se faisant non pas par leurs points, mais par leurs droites. Une conséquence négative de cela, par rapport à la situation dans l'espace \mathcal{E} , c'est que nous aurons perdu la cohabitation points-droites et la description de l'incidence par l'orthogonalité. On ne peut pas tout avoir !

5.1.2 Plans de \mathcal{E} et réseaux de cercles

Définition

La notion de réseau est la suite logique de celle de pinceau :

5.1.1 Proposition-Définition. *On appelle **réseau** de cercles-droites un plan projectif \mathcal{V} de $\mathcal{E} = \mathbf{P}(E)$, image d'un hyperplan vectoriel V de E . On note q_V la restriction à V de la forme quadratique q . L'orthogonal de V est une droite vectorielle de E et son image¹ m dans \mathcal{E} est appelée **horizon** du réseau. On note G_V le stabilisateur de V dans $O(q)$, \widehat{G}_V celui de \mathcal{V} dans $PO(q)$ (qui est aussi le stabilisateur de m) et G_V l'image de ce groupe dans le groupe des bijections de \mathcal{V} .*

5.1.2 Remarque. Un réseau est donc l'ensemble des éléments de \mathcal{E} dont un représentant est de la forme $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3$ où les C_i sont trois éléments de E non coplanaires² et les λ_i des réels non tous nuls.

1. Qui peut être un point, un cercle-droite ou un cercle imaginaire.
2. Ce qui signifie que leurs images dans \mathcal{E} ne sont pas en pinceau.

5.1.3 Scolie. La donnée d'un réseau fournit donc un espace vectoriel V de dimension 3 et une forme quadratique q_V sur cet espace, c'est-à-dire exactement les ingrédients que nous avons utilisés dans les parties IV et V pour définir les géométries planes non euclidiennes et euclidienne. Nous allons voir ci-dessous que l'on retrouve effectivement ces géométries, mais le plan projectif $\mathcal{V} = \mathbf{P}(V)$ y apparaît comme le plan dual, c'est-à-dire l'ensemble des **droites** de la géométrie et non des points.

Nous allons voir aussi que la classification des réseaux fait apparaître naturellement les trois cas elliptique, hyperbolique et euclidien selon la nature de la forme quadratique q_V , ou encore de l'horizon, et que l'on retrouve aussi les modèles les plus classiques de ces géométries.

S'il en est besoin, nous parlerons de l'entrée anallagmatique pour désigner l'approche actuelle et de l'entrée projective pour évoquer celle des parties IV et V.

Classification : le cas elliptique

5.1.4 Proposition-Définition. (Le cas elliptique) *Soit \mathcal{V} un réseau de \mathcal{E} . On suppose que son horizon est un cercle imaginaire Γ , de centre o et de carré du rayon $-r^2$, avec $r > 0$. On considère le cercle réel K , ombre de Γ , c'est-à-dire le cercle de centre o et de rayon r . Alors, le réseau \mathcal{V} ne contient que des cercles-droites réels. Précisément, \mathcal{V} est l'ensemble formé de K et des cercles-droites qui coupent K en des points diamétralement opposés.*

La forme q_V est définie positive de rang 3, le groupe G_V (resp. \widehat{G}_V , resp. G_V) est isomorphe à $\{\pm 1\} \times O(q_V)$ (resp. $\{\pm 1\} \times O^+(q_V)$, resp. $O^+(q_V) \simeq PO(q_V)$). Le groupe \widehat{G}_V est le stabilisateur du cercle imaginaire Γ .

*Un tel réseau sera dit **elliptique**.*

Démonstration. On supposera les cercles (réels ou non) normalisés par $a = 1$. Le fait que \mathcal{V} ne contient que des cercles-droites et que ceux-ci coupent K en des points diamétralement opposés vient de 3.1.14. Comme l'orthogonal est un cercle imaginaire, qui vérifie $q < 0$, il résulte de Sylvester que la forme q_V est positive de rang 3.

Soit $u \in G_V$. Comme u laisse stable la droite non isotrope (Γ) , Γ est vecteur propre de u pour la valeur propre ± 1 . Comme u conserve q , donc q_V , la description annoncée correspond à la décomposition $E = (\Gamma) \oplus V$. Le groupe \widehat{G}_V est le quotient de G_V par $\{\pm \text{Id}\}$. On vérifie aussitôt que l'application composée $\{\pm 1\} \times O^+(q_V) \rightarrow \{\pm 1\} \times O(q_V) \rightarrow \widehat{G}_V$ est un isomorphisme et comme le premier facteur opère trivialement sur \mathcal{V} , on a bien $O^+(q_V) \simeq G_V$.

5.1.5 Remarque. Dans la description de \widehat{G}_V comme $\{\pm 1\} \times O^+(q_V)$, l'élément $(-1, \text{Id})$ n'est autre que la réflexion τ_Γ (ou encore l'inversion i_Γ).

5.1.6 Proposition-Définition. Soit \mathcal{V} un réseau elliptique d'horizon Γ et soit K l'ombre de Γ . Le **plan elliptique \mathbf{E}** associé à \mathcal{V} est défini de la manière suivante :

- Comme ensemble de points, \mathbf{E} est le quotient de \mathcal{P} obtenu en identifiant les points m et $i_\Gamma(m)$. Il est en bijection avec la réunion du disque ouvert limité par K et de son bord K dont les points opposés sont identifiés.

- Les éléments C de \mathcal{V} définissent les “droites elliptiques” de \mathbf{E} : la droite associée à C est l'ensemble des points $m \in \mathbf{E}$ orthogonaux à C au sens de \mathcal{E} . Les parties ainsi obtenues sont l'image du cercle K et les images des cercles-droites coupant K en des points diamétralement opposés. Ce sont les droites du plan elliptique au sens de Partie IV, Ch. 2, ??.

Deux droites “elliptiques” distinctes C' et C'' se coupent exactement en un point du plan elliptique.

Démonstration. La description des droites de \mathbf{E} vient de la proposition précédente et il est clair que ce sont bien les droites du plan elliptique telles que nous les avons rencontrées dans la partie IV.

La propriété d'intersection est claire si l'une de ces droites est portée par K et sinon, on peut le voir géométriquement, ou encore en notant que le pinceau (C', C'') est formé de cercles-droites orthogonaux au cercle imaginaire Γ , donc qu'il est nécessairement à points-base et que ces points-base étant échangés par i_Γ sont identifiés dans le plan elliptique.

5.1.7 Proposition. Le groupe $G_\mathcal{V}$ opère fidèlement sur \mathbf{E} .

Démonstration. Le groupe $\widehat{G}_\mathcal{V}$ opère sur \mathcal{P} comme tout sous-groupe de $PO(q)$. Il opère aussi sur \mathbf{E} car ses éléments commutent avec i_Γ . Comme i_Γ est trivial sur \mathbf{E} , le quotient $G_\mathcal{V}$ opère aussi sur \mathbf{E} . L'opération est fidèle. En effet, soit $u \in \widehat{G}_\mathcal{V}$ qui opère trivialement sur \mathbf{E} . Cela signifie que, pour tout $m \in \mathcal{P}$, on a $u(m) = m$ ou $u(m) = i_\Gamma(m)$ et les ensembles $F = \{m \mid u(m) = m\}$ et $GF = \{m \in \mathcal{P} \mid u(m) = i_\Gamma(m)\}$ sont deux fermés disjoints qui recouvrent \mathcal{P} . Comme \mathcal{P} est une sphère, donc connexe, l'un est vide et l'autre égal à \mathcal{P} et on en déduit $u = \text{Id}$ ou $u = i_\Gamma$ (c'est l'injectivité de ψ , voir la preuve de 3.3.3). Dans les deux cas, u est trivial dans le quotient $G_\mathcal{V}$.

5.1.8 Remarque. Attention, si l'ombre de Γ est commode pour identifier la géométrie du réseau \mathcal{V} avec la géométrie elliptique, il ne faut pas non plus lui attribuer une importance qu'elle n'a pas. En effet, l'ombre, qui est une droite elliptique comme une autre, n'est pas invariante par le groupe $G_\mathcal{V}$ car celui-ci est transitif sur les droites elliptiques (on peut penser, voir Partie IV, au choix de l'ombre comme celui d'un grand cercle particulier sur la sphère). Une autre raison qui interdit évidemment que $G_\mathcal{V}$ stabilise K c'est

que sinon, ce groupe serait contenu dans celui associé à K qui est le groupe des isométries de la géométrie hyperbolique, voir 5.1.10 ci-dessous. Étant tous deux de dimension 3 ces groupes seraient isomorphes et la considération des classes de conjugaison de leurs involutions montre qu'il n'en est rien.

Il reste à vérifier que la forme q_V induite par q est bien la même que celle que nous avons vue dans la partie IV :

5.1.9 Proposition. *Sur les équations des droites elliptiques la forme quadratique q_V définie par l'entrée anallagmatique est la même que celle qui provient de l'entrée projective de la partie IV.*

Démonstration. Par transitivité, on peut supposer que le cercle Γ est le cercle de centre $(0,0)$ et de carré du rayon -1 , donc $\Gamma = (1, 0, 0, 1)$. Les cercles-droites orthogonaux à Γ ont alors pour coordonnées $(a, b, c, -a)$, donc pour équations $a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy - a = 0$, et la forme q_V est la forme $a^2 + b^2 + c^2$. De l'autre côté, dans la partie IV, les droites de la géométrie elliptique sont définies au départ comme les droites de \mathbf{P}^2 , avec pour équations $ax + by + ct = 0$, et la forme q est définie par $a^2 + b^2 + c^2$. Quand on passe au modèle conforme de Klein, par projection stéréographique, voir Partie IV, ?? et sa preuve, ces droites deviennent les cercles d'équations $a(x^2 + y^2) - 2bx - 2cy - a = 0$ et on retrouve exactement la forme q_V .

Classification : le cas hyperbolique

5.1.10 Proposition-Définition. (Le cas hyperbolique) *Soit \mathcal{V} un réseau de \mathcal{E} . On suppose que son horizon est un cercle-droite réel H . Alors le réseau \mathcal{V} est l'ensemble des cercles-droites (réels ou non, isotropes ou non) orthogonaux à H .*

La forme q_V est une forme de Lorentz de rang 3, le groupe G_V (resp. \widehat{G}_V , resp. G_V) est isomorphe à $\{\pm 1\} \times O(q_V)$ (resp. $\{\pm 1\} \times O^+(q_V)$, resp. $O^+(q_V) \simeq PO(q_V)$). Le groupe \widehat{G}_V est le stabilisateur du cercle-droite H .

*Un tel réseau sera dit **hyperbolique**.*

Démonstration. La description de \mathcal{V} est évidente avec la définition de l'horizon, la nature de q_V vient de Sylvester et le calcul du groupe est identique à celui du cas elliptique.

5.1.11 Remarque. Comme dans le cas elliptique, dans la description de \widehat{G}_V comme $\{\pm 1\} \times O^+(q_V)$, l'élément $(-1, \text{Id})$ n'est autre que la réflexion τ_H (ou encore l'inversion i_H).

5.1.12 Proposition-Définition. Soit \mathcal{V} un réseau hyperbolique d'horizon H . Le plan hyperbolique \mathbf{D} associé à \mathcal{V} est défini de la manière suivante :

- Comme ensemble de points, \mathbf{D} est le quotient de $\mathcal{P} - H$ obtenu en identifiant les points m et $i_H(m)$. Il est en bijection avec le disque ouvert limité par H (ou l'un des demi-plans ouverts limités par H si H est une droite).

- Les éléments D de \mathcal{V} vérifiant $q(D) > 0$ définissent les “droites hyperboliques” de \mathbf{D} : la droite associée à D est l'ensemble des points $m \in \mathbf{D}$ orthogonaux à D au sens de \mathcal{E} . Les parties ainsi obtenues sont les images des cercles-droites orthogonaux à H . Ce sont les droites du plan hyperbolique dans le modèle du disque ou du demi-plan de Poincaré, voir Partie IV, Ch. 2, ??.

Démonstration. Cela résulte de la définition des droites dans le modèle de Poincaré comme cercles-droites orthogonaux à l'horizon.

5.1.13 Remarque. On notera qu'on a exclu l'horizon des points du plan hyperbolique, voir en 5.1.21 une discussion.

5.1.14 Proposition. Le groupe $G_{\mathcal{V}}$ opère fidèlement sur \mathbf{D} .

Démonstration. Que le groupe opère résulte du fait que les éléments de $\widehat{G}_{\mathcal{V}}$ commutent avec i_H . Montrons que l'opération est fidèle. Soit $u \in \widehat{G}_{\mathcal{V}}$ qui induit l'identité sur \mathbf{D} . Cela signifie qu'on a, pour tout $m \in \mathcal{P}$, $u(m) = m$ ou $u(m) = i_H(m)$. Mais, comme H est stable par u , les composantes connexes de son complémentaire sont stables ou échangées par u . Si, pour un point m on a $u(m) = m$, les composantes sont conservées par u et on a $u|_{\mathcal{P}} = \text{Id}$. Si au contraire on a $u(m) = i_H(m)$, comme i_H échange les composantes, il en est de même de u et on a $u = i_H$. Dans les deux cas, u est l'identité dans le quotient.

Là encore, il reste à vérifier que la forme $q_{\mathcal{V}}$ induite par q est bien la même que celle que nous avons vue dans la partie IV :

5.1.15 Proposition. Sur les équations des droites hyperboliques la forme quadratique $q_{\mathcal{V}}$ définie par l'entrée anallagmatique est la même que celle qui provient de l'entrée projective de la partie IV.

Démonstration. On peut supposer que l'horizon est l'axe des x , de coordonnées $H = (0, 0, 1, 0)$. Les cercles-droites orthogonaux à H sont alors définis par $c = 0$ et la forme $q_{\mathcal{V}}$ est $b^2 - ad$. C'est exactement la forme rencontrée dans la partie IV sur le modèle du demi-plan de Poincaré, voir exercice ??.

Classification : le cas euclidien

5.1.16 Proposition-Définition. (Le cas euclidien) Soit \mathcal{V} un réseau de \mathcal{E} . On suppose que son horizon est isotrope, donc un point $m \in \mathcal{P}$. Alors le réseau \mathcal{V} est l'ensemble des cercles-droites passant par m . Si le point m est le point ∞ , \mathcal{V} est l'ensemble des droites du plan affine euclidien.

La forme $q_{\mathcal{V}}$ est une forme dégénérée de rang 2 parabolique (au sens de la partie V), les groupes $\widehat{G}_{\mathcal{V}}$ et $G_{\mathcal{V}}$ sont isomorphes au groupe des similitudes du plan euclidien. Le groupe $\widehat{G}_{\mathcal{V}}$ est le stabilisateur du point m .

Un tel réseau sera dit **euclidien** (au sens de la partie V). Le **plan euclidien** associé à \mathcal{V} est l'ensemble $\mathcal{P} - \{m\}$ avec comme droites les traces des éléments de \mathcal{V} .

Sur les équations des droites euclidiennes la forme quadratique $q_{\mathcal{V}}$ définie par l'entrée anallagmatique est la même que celle qui provient de l'entrée projective de la partie V.

Démonstration. La description de \mathcal{V} est évidente avec l'interprétation de l'orthogonalité comme incidence. Pour le calcul du groupe, on peut supposer $m = \infty$ par conjugaison. On voit que $G_{\mathcal{V}}$ est le stabilisateur de ∞ dans le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ des homographies et anti-homographies : c'est bien le groupe des similitudes (directes ou indirectes).

Pour le calcul du groupe $G_{\mathcal{V}}$, voir exercice 5.4.1.

Pour l'assertion sur les formes quadratiques, on peut supposer $m = \infty = (0, 0, 0, 1)$. On retrouve alors les droites d'équations $-2bx - 2cy + d$ avec la forme $b^2 + c^2$, c'est-à-dire, à un scalaire près, la forme vue dans la partie V.

Où suis-je ?

La proposition suivante répond à une question très simple concernant les réseaux de cercles : si l'on a trois cercles engendrant un réseau, comment savoir dans quel type de géométrie l'on se trouve ?

5.1.17 Proposition. Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles-droites non situés dans un même pinceau et soit \mathcal{V} le réseau engendré.

- 1) Le réseau \mathcal{V} est euclidien si et seulement si les C_i ont un point commun.
- 2) Si deux des C_i sont disjoints, le réseau est hyperbolique.
- 3) Dans le cas général, soit a le centre radical des C_i (voir 1.5.3). Alors, le réseau est hyperbolique (resp. euclidien, resp. elliptique) si a est extérieur aux C_i (resp. commun aux C_i , resp. intérieur).

Démonstration. Il s'agit de déterminer l'orthogonal de (C_1, C_2, C_3) . Comme les C_i ne sont pas en pinceau, ils ont au plus un point commun, qui est dans

l'orthogonal. Dans ce cas, on a un réseau euclidien, par définition. Si deux cercles sont disjoints on ne peut être ni dans le cas euclidien (où il y a un point commun à tous les cercles) ni dans le cas elliptique (voir 5.1.6). On est donc dans le cas hyperbolique.

Dans le cas général, soit C l'orthogonal des C_i , a son centre, r son rayon (éventuellement nul, voire imaginaire). La puissance de a par rapport aux C_i est égale à r^2 (à cause de la formule $d_i^2 - R_i^2 = r^2$), donc indépendante de i , de sorte que a , qui est le centre radical des trois cercles, est dans la même position (intérieur, dessus ou extérieur) par rapport aux C_i . S'il est extérieur, on peut mener des tangentes aux C_i issues de a et il existe un cercle réel orthogonal aux trois : on est dans le cas hyperbolique. S'il est sur l'un des cercles, il est sur les trois et l'on est dans le cas euclidien. S'il est intérieur, le cercle orthogonal est imaginaire : c'est le cas elliptique.

Pour une construction de l'horizon, voir l'exercice 5.4.2.

Transitivité

La proposition suivante montre qu'on a bien une classification des réseaux au sens de la théorie des groupes :

5.1.18 Proposition. *Soient \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 deux réseaux de \mathcal{E} . Il existe $u \in PO(q)$ tel que $u(\mathcal{V}_1) = \mathcal{V}_2$ si et seulement si les deux réseaux sont de même nature : elliptique, hyperbolique, euclidien.*

Démonstration. En considérant l'orthogonal de \mathcal{V} , c'est-à-dire son horizon, on se ramène à la transitivité sur les objets donc à 4.1.3.

Quelques précisions

Commençons par une définition :

5.1.19 Définition. *On parlera des **plans métriques** associés à un réseau pour désigner l'un des plans euclidien, elliptique ou hyperbolique précédents.*

La remarque suivante montre que les invariants des géométries ne dépendent pas de l'approche choisie :

5.1.20 Scolie. Soient A, B, C des cercles droites d'un réseau \mathcal{V} , que l'on voit aussi comme des droites de la géométrie métrique associée à \mathcal{V} . Comme les formes quadratiques obtenues par les deux entrées sont les mêmes, les invariants anallagmatiques $I^*(A, B) = \frac{\varphi(A, B)^2}{q(A)q(B)}$ sont les mêmes que ceux définis dans les trois géométries métriques.

De même, le **spin anallagmatique** $S^*(A, B, C) := \frac{\varphi(B, C)\varphi(C, A)\varphi(A, B)}{q(A)q(B)q(C)}$ n'est autre que le spin angulaire défini notamment Partie IV, chapitre 4, ??.

5.1.21 Remarques. 1) La présentation des trois géométries métriques à l'intérieur de la géométrie anallagmatique est une bonne manière de montrer qu'il y a de nombreuses similitudes entre elles, et surtout entre les deux cas elliptique et hyperbolique. Rappelons qu'il y a tout de même deux différences essentielles.

- En hyperbolique, les points du bord ne sont pas dans **D**. Certes, on pourrait les ajouter sans perdre l'axiome principal d'Euclide : *Par deux points passe une droite et une seule*. En revanche, comme l'horizon est stable dans le cas hyperbolique³, le plan ne serait plus homogène.

- Les droites hyperboliques ne se coupent pas nécessairement.

2) On voit que le plan $\mathcal{P} \simeq \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ de la géométrie anallagmatique apparaît comme une compactification du plan des géométries elliptique et hyperbolique. On notera qu'on avait déjà une compactification dans la partie IV, mais différente, puisqu'elle utilisait le plan projectif réel $\mathbf{P}^2(\mathbf{R})$. Ces deux compactifications sont vraiment distinctes, à la fois sur le plan topologique (la sphère de Riemann est une variété orientable, contrairement au plan projectif) et sur le plan algébrique (les groupes $PGL(2, \mathbf{C})$ et $PGL(3, \mathbf{R})$ ne sont pas isomorphes, le premier étant de dimension réelle 6 et le second, 8).

3) Cette différence d'approche n'est pas préjudiciable dans les cas euclidien et elliptique, car on récupère à peu près complètement les notions vues dans les parties précédentes. En revanche, ce n'est pas tout à fait le cas en géométrie hyperbolique. La raison est qu'ici l'entrée dans cette géométrie se fait par les droites et que le modèle hyperbolique obtenu est celui du disque ou du demi-plan de Poincaré, et non celui de Klein. On perd ainsi les points extérieurs du modèle de Klein dont on a vu l'importance dans la partie IV.

4) Nous verrons dans la suite que la présence dans la géométrie anallagmatique des trois autres géométries peut s'utiliser dans les deux sens :

- On peut utiliser les résultats vus dans les parties précédentes pour prouver des faits relatifs à la géométrie anallagmatique, voir ci-dessous la triple transitivité ou encore 5.4.5.

- On peut aussi, grâce à la géométrie anallagmatique, retrouver des résultats antérieurs (voir au paragraphe suivant le concours des droites remarquables du triangle).

5.1.22 Scolie. Tout ce qui précède est une nouvelle illustration d'un des principes du *Programme d'Erlangen* de Felix Klein : les diverses géométries

3. Contrairement à l'ombre de l'horizon dans le cas elliptique.

sont toutes des sous-géométries d'une géométrie mère qui est la géométrie projective. Dans les parties IV et V les diverses géométries avaient été définies à partir de la géométrie du plan projectif (par exemple réel) en imposant en plus une forme quadratique, euclidienne, de Lorentz ou dégénérée. Ici, elles apparaissent à partir de la droite projective complexe avec comme donnée supplémentaire un objet qui est un point dans le cas euclidien, un cercle ou une droite dans le cas hyperbolique et un cercle imaginaire dans le cas elliptique.

Cette vision permet de mieux comprendre la différence de taille des groupes correspondants en les voyant comme stabilisateurs dans le groupe circulaire (qui est de dimension 6). En effet, comme l'orbite d'un point est de dimension 2, son stabilisateur est de dimension 4, tandis que les orbites des cercles (réels ou non) sont de dimension 3, de sorte que leur stabilisateur n'est que de dimension 3. C'est une nouvelle explication de la richesse de la géométrie euclidienne !

5.1.3 Triple transitivité

Dans le cas de la triple transitivité, on se ramène aux cas d'isométrie des triangles dans les géométries euclidienne et non euclidiennes :

5.1.23 Théorème. *Soient A, B, C (resp. A', B', C') trois cercles-droites distincts ne faisant pas partie d'un même pinceau. Il existe $u \in PO(q)$ qui envoie A, B, C sur A', B', C' respectivement si et seulement si on a les conditions suivantes :*

1) *Les invariants anallagmatiques sont égaux : $I^*(A, B) = I^*(A', B')$ et de même pour les autres.*

2) *Les spin anallagmatiques (voir 5.1.20) sont les mêmes, i.e. on a l'égalité :*

$$\frac{\varphi(B, C)\varphi(C, A)\varphi(A, B)}{q(A)q(B)q(C)} = \frac{\varphi(B', C')\varphi(C', A')\varphi(A', B')}{q(A')q(B')q(C')}.$$

Si le réseau engendré par A, B, C est euclidien, la deuxième condition est inutile.

Démonstration. Notons \mathcal{V} et \mathcal{V}' les réseaux engendrés par A, B, C et A', B', C' . On note d'abord que les conditions impliquent que les réseaux sont de même nature. Il suffit pour cela de voir que le signe du discriminant de $q_{\mathcal{V}}$ est déterminé par les invariants. Or, pour une forme quadratique q sur un espace de dimension 3 et trois vecteurs A, B, C , on a la formule (voir Partie III ??) :

$$\Delta(q)[A, B, C]^2 = q(A)q(B)q(C) + 2\varphi(B, C)\varphi(C, A)\varphi(A, B)$$

$$-q(A)\varphi(B, C)^2 - q(B)\varphi(C, A)^2 - q(C)\varphi(A, B)^2,$$

où $\Delta(q)$ est le discriminant de la forme q . Si les vecteurs A, B, C vérifient $q > 0$, on voit, en divisant par $q(A)q(B)q(C)$, que le signe de Δ est déterminé par le spin et les invariants anallagmatiques. En appliquant cela avec $q = q_V$ et avec $A, B, C; A', B', C'$, on voit que \mathcal{V} et \mathcal{V}' sont de même nature.

Il existe alors un élément du groupe circulaire qui envoie \mathcal{V} sur \mathcal{V}' en vertu de 5.1.18 et on est ramené au cas $\mathcal{V} = \mathcal{V}'$. Dans les cas elliptique et hyperbolique, en passant au dual et en tenant compte du fait que les invariants sont les mêmes dans les deux entrées, cf. 5.1.20, on voit que le résultat est conséquence des cas d'isométries des triangles ou plutôt des trilatères, voir par exemple Partie IV ???. Dans le cas euclidien, il s'agit de la transitivité du groupe des similitudes sur les droites et on peut appliquer⁴ le résultat ?? de la partie V.

5.1.24 Commentaire. Le théorème précédent est la forme algébrique de deux résultats géométriques bien connus :

- en géométrie euclidienne, deux triangles qui ont les mêmes angles de demi-droites sont semblables,
- en géométrie non euclidienne, deux triangles qui ont les mêmes angles de demi-droites sont isométriques, voir Partie IV ???.

La différence de conclusion entre ces deux énoncés vient du fait qu'en non euclidien la donnée des trois angles est vraiment de dimension 3, alors qu'en euclidien elle se ramène à la donnée de deux puisque la somme des angles est égale à π .

Par rapport à ces énoncés géométriques, le théorème précédent fait appel à l'invariant anallagmatique au lieu de l'angle. Or, cet invariant ne définit que le carré du cosinus de l'angle des cercles-droites. Il identifie donc un angle et son supplémentaire et c'est ce qui impose la présence de la condition de spin, cet invariant n'intervenant que par son signe, que nous étudions maintenant.

Le signe du spin anallagmatique

Comme le spin anallagmatique est le même que le spin angulaire (voir 5.1.20), on se reportera à la partie IV pour une discussion plus approfondie de la condition de spin. La proposition suivante nous suffira ici :

5.1.25 Proposition. *Soient A, B, C trois cercles-droites.*

1) *Le carré du spin $S^*(A, B, C)$ est déterminé par les invariants anallagmatiques selon la formule : $S^*(A, B, C)^2 = I^*(B, C)I^*(C, A)I^*(A, B)$.*

4. Dans le cas $n = 3$, la condition sur les invariants K^* (les aires) est vide.

2) Le signe de $S^*(A, B, C)$ est celui du produit $\varphi(B, C)\varphi(C, A)\varphi(A, B)$ et il est indépendant du choix des représentants de A, B, C . Si A, B, C sont des cercles, on peut les supposer normalisés par $a = 1$.

Démonstration. Le point 1) est évident. Pour 2), si l'on change A, B, C en $\alpha A, \beta B$ et γC , on voit que le produit des φ est multiplié par $\alpha^2\beta^2\gamma^2$.

5.1.26 Remarques. 1) Le point 2) de 5.1.25 permet de supposer les cercles normalisés et on peut alors utiliser la proposition 3.2.10 qui précise que $\varphi(A, B)$ est positif, soit si les cercles sont sécants, avec un angle aigu des rayons menant aux points communs, soit tangents intérieurement, soit dis-joints et intérieurs. Le signe du spin de trois cercles sera alors conservé si les cercles sont dans la même position ou si l'on change deux des positions sur trois.

2) Le lecteur se convaincra qu'on retrouve ainsi les résultats de la partie IV. Dans le cas elliptique, les cercles déterminent deux triangles du plan elliptique et on sait qu'on ne peut les échanger sans la condition de spin, voir Partie IV ???. Par exemple, on ne peut échanger deux triangles dont l'un a une somme des angles $< 3\pi/2$ et l'autre $> 3\pi/2$. Dans le cas hyperbolique, c'est encore le cas (trois droites du plan \mathbf{K} correspondent à trois points de la partie extérieure \mathbf{T} et le spin est nécessaire pour les cas d'isométrie dans \mathbf{T}). Ainsi, on ne peut échanger deux triangles ayant pour l'un trois angles aigus et pour l'autre deux angles aigus et un angle obtus, voir Partie IV ???. De même, dans le cas de trois droites hyperboliques qui ne se coupent pas, il y a quatre possibilités, deux de spin positif (trois intérieurs ou un intérieur et deux extérieurs) et deux de spin négatif (trois extérieurs ou un extérieur et deux intérieurs), voir figures ci-dessous. Pour des exemples explicites, voir Partie IV ??? et ???.

Une application : une question d'Hadamard

Dans un exercice de son livre de géométrie élémentaire [Had98], Jacques Hadamard pose la question suivante : *Trois cercles étant donnés, existe-t-il toujours une inversion qui les transforme en trois cercles de même rayon ?* Le lecteur intéressé ira résoudre l'exercice 5.4.5.

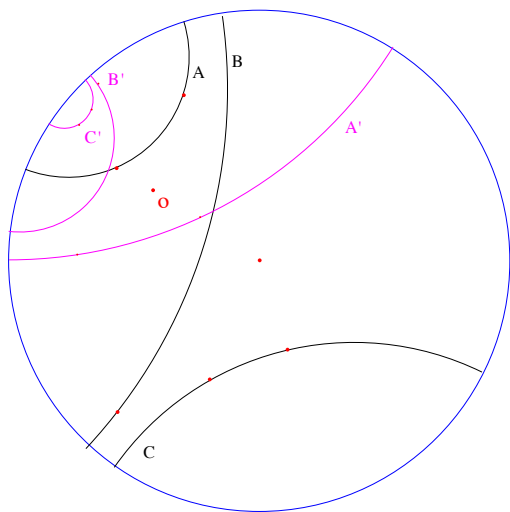


FIGURE 5.1 – Deux exemples de triplets de cercles d'un réseau hyperbolique avec spin positif, échangés par la symétrie hyperbolique de centre o .

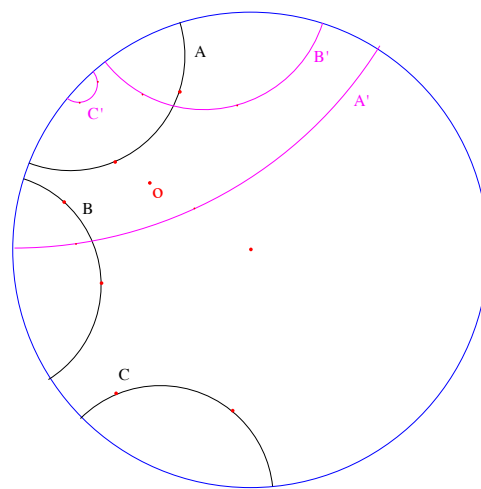


FIGURE 5.2 – Deux exemples de triplets de cercles d'un réseau hyperbolique avec spin négatif, échangés par la symétrie hyperbolique de centre o .

5.2 Retour sur le concours des droites remarquables du triangle

Dans cette section, nous allons retrouver les propriétés de concours des hauteurs, bissectrices, médiatrices et médianes dans les trois géométries euclidienne, elliptique et hyperbolique, comme conséquences d'un même théorème anallagmatique, voire d'une même relation (de Chasles). Commençons par préciser la terminologie.

5.2.1 Trilatères

5.2.1 Définition. On appelle **trilatère** la donnée de trois cercles-droites de \mathcal{E} non alignés dans \mathcal{E} , c'est-à-dire ne faisant pas partie d'un même pinceau. Les cercles-droites sont les côtés du trilatère. On dit que ce trilatère est **euclidien** (resp. **elliptique**, resp. **hyperbolique**) si le réseau engendré l'est.

Si les côtés du trilatère se coupent deux à deux en un point du plan métrique associé au réseau engendré, on parlera du **triangle** associé au trilatère.

5.2.2 Remarque. Attention, un trilatère ne définit pas toujours un triangle du plan métrique associé. C'est vrai dans le cas elliptique, car les droites elliptiques se coupent toujours, mais pas nécessairement dans les cas euclidien (à cause du parallélisme) ou hyperbolique.

5.2.2 Des pinceaux dans les réseaux

Avant de regarder les différents cas de droites remarquables des trilatères, traduisons ce qui en sera la conclusion universelle, à savoir être en pinceau pour trois éléments d'un réseau. Nous distinguons les trois types de réseaux. Le cas le plus simple est celui du plan elliptique :

5.2.3 Proposition. *Soit \mathcal{V} un réseau elliptique d'horizon Γ et soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ trois cercles-droites distincts de \mathcal{V} engendrant un pinceau \mathcal{F} . Le pinceau \mathcal{F} est orthogonal à Γ , c'est un pinceau à points-base m, n avec $m \in \mathbf{E}$ et $n = i_\Gamma(m)$ et les droites elliptiques Δ_i sont concourantes en m . De plus, il existe un unique cercle-droite $D \in \mathcal{V}$ orthogonal à \mathcal{F} (donc aux Δ_i) et les droites elliptiques Δ_i admettent une perpendiculaire commune.*

Démonstration. Comme les Δ_i sont orthogonaux à Γ , il en est de même de \mathcal{F} . Cela montre que \mathcal{F} ne contient aucun isotrope et c'est donc un pinceau à points-base. Comme les Δ_i sont orthogonaux à Γ , l'inversion i_Γ les laisse stables donc aussi $\{m, n\} = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Comme i_Γ est une inversion négative, elle n'a pas de point fixe et elle échange donc m et n . Le pinceau orthogonal \mathcal{F}^\perp est une droite projective de $\mathcal{E} \simeq \mathbf{P}^3$, contenant Γ , donc non contenue dans le plan \mathcal{V} . Elle rencontre donc \mathcal{V} en un point qui est nécessairement un cercle-droite réel⁵ (puisqu'orthogonal à Γ).

Dans le cas hyperbolique on a le résultat suivant :

5.2.4 Proposition. *Soit \mathcal{V} un réseau hyperbolique d'horizon H et soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ trois cercles-droites distincts de \mathcal{V} engendrant un pinceau \mathcal{F} . Ce pinceau est orthogonal à H et on a l'un des cas suivants :*

1) *Le pinceau \mathcal{F} est à points-base m, n avec $m \in \mathbf{D}$ et $n = i_H(m)$. Les droites hyperboliques Δ_i sont concourantes en m .*

2) *Le pinceau \mathcal{F} est à point limite m avec $m \in H$. Les droites hyperboliques Δ_i sont "parallèles au sens fort" (i.e. concourantes en un point de l'horizon).*

3) *Le pinceau \mathcal{F} est à points de Poncelet m, n . Dans ce cas, les points m, n sont sur H , il existe un unique cercle-droite $D \in \mathcal{V}$ orthogonal à \mathcal{F} (donc aux Δ_i). Les droites hyperboliques Δ_i admettent une perpendiculaire commune.*

5. En fait, c'est la polaire de m , voir Partie IV ou ci-dessous 5.2.22.

Démonstration. Comme les Δ_i sont orthogonaux à H , il en est de même de \mathcal{F} . Dans le cas 1), si m, n sont les points-base de \mathcal{F} , on a $\{m, n\} = \Delta_1 \cap \Delta_2$ (au sens ordinaire). Comme les Δ_i sont orthogonaux à H , l'inversion i_H les laisse stables, donc aussi $\{m, n\}$. Si m et n étaient fixes, ils seraient sur H , de sorte que H serait dans \mathcal{F} , donc orthogonal à lui-même et c'est absurde. Ils sont donc échangés par i_H ce qui prouve 1). Le même argument montre que, dans le cas 2), le point limite est sur H . Enfin, dans le cas 3), le pinceau orthogonal \mathcal{F}^\perp admet les points-base m, n , qui sont dans \mathcal{F} , donc orthogonaux à H , donc sur H . Cela montre qu'il est formé uniquement de cercles-droites réels. C'est une droite projective de \mathbf{P}^3 , non contenue dans le plan \mathcal{V} , de sorte que son intersection avec \mathcal{V} est un unique cercle-droite.

5.2.5 Remarque. En fait, l'argument développé dans le cas 3) s'applique aussi dans les autres, mais l'intersection $\mathcal{V} \cap \mathcal{F}^\perp$ est soit le point limite m dans le cas 2), soit un cercle imaginaire dans le cas 1), voir exercice 5.4.4.

Traitons enfin le cas euclidien :

5.2.6 Proposition. Soit \mathcal{V} un réseau euclidien d'horizon⁶ m (de sorte que le plan euclidien associé est $\mathcal{P} - \{m\}$) et soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ trois cercles-droites distincts de \mathcal{V} engendrant un pinceau \mathcal{F} . Il y a deux cas :

1) Le pinceau est à points-base m, n . Les droites euclidiennes Δ_i sont concourantes en n .

2) Le pinceau est à point limite m . Les droites Δ_i sont "parallèles".

Démonstration. C'est clair car les éléments de \mathcal{V} sont tous orthogonaux à m , i.e. passent par m .

5.2.7 Scolie. Forts de ces résultats, nous nous contenterons dans ce qui suit de conclure que certains éléments sont en pinceau, à charge pour le lecteur de préciser s'il s'agit d'un vrai concours ou de l'existence d'une perpendiculaire commune. Il pourra toujours se reporter au chapitre 3 de la Partie IV pour toutes précisions.

5.2.3 Les bissectrices

Rappelons qu'on appelle bissectrice de deux "droites" D_1, D_2 , dans une géométrie métrique, une droite D telle que la symétrie d'axe D échange les D_i . Dans le cas présent, ces symétries proviennent des réflexions τ_D et on les a rencontrées ci-dessus, elles correspondent aux "cercles-milieux" A^+ et A^- de 4.1.10. La chose essentielle à noter est que, comme les axes de symétries

6. On peut supposer $m = \infty$ pour plus de clarté.

s'écrivent comme combinaison linéaire des D_i , voir 4.1.8, ils sont bien dans le réseau considéré, de sorte que ce sont bien des droites pour la géométrie associée. Le concours des bissectrices, dans chacun des cas euclidien, hyperbolique et elliptique, est alors conséquence du théorème général 4.1.12.

5.2.8 Remarques. 1) Dans le cas euclidien, il faut vérifier que les bissectrices ne sont pas parallèles ce qui peut bien entendu se faire de manière élémentaire. Pour les lecteurs qui aiment les calculs, voir exercice 5.4.6.

2) Comme conséquence de l'existence des bissectrices on retrouve le fait que le groupe $G_{\mathcal{V}}$ est transitif sur les droites de la géométrie associée à \mathcal{V} .

5.2.4 Les hauteurs

5.2.9 Proposition-Définition. Soit $T := C_1C_2C_3$ un trilatère. On suppose que C_1 n'est pas orthogonal à la fois à C_2 et C_3 . Il existe un unique élément $H_1 \in \mathcal{E}$ situé dans le pinceau $\mathcal{F}_1 = (C_2, C_3)$ et orthogonal à C_1 . On l'appelle **hauteur généralisée de T relative à C_1** .

Démonstration. On cherche H_1 sous la forme $\lambda_2C_2 + \lambda_3C_3$. Un calcul immédiat donne l'expression de H_1 :

$$H_1 = \varphi(C_1, C_3)C_2 - \varphi(C_1, C_2)C_3.$$

Avec l'hypothèse, on voit que H_1 est non nul, donc définit un élément de \mathcal{E} .

5.2.10 Remarques. 1) Si C_1 est orthogonal à C_2 et C_3 , il est orthogonal à tout le pinceau (C_2, C_3) .

2) Attention, si C_2 et C_3 ne se coupent pas, on ne peut pas dire que la hauteur H_1 passe par un sommet de T .

3) Si C_2, C_3 sont sécants⁷, le pinceau \mathcal{F}_1 est à points-base, donc ses éléments sont tous des cercles-droites (i.e. vérifient $q > 0$). La hauteur généralisée est alors une hauteur au sens strict. C'est le cas si le trilatère définit un triangle du plan métrique associé.

4) Si C_2, C_3 sont tangents⁸ en m , le point m est dans le pinceau \mathcal{F}_1^\perp , de sorte que H_1 est orthogonal à m . C'est donc un cercle-droite, sauf si l'on a $H_1 = m$. Ce cas se produit si et seulement si le cercle C_1 passe par m (par exemple si C_2, C_3 sont des droites parallèles et si C_1 est une droite).

5) Lorsque C_2, C_3 sont disjoints, trois cas sont possibles pour H_1 : un cercle-droite, un point, un cercle imaginaire.

Dans tous les cas, on a gratuitement le théorème attendu :

7. On englobe bien entendu dans ce cas celui des droites sécantes.

8. Ou si ce sont des droites parallèles.

5.2.11 Théorème. Soit $T = C_1C_2C_3$ un trilatère. On suppose qu'aucun côté de T n'est orthogonal aux deux autres. Alors, les hauteurs généralisées de T sont en pinceau.

Démonstration. Avec les notations précédentes, cela résulte de la formule :

$$\varphi(C_2, C_3)H_1 + \varphi(C_3, C_1)H_2 + \varphi(C_1, C_2)H_3 = 0.$$

On obtient comme corollaire le résultat du “concours” des hauteurs dans les trois cas : euclidien, elliptique, hyperbolique.

5.2.12 Corollaire. On suppose que le trilatère T définit un triangle du plan métrique associé. Alors, les hauteurs généralisées du trilatère sont les hauteurs de ce triangle et elles sont en pinceau dans le plan métrique.

Bien entendu, dans le cas hyperbolique, les hauteurs ne sont pas nécessairement concourantes, mais, sinon, elles admettent une perpendiculaire commune.

5.2.13 Remarque. Comme pour les bissectrices, dans le cas euclidien, il faut vérifier que les hauteurs ne sont pas parallèles, voir exercice 5.4.6.

5.2.5 Les médiatrices anallagmatiques

Nous avons vu en 4.1.6 qu'étant donnés deux points $m, n \in \mathcal{P}$, il y a une infinité d'inversions qui les échangent. Si l'on s'impose une contrainte supplémentaire, à savoir un horizon, on a le résultat suivant :

5.2.14 Proposition-Définition. Soit C un élément de \mathcal{E} (cercle-droite, cercle imaginaire ou point) et soient m, n deux points distincts non orthogonaux à C . Il existe exactement une inversion (ou symétrie) de “cercle” A orthogonal à C qui échange m, n . On a la formule $A = \varphi(n, C)m - \varphi(m, C)n$.

Le “cercle” A est appelé **médiatrice** de m, n relativement à C .

Démonstration. Si τ_A échange m et n on a $\tau_A(m) = n = m - \frac{2\varphi(A, m)}{q(A)}A$.

Comme m et n sont distincts, $\varphi(A, m)$ est non nul et on en déduit que A est dans le pinceau (m, n) . Cherchons donc A sous la forme $\lambda m + \mu n$ avec λ, μ non nuls. Un tel A est non isotrope, orthogonal à $\lambda m - \mu n$ et il en résulte que τ_A envoie λm sur $-\mu n$ dans E donc m sur n dans \mathcal{E} . Il reste à déterminer λ, μ pour que A soit orthogonal à C . On doit avoir $\lambda\varphi(m, C) + \mu\varphi(n, C) = 0$. On peut donc prendre $\lambda = \varphi(n, C)$ et $\mu = -\varphi(m, C)$ (non nuls par hypothèse).

5.2.15 Remarque. On a $q(A) = -2\varphi(m, C)\varphi(n, C)\varphi(m, n)$. Si C est un point, comme φ appliquée à deux points est négative (voir 3.1.9), on voit que $q(A)$ est > 0 , donc A est un cercle-droite. Si C est un cercle réel, comme $\varphi(m, C)$ est du signe opposé à la puissance de m par rapport à C , A est réel si m, n sont dans la même position par rapport à C (tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs) et imaginaire sinon. Enfin, si C est imaginaire, $\varphi(m, C)$ est toujours négatif (voir 3.1.11), donc A est un cercle réel.

On obtient alors gratis le théorème général de concours des médiatrices anallagmatiques :

5.2.16 Théorème. Soient $C \in \mathcal{E}$ et $a, b, c \in \mathcal{P}$ distincts et non orthogonaux à C . Les médiatrices de b, c ; c, a et a, b relativement à C sont en pinceau dans \mathcal{E} .

Démonstration. Les trois médiatrices sont $U = \varphi(c, C)b - \varphi(b, C)c$, $V = \varphi(a, C)c - \varphi(c, C)a$ et $W = \varphi(b, C)a - \varphi(a, C)b$ et on a $\varphi(a, C)U + \varphi(b, C)V + \varphi(c, C)W = 0$.

5.2.6 Les médiatrices dans les géométries euclidienne et non euclidiennes

La géométrie euclidienne

Choisissons ∞ comme horizon. Le plan \mathcal{V} orthogonal à ∞ est donc formé des droites du plan euclidien. Le théorème 5.2.16 donne alors le résultat bien connu :

5.2.17 Théorème. Soient a, b, c trois points non alignés du plan affine euclidien ordinaire. Les médiatrices du triangle abc sont concourantes.

Démonstration. On se place dans $\mathcal{V} = \infty^\perp$. Les médiatrices anallagmatiques de abc relatives à ∞ sont orthogonales à ce point, donc sont des droites ordinaires. Le théorème 5.2.16 montre qu'elles sont en pinceau, donc concourantes ou parallèles en vertu de 5.2.6. Il reste à voir qu'elles ne sont pas parallèles. Comme on a, pour tout point $a \neq \infty$, $\varphi(a, \infty) = -1/2$, on voit que les médiatrices sont simplement $b - c$, $c - a$ et $a - b$. Si par exemple $b - c$ est parallèle à $c - a$, cela signifie que ∞ est dans le pinceau $(b - c, c - a)$ et on en déduit que les quatre points ∞, a, b, c sont coplanaires dans \mathcal{E} , ce qui (voir 6.1.3) signifie que a, b, c sont alignés dans le plan euclidien, contrairement à l'hypothèse. Pour une preuve par le calcul, où l'on retrouvera les déterminants de Cayley-Menger, voir exercice 5.4.7.

La géométrie hyperbolique

Cette fois, on choisit un cercle réel H comme horizon, par exemple le cercle unité et on travaille dans le modèle du disque de Poincaré \mathbf{D} .

5.2.18 Théorème. *Soient a, b, c trois points non alignés de \mathbf{D} . Les médiatrices du triangle abc sont concourantes dans \mathbf{D} , ou sur l'horizon, ou admettent une perpendiculaire commune.*

Démonstration. Les médiatrices au sens hyperbolique sont portées par des cercles-droites orthogonaux à H , donc ce sont exactement les médiatrices anallagmatiques relatives à H . On a vu qu'elles sont en pinceau dans \mathcal{E} . La conclusion est exactement 5.2.4.

5.2.19 Remarque. Si a, b sont dans \mathbf{D} , et si $a' = i_H(a)$ et $b' = i_H(b)$ sont leurs inverses, on vérifie que τ_D échange aussi a' et b' (comme i_H conserve D , c'est la formule de conjugaison $i_H \tau_D i_H = \tau_D$), ce qui est rassurant, puisque les points a, a' et b, b' sont identifiés dans le plan hyperbolique. En revanche, la symétrie qui échange a et b' est une inversion négative (i.e. de cercle imaginaire), cf. 5.2.15. On verra en 5.2.28 qu'il s'agit d'une symétrie centrale.

La géométrie elliptique

La situation est un peu plus délicate dans le cas elliptique. En effet, reprenons la description du plan elliptique \mathbf{E} associé à un réseau \mathcal{V} de \mathcal{E} . On note encore Γ l'horizon de \mathcal{V} et K l'ombre de Γ . Soient b, c deux points de \mathbf{E} . Une médiatrice de b, c est une droite elliptique, donc un cercle-droite A de \mathcal{E} , orthogonal à Γ , et tel que la réflexion τ_A transforme b en c , ou en $c' = \tau_\Gamma(c)$ puisque c et c' sont identifiés dans \mathbf{E} . Il y a donc deux médiatrices $A^+ = \varphi(c, \Gamma)b - \varphi(b, \Gamma)c$ et $A^- = \varphi(c', \Gamma)b - \varphi(b, \Gamma)c'$.

5.2.20 Remarques. 1) Il y a aussi *a priori* deux autres médiatrices : $A'^+ = \varphi(c', \Gamma)b' - \varphi(b', \Gamma)c'$ et $A'^- = \varphi(c, \Gamma)b' - \varphi(b', \Gamma)c$, avec $b' = \tau_\Gamma(b)$. Comme on a $\tau_\Gamma(\Gamma) = -\Gamma$, on voit que les quantités $\varphi(c', \Gamma)$ et $\varphi(c, \Gamma)$ sont opposées. On en déduit qu'on a $\tau_\Gamma(A^+) = -A'^+$ et $\tau_\Gamma(A^-) = -A'^-$, et comme A^+ et A^- sont orthogonales à Γ , donc invariantes par τ_Γ , on retrouve les mêmes droites.

2) **Attention**, les notations A^+, A^- n'ont pas de sens intrinsèque car elles dépendent des choix des représentants de b, c et Γ . Dans ce qui suit, on supposera toujours qu'on a normalisé points et cercles par le choix de la première coordonnée égale à 1. Pour une définition de médiatrice intrinsèque, voir Partie IV ??.

Avec ces précautions, on obtient :

5.2.21 Théorème. Soient a, b, c trois points non alignés de \mathbf{E} . Les médiatrices A^+, B^+, C^+ ; A^+, B^-, C^- ; A^-, B^+, C^- et A^-, B^-, C^+ du triangle abc sont concourantes.

Démonstration. Pour les médiatrices d'exposant $+$ c'est exactement 5.2.16. Pour les autres on utilise la remarque 1) précédente. Par exemple, on écrit $A^+ = \varphi(c, \Gamma)b - \varphi(b, \Gamma)c$, $B^- = \varphi(a', \Gamma)c - \varphi(c, \Gamma)a'$, $C'^- = \varphi(b, \Gamma)a' - \varphi(a, \Gamma)b$ et on a la relation $\varphi(a, \Gamma)A^+ + \varphi(b, \Gamma)B^- + \varphi(c, \Gamma)C'^- = 0$, d'où le concours de A^+, B^- et $C'^- = C^-$.

5.2.7 Pôles, polaires, milieux, médianes

Comme on l'a dit, l'entrée dans les géométries non euclidiennes par la voie anallagmatique est très efficace pour étudier les propriétés des droites, mais nettement moins pour étudier celles des points. Cela va notamment apparaître maintenant dans les questions de milieux.

Le cas elliptique

On conserve les notations précédentes : Γ, K, \mathbf{E} . Le lecteur se souvient sans doute qu'en géométrie elliptique, symétries axiales et centrales coïncident. La proposition suivante le montre d'une autre manière.

5.2.22 Proposition-Définition. 1) Soit D une droite elliptique (c'est-à-dire un cercle-droite orthogonal à Γ). Les inversions i_Γ et $\tau_D = i_D$ commutent, leur produit σ est une involution qui admet deux points fixes, d intérieur à K et $d' = i_\Gamma(d)$ extérieur, qui sont les points de Poncelet du pinceau (Γ, D) . Dans \mathbf{E} , la réflexion elliptique τ_D et la symétrie centrale elliptique $\sigma_d = i_\Gamma i_D$ coïncident (voir Partie IV, Ch. 1, §4). Le point d est appelé **pôle elliptique** de D .

2) Inversement, si d est un point de $\widehat{\mathbf{C}}$ et d' son inverse par rapport à Γ , il existe un unique cercle-droite D orthogonal à Γ (donc une droite elliptique) dans le pinceau (d, d') . La droite D est appelée **polaire elliptique** de d et d est le **pôle elliptique** de D .

Démonstration. 1) Comme D est orthogonale à Γ elle est invariante par i_Γ et le résultat vient de 3.3.8. Si a est l'un des points fixes de σ , on a $i_D(a) = i_\Gamma(a) := b$ et donc $i_D(b) = i_\Gamma(b) = a$, de sorte que l'autre point fixe est l'inverse de a . Dans \mathbf{E} , comme on identifie les points m et $i_\Gamma(m)$, les deux applications i_D et σ_d sont égales.

2) Comme Γ est un cercle imaginaire, les points d, d' sont distincts, donc définissent un pinceau \mathcal{F} qui contient Γ en vertu de la formule (*) de 3.3.6.

L'orthogonal de Γ coupe ce pinceau en un unique point D qui est un cercle-droite. On a donc $\mathcal{F} = (d, d') = (\Gamma, D)$, ce qui, vu 1), montre que d est le pôle de D .

5.2.23 Proposition. *En géométrie elliptique, toute réflexion est un produit de deux réflexions.*

Démonstration. Soit τ_D une réflexion, avec D orthogonale à Γ . On considère le pinceau $\mathcal{F} = (D, \Gamma)$ et son orthogonal \mathcal{F}^\perp . On choisit D_1, D_2 dans \mathcal{F}^\perp , orthogonales. On a alors $\tau_\Gamma \tau_D = \tau_{D_1} \tau_{D_2}$ en vertu de 3.3.10, d'où le résultat puisque τ_Γ est l'identité dans \mathbf{E} .

5.2.24 Remarque. Dans la partie IV, avec la compactification du plan elliptique en le plan projectif, le point d est apparu comme le pôle de la droite D au sens de l'orthogonalité par rapport à la forme quadratique $X^2 + Y^2 + T^2$. Bien entendu, et c'est l'un des défauts de la compactification anallagmatique, cet aspect disparaît ici, mais cela explique l'appellation. Pour une construction du pôle, voir exercice 5.4.8.

5.2.25 Proposition-Définition. *Soient $a, b \in \mathbf{E}$. Il existe deux points m^+ et m^- de \mathbf{E} tels que les symétries de centres m^+ et m^- échangent a et b . Les points m^+ et m^- sont appelés **milieux** de a, b .*

Démonstration. Comme a, b ont deux médiatrices D^+ et D^- , leurs pôles elliptiques m^- et m^+ conviennent.

5.2.26 Proposition. *Soient a, b, c trois points du plan elliptique. On note a^+, a^- (resp. b^+, b^- , resp. c^+, c^-) les milieux de b, c (resp. c, a , resp. a, b). Alors, les points a^+, b^+, c^- ; a^+, b^-, c^+ ; a^-, b^+, c^+ ; a^-, b^-, c^- sont alignés au sens elliptique (i.e. sur un cercle-droite qui coupe l'ombre de Γ en deux points diamétralement opposés).*

Démonstration. La proposition résulte de 5.2.21 et du lemme suivant :

5.2.27 Lemme. *Soient A, B, C trois droites elliptiques et a, b, c leurs pôles elliptiques. Alors A, B, C sont concourantes si et seulement si a, b, c sont alignés (au sens de \mathbf{E}).*

Démonstration. (du lemme) Ce lemme est évident par dualité avec la description de la géométrie elliptique vue à la partie IV mais un peu moins ici.

Notons a', b', c' les inverses de a, b, c par rapport à Γ . On a donc $(a, a') = (A, \Gamma)$ par définition des pôles. Supposons A, B, C concourantes en $m \in \mathbf{E}$. Soit $m' = i_\Gamma(m)$ et soit M la polaire elliptique de m . On a donc $(m, m') =$

(Γ, M) et les droites A, B, C sont orthogonales à ce pinceau, donc à M . Il s'agit de montrer que a, b, c sont orthogonaux à M . Traitons par exemple le cas de a . Comme a est dans (A, Γ) , il suffit de montrer que M est orthogonal à ce pinceau. Or, on sait que M est orthogonal à Γ (comme polaire elliptique) et il est aussi orthogonal à A , d'où le résultat.

Pour le concours des médianes, voir exercice 5.4.9.

Le cas hyperbolique

Nous venons de voir qu'en géométrie elliptique il y a identité entre symétries axiales et centrales. Dans le cas hyperbolique, en revanche, ces deux sortes de symétries sont bien distinctes. Dans tout ce paragraphe, H désigne le cercle horizon, \mathbf{D} le disque de Poincaré associé. On rappelle que, dans la géométrie hyperbolique, les points m et $i_H(m) = \tau_H(m)$ sont identifiés.

5.2.28 Proposition. 1) Soit D une droite hyperbolique (donc un cercle-droite orthogonal à H). La symétrie τ_D commute avec τ_H . Le produit est une involution de $PGL(2, \mathbf{C})$ dont les points fixes (au sens de $\widehat{\mathbf{C}}$) sont les deux points d'intersection de H et D . Comme transformations hyperboliques, τ_D et $\tau_D\tau_H$ sont égales.

2) Soit Γ un cercle imaginaire orthogonal à H . Si K est l'ombre de Γ , cela signifie que H coupe K en deux points diamétralement opposés. Les involutions τ_Γ et τ_H commutent, de sorte que $\sigma = \tau_\Gamma\tau_H$ est une involution de $PGL(2, \mathbf{C})$. Cette involution admet deux points fixes o et o' avec o intérieur à H et $o' = \tau_H(o)$ extérieur. C'est la **symétrie hyperbolique** de centre o , notée σ_o . Les points o, o' sont les points de Poncelet du pinceau (H, Γ) .

Démonstration. Le premier point est clair par 3.3.8, ainsi que le début du second. Comme le pinceau (H, Γ) est à points de Poncelet, ce sont eux les points fixes de σ , toujours en vertu de 3.3.8. Pour la construction de o , voir l'exercice 3.4.2.

On peut retrouver ainsi la définition du milieu hyperbolique :

5.2.29 Proposition-Définition. Soient $a, b \in \mathbf{D}$. Il existe un unique point $m \in \mathbf{D}$ tel que la symétrie centrale hyperbolique σ_m échange a et b . Ce point est appelé **milieu** de a, b . C'est l'unique point d'intersection (dans \mathbf{D}) de la droite hyperbolique (ab) et de la médiatrice de a, b .

Démonstration. On considère l'inverse $b' = \tau_H(b)$. On a vu en 5.2.14 qu'il existe une unique réflexion τ_Γ qui envoie a sur b' , avec Γ orthogonal à H . Comme a et b' sont de part et d'autre de H , Γ est un cercle imaginaire (voir 5.2.15) et $\sigma = \tau_H\tau_\Gamma$ convient.

Pour voir que m est l'intersection de (ab) et de la médiatrice, il faut préciser Γ . En vertu de 5.2.14 on a $\Gamma = \varphi(a, H)b' - \varphi(b', H)a$ avec $b' = \tau_H(b) = b - \frac{2\varphi(b, H)}{q(H)}H$. Un calcul immédiat donne alors :

$$\Gamma = \varphi(a, H)b + \varphi(b, H)a - 2\frac{\varphi(a, H)\varphi(b, H)}{q(H)}H.$$

Les points m et $m' = \tau_H(m)$ sont les points de Poncelet du pinceau (Γ, H) . Ils s'écrivent donc sous la forme $\varphi(a, H)b + \varphi(b, H)a + \mu H$ et il faut vérifier qu'ils sont orthogonaux à C et à la droite hyperbolique $D = (ab)$. Pour D c'est clair car elle est orthogonale à a, b, H . Pour C , qui vérifie $C = \varphi(a, H)b - \varphi(b, H)a$ et est orthogonal à H , cela résulte de la valeur des coefficients de a, b .

5.2.30 Proposition. *Soient D, D' deux droites hyperboliques orthogonales se coupant en $a \in \mathbf{D}$. Le produit $\tau_D\tau_{D'}$ est la symétrie centrale hyperbolique de centre a .*

Démonstration. Il est clair que le produit est une involution qui fixe a et son inverse $a' = \tau_H(a)$. Si \mathcal{F} est le pinceau (D, D') , son orthogonal est donc $\mathcal{F}^\perp = (a, a')$, il contient H et l'orthogonal de H dans \mathcal{F}^\perp est un cercle imaginaire Γ qui vérifie $\tau_D\tau_{D'} = \tau_H\tau_\Gamma$ (car les points de Poncelet de \mathcal{F}^\perp sont a et a').

On peut maintenant montrer le concours des médianes hyperboliques :

5.2.31 Proposition. *Soit abc un triangle du plan hyperbolique, a', b', c' les milieux des côtés $[bc]$, $[ca]$ et $[ab]$ respectivement. Alors, les droites hyperboliques (aa') , (bb') , (cc') sont en pinceau.*

Démonstration. Dans ce qui suit, nous utiliserons la base⁹ a, b, c, H de E . On a vu dans la preuve de 5.2.29 que le milieu a' de b, c s'écrit $a' = \varphi(b, H)c + \varphi(c, H)b + \mu_a H := \beta_a b + \gamma_a c + \mu_a H$ et de même pour les autres. Appelons A' la médiane (aa') . Par définition, elle est orthogonale au plan projectif $\mathcal{A} = (a, a', H)$ de \mathcal{E} et de même pour les autres. Dire que les trois médianes A', B', C' sont dans un même pinceau \mathcal{F} signifie que l'orthogonal \mathcal{F}^\perp est contenu dans chacun des plans $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ou encore que ces trois plans ont en commun une droite, donc que leurs équations sont linéairement dépendantes. Mais, on exhibe aisément une équation de ces plans sur la base a, b, c, H . Par exemple, l'équation de (a, a', H) est $-\gamma_a Y + \beta_a Z = 0$, soit $(0, -\gamma_a, \beta_a, 0)$ dans la base duale de (a, b, c, H) . Dire que les trois équations sont dépendantes c'est

9. Le lecteur vérifiera que c'en est bien une.

dire que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -\gamma_a & \beta_a & 0 \\ \gamma_b & 0 & -\alpha_b & 0 \\ -\beta_c & \alpha_c & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang < 3 et c'est équivalent à la nullité du premier mineur 3×3 , c'est-à-dire $-\alpha_b\beta_c\gamma_a + \alpha_c\beta_a\gamma_b$.

Comme on a $\alpha_b = \alpha_c = \varphi(a, H)$, $\beta_a = \beta_c = \varphi(b, H)$ et $\gamma_a = \gamma_b = \varphi(c, H)$, le résultat est alors évident.

5.2.8 Génération, simplicité

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons ici les principaux résultats concernant les groupes elliptique et hyperbolique $O^+(q_V)$:

1) Dans le cas elliptique, q_V est une forme euclidienne, les symétries τ_D par rapport aux droites elliptiques engendrent le groupe $G_V \simeq O^+(q_V)$ et ce groupe est simple (voir par exemple [Per96], Ch. VI §6). Dans ce cas, toute réflexion est aussi un produit de deux réflexions (voir 5.2.23). Il n'y a donc pas, en géométrie elliptique, de sous-groupe d'indice deux engendré par les produits pairs de réflexions et, partant, pas d'orientation du plan.

2) Dans le cas hyperbolique, q_V est une forme de Lorentz de rang 3, les symétries τ_D par rapport aux droites elliptiques engendrent le groupe $G_V \simeq O^+(q_V)$. Les produits d'un nombre pair de réflexions forment un sous-groupe distingué d'indice 2 de $O^+(q_V)$ qui est le groupe des commutateurs $\Omega(q_V)$, et ce dernier est simple (voir par exemple [Per96], Ch. VIII §9). Dans ce cas on peut définir des transformations directes et indirectes (celles de Ω et les autres), donc une orientation du plan. Pour une preuve élémentaire de l'existence de l'orientation, voir exercice 5.4.10.

5.3 Retour sur la somme des angles du triangle

Dans cette section nous revenons sur la question de la somme des angles du triangle, déjà abondamment abordée dans les parties IV et V. La seule nouveauté introduite ici est l'unification du résultat principal : la somme des angles du triangle est égale à π en euclidien, plus petite que π en hyperbolique et plus grande que π en elliptique. Ces trois résultats vont apparaître ici comme trois oripeaux de la formule de changement de base pour la forme quadratique q .

5.3.1 Définition des angles

Rappel

Dans la partie IV, nous avons défini les angles (de demi-droites, non orientés) d'un triangle abc dans les géométries non euclidiennes (hyperbolique et elliptique). Le cadre était celui d'un espace vectoriel E de dimension 3 et du plan projectif associé et cet espace était muni d'une forme quadratique non dégénérée q de forme polaire φ . L'angle était défini par la formule suivante :

$$\cos \widehat{bac} = \frac{\varphi(a \wedge b, a \wedge c)}{\sqrt{q(a \wedge b) q(a \wedge c)}}$$

sous réserve que les représentants des points soient choisis de telle sorte que $\varphi(a, b)$ et $\varphi(a, c)$ aient même signe. Dans cette formule, les formes φ et q s'appliquent à des produits vectoriels, mais il revient au même d'appliquer la forme duale φ^* aux produits extérieurs, c'est-à-dire aux droites. Si l'on pose, comme à l'accoutumée, $A = b \wedge c$, $B = c \wedge a$ et $C = a \wedge b$, il devient naturel, dans le cadre anallagmatique de définir les angles d'un trilatère ABC par les formules¹⁰ du type $\cos(B, C) = -\frac{\varphi(B, C)}{\sqrt{q(B)q(C)}}$, mais il faut prendre garde à la normalisation imposée ci-dessus, que nous étudions maintenant.

Normalisation

Le point de départ est le lemme suivant, qui se place dans le cadre de la Partie IV, dont nous reprenons les notations :

5.3.1 Lemme. *On suppose qu'on est en géométrie elliptique ou hyperbolique, avec les formes quadratiques q, q^* et leurs formes polaires φ, φ^* . Soient a, b, c trois points du plan, $A = b \wedge c$, $B = c \wedge a$ et $C = a \wedge b$ les droites associées. On a la formule $\varphi(a, b)[a, b, c]^2 = -\Delta(q)(q^*(C)\varphi^*(A, B) - \varphi^*(C, A)\varphi^*(B, C))$ et de même pour les autres par permutation circulaire.*

Démonstration. C'est un calcul facile avec la formule ??2 de la partie IV (appliquée dans le dual), la formule du double produit (voir Partie II, ??) et la formule $\Delta(q^*) = \Delta(q)^{-1}$ (voir Partie III, ??).

On peut alors revenir en géométrie anallagmatique :

5.3.2 Proposition-Définition. *Soient $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C} \in \mathcal{E}$ trois cercles-droites d'équations $A, B, C \in E$. On considère les quantités ξ_A, ξ_B, ξ_C définies par*

10. Attention au changement de signe : $B = c \wedge a = -a \wedge c$.

$\xi_C = q^*(C)\varphi^*(A, B) - \varphi^*(C, A)\varphi^*(B, C)$ et de même pour les autres par permutation circulaire. On peut choisir les équations A, B, C de telle sorte que les ξ_A, ξ_B, ξ_C soient tous trois ≥ 0 ou tous trois ≤ 0 . On dit alors que les équations sont **normalisées**.

Démonstration. On note qu'en changeant A en $-A$ on change les signes de ξ_B et ξ_C mais pas celui de ξ_A . Si les trois ξ ne sont pas de même signe, il suffit donc de changer l'une des équations en son opposée.

5.3.3 Remarque. Si abc est un triangle de côtés A, B, C , et si on normalise les équations de A, B, C , le lemme 5.3.1 montre que les trois nombres $\varphi(b, c)$, $\varphi(c, a)$ et $\varphi(a, b)$ sont de même signe, ce qui assure la condition de normalisation des géométries non euclidiennes. On notera que la quantité ξ_C est non nulle, sauf dans le cas de la géométrie elliptique lorsque les points a, b sont orthogonaux. Pour l'étude de ce cas voir Partie IV ??.

Définition des angles d'un triangle anallagmatique

Si l'on a deux cercles-droites sécants B, C , on a défini, avec l'invariant anallagmatique, leur angle comme un élément de $[0, \pi/2]$, par la formule $\cos^2 \theta = I^*(B, C) = \frac{\varphi(B, C)^2}{q(B)q(C)}$. Pour avoir un angle de demi-droites, à valeurs dans dans $[0, \pi]$, il faut choisir une racine carrée de I^* , ce qui revient à prendre $\pm\varphi(B, C)$, mais cette expression n'a de sens que pour les équations et non pour les droites. Cependant, avec la procédure de normalisation, on va pouvoir définir les angles d'un triangle :

5.3.4 Proposition-Définition. 1) Soient $B, C \in E$ des éléments distincts vérifiant $q > 0$. On suppose que les cercles associés sont sécants. On définit l'angle $(B, C) \in]0, \pi[$ de ces équations par la formule $\cos(B, C) = -\frac{\varphi(B, C)}{\sqrt{q(B)q(C)}}$.

2) Soient $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \in \mathcal{E}$ trois cercles-droites, ne faisant pas partie d'un même pinceau, d'équations **normalisées** A, B, C . On suppose que les trois couples de cercles sont sécants en a, b, c . On définit l'angle $(\bar{B}, \bar{C}) \in]0, \pi[$ du trilatère $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$ par la formule $\cos(\bar{B}, \bar{C}) = -\frac{\varphi(B, C)}{\sqrt{q(B)q(C)}}$ et de même pour les autres par permutation circulaire.

Ces angles sont indépendants du choix des équations normalisées A, B, C . Dans le plan métrique associé au réseau (A, B, C) , les angles sont ceux du triangle abc défini par le trilatère $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$. On a donc $\cos \hat{a} = -\frac{\varphi(B, C)}{\sqrt{q(B)q(C)}}$ et de même pour les autres par permutation circulaire.

Démonstration. Comme les cercles sont sécants deux à deux, leur invariant anallagmatique I^* est < 1 , donc aussi sa racine, d'où l'existence du cosinus. L'indépendance des équations résulte de ce qui précède. En effet, pour conserver la normalisation il faut soit garder toutes les équations, soit les changer toutes de signe. Dans les deux cas les angles ne changent pas. Enfin, comme on l'a rappelé, on retrouve les angles du triangle tels qu'ils ont été définis dans la partie IV dans le cas non euclidien. Pour le cas euclidien, on montre que la normalisation correspond au choix de l'orientation des droites par les vecteurs $\vec{bc}, \vec{ca}, \vec{ab}$, ce qui revient à considérer les angles de demi-droites au sens usuel, voir exercice 5.4.11.

5.3.2 La formule de changement de base pour la forme quadratique q

Rappelons la formule vue dans la partie III, ?? :

5.3.5 Proposition. *Soit E un espace vectoriel muni d'une forme quadratique q de forme polaire φ . Soit \mathcal{B} une base de E , $\Delta_{\mathcal{B}}(q)$ le discriminant de q dans cette base, et soit a_1, a_2, \dots, a_n une famille de vecteurs de E . On a l'identité :*

$$\det_{\mathcal{B}}(a_1, \dots, a_n)^2 \Delta_{\mathcal{B}}(q) = \begin{vmatrix} q(a_1) & \varphi(a_1, a_2) & \cdots & \varphi(a_1, a_n) \\ \varphi(a_1, a_2) & q(a_2) & \cdots & \varphi(a_2, a_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi(a_1, a_n) & \varphi(a_2, a_n) & \cdots & q(a_n) \end{vmatrix}.$$

Dans le cadre anallagmatique, la forme q s'écrit $b^2 + c^2 - ad$ dans la base canonique donc on a $\Delta(q) = -1/4$ et cette proposition devient :

5.3.6 Corollaire. *Soient $A, B, C \in E$ non alignés dans \mathcal{E} , et soit Γ un générateur de l'orthogonal de (A, B, C) . On a la formule $[A, B, C, \Gamma]^2 = -4q(\Gamma)G(A, B, C)$, où le crochet $[A, B, C, \Gamma]$ est le déterminant de ces vecteurs sur la base canonique et où $G(A, B, C)$ est le déterminant de Gram :*

$$G(A, B, C) := \begin{vmatrix} q(A) & \varphi(A, B) & \varphi(A, C) \\ \varphi(A, B) & q(B) & \varphi(B, C) \\ \varphi(A, C) & \varphi(B, C) & q(C) \end{vmatrix},$$

Cette formule s'écrit encore :

$$[A, B, C, \Gamma]^2 = -4q(\Gamma) \left[q(A)q(B)q(C) + 2\varphi(B, C)\varphi(C, A)\varphi(A, B) - \varphi(B, C)^2 - \varphi(C, A)^2 - \varphi(A, B)^2 \right],$$

et, si A, B, C, Γ sont non isotropes :

$$\frac{[A, B, C, \Gamma]^2}{4q(\Gamma)q(A)q(B)q(C)} = -1 - 2S^*(A, B, C) + I^*(B, C) + I^*(C, A) + I^*(A, B)$$

où les invariants I^* sont les invariants anallagmatiques et S^* le spin (voir 5.1.20).

Dans le cas où A, B, C sont des droites de l'espace euclidien ordinaire, la formule ci-dessus disparaît car on a à la fois $q(\Gamma) = 0$ (car l'orthogonal de (A, B, C) est ∞ qui est isotrope) et $[A, B, C, \Gamma] = 0$ (car le plan (A, B, C) est isotrope donc contient son orthogonal). On peut toutefois prouver le corollaire suivant par passage à la limite :

5.3.7 Corollaire. *Si A, B, C sont des équations de droites (euclidiennes) linéairement indépendantes, le déterminant de Gram $G(A, B, C)$ est nul et on a :*

$$-1 - 2S^*(A, B, C) + I^*(B, C) + I^*(C, A) + I^*(A, B) = 0.$$

Démonstration. Comme A, B, C sont des équations de droites, on peut les écrire, sur la base canonique de E , $A = (0, b_A, c_A, d_A)$ (autrement dit, A est l'équation $b_Ax + c_Ay + d_A = 0$) et de même pour les autres. Supposons par exemple que les droites ne passent pas par l'origine $m = (1, 0, 0, 0)$. On peut alors normaliser les droites en imposant $d_A = d_B = d_C = 1$. Posons $A' = am + A = (a, b_A, c_A, 1)$ avec $a \in \mathbf{R}^*$, et de même pour B' et C' . Avec la normalisation, on voit que l'orthogonal de (A', B', C') est $\Gamma' = -am + \infty = (-a, 0, 0, 1)$ qui n'est pas isotrope, puisqu'on a $q(\Gamma') = a$. On applique la formule ci-dessus avec A', B', C', Γ' . Si G_a est le déterminant de Gram sur A', B', C' , on a donc $-4aG_a = [A', B', C', \Gamma']^2$. Mais tous les termes de la première ligne du déterminant $[A', B', C', \Gamma']$ étant multiples de a , ce déterminant est multiple de a : $[A', B', C', \Gamma'] = aP_a$, où P_a est polynomial en a . Comme a est non nul, on en déduit la formule $-4G_a = aP_a^2$. Quand a tend vers 0 le déterminant G_a tend vers $G := G(A, B, C)$ et on a donc $G = 0$. La deuxième formule en découle en divisant par $q(A)q(B)q(C)$.

5.3.3 Traduction angulaire

Avec la définition des angles donnée ci-dessus, on a $I^*(B, C) = \cos^2 \hat{a}$ et $S^*(A, B, C) = -\cos \hat{a} \cos \hat{b} \cos \hat{c}$ et les formules de 5.3.6 et 5.3.7 ont des traductions angulaires :

$$-1 + 2 \cos \hat{a} \cos \hat{b} \cos \hat{c} + \cos^2 \hat{a} + \cos^2 \hat{b} + \cos^2 \hat{c} = \frac{[A, B, C, \Gamma]^2}{4q(\Gamma)q(A)q(B)q(C)}$$

dans le cas non euclidien et

$$-1 + 2 \cos \hat{a} \cos \hat{b} \cos \hat{c} + \cos^2 \hat{a} + \cos^2 \hat{b} + \cos^2 \hat{c} = 0$$

dans le cas euclidien, qui vont permettre de donner les résultats d'une manière plus séduisante (voir aussi Partie IV ??) :

5.3.8 Proposition. *Soit abc un triangle du plan hyperbolique ou elliptique, A, B, C ses côtés, Γ l'horizon. On a la formule :*

$$\frac{[A, B, C, \Gamma]^2}{16 q(\Gamma)q(A)q(B)q(C)} = \cos \frac{\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2} \cos \frac{\hat{a} + \hat{b} - \hat{c}}{2} \cos \frac{\hat{a} - \hat{b} + \hat{c}}{2} \cos \frac{-\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2}.$$

Dans le cas euclidien on a simplement :

$$\cos \frac{\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2} \cos \frac{\hat{a} + \hat{b} - \hat{c}}{2} \cos \frac{\hat{a} - \hat{b} + \hat{c}}{2} \cos \frac{-\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2} = 0.$$

Démonstration. C'est simplement le lemme trigonométrique suivant que le lecteur prouvera avec délectation :

5.3.9 Lemme. *Soient $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}$ des éléments de $[0, \pi]$. On a la formule :*

$$4 \cos \frac{\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2} \cos \frac{\hat{a} + \hat{b} - \hat{c}}{2} \cos \frac{\hat{a} - \hat{b} + \hat{c}}{2} \cos \frac{-\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2} = -1 + 2 \cos \hat{a} \cos \hat{b} \cos \hat{c} + \cos^2 \hat{a} + \cos^2 \hat{b} + \cos^2 \hat{c}.$$

5.3.4 Le théorème de la somme des angles

5.3.10 Théorème. *Soit abc un triangle du plan hyperbolique (resp. elliptique, resp. euclidien). On a $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} < \pi$ (resp. $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} > \pi$, resp. $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \pi$).*

Démonstration. On pose $s = \cos \frac{\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2}$, $\alpha = \cos \frac{-\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2}$, $\beta = \cos \frac{\hat{a} - \hat{b} + \hat{c}}{2}$

et $\gamma = \cos \frac{\hat{a} + \hat{b} - \hat{c}}{2}$. Avec les notations de 5.3.2, rappelons que la définition des angles de $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ suppose la condition de normalisation qui affirme que ξ_A, ξ_B et ξ_C sont tous trois ≥ 0 ou tous trois ≤ 0 . On a le lemme suivant :

5.3.11 Lemme. *1) Avec les notations précédentes et celles de 5.3.2, le signe de ξ_A est le même que celui de $\beta\gamma + \alpha s$ et de même pour les autres.*

2) Les trois angles $-\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$, $\hat{a} - \hat{b} + \hat{c}$ et $\hat{a} + \hat{b} - \hat{c}$ sont $< \pi$.

Démonstration. 1) Il suffit de calculer $\frac{\xi_A}{q(A)\sqrt{q(B)q(C)}} = -\cos \hat{a} - \cos \hat{b} \cos \hat{c}$.

En utilisant les formules de trigonométrie on trouve que cette quantité vaut $-(\beta\gamma + \alpha s)$ et on a le résultat.

2) On note d'abord que, parmi ces angles, un au plus est $\geq \pi$ (sinon, la somme de deux, qui vaut deux fois l'un des angles du triangle, serait $\geq 2\pi$ et c'est absurde car les angles du triangle sont dans $]0, \pi[$). Si, par exemple, on a $-\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} \geq \pi$, on a $\frac{\pi}{2} \leq \frac{-\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2} < \frac{\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2} < \frac{3\pi}{2}$. Il en résulte qu'on a $s < 0$, $\alpha \leq 0$ et $\beta, \gamma > 0$. Mais alors, la quantité $\beta\gamma + \alpha s$ est positive, alors que $\gamma\alpha + \beta s$ et $\alpha\beta + \gamma s$ sont négatives et, en vertu du point 1), cela contredit la condition de normalisation.

Revenons au théorème et supposons d'abord que le plan est hyperbolique, donc qu'on a $q(\Gamma) > 0$. Le produit des quatre cosinus est donc positif en vertu de 5.3.8. Comme les trois angles munis d'un signe moins ont un cosinus > 0 , on a $\frac{\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2} < \frac{\pi}{2}$ et le résultat.

Supposons maintenant que le plan est elliptique. Cette fois, le produit des quatre cosinus est négatif. Or, on a vu ci-dessus que les cosinus des angles munis d'un signe moins sont > 0 . C'est donc que le cosinus de $\frac{\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}}{2}$ est négatif et cet angle est plus grand que $\pi/2$, d'où le résultat.

Supposons enfin qu'on est dans le cas euclidien. Comme les angles munis du signe $-$ sont $< \pi$ et que le produit des cosinus est nul, c'est qu'on a $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \pi$.

5.3.12 Remarque. Bien entendu, on aimerait avoir, outre le résultat précédent, une formule de Gauss-Bonnet qui relie le défaut $|\pi - \hat{a} - \hat{b} - \hat{c}|$ de la somme des angles et l'aire du triangle abc . On a vu dans la partie IV, ??, qu'il ne faut pas trop compter avoir une version algébrique de la formule car l'aire n'est pas un invariant rationnel et on ne peut séparer la somme $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$ (moralement, l'aire) de ses conjugués $\pm\hat{a} \pm \hat{b} \pm \hat{c}$. D'une certaine manière, c'est donc la formule 5.3.8 qui joue le rôle de Gauss-Bonnet ici.

5.4 Exercices

5.4.1 Calcul du stabilisateur d'un réseau euclidien

5.4.1 Exercice. Déterminer le groupe G_V des éléments $u \in O(q)$ qui conservent le sous-espace vectoriel $V = \infty^\perp$. On cherchera u sous forme matricielle :

$$U = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & 0 \\ v_2 & \alpha & \beta & 0 \\ v_3 & \gamma & \delta & 0 \\ v_4 & f_1 & f_2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Avec les notations de la partie V, ??, montrer que ce groupe est isomorphe à $O(q_V)$.

En appliquant u à un élément $(1, x, y, x^2 + y^2)$ de \mathcal{P} , montrer que G_V est isomorphe au groupe des similitudes du plan euclidien.

5.4.2 Construction de l'horizon

5.4.2 Exercice. Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles non en pinceau. On se propose de construire l'horizon du réseau $\mathcal{V} = (C_1, C_2, C_3)$.

- 1) Construire le centre radical a des C_i (c'est-à-dire le centre de l'horizon).
- 2) On suppose a extérieur aux C_i . Construire le cercle (réel) orthogonal aux C_i et de centre a .
- 3) On suppose a intérieur aux C_i . L'orthogonal des C_i est un cercle imaginaire Γ . Construire l'ombre K de Γ . (On utilisera le symétrique de l'un des C_i par rapport à a pour trouver des points diamétralement opposés de K .)

5.4.3 Où suis-je ? (bis)

5.4.3 Exercice. Soient A, B, C trois cercles-droites distincts. Le but de l'exercice est de donner une condition portant sur les inversions-symétries associées τ_A, τ_B et τ_C permettant de reconnaître si l'on est ou non en géométrie euclidienne. Pour cela on pose $u = \tau_A \circ \tau_B \circ \tau_C$ et $v = \tau_B \circ \tau_C \circ \tau_A$.

1) a) Montrer que τ_B et τ_C commutent si et seulement si B et C sont orthogonaux.

b) Montrer que u ou v sont des inversions-symétries si et seulement si A, B, C sont dans un même pinceau (voir 4.4.5).

On suppose désormais que B et C ne sont pas orthogonaux et que A, B, C ne sont pas dans un même pinceau.

2) Montrer que les transformations u et v commutent si et seulement si le cercle-droite A est stable par $(\tau_B \circ \tau_C)^2$.

3) Montrer que si le réseau $\mathcal{V} = (A, B, C)$ est euclidien les transformations u et v ne commutent pas, mais que u^2 et v^2 commutent.

4) ¶ On suppose que le réseau \mathcal{V} est elliptique. Montrer que u fixe un unique point et laisse stable une unique droite que l'on précisera, et de même pour v . Préciser dans quel cas les transformations u et v commutent. Montrer que, si u et v ne commutent pas, u^2 et v^2 non plus, sauf dans un cas particulier que l'on précisera. Conclure.

5) ¶¶ Traiter de même le cas d'un réseau hyperbolique.

5.4.4 Concours ou perpendiculaire commune ?

5.4.4 Exercice. Soit \mathcal{V} un réseau hyperbolique d'horizon H et soient $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ trois cercles-droites distincts de \mathcal{V} engendrant un pinceau \mathcal{F} à points-base m, n avec $m \in \mathbf{D}$ et $n = i_H(m)$ (voir 5.2.4). Montrer que $\mathcal{F}^\perp \cap \mathcal{V}$ est un cercle imaginaire. (On cherchera un élément de l'intersection sous la forme $D = \lambda m + \mu n$ avec $\varphi(H, D) = 0$ en tenant compte des formules $i_H(m) = n$ et $i_H(H) = -H$.)

5.4.5 Une exercice d'Hadamard

5.4.5 Exercice. Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles. La question est de savoir s'il existe une inversion (ou à défaut une transformation circulaire) qui les transforme en trois cercles de même rayon.

1) Montrer que la question peut être restreinte au cas de l'inversion (on utilisera le fait qu'un élément de $PGL(2, \mathbf{C})$ est toujours produit d'une inversion et d'une similitude).

2) Soient C'_1, C'_2 deux cercles de même rayon. Déterminer les réflexions de \mathcal{E} qui échangent les C'_i et montrer que l'une d'elles est une symétrie axiale, l'autre (qui n'existe que si les cercles ne sont pas tangents) étant une inversion, positive ou négative selon la position des cercles.

3) Soient C_1, C_2 deux cercles, on note A^+ et A^- les cercles-droites (éventuellement confondus) des inversions qui échangent C_1 et C_2 (il s'agit des cercles-milieux, ou bissectrices, au sens de 4.1.10). Montrer que s'il existe une inversion τ de pôle o qui envoie les C_i sur des cercles C'_i de même rayon, elle envoie A^+ ou A^- sur l'axe de symétrie de C'_1 et C'_2 . En déduire que o est sur A^+ ou A^- .

4) Soient C_1, C_2, C_3 trois cercles. Montrer qu'il existe une inversion qui envoie ces cercles sur trois cercles de même rayon si et seulement si les "bissectrices" des C_i sont concourantes. Montrer que c'est toujours le cas si le plan associé aux C_i est elliptique ou euclidien. Si le plan est hyperbolique

c'est encore vrai sauf dans peut-être le cas où les cercles sont deux à deux disjoints (voir 4.1.12 et Partie IV chapitre 3 ?? : dans le cas d'un trilatère il y a seulement trois bissectrices et elles ne sont pas nécessairement concourantes).

5.4.6 Géométrie euclidienne et parallélisme

Dans les exercices de ce paragraphe on travaille avec des réseaux euclidiens.

5.4.6 Exercice. On considère trois droites A, B, C distinctes et linéairement indépendantes et on va montrer par le calcul¹¹ les résultats concernant le parallélisme des droites remarquables du trilatère ABC . On pose $\alpha = q(A)$, $\beta = q(B)$, $\gamma = q(C)$, $a = \varphi(B, C)$, $b = \varphi(C, A)$ et $c = \varphi(A, B)$.

1) Montrer que le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & c & b \\ c & \beta & a \\ b & a & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma + 2abc - \alpha a^2 - \beta b^2 - \gamma c^2$ est nul.

2) Montrer que les droites A, B sont parallèles si et seulement si l'on a $\alpha\beta - c^2 = 0$, puis que deux des droites A, B, C sont parallèles si et seulement si l'on a $P(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) := (\beta\gamma - a^2)(\gamma\alpha - b^2)(\alpha\beta - c^2) = 0$ ou encore $P_s(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) := (a - \sqrt{\beta\gamma})(b - \sqrt{\gamma\alpha})(c - \sqrt{\alpha\beta}) = 0$.

3) On considère les hauteurs $H_A = bB - cC$ et $H_B = cC - aA$. Montrer qu'elles sont parallèles si et seulement si on a :

$$Q(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) := b^2c^2\beta\gamma + c^2a^2\gamma\alpha + a^2b^2\alpha\beta - 2a^3bc\alpha - 2ab^3c\beta - 2abc^3\gamma + 3a^2b^2c^2 = 0.$$

Montrer l'identité $P + Q = \Delta(2abc - \alpha\beta\gamma)$ et en déduire que les hauteurs ne sont pas parallèles si les côtés ne le sont pas.

4) On considère les bissectrices $D_A = \frac{B}{\sqrt{\beta}} - \frac{C}{\sqrt{\gamma}}$ et $D_B = \frac{C}{\sqrt{\gamma}} - \frac{A}{\sqrt{\alpha}}$. Montrer qu'elles sont parallèles si et seulement si l'on a :

$$R(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma) := a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma - 3\alpha\beta\gamma - 2bc\sqrt{\beta\gamma} - 2ca\sqrt{\gamma\alpha} - 2ab\sqrt{\alpha\beta} + 2a\alpha\sqrt{\beta\gamma} + 2b\beta\sqrt{\gamma\alpha} + 2c\gamma\sqrt{\alpha\beta} = 0.$$

Montrer qu'on a $2P_s - R = \Delta$ et conclure.

11. Bien entendu, c'est plus simple géométriquement. C'est l'occasion de montrer que la vision géométrique est porteuse de beaucoup d'informations. Si l'on analyse la preuve géométrique dans le cas des hauteurs, on voit qu'elle repose essentiellement sur le postulat d'Euclide, qui n'est autre que la nullité de Δ , mais dite d'une manière beaucoup plus intuitive!

5.4.7 Exercice. Soient $a, b, c \in \mathcal{P}$ des points différents de ∞ . On pose $x = bc^2$, $y = ca^2$, $z = ab^2$ (carrés des distances).

1) Montrer que les médiatrices $b - c$ et $c - a$ (voir 5.2.17) sont parallèles si et seulement si le déterminant de Cayley-Menger (voir Partie V, ??) $\Gamma_2^\sharp(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy$ est nul (utiliser l'invariant anallagmatique et la formule $\varphi(b, c) = -2bc^2$).

2) Montrer que cela se produit si et seulement si a, b, c sont alignés (utiliser la factorisation de Γ_2^\sharp , voir Partie V, ??).

5.4.7 La géométrie elliptique

5.4.8 Exercice. (Construction du pôle d'une droite elliptique)

On reprend les notations de 5.2.22. Soit D une droite elliptique, qui coupe K en a, b diamétralement opposés. On se propose de construire les points fixes d, d' de la composée $i_D i_\Gamma$. On rappelle que ces points sont les points de Poncelet du pinceau $\mathcal{F} = (\Gamma, D)$, donc les points-base de \mathcal{F}^\perp .

1) Montrer que la médiatrice euclidienne de $[ab]$ est dans \mathcal{F}^\perp , donc contient d et d' .

2) Soit m un point de D , m' son inverse par i_Γ , T la tangente à D en m . Soit C un cercle de centre ω passant par m .

a) Montrer que si ω est sur T , C est orthogonal à D .

b) Montrer que si ω est sur la médiatrice de $[mm']$, C est orthogonal à Γ (voir 1.2.6 ou 3.3.9).

c) En déduire une construction d'un cercle de \mathcal{F}^\perp .

3) Construire les points d, d' . (Le lecteur désireux d'approfondir ce genre de choses se plongera avec délices dans [Mar03].)

5.4.9 Exercice. (Concours des médianes elliptiques)

On se propose de montrer le concours des médianes d'un triangle abc du plan elliptique \mathbf{E} , d'horizon Γ . On reprend les notations de 5.2.21.

1) Montrer que a, b, c, Γ est une base de E .

2) Montrer que le milieu a^- de (bc) s'écrit sous la forme $a^- = \beta_A b + \gamma_{AC} + \mu_A \Gamma$, avec $\beta_A = -\varphi(c, \Gamma)$ et $\gamma_A = \varphi(b, \Gamma)$ et préciser le coefficient μ_A . Procéder de même pour les autres milieux. Montrer que l'autre milieu a^+ s'écrit $a^+ = -\beta_A b + \gamma_{AC} + \mu'_A \Gamma$.

3) L'espace E est toujours muni de la base a, b, c, Γ et les coordonnées dans cette base sont appelées x, y, z, t . Montrer que l'hyperplan (a, a^-, Γ) a pour équation $-\gamma_A y + \beta_A z = 0$.

4) Montrer qu'on a $\alpha_B\beta_C\gamma_A = \alpha_C\beta_A\gamma_B$. Retrouver ainsi le fait que a^+, b^-, c^- sont alignés dans \mathbf{E} . Montrer que les équations F_a, F_b, F_c sont liées, puis que les médianes $(aa^-), (bb^-), (cc^-)$ sont concourantes.

5) Traiter le cas des autres médianes du triangle.

5.4.8 Orientation du plan hyperbolique

5.4.10 Exercice. On reprend les notations de 5.1.12 : \mathcal{V} est un réseau hyperbolique d'horizon H et \mathbf{D} le disque de Poincaré associé. Le but de l'exercice est de montrer que l'on peut orienter le plan hyperbolique, c'est-à-dire qu'on a deux classes d'éléments dans le groupe hyperbolique suivant la parité du nombre de réflexions hyperboliques qui les composent.

1) Soient D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites hyperboliques (i.e. des cercles-droites orthogonaux à H) et τ_i la réflexion associée à D_i . Montrer que $u = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$ peut s'écrire comme produit de deux réflexions hyperboliques. (On utilisera 4.4.4 pour écrire $\tau_1\tau_2 = \tau_D\tau_{D'}$ et $\tau_3\tau_4 = \tau_D\tau_{D''}$ en tenant compte du fait que les deux pinceaux (D_1, D_2) et (D_3, D_4) se rencontrent¹² puisqu'ils sont dans un même réseau.)

2) Montrer qu'une réflexion hyperbolique n'est pas produit de deux. (Sinon, on aurait, dans $PO(q)$, soit¹³ $\tau_D = \tau_{D_1}\tau_{D_2}$, soit $\tau_D\tau_H = \tau_{D_1}\tau_{D_2}$. Écarter le premier cas en pensant PGL , $P\Gamma L$ et le second à l'aide de 4.4.5).

3) Montrer qu'une réflexion hyperbolique n'est pas produit d'un nombre pair de réflexions hyperboliques (utiliser les deux questions précédentes). En déduire que le sous-groupe de $G_{\mathcal{V}}$ formé des produits pairs de réflexions est un sous-groupe d'indice 2 de $G_{\mathcal{V}}$.

5.4.11 Exercice. (Normalisation : le cas euclidien)

1) On munit le plan \mathbf{R}^2 de sa structure euclidienne canonique notée q et de la forme polaire associée φ . Soient b, c deux vecteurs non colinéaires et $a = -b - c$. Montrer que $\chi_{b,c} = q(a)\varphi(b,c) - \varphi(c,a)\varphi(a,b)$ est < 0 .

2) En déduire que la définition usuelle des angles de demi-droites d'un triangle du plan euclidien (voir Partie V ??) coïncide avec celle donnée en 5.3.4 ci-dessus. (Si abc est le triangle et si l'on pose $A = b \wedge c$, $B = c \wedge a$ et $C = a \wedge b$, on montrera des égalités du genre $\varphi^*(B, C) = \varphi(\vec{ca}, \vec{ab})$, puis, avec les notations de 5.3.2, $\xi_A = \chi_{\vec{ca}, \vec{ab}}$.)

12. Si l'intersection est isotrope, on montrera que les deux pinceaux sont égaux et on utilisera 4.4.5.

13. Attention, il y a une petite difficulté, ici.

Chapitre 6

Retour sur la cocyclicité

Nous revenons dans ce chapitre sur la notion de cocyclicité étudiée dans la partie précédente. La nouveauté c'est que cette propriété, de nature quadratique quand on l'examine dans l'espace euclidien, devient linéaire dans l'approche anallagmatique, quatre points étant cocycliques ou alignés s'ils sont coplanaires dans l'espace \mathcal{E} . Nous examinerons avec ce point de vue l'un des théorèmes qui nous sert de fil conducteur : le théorème des six cercles de Miquel que nous avons déjà revu dans cette Partie avec le lemme des six birapports. Dans ce chapitre il va apparaître sous un autre jour : comme un théorème de géométrie algébrique, précisément un théorème de liaison, pas si éloigné des théorèmes de Pascal ou de Pappus et d'autres. Nous en donnerons plusieurs démonstrations, certaines relativement élémentaires, d'autres plus sophistiquées qui utiliseront les outils de la géométrie algébrique projective "moderne".

6.1 Cocyclicité, colinéarité et dépendance linéaire

Dans cette section, montre que la propriété de cocyclicité qui apparaissait jusqu'ici comme une propriété algébrique de degré ≥ 2 (voir par exemple Partie V ??) devient une propriété linéaire dans l'espace \mathcal{E} . Les notations sont celles du chapitre 3.

6.1.1 Lemme. 1) *Trois droites isotropes distinctes ne sont jamais coplanaires dans l'espace vectoriel E .*

2) *Trois points distincts $a, b, c \in \mathcal{P}$ ne sont jamais alignés dans l'espace projectif \mathcal{E} .*

Démonstration. Il suffit de montrer le point 1), c'est-à-dire qu'un plan vectoriel de E ne contient pas trois droites isotropes distinctes. Comme la signature de q est $(3, 1)$, son indice est 1 et les plans de E ne sont jamais totalement isotropes. Ils contiennent donc 0, 1 ou 2 droites isotropes.

La proposition suivante n'étonnera personne :

6.1.2 Proposition. (Incidence) *Par trois points distincts de \mathcal{P} passe (au sens ordinaire) un cercle-droite et un seul. Précisément :*

- 1) *Par deux points de $\mathcal{P} - \{\infty\}$ passe une droite et une seule.*
- 2) *Par trois points non alignés (au sens ordinaire) passe un cercle et un seul.*

Démonstration. Soient m_1, m_2, m_3 les trois points et notons encore m_i leurs représentants dans E . En vertu du lemme précédent, le sous espace vectoriel $\langle m_1, m_2, m_3 \rangle$ est de dimension 3, donc son orthogonal est de dimension 1 engendré par C . L'élément C étant orthogonal à des éléments de \mathcal{P} est un cercle-droite qui contient les m_i (au sens ordinaire), voir 3.1.14. Les autres assertions sont immédiates.

Le critère suivant, qui ramène la question de la cocyclicité à la dépendance linéaire dans \mathcal{E} , est évident, mais essentiel :

6.1.3 Proposition. *Soient m_1, m_2, m_3, m_4 quatre points de \mathcal{P} . Ces points sont cocycliques ou alignés (au sens ordinaire) si et seulement s'ils sont coplanaires au sens de \mathcal{E} (ou encore si le sous-espace vectoriel de E engendré par leurs représentants est de dimension 3).*

Démonstration. En effet, dire que les points sont cocycliques ou alignés signifie qu'il existe un cercle-droite C qui leur est orthogonal au sens de \mathcal{E} . Les représentants des points sont alors dans l'hyperplan $V = C^\perp$ de E , donc les m_i dans le réseau \mathcal{V} associé. Inversement, si les points sont dans un réseau \mathcal{V} , l'orthogonal est un point de \mathcal{E} qui n'est ni dans \mathcal{P} , ni un cercle imaginaire en vertu de 3.1.14. C'est donc un cercle-droite qui contient les m_i .

6.1.4 Remarque. Si l'un des points m_i est le point ∞ , le critère permet d'affirmer que les autres points sont alignés.

6.2 Le théorème des 6 cercles, version pyramide

Le cadre de l'espace des cercles et droites, avec la linéarisation de la propriété de cocyclicité qu'il apporte, rend presque triviaux certains résultats qui ne sont pas si faciles dans le cadre élémentaire (voir exercice 6.6.1). Le

théorème facile des six cercles (que je propose de qualifier de théorème de la pyramide, voir figure ci-dessous) en est un très bel exemple¹. Il ressemble au théorème des six cercles de Miquel, en plus simple.

6.2.1 Théorème. Soient $a, b, c, d; a', b', c', d'$ huit points distincts de \mathcal{P} . On suppose les points (a, a', b, b') ; (a, a', c, c') ; (a, a', d, d') ; (b, b', c, c') ; (b, b', d, d') cocycliques ou alignés. Alors, (c, c', d, d') sont cocycliques ou alignés.

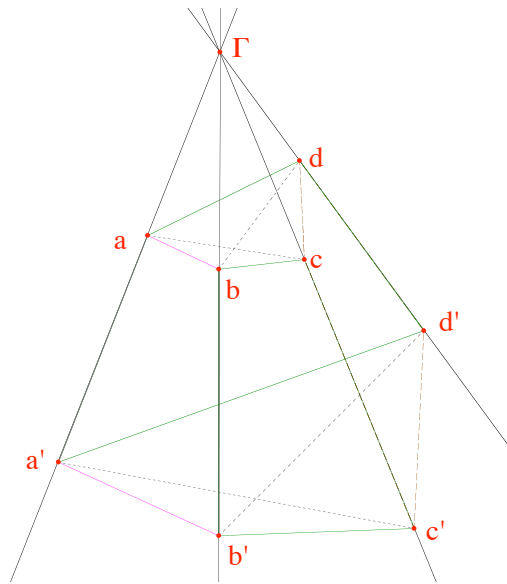


FIGURE 6.1 – Le théorème des six cercles, version pyramide, dans \mathcal{E}

Démonstration. Traduisant le mot cocyclique par coplanaire dans \mathcal{E} , on considère les plans $P_1 = (a, a', b, b')$ et $P_2 = (a, a', c, c')$ d'une part et $P_1 = (a, a', b, b')$ et $P_3 = (b, b', c, c')$ d'autre part. Les droites intersections $(aa') = P_1 \cap P_2$ et $(bb') = P_1 \cap P_3$ sont coplanaires dans P_1 , donc concourantes en un point² Γ . Ce point est donc dans $P_2 \cap P_3 = (cc')$, mais il est aussi dans $P_4 = (a, a', d, d')$ et dans $P_5 = (b, b', d, d')$, donc dans leur intersection (dd') . Il en résulte que les droites (cc') et (dd') sont concourantes en Γ , donc coplanaires et on a le résultat.

6.2.2 Remarques. 1) Ce qui fait la différence entre ce théorème et le suivant c'est qu'ici, le fait que les 8 points de \mathcal{E} soient dans \mathcal{P} (donc sur une quadrique) n'a aucune importance, alors qu'il est crucial pour le théorème de Miquel.

1. Je l'emprunte à Berger, voir [Ber09], p 117.

2. Un point de \mathcal{E} , donc un cercle ou une droite ou un cercle imaginaire, bien entendu.

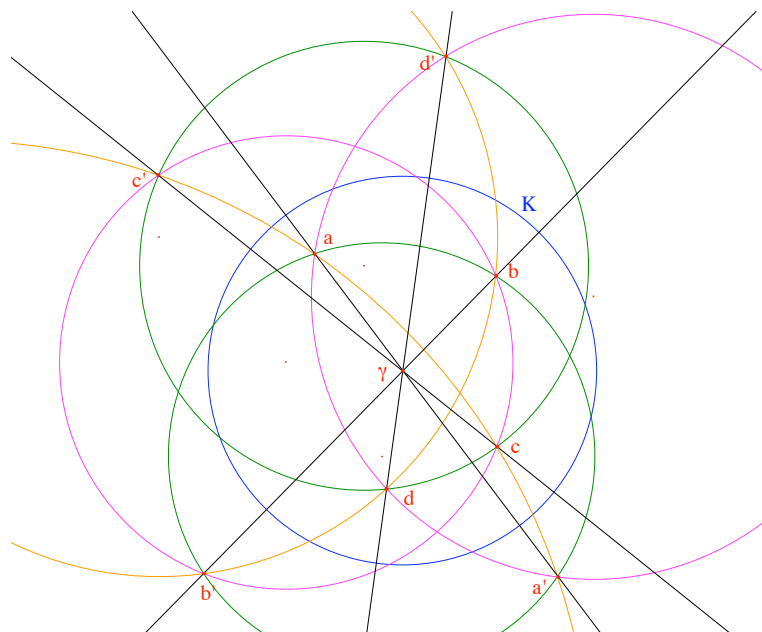


FIGURE 6.2 – Le théorème des six cercles, version pyramide, cas elliptique. Le cercle K est l’ombre du cercle imaginaire Γ de centre γ .

2) En termes de cercles, le cercle C_i qui contient les quatre points de P_i est l’orthogonal de ce plan de \mathcal{E} . Il est donc orthogonal à l’intersection des P_i c’est-à-dire au cercle Γ . En définitive, les six cercles de la configuration sont orthogonaux à un même “cercle” Γ . Comme Γ est aligné avec deux points de \mathcal{P} , ce ne peut être un cercle point. S’il s’agit d’un cercle réel ou d’une droite, les six cercles s’interprètent comme six droites du modèle hyperbolique de Poincaré correspondant, s’il s’agit d’un cercle imaginaire, ce sont six droites du modèle elliptique correspondant. De plus les points a, a' (resp. b, b' , resp. c, c' , resp. d, d') sont inverses dans l’inversion de cercle Γ , voir exercice 6.6.1.

6.3 Le théorème des 6 cercles, version cube (théorème de Miquel)

Nous allons retrouver le résultat prouvé en 2.2.6 à l’aide du lemme des 6 birapports par une voie utilisant l’espace³ \mathcal{E} . Rappelons l’énoncé, vu en 2.2.6 :

3. Voir aussi l’article de Pedoe [Ped70b].

6.3.1 Théorème. Soient $a, b, c, d; a', b', c', d'$ huit points distincts de \mathcal{P} . On suppose les points $(a, b, c, d); (a, b, a', b'); (b, c, b', c'); (c, d, c', d'); (d, a, d', a')$ cocycliques ou alignés. Alors, (a', b', c', d') sont cocycliques ou alignés.

6.3.2 Remarque. Pour retrouver cet énoncé, il faut penser les points comme les huit sommets d'un cube, les cercles-droites correspondant alors aux six faces du cube, sans oublier que les points, dans l'espace \mathcal{E} , sont dans \mathcal{P} , quadrique d'équation q , qui apparaît en bleu sur la figure, et qui joue un rôle crucial (si l'on déplace d' le long de (dd') en le sortant de \mathcal{P} , le théorème n'est plus vrai).

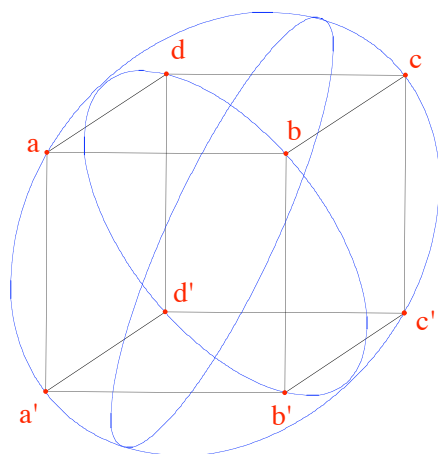


FIGURE 6.3 – Le théorème des six cercles, version cube, dans \mathcal{E}

6.3.1 Le principe de la preuve

Il consiste à noter que l'ensemble $X = \{a, b, c, d; a', b', c', d'\}$ est l'intersection de trois quadriques de $\mathcal{E} = \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$, c'est-à-dire de trois surfaces de degré 2. D'abord, X est contenu dans \mathcal{P} , qui est définie par l'équation q qui s'écrit en coordonnées $y^2 + z^2 - xt = 0$. Ensuite, X est inclus dans deux quadriques dégénérées, chacune réunion de deux plans, $R = R_1R_2$ avec $R_1 = (a, b, a', b')$ et $R_2 = (c, d, c', d')$ et $S = S_1S_2$ avec $S_1 = (b, c, b', c')$ et $S_2 = (d, a, d', a')$. En effet, en vertu de 6.1.3, dire que a, b, a', b' , par exemple, sont cocycliques

4. On confond ici les plans et leurs équations.

ou alignés, se traduit dans \mathcal{E} par le fait que les points correspondants sont coplanaires.

On sait par ailleurs que a, b, c, d sont coplanaires ou alignés, on appelle U le plan correspondant, et il s'agit de montrer que a', b', c', d' le sont aussi.

6.3.2 Position générale

Avant de prouver le théorème 6.3.1, on commence par établir un résultat de position générale :

6.3.3 Lemme. *Avec les hypothèses du théorème et les notations ci-dessus, si l'un des points a', b', c', d' (resp. c, d, c', d') est dans le plan $U = (a, b, c, d)$ (resp. $R_1 = (a, b, a', b')$), tous sont dans ce plan.*

Démonstration. Traitons le premier cas en supposant par exemple que a' est dans U . Si on note Γ le cercle passant par a, b, c, d , on a $\Gamma = U^\perp$ et cela implique que a' est sur Γ . En vertu de 6.1.2, il y a un seul cercle-droite passant par a, b, a' , qui est donc Γ , et comme a, b, a', b' sont cocycliques ou alignés, le point b' est aussi sur Γ . Mais alors, Γ étant le seul cercle passant par b, c, b' , il contient aussi c' . Enfin, comme il est le seul à contenir c, d, c' , il contient aussi d' . Les huit points sont donc cocycliques (donc coplanaires dans \mathcal{E}). L'autre cas est analogue.

6.3.4 Remarque. Bien entendu, si les huit points sont coplanaires dans \mathcal{E} , cela signifie qu'ils sont tous cocycliques et le théorème est trivial. Nous écarterons désormais ce cas.

6.3.3 Preuve numéro 1, par liaison

On pose $V = \{a, b, c, d\}$ et $W = \{a', b', c', d'\}$. On a donc⁵ $V \cup W = X$. Comme trois des points a, b, c, d ne sont pas alignés, en prenant des coordonnées homogènes x, y, z, t convenables, on peut supposer que U est le plan $t = 0$ et que les points sont donnés par $a = (1, 0, 0, 0)$, $b = (0, 1, 0, 0)$, $c = (0, 0, 1, 0)$ et $d = (1, 1, 1, 0)$. On montre d'abord le lemme suivant :

6.3.5 Lemme. *L'espace vectoriel $I_2(V)$ des polynômes homogènes (à coefficients réels) de degré 2 nuls sur V est formé des polynômes de la forme $PU + \lambda R + \mu S$ où P est un polynôme homogène de degré 1 et λ, μ des scalaires.*

5. On dit que V et W sont **liés** par X , d'où le nom de la méthode.

Démonstration. Il est clair que ces polynômes sont dans $I_2(V)$. Par ailleurs, un calcul immédiat avec les coordonnées montre que les polynômes de $I_2(V)$ sont de la forme $tP(x, y, z, t) + \alpha y(z - x) + \beta x(z - y)$, autrement dit que, modulo $U = t$, $I_2(V)$ est de dimension 2. Pour conclure, il suffit de montrer que R et S sont linéairement indépendants modulo t . Sinon, on aurait $\lambda R + \mu S + tP = 0$ avec λ, μ non tous deux nuls. Mais alors, si par exemple μ est non nul, la droite (ab) , qui vérifie $R = t = 0$ serait dans $S = S_1 S_2 = 0$ donc contenue dans la réunion des droites (bc) d'équations $S_1 = t = 0$ et (ad) d'équations $S_2 = t = 0$, donc dans l'une d'elles, et c'est absurde car trois points de \mathcal{P} ne sont jamais alignés dans \mathcal{E} .

En vertu du lemme, on peut écrire $q = \lambda R + \mu S + PU$. De plus, le polynôme P est non nul (donc définit un plan). En effet, sinon, la droite projective d'équations $R_1 = S_1 = 0$ (par exemple) serait contenue dans la quadrique d'équation q . En termes de forme quadratique, cela signifie qu'on aurait un plan vectoriel totalement isotrope et c'est impossible car q est d'indice 1. Mais alors, les points a', b', c', d' , sont à la fois dans les quadriques q, R, S , donc dans la réunion des plans U et P . Comme aucun n'est dans U en vertu de 6.3.3, c'est qu'ils sont tous dans P .

6.3.4 Preuve numéro 2, à la Cayley-Bacharach

Cette fois on considère l'ensemble $V' = \{a, b, c, d; a', b', c'\}$ et, outre les plans R_i, S_i définis précédemment, le plan U qui contient a, b, c, d et le plan P qui contient a', b', c' . Notre objectif est évidemment de montrer que P contient aussi d' .

Le lemme crucial est le suivant :

6.3.6 Lemme. *L'espace vectoriel $I_2(V')$ des polynômes homogènes de degré 2 nuls sur V' est de dimension 3 engendré par q, R, S .*

Démonstration. L'espace des polynômes homogènes de degré 2 en x, y, z, t est de dimension 10 et dire qu'une quadrique passe par un point impose une équation linéaire à ses coefficients. Comme V' contient 7 points, l'espace $I_2(V')$ est défini par 7 équations linéaires, donc de dimension ≥ 3 . Il contient bien R, S, q et ces quadriques sont linéairement indépendantes. En effet, si l'on a $\lambda R + \mu S + \nu q = 0$, avec λ, μ, ν non tous nuls, on peut supposer $\nu \neq 0$ (sinon, les plans constituant R et S seraient les mêmes). Mais alors, la droite d'équations $R_1 = S_1 = 0$ est contenue dans \mathcal{P} , ce qui contredit le fait que E ne contient pas de plan totalement isotrope.

Il reste donc à voir que la dimension de $I_2(V')$ est exactement 3. Pour

cela, il suffit de trouver⁶ deux points $M, N \in \mathcal{E}$ tel que l'espace vectoriel des polynômes nuls sur V' et en M et N soit de dimension 1, c'est-à-dire réduit à une seule quadrique (en l'occurrence il s'agira de R). On considère les droites (ab) et $(a'b')$ de \mathcal{E} . Elles sont distinctes et contenues dans le plan R_1 . On choisit $M \in (ab)$, $M \neq a, b$ et $N \in R_1$, $N \notin (ab) \cup (a'b')$. Alors, la seule quadrique Σ contenant V', M, N est la quadrique R . En effet, si Σ ne contient pas le plan R_1 , l'intersection $\Sigma \cap R_1$ est une conique Γ de R_1 , contenant les points M, a, b donc toute la droite (ab) . La conique Γ est donc dégénérée. Comme elle contient aussi a' et b' , c'est la réunion des droites (ab) et $(a'b')$, ce qui est absurde car cette réunion ne contient pas N . On a donc $R_1 \subset \Sigma$, donc $\Sigma = R_1 R'_2$ où R'_2 est un plan de \mathcal{E} . Mais, comme c, d, c' sont dans Σ , et pas dans R_1 en vertu de 6.3.3, ces points sont dans R'_2 et on a $R_2 = R'_2$, donc $\Sigma = R$.

On peut alors finir la démonstration du théorème. Il est clair que la quadrique UP est dans $I_2(V')$. On a donc $UP = \lambda q + \mu R + \nu S$. Comme d' est dans $\mathcal{P} \cap R \cap S$, il est dans la quadrique d'équation UP . Mais il n'est pas dans U en vertu de 6.3.3, donc il est dans P .

6.4 La version savante du théorème des six cercles

6.4.1 Introduction

Par rapport au reste du livre, ce paragraphe va nettement plus loin dans les connaissances de géométrie algébrique utilisées. En particulier, il fait appel aux notions de faisceau et de cohomologie. Le lecteur qui souhaiterait en avoir une approche (relativement) élémentaire consultera [Per95] et pour des notions plus élaborées (par exemple la dualité de Serre) il ira lire [Har77]. Je résume en quelques mots la philosophie de cette approche.

Nous avons vu ci-dessus l'importance des espaces vectoriels du type $I_n(V)$ (les fonctions polynomiales homogènes de degré n nulles sur une variété algébrique V) et du calcul de leurs dimensions. Pour mener ce type de calculs en général, la notion de faisceau est essentielle. L'idée principale est de regarder, non seulement les fonctions polynomiales définies partout, mais les mêmes (ou plutôt les fonctions rationnelles), définies localement. Ainsi, $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$ (resp. $\mathcal{O}_V(n)$) est le faisceau des fonctions rationnelles de degré n définies sur des ouverts de l'espace projectif \mathbf{P} (resp. de V) et \mathcal{J}_V est le

6. Attention, M et N sont des points de \mathcal{E} , pas de \mathcal{P} . D'ailleurs si a, b, M étaient dans \mathcal{P} , ils ne seraient pas alignés dans \mathcal{E} .

faisceau des fonctions de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$ nulles sur V . Par rapport à cette écriture, l'espace $I_n(V)$ apparaît comme l'espace des **sections globales** de $\mathcal{J}_V(n)$: celles définies partout. On le note $H^0\mathcal{J}_V(n)$.

L'intérêt du passage aux faisceaux est de pouvoir utiliser des suites exactes. En particulier, sur les faisceaux, on a la suite exacte la plus simple : $0 \rightarrow \mathcal{J}_V \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow 0$, qui exprime que le noyau de la restriction des fonctions de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ à V est l'idéal \mathcal{J}_V des fonctions nulles sur V . Attention, la surjectivité de la dernière flèche ne signifie pas qu'elle l'est sur tout ouvert, mais seulement localement. En particulier, en passant aux sections globales, elle n'est pas surjective en général. C'est pour remédier à cet inconvénient qu'a été inventée la cohomologie des faisceaux qui permet d'englober la suite des sections globales dans une suite exacte longue d'espaces vectoriels :

$$0 \rightarrow H^0\mathcal{J}_V(n) \rightarrow H^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \rightarrow H^0\mathcal{O}_V(n) \rightarrow H^1\mathcal{J}_V(n) \rightarrow H^1\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \rightarrow \dots$$

Inutile de dire que l'existence de théorèmes permettant d'affirmer que certains termes sont nuls (c'est souvent le cas avec les $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$) est alors cruciale pour calculer les dimensions voulues.

Deux autres outils sont essentiels pour faire les calculs.

1) Il est important de disposer de ce qu'on appelle des résolutions, c'est-à-dire des suites exactes permettant par exemple de trouver un faisceau de type \mathcal{J}_V comme conoyau : $0 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{J}_V \rightarrow 0$ où les \mathcal{L}_i sont des faisceaux dissociés, c'est-à-dire sommes directes de faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$. Ce genre de choses remonte à Hilbert.

2) On a aussi besoin des faisceaux *Hom* et *Ext* et des théorèmes de dualité, dont le plus important est dû à Serre. Pour le confort du lecteur courageux, rappelons la formule de dualité sur \mathbf{P}^d pour un faisceau \mathcal{L} dissocié et un faisceau \mathcal{F} quelconque⁷ :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}^k(\mathcal{F}, \mathcal{L}) = [H^{d-k}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^\vee(-d-1))]^*,$$

où les symboles $^\vee$ et * désignent respectivement la dualité au sens des faisceaux et des espaces vectoriels.

6.4.2 Le théorème de Davis-Geramita-Orecchia

On suppose qu'on est dans $\mathbf{P} = \mathbf{P}^d$ et qu'on a des ensembles finis X, V, W tels que V et W sont "liés" par X , c'est-à-dire qu'on a $X = V \cup W$ et $V \cap W = \emptyset$. On note \mathcal{J}_X le faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ qui définit X et de même

7. On note avec des caractères droits *Hom*, *Ext* les sections globales des faisceaux *Hom* et *Ext* correspondants.

pour les autres. Le théorème essentiel qui va nous servir est dû (dans un autre langage) à Davis, Geramita et Orecchia⁸ et il généralise de nombreux résultats anciens (Noether, Pascal, Cayley-Bacharach, etc.). Dans la preuve, on supposera qu'on est sur le corps des complexes. Le lecteur se convaincra qu'il est facile ensuite de revenir à des résultats réels lorsque les données sont réelles.

6.4.1 Théorème. *On suppose que X est une intersection complète de d hypersurfaces de degrés e_1, \dots, e_d et on pose $e = \sum_{i=1}^d e_i$. Alors, on a la formule :*

$$h^0 \mathcal{J}_W(n) - h^0 \mathcal{J}_X(n) = h^1 \mathcal{J}_V(e - d - n - 1).$$

Démonstration. On se limite ici au cas $d = 3$ qui est celui qui nous intéresse ici, mais la preuve est analogue dans les autres cas⁹. Comme W est inclus dans X , \mathcal{J}_X est contenu dans \mathcal{J}_W et on a la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{J}_X \rightarrow \mathcal{J}_W \rightarrow \mathcal{J}_{W/X} \rightarrow 0$ où $\mathcal{J}_{W/X}$ est le faisceau d'idéaux de \mathcal{O}_X qui définit W . La suite de cohomologie associée s'écrit :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{J}_X(n) \xrightarrow{i} H^0 \mathcal{J}_W(n) \xrightarrow{p} H^0 \mathcal{J}_{W/X}(n) \xrightarrow{q} H^1 \mathcal{J}_X(n) \rightarrow \dots$$

et la quantité cherchée est¹⁰ $\text{coker } i = \text{ker } q$. On calcule les deux espaces source et but de q .

- On sait (voir par exemple [Per95]) que le faisceau d'idéaux $\mathcal{J}_{W/X}$ peut s'écrire comme le faisceau $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X)$ et on en déduit $S = H^0 \mathcal{J}_{W/X}(n) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{P}}}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X(n))$.

- L'idéal \mathcal{J}_X de l'intersection complète X admet une résolution à trois termes dissociés $0 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{J}_X \rightarrow 0$, avec $\mathcal{L}_0 = \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-d_i)$, $\mathcal{L}_1 = \bigoplus_{1 \leq i < j \leq d} \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-d_i - d_j)$ et $\mathcal{L}_2 = \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-e)$, on appelle \mathcal{E} le faisceau conoyau $0 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$ et on a la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{J}_X \rightarrow 0$. Si X est l'intersection complète des hypersurfaces f_1, f_2, f_3 , on note que les flèches de la résolution sont données par des matrices dont les coefficients sont les f_i ou 0.

Cette résolution donne aussitôt $B = H^1 \mathcal{J}_X(n) \simeq H^2 \mathcal{E}(n) = \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}, \mathcal{E}(n))$.

Avec la suite $0 \rightarrow \mathcal{J}_X \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$, on obtient $S = \text{Ext}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{J}_X(n))$. En effet, les termes $\text{Hom}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n))$ et $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n))$ sont nuls en vertu de la dualité de Serre et du fait que V est de dimension < 2 . Avec la résolution de \mathcal{J}_X on trouve ensuite $S = \text{Ext}^2(\mathcal{O}_V, \mathcal{E}(n))$. Cette fois, cela vient de la nullité des $\text{Ext}^i(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}_0(n))$ pour $i = 1, 2$ qui, toujours par Serre, vient du fait

8. E. Davis, A. Geramita, F. Orecchia, *Gorenstein algebras and the Cayley-Bacharach Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), 593–597.

9. Avec une variante dans le cas $d = 2$.

10. On écrit la dimension de $\text{Ker } q$ en minuscules : $\text{ker } q$, et de même pour les autres.

que V est fini. Finalement, q est la flèche $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_V, \mathcal{E}(n)) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}, \mathcal{E}(n))$ issue de la suite $0 \rightarrow \mathcal{J}_V \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow 0$. Si on incorpore cette flèche dans la suite de cohomologie on obtient :

$$\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}, \mathcal{E}(n)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{J}_V, \mathcal{E}(n)) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{O}_V, \mathcal{E}(n)) \xrightarrow{q} \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{\mathbf{P}}, \mathcal{E}(n))$$

et le premier terme de cette suite est $H^1\mathcal{E}(n)$, qui est nul, car coincé entre $H^1\mathcal{L}_1(n)$ et $H^2\mathcal{L}_2(n)$, tous deux nuls. On a donc $\ker q = \text{ext}^1(\mathcal{J}_V, \mathcal{E}(n))$ et il reste à calculer cette quantité. Pour cela, on repart de la suite $0 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$, on tensorise par n et on applique $\text{Hom}(\mathcal{J}_V, \bullet)$. On obtient :

$$\rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{J}_V, \mathcal{L}_1(n)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{J}_V, \mathcal{E}(n)) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{J}_V, \mathcal{L}_2(n)) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{J}_V, \mathcal{L}_1(n)) \rightarrow \dots$$

Le terme $\text{Ext}^1(\mathcal{J}_V, \mathcal{L}_1(n))$ est dual de $H^2\mathcal{J}_V \otimes \mathcal{L}_1^\vee(-n-4)$, qui est nul car V est de dimension 0 (donc ce groupe, coincé entre un $H^1\mathcal{O}_V$ et un $H^2\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$ est nul). On a donc la suite :

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{J}_V, \mathcal{E}(n)) \rightarrow [H^1\mathcal{J}_V \otimes \mathcal{L}_2^\vee(-n-4)]^* \xrightarrow{u} [H^1\mathcal{J}_V \otimes \mathcal{L}_1^\vee(-n-4)]^* \rightarrow \dots$$

Mais, on a vu que la flèche de \mathcal{L}_2 dans \mathcal{L}_1 de la résolution est donnée par la matrice (f_1, f_2, f_3) des équations de X et donc aussi la flèche u . Mais elle est nulle car cette flèche sur les $H^1\mathcal{J}_V$ provient de la même sur les $H^0\mathcal{O}_V$ et, comme V est contenu dans X , les f_i sont nuls sur V . On a donc $\text{ext}^1(\mathcal{J}_V, \mathcal{E}(n)) = h^1\mathcal{J}_V \otimes \mathcal{L}_2^\vee(-n-4) = h^1\mathcal{J}_V(e-n-4)$ comme annoncé.

6.4.3 Formulations géométriques

Il y a deux façons de formuler géométriquement le théorème 6.4.1, l'une comme un théorème de transfert de spécialité par liaison, l'autre à la Cayley-Bacharach. Commençons par une définition :

6.4.2 Proposition-Définition. *Soit V un ensemble¹¹ fini de \mathbf{P}^d . On considère l'application naturelle de restriction $r : H^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) \rightarrow H^0\mathcal{O}_V(n)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) r est surjective ou injective,
- 2) $h^0\mathcal{J}_V(n)$ ou $h^1\mathcal{J}_V(n)$ est nul,
- 3) on a $h^0\mathcal{J}_V(n) = h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n) - h^0\mathcal{O}_V(n)$ ou $h^1\mathcal{J}_V(n) = h^0\mathcal{O}_V(n) - h^0\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$.

*Si ces conditions sont réalisées on dit que V est **générique en degré** n . Si V n'est pas générique on dit qu'il est **spécial** (toujours relativement à l'entier n).*

11. Muni de sa structure de variété algébrique naturelle pour laquelle ses points sont simples.

Démonstration. Cela résulte de la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{J}_V(n) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}^d}(n) \xrightarrow{r} H^0 \mathcal{O}_V(n) \rightarrow H^1 \mathcal{J}_V(n) \rightarrow 0.$$

6.4.3 Commentaire. Cette définition mérite un éclaircissement. Le noyau de r est l'espace vectoriel des équations des hypersurfaces de \mathbf{P}^d qui contiennent les points de V . On sait que le nombre total d'hypersurfaces de degré n dans \mathbf{P}^d est $h^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}^d}(n) = \binom{n+d}{d}$ et le fait d'écrire qu'une hypersurface de degré n passe par un point impose une condition linéaire entre ses coefficients. Si v est le cardinal de V , on a $v = h^0 \mathcal{O}_V(n)$ et ce que demande la définition c'est que les v conditions correspondant aux points de V soient **indépendantes**. Précisément, s'il y a moins de points que d'hypersurfaces ($v \leq \binom{n+d}{d}$) l'application r est surjective et la dimension du noyau est exactement $\binom{n+d}{d} - v$, si au contraire il y a plus de points que d'équations, l'application est injective et le noyau est nul.

Par exemple, dans \mathbf{P}^2 , si l'on prend $v = 3$ et $n = 1$, on cherche les équations des droites contenant trois points. Comme on a $h^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1) = h^0 \mathcal{O}_V(1) = 3$, la condition signifie que r est injective, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune droite qui contient les trois points. On sait bien que c'est le cas pour trois points en position générale, c'est-à-dire non alignés. De la même manière, pour $n = 2$, cinq points génériques vont être sur une unique conique, mais six points génériques n'y seront pas.

La proposition suivante montre qu'il existe toujours des ensembles finis satisfaisant la condition de la définition et, mieux, qu'ils forment un ouvert de Zariski, donc dense.

6.4.4 Proposition. *Soit d, n deux entiers > 0 . Pour tout entier $v \geq 1$, il existe un sous-ensemble fini $V \subset \mathbf{P}^d$, de cardinal v , qui soit générique en degré n . L'ensemble des V génériques de cardinal v est un ouvert de Zariski de $(\mathbf{P}^d)^v$.*

Démonstration. Elle est facile et laissée au lecteur. Le principe consiste à noter que l'espace des hypersurfaces de degré n de \mathbf{P}^d est l'espace projectif associé à l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré n en $d+1$ lettres et que chaque point supplémentaire dans V impose une équation **linéaire** supplémentaire sur les coefficients de ces polynômes. Jusqu'à atteindre pour v la dimension $\binom{n+d}{d}$, on peut alors choisir les points par récurrence pour que cette équation définisse un sous-espace strict du précédent.

La dernière assertion vient du fait que la condition de généricité s'interprète comme le fait qu'un (voire plusieurs) déterminant est non nul.

Le théorème de liaison

Un corollaire de 6.4.1 est alors le suivant :

6.4.5 Corollaire. Soient X, V, W des ensembles¹² finis de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^d$ tels que V et W soient “liés” par X (i.e. $X = V \cup W$ et $V \cap W = \emptyset$). On suppose que X est une intersection complète de d hypersurfaces de degrés e_1, \dots, e_d et on pose $e = \sum_{i=1}^d e_i$. Soit n un entier avec $n < \min e_i$. Alors, W est générique en degré n si et seulement si V l’est en degré $e - d - n - 1$.

Démonstration. Comme on a $n < e_i$ pour tout i , on a $h^0 \mathcal{J}_X(n) = 0$, donc $h^0 \mathcal{J}_W(n) = h^1 \mathcal{J}_V(e - d - n - 1)$ en vertu de 6.4.1 et W et V sont donc génériques en même temps.

6.4.6 Remarque. Le résultat s’utilise plutôt dans l’autre sens : si V est spécial, W aussi. Par exemple, dans le cas de Pascal, on a 9 points partagés en $6 + 3$ et, comme les 6 points sont sur une conique (donc spéciaux en degré 2), les 3 autres sont spéciaux en degré 1, c’est-à-dire alignés.

À la Cayley-Bacharach

Ici, en revanche, c’est le fait que V est générique qui assure une propriété intéressante de W :

6.4.7 Corollaire. Soient X, V, W des ensembles finis de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^d$ tels que V et W soient “liés” par X (i.e. $X = V \cup W$ et $V \cap W = \emptyset$). On suppose que X est une intersection complète de d hypersurfaces de degrés e_1, \dots, e_d et on pose $e = \sum_{i=1}^d e_i$. On pose $N = e - d - n - 1$ et $v = |V|$ et on suppose qu’on a $\binom{N+d}{d} \geq v$. Alors, si V est générique en degré N , toutes les hypersurfaces de degré n qui contiennent W contiennent X tout entier.

Démonstration. Comme on a $\binom{N+d}{d} \geq v$, dire que V est générique en degré N signifie que $h^1 \mathcal{J}_V(N)$ est nul. On conclut par la formule $h^0 \mathcal{J}_W(n) - h^0 \mathcal{J}_X(n) = h^1 \mathcal{J}_V(N)$ de 6.4.1.

6.5 Applications

6.5.1 Application 1 : les 6 cercles

Si l’on reprend la situation du théorème des 6 cercles, on est dans \mathbf{P}^3 , X est formé de 8 éléments, il est intersection complète de 3 quadriques, 4 des

12. Il y a une variante avec des schémas finis, c’est-à-dire des points comptés avec des multiplicités.

points a, b, c, d sont coplanaires et il s'agit de voir que les 4 autres le sont aussi. On a donc $d = 3$ et $e = 6$. On retrouve les deux preuves élémentaires précédentes qui correspondent aux deux façons d'utiliser 6.4.1.

Par liaison

On prend pour V les quatre points a, b, c, d et pour W les quatre autres. Comme V est contenu dans un plan il est spécial en degré 1 en vertu de la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{J}(1) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_V(1) \rightarrow H^1 \mathcal{J}_V(1) \rightarrow 0$$

dans laquelle les deux termes centraux sont de dimension 4. Il en résulte que W est spécial en degré $6 - 3 - 1 - 1 = 1$, donc contenu dans un plan par la suite exacte analogue.

À la Cayley-Bacharach

Cette fois on prend pour V le point d' et pour W les 7 autres, on montre qu'on a $h^0 \mathcal{J}_W(2) = h^0 \mathcal{J}_X(2)$ et on conclut comme dans la version élémentaire. D'après 6.4.7 il suffit pour cela de prouver que V est générique en degré 0, mais comme V est un point (donc connexe), c'est évident. Le résultat prouvé ici mérite d'être énoncé :

6.5.1 Proposition. *Si trois quadriques de \mathbf{P}^3 se coupent en exactement huit points et si une quadrique passe par sept d'entre eux, elle passe par le huitième.*

6.5.2 Application 2 : En géométrie plane

Des applications de Cayley-Bacharach

On retrouve les résultats vus dans la partie III. Par exemple, si X est l'intersection complète de deux cubiques de \mathbf{P}^2 (X contient donc 9 points, supposés distincts), et si W est formé de 8 de ses points, on a $h^0 \mathcal{J}_X(3) = h^0 \mathcal{J}_W(3)$ (ce qui montre que toute cubique contenant 8 des points contient le neuvième, cf. Partie III, ??). Pour cela il suffit de montrer que si V est le neuvième point il est générique en degré 0, ce qui est évident.

On peut prouver de nombreux autres résultats de cette manière. Par exemple, si X est l'intersection complète de deux courbes planes de degré 4, donc formée de 16 points, et si W est formé de 15, 14 ou 13 de ces points, toute quartique contenant W contient aussi les autres points pourvu que ceux-ci (appelons les V) soient génériques en degré 1, ce qui est automatique

si V est de cardinal 1 ou 2, et signifie que V n'est pas aligné s'il est de cardinal 3.

Pascal, Pappus et d'autres

On peut retrouver ainsi les théorèmes de Pascal ou de Pappus. Dans ce cas, on a une conique Γ qui contient les 6 points $a, b, c; a', b', c'$ et on considère les points u, v, w d'intersection de (bc') et $(b'c)$, (ca') et $(c'a)$, (ab') et $(a'b)$ respectivement et il s'agit de montrer que u, v, w sont alignés. On considère la réunion X des 9 points cités. C'est l'intersection complète des cubiques décomposées $(bc') \cup (ca') \cup (ab')$ et $(b'c) \cup (c'a) \cup (a'b)$. On appelle V l'ensemble des 6 points de la conique et $W = \{u, v, w\}$. Comme V est sur une conique, donc spécial en degré 2, il en est de même de W en degré 1 qui est donc aligné.

On retrouve aussi le théorème de Pascal généralisé (voir Partie III ??). Rappelons la situation : on a V , intersection complète de deux courbes de degrés a, b , contenu dans l'intersection complète X de deux courbes de degrés s, t et $W = X - V$. Il s'agit de montrer qu'on a $h^0 \mathcal{J}_W(s+t-a-b) \neq 0$, c'est-à-dire que W est spécial en degré $n := s+t-a-b$. D'après le théorème de liaison 6.4.5, c'est équivalent à montrer que V est spécial en degré $e-d-n-1$ avec $e = s+t$ et $d = 2$, donc en degré $a+b-3$. Or, on dispose de la résolution de \mathcal{J}_S :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a-b) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-b) \rightarrow \mathcal{J}_S \rightarrow 0$$

et cela permet de montrer qu'on a $h^0 \mathcal{J}_S(a+b-3) = \frac{a^2 + b^2 - 3a - 3b + 4}{2}$ qui est plus grand que la valeur attendue $h^0 \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(a+b-3) - h^0 \mathcal{O}_S(a+b-3) = \binom{a+b-1}{2} - ab = \frac{a^2 + b^2 - 3a - 3b + 2}{2}$.

6.5.2 Remarque. On peut aussi montrer, par une méthode voisine qui utilise des schémas finis, le théorème à quatre points (voir Partie I ??). En effet, les cubiques sont ici les réunions des côtés de abc et $a'b'c'$ et "l'ensemble" V est la réunion des trois points a', b', c' , chacun compté doublement. La conclusion est l'alignement de $W = \{a'', b'', c''\}$. Pour d'autres exemples, voir les exercices 6.6.4, 6.6.5, 6.6.6. Le lecteur en produira d'autres sans peine.

Deux beaux théorèmes

Parmi les applications du théorème de liaison 6.4.5 en géométrie plane, les deux suivantes sont les plus satisfaisantes, dans la mesure où la conclusion est exactement de la forme attendue : V est sur une courbe de degré n si et seulement si W est sur une courbe de degré $s+t-n-3$.

6.5.3 Théorème. 1) Soit s un entier, X un sous-ensemble fini de \mathbf{P}^2 , intersection complète de deux courbes de degrés s et $s + 1$. On suppose que la moitié des points (autrement dit $s(s + 1)/2$) sont sur une courbe de degré $s - 1$. Alors il en est de même de l'autre moitié.

2) Soit s un entier, X un sous-ensemble fini de \mathbf{P}^2 , intersection complète de deux courbes de degré s . On suppose que $s(s + 1)/2$ points de X sont sur une courbe de degré $s - 1$. Alors les $s(s - 1)/2$ autres sont sur une courbe de degré $s - 2$ et inversement.

6.5.4 Remarque. On montre que ces deux cas sont les seuls où l'on détienne un théorème présentable, voir exercice 6.6.7.

6.6 Exercices

6.6.1 Autour des théorèmes des six cercles

6.6.1 Exercice. Dans cet exercice on propose une preuve élémentaire du théorème facile des six cercles 6.2.1 dont on reprend les notations, voir aussi 1.5.3.

1) Soit γ le point d'intersection de (aa') et (bb') . En considérant la puissance de γ par rapport aux cercles $(aa'cc')$ et $(bb'cc')$, montrer que γ est sur leur axe radical (cc') .

2) Montrer que γ est sur (dd') et qu'on a $\overline{\gamma c} \cdot \overline{\gamma c'} = \overline{\gamma d} \cdot \overline{\gamma d'}$ et en déduire que c, c', d, d' sont cocycliques.

3) Montrer que γ a même puissance p par rapport aux six cercles et que les points a, a' , etc. sont deux à deux échangés par l'inversion de pôle γ et de puissance p .

6.6.2 Exercice. (Le théorème du pentagone¹³)

Soient a, b, c, d, e cinq points du plan. On appelle respectivement f, g, h, i, j les points d'intersection des droites (ae) et (bc) ; (ab) et (cd) , (bc) et (de) , (cd) et (ae) et enfin (de) et (ab) . Les cercles circonscrits à ejf et abf (resp. abf et bcg , resp. bcg et cdh , resp. cdh et dei , resp. dei et aej) se coupent en k (resp. l , resp. m , resp. n , resp. o). Montrer que les points k, l, m, n, o sont cocycliques.

(Indication : on montrera d'abord que les points d, g, j, m sont cocycliques en appliquant le théorème des six cercles (version cube) aux points

13. Merci à Étienne Fouvry de m'avoir signalé ce problème, il y a dix ans, et à François David de me l'avoir remis en mémoire récemment.

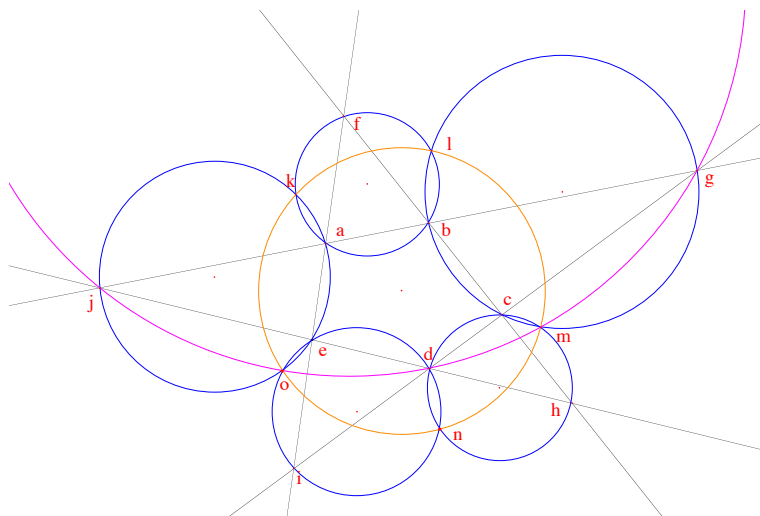


FIGURE 6.4 – Le théorème du pentagone

$d, g, j, m, b, c, h, \infty$, puis que les points d, g, j, o sont cocycliques en appliquant le même théorème à $d, g, j, o, a, e, i, \infty$ et enfin que les points k, l, m, o sont cocycliques en utilisant k, l, m, o, a, b, j, g .)

6.6.3 Exercice. (Un théorème de Clifford)

1) Soient D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites du plan euclidien, en position générale¹⁴, soit T_i le triangle déterminé par les droites autres que D_i et soit C_i son cercle circonscrit. Montrer que les quatre cercles C_i ont un point commun, appelé point central des quatre droites. (On utilisera le théorème des six cercles. Attention, il y a trop de droites et de cercles, on peut commencer en oubliant D_4 et C_4 ...)

2) On considère cinq droites en position générale D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 et on appelle m_i le point central du quadruplet formé de ces droites à l'exception de D_i . Montrer que les cinq points m_i sont cocycliques. Faire le lien avec le théorème du pentagone.

3) ¶ On se propose de généraliser les résultats précédents.

Rappelons que \mathcal{D}^* désigne l'ensemble des droites du plan, \mathcal{C}^+ celui des cercles réels et \mathcal{P}^* celui des points différents de ∞ . Montrer que, pour tout $n \geq 1$, il existe deux applications $\Phi_n : U_n \subset (\mathcal{D}^*)^{2n} \rightarrow \mathcal{P}^*$ et $\Psi_n : V_n \subset (\mathcal{D}^*)^{2n+1} \rightarrow \mathcal{C}^+$, définies sur des ouverts de Zariski U_n et V_n (donc pour des droites "en position générale"), telles que Φ_2 est l'application qui à deux droites non parallèles associe leur point d'intersection, et vérifiant en outre

14. C'est-à-dire telles que deux d'entre elles ne sont pas parallèles et que trois ne sont pas concourantes.

les deux conditions suivantes pour tout n :

a) Le point $\Phi_n(D_1, \dots, D_{2n})$ est sur les $2n$ cercles $\Psi_{n-1}(D_1, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_{2n})$ pour $i = 1, \dots, 2n$, où le symbole \widehat{D}_i signifie qu'on omet la droite D_i .

b) Le cercle $\Psi_n(D_1, \dots, D_{2n+1})$ passe par les $2n + 1$ points (pour $i = 1, \dots, 2n + 1$), $\Phi_{2n}(D_1, \dots, \widehat{D}_i, \dots, D_{2n+1})$.

(On raisonnera par récurrence à l'aide des questions 1) et 2)).

Ce résultat est dû à Clifford, voir par exemple H. Lebesgue, *Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford*, Nouvelles annales de mathématiques, 4-ième série, tome 16 (1916), p. 481-495.

6.6.4 Exercice. On considère trois coniques A, B, C se coupant en a, b . Les coniques B, C (resp. C, A , resp. A, B) se recoupent en c, d (resp. e, f , resp. g, h). Montrer que les droites (cd) , (ef) et (gh) sont concourantes. (Soit $i = (cd) \cap (ef)$. Considérer les cubiques $A \cup (cd)$ et $B \cup (ef)$ et appliquer le théorème de liaison 6.4.5.) En prenant pour a et b les points cycliques, on retrouve 1.5.3.2.

6.6.5 Exercice. Soit Γ une cubique plane et D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites coupant chacune Γ en trois points distincts. On suppose que six des points obtenus sont sur une conique. Montrer que les six autres sont aussi sur une conique.

6.6.6 Exercice. (Quelques cas triviaux)

Montrer directement le théorème de liaison dans les cas suivants :

1) Six points formant une intersection complète 2×3 partagés en deux paquets de trois points et $n = 1$.

2) Huit points formant une intersection complète 2×4 avec trois points alignés.

6.6.7 Exercice. (Un théorème présentable ?)

Il s'agit de repérer dans quel cas le théorème de liaison en géométrie plane donne un résultat digne d'intérêt, c'est-à-dire où la condition de spécialité est d'être sur exactement une courbe d'un certain degré. On considère donc une partie finie de \mathbf{P}^2 , intersection complète de deux courbes de degrés s, t et un entier n et on suppose que la condition de spécialité est d'être sur une courbe de degré n pour un paquet de points et sur une courbe de degré $s + t - n - 3$ pour l'autre paquet.

1) Montrer que la condition pour avoir un théorème présentable est la relation :

$$\binom{n+2}{2} + \binom{s+t-n-1}{2} = st.$$

2) Montrer que cette condition s'écrit :

$$2n^2 + 2n(3 - s - t) + s^2 + t^2 - 3(s + t) + 4 = 0$$

et que le discriminant réduit de cette équation du second degré en n est $\Delta' = 1 - (s - t)^2$. En déduire qu'il n'y a de théorème présentable que si $|s - t|$ est ≤ 1 et conclure.

Chapitre 7

Les invariants du groupe circulaire

Dans ce chapitre, nous étudions brièvement les invariants du groupe circulaire. Le charme de la situation, par rapport à ce que nous avons vu dans les parties précédentes, c'est que ce groupe a deux habits (et même trois avec le groupe de Lorentz $O^+(Q)$ de dimension 3, mais cet aspect a été traité dans la Partie IV et nous n'y revenons pas), celui lié au groupe orthogonal $O(q)$ et celui lié au groupe linéaire $SL(2, \mathbf{C})$. Or, il y a des invariants naturels associés à ces deux oripeaux. Dans le premier cas, tout ce qui est en lien avec la forme quadratique et sa forme polaire, par exemple l'invariant anallagmatique, dans le second, tout ce qui est du ressort du crochet et notamment le birapport. Ces deux types d'invariants donnent d'ailleurs naissance à des propriétés géométriques différentes, que nous avons abondamment rencontrées dans les chapitres précédents, cercles tangents ou orthogonaux pour le premier, points cocycliques et alignés pour le second. Nous allons maintenant étudier directement ces invariants, d'abord à partir des groupes et des représentations dont ils sont issus, puis en essayant de les rapprocher au moins dans le cadre projectif. Nous y verrons quelques belles formules, notamment autour du birapport, et leurs conséquences géométriques, retrouvant une dernière fois les théorèmes de cocyclicité et quelques autres. Nous terminerons cette partie en donnant une preuve algébrique du théorème de Feuerbach, en termes de relations entre les invariants.

7.1 Les deux représentations canoniques et leurs invariants

7.1.1 Introduction

Comme le titre de ce livre l'indique, le cadre de notre travail est la géométrie projective et les groupes auxquels nous avons affaire sont les groupes projectifs, de sorte que les invariants qui ont pour nous un sens géométrique sont les invariants projectifs (dans cette partie, invariant anallagmatique, spin, birapport, etc.) Cependant, comme nous l'avons vu abondamment dans les parties II, IV et V, la détermination de ces invariants passe par celle des invariants linéaires (ici, valeurs de φ et q , crochets, etc.), associés aux variantes linéaires des groupes considérés. La raison en est essentiellement technique : la manipulation des polynômes est plus simple que celle des fractions rationnelles, mais elle est néanmoins prégnante. Nous allons donc commencer ce chapitre en examinant les deux représentations naturelles des groupes linéaires $SL(2, \mathbf{C})$ et $O(q)$, avant de passer aux représentations projectives de leurs quotients. Dans un premier temps, l'étude sera menée séparément pour les deux avatars du groupe circulaire, la synthèse étant opérée dans la section suivante.

7.1.2 La représentation linéaire canonique de $SL(2, \mathbf{C})$ et ses invariants

En ce qui concerne la variante $PSL(2, \mathbf{C})$ du groupe circulaire, le travail a été entièrement fait dans la partie II et il nous suffit ici d'en rappeler les résultats, le lecteur étant renvoyé à cette partie pour les détails. Comme annoncé, nous commençons par la version linéaire, donc l'étude des invariants de $SL(2, \mathbf{C})$ dans sa représentation naturelle sur l'espace vectoriel $V = \mathbf{C}^2$.

Les invariants linéaires

On considère m vecteurs génériques de V . Comme expliqué dans la partie II, cela signifie qu'on introduit l'anneau de polynômes R à coefficients complexes en les $2m$ indéterminées $Z_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, 2$ et qu'on étend les scalaires de V à cet anneau. Les vecteurs Z_i sont alors définis par $Z_i = (Z_{i,1}, Z_{i,2})$ (ou simplement, sans indice i , par $Z = (Z_1, Z_2)$, $W = (W_1, W_2)$, etc.) et on définit les crochets par les formules du type $[Z, W] = Z_1 W_2 - Z_2 W_1$. Le groupe $SL(2, \mathbf{C})$ agit sur l'anneau R comme on l'a expliqué dans la partie II et on note S le sous-anneau des invariants pour cette opération. On a le résultat suivant :

7.1.1 Théorème. *L'anneau des invariants S est le sous-anneau de R engendré par les crochets $[Z_i, Z_j]$, $1 \leq i < j \leq m$.*

Démonstration. Voir Partie II ??.

Les invariants projectifs

On considère cette fois les points \overline{Z}_i de l'espace projectif, associés aux vecteurs Z_i . Comme on l'a dit, les invariants linéaires n'ont pas de sens géométrique (car ils changent si l'on multiplie les vecteurs par un scalaire et ne sont donc pas définis pour les points) et les invariants intéressants sont les invariants projectifs. C'est pourquoi on utilise les fractions rationnelles géométriques en les $Z_{i,j}$ et le résultat a été obtenu Partie II, ?? :

7.1.2 Proposition. *Les fractions rationnelles "géométriques" en Z_1, \dots, Z_m , invariantes sous $PSL(2, \mathbf{C})$ sont de la forme F/G où F et G sont des polynômes en les crochets $[Z_i, Z_j]$ qui sont homogènes de même degré par rapport à chaque vecteur.*

Parmi ces invariants on a le birapport qui s'exprime en fonction des crochets comme nous l'avons vu Partie I ?? : $[[A, B, C, D]] = \frac{[A, C][B, D]}{[B, C][A, D]}$. Le théorème suivant montre que c'est essentiellement le seul :

7.1.3 Théorème. *Les fractions rationnelles géométriques de m points de la droite $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{P}(V)$, invariantes sous l'action de $PSL(2, \mathbf{C})$, sont les fractions rationnelles en les birapports de 4 points pris parmi les m .*

7.1.3 La représentation linéaire canonique de $O(q)$ et ses invariants

Nous passons maintenant à la variante $PO(q)$ du groupe circulaire, en commençant par la détermination des invariants du groupe orthogonal $O(q)$ dans sa représentation naturelle sur \mathbf{R}^4 . Les résultats sont essentiellement les mêmes que ceux de la partie IV et leurs démonstrations sont pratiquement identiques, de sorte que nous renverrons le plus souvent le lecteur à cette partie ou aux références [Wey39] ou [Ric89] pour des précisions, en nous contentant de pointer les différences. La principale est l'augmentation d'une dimension puisque dans la partie IV on travaille en dimension 3 et ici en dimension 4.

Les invariants linéaires

On considère un espace vectoriel réel E de dimension 4. L'espace E est muni de la forme quadratique q de Lorentz et de sa forme polaire φ . Dans la base canonique, la forme q est donnée par la formule $q(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_2^2 + a_3^2 - a_1a_4$ et sa forme polaire par $\varphi((a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4)) = a_2b_2 + a_3b_3 - \frac{1}{2}(a_1b_4 + a_4b_1)$. Les groupes orthogonaux associés sont $O(q)$ et $O^+(q)$. On considère m vecteurs génériques A_1, \dots, A_m de E . Comme d'habitude, cela signifie qu'on introduit l'anneau de polynômes R à coefficients réels en les $4m$ indéterminées $A_{i,j}$, $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, 4$ et qu'on étend les scalaires de E à cet anneau. Les vecteurs A_i sont définis par $A_i = (A_{i,1}, A_{i,2}, A_{i,3}, A_{i,4})$ et on peut définir les valeurs de q et de φ sur les vecteurs A_i par les formules ci-dessus, ainsi que le crochet $[A_i, A_j, A_k, A_l]$ qui n'est autre que le déterminant de ces vecteurs sur la base canonique.

Les groupes $O(q)$ et $O^+(q)$ opèrent sur l'anneau R et on note S et S^+ les sous-anneaux des invariants dans cette opération. Attention, ici, contrairement à ce que l'on a vu dans la partie IV, nous aurons besoin de distinguer les résultats concernant O et O^+ (car les groupes projectifs associés sont différents). Le résultat est analogue :

7.1.4 Théorème. *Avec les notations ci-dessus, le sous-anneau S (resp. S^+) de R des polynômes invariants sous $O(q)$ (resp. $O^+(q)$) est engendré par les polynômes $\varphi(A_i, A_j)$ avec $1 \leq i \leq j \leq m$ (resp. par ces polynômes et par les crochets $[A_i, A_j, A_k, A_l]$ avec $1 \leq i < j < k < l \leq m$).*

Démonstration. Elle est analogue à celle de la partie IV, et plutôt plus simple, puisqu'on travaille seulement sur \mathbf{R} , voir [Wey39].

Les invariants projectifs

Cette fois, il s'agit de déterminer les invariants sous les groupes projectifs $PO(q)$ et $PO^+(q)$. Là encore, il faut utiliser les fractions rationnelles géométriques en les $A_{i,j}$ et le résultat est attendu et il se démontre comme ¹ dans la partie IV :

7.1.5 Théorème. *Les fonctions rationnelles géométriques invariantes sous $PO(q)$ (resp. $PO^+(q)$) sont les fractions F/G où F et G sont des polynômes en les $\varphi(A_i, A_j)$ (resp. en ces quantités et en les crochets) homogènes de même degré par rapport à chaque vecteur A_i .*

1. En particulier, l'inexistence de caractères rationnels pour $O^+(q)$ se prouve comme en ??.

On voit évidemment apparaître parmi ces invariants ceux que nous avons déjà rencontrés, l'invariant anallagmatique $I^*(A, B) = \frac{\varphi(A, B)^2}{q(A)q(B)}$ et le spin $S^*(A, B, C) = \frac{\varphi(B, C)\varphi(C, A)\varphi(A, B)}{q(A)q(B)q(C)}$. En fait, ce sont essentiellement les seuls :

7.1.6 Théorème. *Le corps des fractions rationnelles géométriques invariantes sous $PO(q)$ est engendré par les fractions du type I^* et S^* . Pour les invariants sous $PO^+(q)$, il faut rajouter les invariants de la forme :*

$$b(A, B, C, D) := \frac{[A, B, C, D]}{\varphi(A, B)\varphi(C, D)}.$$

Démonstration. La démonstration est essentiellement identique à celle de Partie IV ?? dans le cas de $PO(q)$. Pour $PO^+(q)$ il faut faire attention à l'argument de degré (ici les crochets peuvent être compensés par les formes φ comme dans l'invariant b). Le lecteur en écrira les détails.

7.1.7 Remarques. 1) Lorsque les points A, B, C, D sont isotropes, l'invariant b s'interprète en termes de birapport, voir 7.2.3.

2) Comme exemple de calcul explicite illustrant ce théorème on a la formule :

$$\frac{\varphi(A, C)\varphi(B, D)}{\varphi(B, C)\varphi(A, D)} = \frac{S^*(A, B, C)I^*(B, D)}{S^*(A, B, D)I^*(B, C)}.$$

Dans le cas où les vecteurs sont isotropes, cette quantité est le carré du module du birapport, voir 7.2.3.

Le lien avec les invariants euclidiens

Rappelons (voir 3.1.7) que les points de \mathbf{C} se plongent dans $\mathcal{E} = \mathbf{P}(E)$ comme des points isotropes par $x + iy \mapsto (1, x, y, x^2 + y^2)$. Pour ces points, les invariants de type φ et les crochets permettent de retrouver les valeurs des invariants euclidiens usuels :

7.1.8 Proposition. *Soient $a, b, c \in \mathbf{C}$, identifiés avec leurs images dans \mathcal{E} et avec les représentants normalisés de celles-ci. On note ab (resp. $(\vec{ab}|\vec{ac})$, resp. $[\vec{ab}, \vec{ac}]$) la distance (resp. le produit scalaire, resp. le "produit vectoriel"²) au sens euclidien. On a les formules suivantes :*

- 1) $ab^2 = -2\varphi(a, b)$,
- 2) $(\vec{ab}|\vec{ac}) = \varphi(b - a, c - a)$,
- 3) $[\vec{ab}, \vec{ac}] = [a, b, c, \infty]$.

2. Voir Partie V pour la définition précise ; il est vu ici comme un scalaire.

Démonstration. C'est un calcul sans difficulté (voir aussi 3.1.9).

7.2 Le lien entre les deux apparences

7.2.1 Introduction

Nous avons étudié dans la section précédente les représentations linéaires des groupes linéaires $SL(2, \mathbf{C})$ et $O(q)$ associés au groupe circulaire. Nous allons maintenant faire le lien entre les deux, notamment en ce qui concerne les invariants et principalement le birapport. Attention, si certains groupes projectifs sont isomorphes, par exemple $PSL(2, \mathbf{C})$ et $PO^+(q)$, il n'en est pas de même des groupes linéaires. Déjà, le groupe $GL(2, \mathbf{C})$ est de dimension réelle 8 (comme variété) alors que les autres ($SL(2, \mathbf{C})$, $O(q)$, $O^+(q)$) sont de dimension réelle 6. Ensuite, le groupe $SL(2, \mathbf{C})$ ne contient pas d'autre involution que $-\text{Id}$ alors que les groupes $O^+(q)$ et $O(q)$ sont engendrés par des involutions. Il n'est donc pas question d'espérer que leurs représentations soient équivalentes.

Pourtant, nous allons exhiber une correspondance entre ces représentations, certes imparfaite, mais utile. L'idée de départ est que l'on retrouve la variante projective de la représentation de $SL(2)$ sur \mathbf{C}^2 , à savoir $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \widehat{\mathbf{C}}$ comme la quadrique \mathcal{P} de l'espace des cercles $\mathcal{E} \simeq \mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ qui correspond à la représentation de $O(q)$ et il s'agit de relever ce plongement au niveau vectoriel.

7.2.2 Le plongement

Une manière de comprendre le plongement en question est d'utiliser les matrices hermitiennes, comme dans l'exercice 3.4.7. On y a vu en effet que l'espace E est isomorphe à l'espace des matrices $\begin{pmatrix} t & z \\ \bar{z} & x \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbf{C}$ et t, x réels, la forme q correspondant alors au déterminant. Si l'on part d'un vecteur $(z, w) \in \mathbf{C}^2$, il y a une manière naturelle de lui associer une telle matrice (de déterminant nul, donc isotrope pour q) qui est de calculer le produit :

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z\bar{z} & z\bar{w} \\ w\bar{z} & w\bar{w} \end{pmatrix}.$$

Cela justifie la proposition suivante :

7.2.1 Proposition. *L'application Φ de $V = \mathbf{C}^2$ dans $E = \mathbf{R}^4$ qui à (z, w) associe :*

$$\Phi(z, w) = (a, b, c, d) := (w\bar{w}, \text{Re}(z\bar{w}), \text{Im}(z\bar{w}), z\bar{z})$$

a pour image l'ensemble $\widehat{\mathcal{P}}$ des vecteurs isotropes de E relativement à la forme $q = b^2 + c^2 - ad$. Elle induit une bijection de $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ sur \mathcal{P} qui envoie $(\frac{z}{w}, 1)$ sur $(1, \operatorname{Re}(\frac{z}{w}), \operatorname{Im}(\frac{z}{w}), |\frac{z}{w}|^2)$ (ou encore $b + ic$ sur $(1, b, c, b^2 + c^2)$) et $\infty = (1, 0)$ sur $\infty = (0, 0, 0, 1)$.

En termes de coordonnées, c'est une application polynomiale homogène de degré 2. Précisément, si l'on pose $z = x + iy$ et $w = u + iv$ on a :

$$\Phi(z, w) = (u^2 + v^2, xu + yv, yu - xv, x^2 + y^2).$$

Démonstration. La première assertion vient de la formule $\operatorname{Re}(z\bar{w})^2 + \operatorname{Im}(z\bar{w})^2 = |z\bar{w}|^2 = z\bar{w}z\bar{w} = z\bar{z}w\bar{w}$. Si λ est un nombre complexe, on vérifie qu'on a $\Phi(\lambda z, \lambda w) = \lambda\bar{\lambda}\Phi(z, w)$ et que seul le vecteur nul s'envoie sur 0, ce qui montre l'assertion au niveau projectif. Les autres formules se vérifient sans difficulté.

7.2.3 Que deviennent les invariants de $SL(2, \mathbf{C})$?

L'invariant principal de $SL(2, \mathbf{C})$ dans sa représentation naturelle sur V est le crochet $[(z_1, w_1), (z_2, w_2)] = z_1w_2 - z_2w_1$. Si l'on pose $z_k = x_k + iy_k$ et $w_k = u_k + iv_k$, le crochet s'écrit :

$$x_1u_2 - y_1v_2 - u_1x_2 + v_1y_2 + i(x_1v_2 + y_1u_2 - u_1y_2 - v_1x_2).$$

Attention, le fait que Φ soit de degré 2 fait que le crochet n'est pas un invariant polynomial en les images $m_1 = \Phi(z_1, w_1)$ et $m_2 = \Phi(z_2, w_2)$. En effet, on a $q(m_1) = q(m_2) = 0$ et le lemme suivant :

7.2.2 Lemme. Avec les notations précédentes, on a :

$$-2\varphi(m_1, m_2) = |[(z_1, w_1), (z_2, w_2)]|^2.$$

Démonstration. On peut le vérifier par un calcul facile ou utiliser 3.1.9 appliqué aux images de z_1/w_1 et z_2/w_2 .

Cela montre que les invariants, côté E , sont de degré 4 en les variables x_i, u_i , etc. alors que les parties réelles et imaginaires du crochet sont de degré 2, ce qui interdit qu'elles soient des polynômes en les invariants φ .

7.2.4 La valeur du birapport

La remarque précédente semble empêcher, de manière rédhitoire, d'exprimer les invariants de SL en termes de ceux de $O(q)$. C'est vrai au niveau des invariants linéaires, mais pas pour les invariants projectifs, comme on va le voir grâce à une ruse déjà rencontrée dans la partie IV.

Soient a, b, c, d quatre points distincts de $\widehat{\mathbf{C}}$. On note encore a, b, c, d leurs images³ par Φ . On a le résultat suivant :

7.2.3 Théorème. *Soit $r = \llbracket a, b, c, d \rrbracket \in \mathbf{C}$. On a les formules :*

$$\operatorname{Re}(r) = \frac{\varphi(b, c)\varphi(a, d) + \varphi(a, c)\varphi(b, d) - \varphi(a, b)\varphi(c, d)}{2\varphi(b, c)\varphi(a, d)},$$

$$\operatorname{Im}(r) = \frac{-[a, b, c, d]}{4\varphi(b, c)\varphi(a, d)},$$

$$|r|^2 = \frac{\varphi(a, c)\varphi(b, d)}{\varphi(b, c)\varphi(a, d)}.$$

Si l'on pose, comme dans la partie V, $x = bc^2 = -2\varphi(b, c)$, $y = ca^2$, $z = ab^2$, $X = ad^2$, $Y = bd^2$ et $Z = cd^2$ on obtient les formules :

$$\operatorname{Re}(r) = \frac{xX + yY - zZ}{2xX}, \quad \text{et} \quad |r|^2 = \frac{yY}{xX}.$$

Démonstration. La formule avec le module est une conséquence immédiate de la formule $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = \frac{[c, a][d, b]}{[c, b][d, a]}$ (voir Partie I ??) et du calcul du carré du module du crochet 7.2.2.

On en déduit la partie réelle du birapport grâce au lemme suivant (cf. Partie IV ?? et ??) :

7.2.4 Lemme. *Soit r un nombre complexe. On a $2\operatorname{Re}(r) = 1 + |r|^2 - |1 - r|^2$.*

Démonstration. C'est clair en posant $r = s + it$.

La formule donnant $\operatorname{Re}(r)$ se déduit de ce lemme, du calcul de $|r|^2$ et de la formule de permutation du birapport $\llbracket a, c, b, d \rrbracket = 1 - r$, qui donne $|1 - r|^2$!

Il reste à calculer la partie imaginaire. Attention, comme celle-ci n'est pas invariante sous le groupe circulaire $PGL(2, \mathbf{C})$ tout entier, mais seulement par la partie directe, elle ne peut s'exprimer seulement en fonction des seuls $\varphi(a, b)$ qui sont des invariants de $PO(q)$, mais doit comprendre obligatoirement le crochet $[a, b, c, d]$. On calcule d'abord le carré : $\operatorname{Im}(r)^2 = |r|^2 - \operatorname{Re}(r)^2$, ce qui donne, avec les notations du théorème :

$$\operatorname{Im}(r)^2 = \frac{4xXyY - (xX + yY - zZ)^2}{4x^2X^2}$$

3. Et même des représentants de celles-ci dans E . On vérifie en effet que les formules ne dépendent pas des choix de ces représentants.

et le numérateur de cette fraction, au signe près, est notre vieille connaissance le déterminant de Ptolémée (voir Partie V ??) :

$$x^2X^2 + y^2Y^2 + z^2Z^2 - 2yYzZ - 2zZxX - 2xXyY.$$

On utilise maintenant la relation de changement de base pour la forme quadratique⁴ q rappelée en 5.3.5 (on n'oubliera pas que les vecteurs a, b, c, d sont isotropes). Au second membre on a le déterminant de Ptolémée et on obtient :

$$-4[a, b, c, d]^2 = x^2X^2 + y^2Y^2 + z^2Z^2 - 2yYzZ - 2zZxX - 2xXyY.$$

On en déduit $\text{Im}(r)^2 = \frac{[a, b, c, d]^2}{x^2X^2} = \frac{[a, b, c, d]^2}{16\varphi(b, c)^2\varphi(a, d)^2}$ qui est la formule voulue, mais élevée au carré.

Pour vérifier le signe, on écrit les éléments $a, b, c, d \in \widehat{\mathbf{C}}$ comme images d'éléments de \mathbf{C}^2 et, par rapport à leurs parties réelles et imaginaires, on a l'égalité des carrés de deux fractions rationnelles : $\left(\frac{F}{G}\right)^2 = \left(\frac{P}{Q}\right)^2$ ce qui donne $(FQ - GP)(FQ + GP) = 0$. Comme $X = (\mathbf{C}^2)^4$ est une variété algébrique irréductible, l'un des polynômes est nul sur X tout entier, ce qui montre que le signe cherché est le même pour tous les quadruplets. Il n'y a plus qu'à le déterminer pour $\infty, 0, 1, i$ par exemple, ce qui est évident (le birapport vaut i , le crochet vaut -1 et les valeurs de φ sont toutes deux égales à $-1/2$).

7.2.5 Remarque. On peut aussi montrer le théorème précédent par le calcul, d'au moins deux manières. La première est l'utilisation de la force brute, par un calcul direct, pénible mais sans difficulté, que les machines font à merveille. La seconde nécessite un peu plus d'intelligence. Comme les quantités considérées sont invariantes par le groupe $PO^+(q) \simeq PGL(2, \mathbf{C})$, on se ramène au cas $a = \infty, b = 0, c = 1, d = x + iy$ (donc $\llbracket a, b, c, d \rrbracket = d$), ce qui donne, dans E , $a = (0, 0, 0, 1), b = (1, 0, 0, 0), c = (1, 1, 0, 1)$ et $d = (1, x, y, x^2 + y^2)$ et la vérification des formules est un plaisir.

7.2.6 Remarque. On voit sur ces formules que la partie réelle du birapport est invariante sous $PO(q)$, donc sous $P\Gamma L(2, \mathbf{C})$, tandis que la partie imaginaire est seulement invariante sous $PO^+(q) \simeq PGL(2, \mathbf{C})$, ce que l'on savait depuis le chapitre 2.

4. Ou plutôt pour -2φ qui est de discriminant -4 . Comme pour la somme des angles, on constate une nouvelle fois l'importance cruciale de cette relation.

7.2.5 Cocyclicité : les convergences

Dans cette partie et la précédente, nous avons rencontré à de nombreuses reprises le problème de savoir si quatre points du plan sont cocycliques ou alignés⁵ et nous l'avons abordé par de nombreuses méthodes. Le calcul des invariants du groupe circulaire va nous permettre de faire le lien entre ces diverses méthodes.

La méthode générique : nullité du crochet

Nous avons vu au chapitre 6 que, dans l'espace \mathcal{E} , le fait que quatre points $a, b, c, d \in \mathcal{P}$ soient cocycliques est équivalent au fait qu'ils soient coplanaires dans \mathcal{E} , ou encore linéairement dépendants dans l'espace vectoriel E et cela se traduit par la nullité du déterminant, c'est-à-dire du crochet : $[a, b, c, d] = 0$. Nous allons montrer que toutes les autres méthodes se ramènent à celle-ci.

Le birapport

Le calcul mené en 7.2.3 montre que la nullité du crochet est équivalente à celle de la partie imaginaire du birapport. On retrouve donc le critère utilisé au chapitre 2 : les points a, b, c, d sont cocycliques si et seulement si leur birapport est réel, avec les applications que l'on sait, notamment *via* le lemme des six birapports.

Le théorème de l'angle inscrit

Nous avons rencontré, Partie V, ??, une condition de cocyclicité de quatre points a, b, c, d de la forme $C(a; b, c, d) = 0$ avec :

$$C(a; b, c, d) := q(\vec{ab})[\vec{ac}, \vec{ad}] + q(\vec{ac})[\vec{ad}, \vec{ab}] + q(\vec{ad})[\vec{ab}, \vec{ac}].$$

Cette condition, qui a mené au théorème de l'angle inscrit (Partie V ??), s'éclaircit avec le résultat suivant (voir aussi Partie V, ??) :

7.2.7 Proposition. *Soient $a, b, c, d \in \mathbf{C}$. On note encore a, b, c, d leurs images dans \mathcal{E} et des représentants normalisés de celles-ci. On a la formule $C(a; b, c, d) = [a, b, c, d]$.*

Démonstration. Quitte à appliquer une translation de $\mathbf{R}^2 \simeq \mathbf{C}$ (qui ne change ni les vecteurs, ni le crochet), on peut supposer que a est l'origine du plan : $a = (1, 0, 0, 0)$. On a alors $b = (1, b_1, b_2, b_1^2 + b_2^2)$, $\vec{ab} = (b_1, b_2)$, et de même

5. Ce mot sera toujours sous-entendu dans ce qui suit.

pour les autres. On en déduit $q(\overrightarrow{ab}) = b_1^2 + b_2^2$, $[\overrightarrow{ab}, \overrightarrow{ac}] = b_1c_2 - b_2c_1$, etc. Le résultat est alors une conséquence du développement du déterminant :

$$[a, b, c, d] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_1^2 + b_2^2 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_1^2 + c_2^2 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_1^2 + d_2^2 \end{vmatrix}$$

par rapport à sa première ligne.

Le théorème de Ptolémée

Enfin, toujours dans la partie V, nous avons donné une condition de cocyclicité en termes de longueurs (voir Partie V, ??) : les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si le déterminant suivant est nul :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & ab^2 & ac^2 & ad^2 \\ ab^2 & 0 & bc^2 & bd^2 \\ ac^2 & bc^2 & 0 & cd^2 \\ ad^2 & bd^2 & cd^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & z & y & X \\ z & 0 & x & Y \\ y & x & 0 & Z \\ X & Y & Z & 0 \end{vmatrix}$$

$$= x^2X^2 + y^2Y^2 + z^2Z^2 - 2yYzZ - 2zZxX - 2xXyY,$$

avec les notations rappelées en 7.2.3. Le lien avec ce qui précède apparaît dans la proposition suivante, qui a été vue dans la preuve de 7.2.3 :

7.2.8 Proposition. Soient $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ et $r = \llbracket a, b, c, d \rrbracket$. On a la formule

$$(\operatorname{Im} r)^2 = \frac{\Delta}{4bc^2.ad^2} = \frac{\Delta}{4x^2X^2}.$$

On retrouve donc la condition de cocyclicité en termes de birapport.

7.2.6 En prime, un théorème

Le lecteur, lassé des multiples variations sur le thème “le birapport est réel”, appréciera le théorème suivant ⁶, qui traduit le fait qu’il est au contraire imaginaire pur :

7.2.9 Théorème. Soient a, b, c, d quatre points distincts du plan. Alors, les “cercles” circonscrits à abc et abd sont orthogonaux si et seulement si on a la relation suivante entre les carrés des longueurs :

$$bc^2 \times ad^2 + ac^2 \times bd^2 = ab^2 \times cd^2.$$

6. Tout de mon crû.

Démonstration. Vu le théorème 7.2.3, et les formules $-2\varphi(a, b) = ab^2$ de 3.1.9, la condition signifie que le birapport $r := \llbracket a, b, c, d \rrbracket$ est imaginaire pur. Si on envoie a, b, c sur $\infty, 0, 1$ par un élément de $PGL(2, \mathbf{C})$, le point d va sur r . Le “cercle” circonscrit à abc est l’axe des x , celui circonscrit à abd est la droite (bd) . Dire qu’ils sont orthogonaux en $b = 0$, c’est dire que d est sur l’axe des y : cqfd.

7.3 Détermination des relations

Cette section finale comprend deux parties. On donne d’abord la liste des relations entre les invariants du groupe circulaire, liste attendue et similaire à celle vue dans la Partie IV. Ensuite, on revient sur le théorème de Feuerbach pour élucider la nature des relations dont il provient.

7.3.1 Les relations entre invariants de $SL(2, \mathbf{C})$

On renvoie à la partie II où ces relations ont été déterminées. Le résultat est simple : il y a essentiellement un seul invariant projectif relatif à l’action de $PSL(2, \mathbf{C})$ sur la droite $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$, le birapport, et une seule relation, la formule de permutation du birapport au milieu : $\llbracket a, c, b, d \rrbracket = 1 - \llbracket a, b, c, d \rrbracket$. On notera que cette formule est triviale avec l’écriture du birapport donnée en 7.2.3, mais c’est bien parce que le résultat est tributaire de la permutation du birapport, au travers de la ruse vue en 7.2.4.

7.3.2 Les relations entre les invariants de $O(q)$

Comme pour le calcul des invariants, on renvoie le lecteur à la partie IV où les relations entre invariants ont été déterminées dans le cas d’une forme de rang 3 ou à [Wey39]. Voici la liste des relations fondamentales, qui engendrent toutes les autres ($a, b, c, d, e; x, y, z, t, u$ sont des vecteurs génériques de E) :

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \varphi(a, x) & \varphi(a, y) & \varphi(a, z) & \varphi(a, t) & \varphi(a, u) \\ \varphi(b, x) & \varphi(b, y) & \varphi(b, z) & \varphi(b, t) & \varphi(b, u) \\ \varphi(c, x) & \varphi(c, y) & \varphi(c, z) & \varphi(c, t) & \varphi(c, u) \\ \varphi(d, x) & \varphi(d, y) & \varphi(d, z) & \varphi(d, t) & \varphi(d, u) \\ \varphi(e, x) & \varphi(e, y) & \varphi(e, z) & \varphi(e, t) & \varphi(e, u) \end{vmatrix} = 0,$$

$$(2) \quad -4\llbracket a, b, c, d \rrbracket[x, y, z, t] = \begin{vmatrix} \varphi(a, x) & \varphi(a, y) & \varphi(a, z) & \varphi(a, t) \\ \varphi(b, x) & \varphi(b, y) & \varphi(b, z) & \varphi(b, t) \\ \varphi(c, x) & \varphi(c, y) & \varphi(c, z) & \varphi(c, t) \\ \varphi(d, x) & \varphi(d, y) & \varphi(d, z) & \varphi(d, t) \end{vmatrix},$$

$$(3) \quad [b, c, d, e]\varphi(a, x) - [a, c, d, e]\varphi(b, x) + [a, b, d, e]\varphi(c, x) \\ - [a, b, c, e]\varphi(d, x) + [a, b, c, d]\varphi(e, x) = 0.$$

Les relations (1) et (3) traduisent le fait que E est de dimension 4, en particulier la relation (3) provient de la relation fondamentale de dimension :

$$[b, c, d, e]a - [a, c, d, e]b + [a, b, d, e]c - [a, b, c, e]d + [a, b, c, d]e = 0,$$

tandis que (2) est la relation de changement de base pour la forme q .

7.3.3 Le théorème de Feuerbach et les relations entre invariants

Ce paragraphe est une nouvelle illustration du principe qui affirme : *tout théorème de géométrie provient d'une relation entre les invariants de cette géométrie* (voir la phrase de Bourbaki rappelée dans l'introduction générale).

Parmi les résultats les plus spectaculaires de la géométrie anallagmatique on peut citer le théorème des six cercles, mais aussi le théorème de Feuerbach. Si le premier est bien apparu au travers d'une relation entre invariants⁷, le lemme des six birapports, ce n'est le cas du second. Nous allons maintenant analyser ce théorème de ce point de vue et discuter de la nature des relations qui vont apparaître. Il y a plusieurs façons de faire les calculs. Nous avons choisi celle qui mène à une relation entre invariants au niveau vectoriel. Ce n'est pas celle qui donne les calculs les plus simples, mais c'est celle où l'on en comprend le mieux la nature des choses.

Les données

On considère l'espace vectoriel E de dimension 4 muni de la forme de Lorentz q et on se donne quatre éléments de E , notés A, B, C, H . Ces éléments sont quelconques au départ, mais on verra plus loin A, B, C comme les côtés d'un triangle et H comme l'un des cercles inscrits ou exinscrits dans ce triangle. Comme E est de dimension vectorielle 4, la donnée de quatre éléments génériques est de dimension 16 et, modulo $O(q)$ qui est de dimension 6, elle est de dimension 10 et on peut repérer A, B, C, H par leurs 10 invariants usuels : $\alpha = q(A)$, $\beta = q(B)$, $\gamma = q(C)$; $a = \varphi(B, C)$, $b = \varphi(C, A)$, $c = \varphi(A, B)$; $X = \varphi(A, H)$, $Y = \varphi(B, H)$, $Z = \varphi(C, H)$ et $T = q(H)$.

7. Au moins avec le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ car la traduction du lemme des six birapports en termes d'invariants de $O(q)$ est redoutable!

On pose $f_{A,H} := X^2 - \alpha T$, $f_{B,H} := Y^2 - \beta T$ et $f_{C,H} := Z^2 - \gamma T$ et les relations qui expriment que H est tangent à A, B, C s'écrivent alors $f_{A,H} = f_{B,H} = f_{C,H} = 0$.

Traduire l'hypothèse que A, B, C sont des droites

Dire que A, B, C sont des équations de droites, à l'action près du groupe $O(q)$, c'est dire que le réseau engendré par A, B, C est euclidien, donc que le sous-espace vectoriel $V = (A, B, C)$, muni de q , est dégénéré (dans le cas des droites, l'orthogonal de A, B, C est le point ∞ qui est isotrope). Cela revient à dire que le déterminant de Gram suivant est nul :

$$\begin{aligned} \delta &:= \begin{vmatrix} q(A) & \varphi(A, B) & \varphi(A, C) \\ \varphi(A, B) & q(B) & \varphi(B, C) \\ \varphi(A, C) & \varphi(B, C) & q(C) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & c & b \\ c & \beta & a \\ b & a & \gamma \end{vmatrix} \\ &= \alpha\beta\gamma + 2abc - a^2\alpha - b^2\beta - c^2\gamma. \end{aligned}$$

On peut alors calculer l'orthogonal de $V = (A, B, C)$:

7.3.1 Lemme. *On suppose qu'on a la relation $\delta = 0$. Alors, si λ, μ, ν sont les mineurs associés à une ligne quelconque de la matrice de Gram (par exemple $\lambda = \beta\gamma - a^2$, $\mu = ab - c\gamma$ et $\nu = ca - b\beta$), l'élément $m = \lambda A + \mu B + \nu C$ vérifie $\varphi(A, m) = \varphi(B, m) = \varphi(C, m) = 0$, il est orthogonal à (A, B, C) et isotrope.*

Démonstration. C'est la traduction des relations $\varphi(A, m) = \varphi(B, m) = \varphi(C, m) = 0$ en un système d'équations en λ, μ, ν .

7.3.2 Remarques. 1) Dans le cas cas standard m est égal à ∞ .

2) Si l'on travaille en projectif, et si A, B, C sont génériques (non parallèles s'il s'agit de droites), les coefficients λ, μ, ν sont non nuls et on peut les prendre tous égaux à 1, ce qui apporte de grandes simplifications dans les calculs ci-dessous (on a alors $A+B+C = \infty$ et on en déduit $\alpha = -b-c$, etc.) comme le lecteur le vérifiera. L'avantage de la version que nous avons choisie c'est qu'elle met bien en évidence l'endroit exact où apparaît la relation $\delta = 0$ (le lemme 7.3.5).

Le cercle d'Euler

On reprend les notations précédentes, mais, dans ce paragraphe, A, B, C sont des équations de droites (on a donc la relation $\delta = 0$) et on suppose que ces droites ne sont ni parallèles ni concourantes. Elles déterminent un

triangle dont nous allons considérer le cercle d'Euler Γ et calculer $q(\Gamma)$ et $\varphi(\Gamma, H)$ en vue de déterminer la relation qui exprime que H est tangent à Γ : $f_{\Gamma, H} := \varphi(\Gamma, H)^2 - q(\Gamma)q(H) = 0$. Attention, les coordonnées de Γ ne sont définies qu'à un scalaire ξ près, mais si l'on change Γ en $\xi\Gamma$, $\varphi(\Gamma, H)$ est multiplié par ξ et $q(\Gamma)$ par ξ^2 .

7.3.3 Lemme. *Avec les notations précédentes, on a les formules suivantes :*

$$\begin{aligned} 1) & 4q(\Gamma) = \alpha\beta\gamma, \\ 2) & 2(\lambda X + \mu Y + \nu Z)\varphi(\Gamma, H) = \\ & 2(\lambda bc + \mu ca + \nu ab)T + \lambda aX^2 + \mu bY^2 + \nu cZ^2 + \lambda\alpha YZ + \mu\beta ZX + \nu\gamma XY. \end{aligned}$$

Démonstration. En appliquant une similitude on se ramène au cas où le triangle dont les côtés sont A, B, C est défini par les trois points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et (u, v) , ou encore, dans l'espace E , $(1, 0, 0, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$ et $(1, \frac{u}{w}, \frac{v}{w}, \frac{u^2+v^2}{w^2})$. On pose $H = (x, y, z, t)$ d'où $T = q(H) = y^2 + z^2 - xt$. Les autres invariants sont les suivants :

$$\begin{aligned} \alpha &= u^2 + v^2 + w^2 - 2uw, & \beta &= u^2 + v^2, & \gamma &= w^2, \\ a &= -uw, & b &= uw - w^2, & c &= -u^2 - v^2 + uw, \\ X &= vx - vy + uz - wz, & Y &= vy - uz, & Z &= wz. \end{aligned}$$

On a, en outre, $\lambda = \mu = \nu = v^2w^2$. On calcule les milieux des côtés du triangle et on en déduit l'expression de Γ (à un scalaire près), voir l'exercice 3.4.3. On trouve ici (le facteur w est là pour des raisons d'homogénéité) :

$$\Gamma = (2vw^2, uvw + \frac{vw^2}{2}, \frac{v^2w - u^2w + uw^2}{2}, uvw).$$

Il n'y a plus qu'à vérifier les formules données dans l'énoncé, ce qui est facile⁸ (on notera que la valeur commune de λ, μ, ν est en facteur, de sorte qu'on peut supposer $\lambda = \mu = \nu = 1$).

Les relations polynomiales

Nous allons maintenant mettre en évidence les relations qui sont à la racine du théorème de Feuerbach. Dans un premier temps, a, b, c ; α, β, γ ; X, Y, Z, T ; λ, μ, ν sont des indéterminées. On rappelle qu'on a posé $f_{A, H} := X^2 - \alpha T$, $f_{B, H} := Y^2 - \beta T$ et $f_{C, H} := Z^2 - \gamma T$ notés ici, en abrégé, f_A, f_B, f_C . Les lemmes suivants sont une étape en vue de calculer $(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2 f_{\Gamma, H}$, cf. 7.3.3.

8. Ce qui n'était pas évident, en revanche, c'est de trouver ces formules à partir des expressions en u, v, w . Le lecteur est prié d'entonner les louanges de l'auteur ici.

7.3.4 Lemme. *On a la formule suivante :*

$$S := (\lambda\alpha YZ + \mu\beta ZX + \nu\gamma XY)^2 - \alpha\beta\gamma T(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2 = \\ \lambda^2\alpha^2 f_B f_C + \mu^2\beta^2 f_C f_A + \nu^2\gamma^2 f_A f_B + 2\mu\nu\beta\gamma YZ f_A + 2\nu\lambda\gamma\alpha ZX f_B + 2\lambda\mu\alpha\beta XY f_C \\ - \alpha\beta\gamma T(\lambda^2 f_A + \mu^2 f_B + \nu^2 f_C) + 2\mu\nu\beta\gamma YZX^2 f_A + 2\nu\lambda\gamma\alpha ZXY^2 f_B + 2\lambda\mu\alpha\beta XYZ^2 f_C.$$

En particulier S est dans l'idéal (f_A, f_B, f_C) .

Démonstration. C'est une vérification sans difficulté.

Dans le lemme suivant, tout aussi immédiat à établir, λ, μ, ν ne sont plus des indéterminées, mais sont définis par $\lambda = \beta\gamma - a^2$, $\mu = ab - c\gamma$ et $\nu = ca - b\beta$ et δ est le déterminant de Gram $\alpha\beta\gamma + 2abc - a^2\alpha - b^2\beta - c^2\gamma$.

7.3.5 Lemme. *On a la formule suivante :*

$$2(\lambda bc + \mu ca + \nu ab)T + \lambda aX^2 + \mu bY^2 + \nu cZ^2 = \lambda a f_A + \mu b f_B + \nu c f_C + aT\delta.$$

Retour à Feuerbach

On considère trois équations de droites A, B, C , génériques, et un élément $H \in E$, non isotrope. On reprend les notations précédentes concernant les invariants associés (y compris λ, μ, ν) et on rappelle que le déterminant de Gram δ est nul. On considère un représentant Γ du cercle d'Euler associé au triangle ABC . Rappelons que la relation $f_{A,H} = 0$ traduit le fait que le cercle-droite H est tangent à A et de même pour B, C, Γ . Le point crucial est le suivant :

7.3.6 Lemme. *Le polynôme $4(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2 f_{\Gamma,H}$ en les invariants est dans l'idéal $I = (f_{A,H}, f_{B,H}, f_{C,H})$: il existe u, v, w vérifiant :*

$$4(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2 f_{\Gamma,H} = u f_{A,H} + v f_{B,H} + w f_{C,H}.$$

Démonstration. On a $f_{\Gamma,H} = \varphi(\Gamma, H)^2 - q(\Gamma)q(H)$ avec $q(H) = T$ et, en vertu de 7.3.3, $4q(\Gamma)$ est égal à $\alpha\beta\gamma$ et $2(\lambda X + \mu Y + \nu Z)\varphi(\Gamma, H)$ à

$$2(\lambda bc + \mu ca + \nu ab)T + \lambda aX^2 + \mu bY^2 + \nu cZ^2 + \lambda\alpha YZ + \mu\beta ZX + \nu\gamma XY.$$

Comme δ est nul, 7.3.5 montre que, dans cette dernière expression, le terme $2(\lambda bc + \mu ca + \nu ab)T + \lambda aX^2 + \mu bY^2 + \nu cZ^2$ est dans I . Quand on élève au carré et qu'on regarde modulo I , il ne reste donc dans $4(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2 f_{\Gamma}$ que $(\lambda\alpha YZ + \mu\beta ZX + \nu\gamma XY)^2 - \alpha\beta\gamma T(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2$, c'est-à-dire S , qui est dans I lui aussi en vertu de 7.3.4.

On peut alors finir de prouver Feuerbach. On applique ce qui précède en prenant pour H l'un des cercles inscrit ou exinscrits dans le triangle ABC .

Comme on a $\lambda A + \mu B + \nu C = \infty$ en vertu de 7.3.1, on en déduit $\lambda X + \mu Y + \nu Z = \varphi(\infty, H)$ et ce nombre est non nul puisque H est un vrai cercle. Comme H est tangent à A, B, C , $f_{A,H}, f_{B,H}, f_{C,H}$ sont nuls, donc aussi $f_{\Gamma,H}$ en vertu de 7.3.6, donc H est tangent à Γ et le théorème est établi.

7.3.7 Remarques. 1) L'une des difficultés de cette preuve vient du fait que l'idéal I ne définit pas seulement les quatre cercles inscrit et exinscrits, mais aussi le point à l'infini quadruple. En effet, les équations $f_{A,H} = \varphi(A, H)^2 - q(A)q(H)$ sont du second degré en H donc définissent des quadriques de $\mathcal{E} = \mathbf{P}^3$ et leur intersection est de cardinal 8. Comme Γ ne contient pas le point à l'infini, l'équation $f_{\Gamma,H}$ ne peut donc pas être dans l'idéal I , mais elle y est "transportée" par l'élément $(\lambda X + \mu Y + \nu Z)^2$.

2) Les calculs ci-dessus imposent une réflexion. En effet, le théorème de Feuerbach n'est pas du tout trivial. Déjà, son énoncé n'est pas évident à découvrir et sa preuve, par quelque moyen qu'on utilise, est loin d'être évidente. Cependant, du point de vue algébrique, les relations qui ont été mises en jeu dans la preuve algébrique ci-dessus sont "triviales". En effet, il s'agit essentiellement des lemmes 7.3.4 et 7.3.5 et ces relations sont, au fond, de la forme $0 = 0$. D'ailleurs, elles ne peuvent s'écrire de manière non triviale à partir des relations énumérées au paragraphe 7.3.2 car elles ne mettent en jeu que quatre éléments A, B, C, H et pas de crochets. Ce paradoxe (un théorème non trivial dont la preuve n'utilise que des relations triviales) doit nous conduire à mettre un sérieux bémol sur la fameuse phrase de Bourbaki.

3) Qu'il existe une preuve algébrique du théorème de Feuerbach n'est pas étonnant et conforme aux principes généraux. Encore fallait-il l'écrire. En comparant cette preuve et celle donnée en 1.4.1 on ne peut que se dire que la géométrie c'est tout de même une belle invention !

Bibliographie

- [Aud06] Michèle Audin. *Géométrie*. EDP Sciences, Les Ulis, 2006.
- [Ber90] Marcel Berger. *Géométrie*. Nathan, Paris, 1990.
- [Ber09] Marcel Berger. *Géométrie vivante ou l'échelle de Jacob*. Cassini, Paris, 2009.
- [Bou65] Nicolas Bourbaki. *Topologie générale, Ch. 1*. Hermann, Paris, 1965.
- [Car61] Henri Cartan. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*. Hermann, 1961.
- [Cha70] Michel Chasles. *Rapport sur les progrès de la géométrie*. Hachette, Paris, 1870.
- [DC51] Robert Deltheil and Daniel Caire. *Compléments de géométrie*. Baillièrre, Paris, 1951.
- [DHP07] Marie-Claude David, Frédéric Haglund, and Daniel Perrin. *Géométrie affine (polycopié)*. Université Paris-Sud, Orsay, 2007.
- [Die70] Jean Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques*. Springer, Berlin, 1970.
- [Eid09] Jean-Denis Eiden. *Géométrie analytique classique*. Calvage et Mounet, Paris, 2009.
- [Ful84] William Fulton. *Intersection Theory*. Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [Gug67] Heinrich W. Guggenheimer. *Plane geometry and its groups*. Holden-Day, San Francisco, 1967.
- [Had98] Jacques Hadamard. *Leçons de géométrie I, géométrie plane*. Jacques Gabay, Paris, 1988, première édition 1898.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer, Berlin, 1977.
- [Lad03] Yves Ladegaillerie. *Géométrie affine, projective, euclidienne, analagmatique*. Ellipses, Paris, 2003.
- [Mar82] George E. Martin. *Transformation geometry*. Springer Verlag, New-York, 1982.

- [Mar03] Yves Martin. *Conception et mise en œuvre de micromondes de géométries non euclidiennes dans le cadre de la géométrie dynamique illustrées avec Cabri-Géomètre. Expérimentation en formation des maîtres (thèse)*. Université de Grenoble 1, 2003.
- [Ped70a] Daniel Pedoe. *A course of geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1970.
- [Ped70b] Daniel Pedoe. Thinking geometrically. *Amer. Math. Monthly*, 77-7 : 711–721, 1970.
- [Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique, une introduction*. Interéditions, Paris, 1995.
- [Per96] Daniel Perrin. *Cours d’algèbre*. Ellipses, Paris, 1996.
- [Ric89] David R. Richman. The fundamental theorems of vector invariants. *Advances in mathematics*, 73 : 43–78, 1989.
- [Rud98] Walter Rudin. *Analyse réelle et complexe*. Dunod, Paris, 1998.
- [Ste26] Jacob Steiner. Einige geometrische betrachtungen. *Crelle*, I : 161–184, 1826.
- [Wey39] Hermann Weyl. *The Classical Groups : Their Invariants and Representations*. Princeton Math. Series, Princeton, 1939.