Postface : l'enseignement de la géométrie

Attention, ce texte a été écrit en 2013*. Depuis, des modifications de programme sont intervenues au collège, avec le retour des cas d'égalité et de similitude des triangles ainsi que des notions sur les transformations. Certaines remarques figurant ci-dessus sont donc caduques.*

Introduction

Comme je l'ai expliqué dans l'introduction de ce livre, l'enseignement a toujours été l'une de mes principales préoccupations et notamment, depuis plus de trente ans, l'enseignement de la géométrie. Cette postface vise à tirer quelques conclusions à ce sujet, à la lumière de ce qui précède. Je traiterai de l'enseignement de la géométrie à plusieurs niveaux, essentiellement ceux du second degré (collège et lycée) et de la formation des maîtres. Je suis largement incompétent en ce qui concerne l'enseignement du premier degré [1].

En vérité, j'ai déjà abordé ce sujet en de multiples endroits, et d'abord dans le rapport de la commission Kahane [dpJPK02] (paru en 2002, mais écrit en 1999 [2]). Je ne renie rien de ce que j'écrivais alors, mais depuis une quinzaine d'années, il y a eu des évolutions, à la fois dans l'enseignement et dans ma vision des choses. De ce dernier point de vue, ma réflexion s'est approfondie par l'écriture du présent livre et un certain nombre d'idées qui étaient à l'état d'intuitions en 1999 ont pu prendre forme, être confirmées ou corrigées. C'est l'un des buts principaux de cette postface de faire le point sur ce sujet. Du côté de l'enseignement, l'analyse que je développais en 1999

1. Sur ce sujet, on pourra consulter le texte de Guy Brousseau *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire : l'étude de l'espace et de la géométrie* publié dans les actes du colloque de didactique de l'université de Crète à Réthymon (2000), ou encore [RB94] ou [MJPG13].

2. Voir aussi [JCD01], [Per03] ou encore la conférence à Cergy sur ma page web : `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/SurGeometrie/Cergy-janvier-99.pdf`

était fonction de l'état de l'enseignement secondaire de l'époque. Depuis, les choses se sont largement dégradées, à tel point qu'on peut considérer la géométrie, au moins au lycée, comme un domaine en voie de disparition. En effet, un bachelier scientifique n'aura désormais jamais entendu parler des notions suivantes, pourtant essentielles, et pas seulement en mathématiques : rotation (plane), homothétie, similitude [3], composition [4], angles orientés, cas d'isométrie, barycentres et saura à peine ce qu'est une translation [5]. Bien sûr, il y a belle lurette que les transformations de l'espace ou les coniques ne sont plus abordées au lycée. Je considère pour ma part que ces programmes sont un désastre et je vais tenter d'expliquer pourquoi dans ce qui suit. Cette nouvelle donne institutionnelle rend, sinon caduques, du moins un peu théoriques, un certain nombre de discussions abordées dans le rapport Kahane et dans les textes qui l'ont complété. Pour donner un exemple, l'un des débats essentiels concernant l'enseignement de la géométrie, qui était au centre de la réforme des mathématiques modernes et des suivantes, est l'équilibre entre l'usage des transformations et celui des cas d'isométrie et de similitude des triangles. Dans les programmes actuels, ce problème est brillamment résolu de la manière dont Raminagrobis a tranché le différend entre la belette et le petit lapin : l'une et l'autre ont été mangés !

En vérité, au niveau du lycée, il ne reste plus guère que la partie calculatoire de la géométrie. Alors, bien sûr, le calcul c'est important et ce livre en est une illustration permanente, mais ce n'est pas tout ! C'est mutiler la géométrie que de la réduire au calcul.

Je ne peux que vouer aux gémonies les auteurs de ces programmes désastreux, mais cela relativise évidemment la portée pratique de ce que je vais proposer ci-dessous : pour qu'un discours sur l'enseignement de la géométrie ait un intérêt, encore faut-il que cet enseignement subsiste.

J'ajoute que cette entreprise d'extermination de la géométrie – ce géocide, en quelque sorte – ne s'arrête pas là. Les nouveaux programmes des classes préparatoires ont aussi fait table rase de tout ce qui est géométrique : les coniques (le peu qu'il en restait), les courbes et surfaces (toute la partie géométrie différentielle), les isométries affines en dimension 3, le produit vectoriel [6]. Les arguments pour justifier ce massacre sont d'un haut niveau scien-

3. Tout l'aspect géométrique des nombres complexes a ainsi disparu.

4. Les symétries axiales étant étudiées dès la sixième (pour combien de temps encore ?) elles permettraient en principe de retrouver toutes les isométries du plan par composition. Cependant, même en terminale, le mot "composition" n'est plus prononcé qu'à voix basse, y compris dans le cadre de la dérivation des fonctions.

5. La notion intervient en seconde mais le programme précise : *La translation, en tant que transformation du plan, n'est pas étudiée en classe de seconde.* Elle ne l'est pas non plus après.

6. J'ignore ce qu'en pensent les physiciens pour qui ces notions sont cruciales. Certains

tifique, ils vont de : *c'est poussiéreux* à : *c'est chronophage.*

Enfin, à l'opposé, dans l'unique endroit où il reste un peu de géométrie, à savoir le collège, on ne peut qu'être inquiet, en particulier à cause des mauvais résultats des élèves français dans les évaluations internationales de type PISA [7]. On sait que ces études sont largement dominées par les anglo-saxons, et que cela induit un énorme biais dans ces évaluations. Toutefois, j'ai très peur que nos gouvernants fassent leur le syllogisme imparable suivant :

— *Les performances de la France aux évaluations PISA sont mauvaises.*
— *Or, la géométrie est totalement absente de ces évaluations* [8].
— *Donc elle ne sert à rien et il faut la supprimer pour se concentrer sur les domaines évalués.*

Face à cette convergence d'attaques, il n'est pas inutile d'écouter les arguments des adversaires de la géométrie. On peut les faire remonter à l'époque des mathématiques modernes et la fameuse phrase de Bourbaki citée dans l'introduction de ce livre dit en substance que la géométrie est une science morte [9] (*la mine est tarie*). Jean Dieudonné le dit d'ailleurs avec ironie dans son livre [Die64] à propos de la trigonométrie :

Il est bien vrai que les formules trigonométriques sont tout à fait indispensables à trois professions éminemment respectables :
1) les astronomes
2) les arpenteurs
3) les auteurs de manuels de trigonométrie.

Il faut replacer ces diatribes dans leur contexte et, à cette époque, l'inflation des programmes de géométrie justifiait sans doute partiellement les critiques et les allégements qui ont suivi. Il n'empêche que l'on a maintenant jeté le bébé avec l'eau du bain et Dieudonné n'aurait sans doute pas approuvé la disparition des transformations (au contraire, tout son livre est

seront bien contents car ils pourront enfin traiter ces points comme ils en ont envie, sans se soucier de ces em... de mathématiciens.

7. Ces études sont menées sans réelle transparence par un organisme obscur appelé *consortium* (ce qui n'est pas sans évoquer la *firme*, i.e. la CIA). L'exemple du classement de Shangaï montre que nos gouvernants ont tendance à prendre pour argent comptant les conclusions de ces officines.

8. Sauf par le biais des calculs de grandeurs. D'ailleurs, le temps mis par un élève pour répondre à un item ne doit pas dépasser deux minutes. Peut-on raisonnablement faire de la géométrie dans ces conditions ?

9. C'est une assertion bien imprudente que de décréter qu'un domaine de la connaissance est mort. Dans le cas de la théorie des invariants mise en cause par Bourbaki en 1959 dans la phrase évoquée ci-dessus, le livre de Mumford *Geometric invariant theory* qui date de 1965 y apporte un démenti cinglant. Comme le note Étienne Ghys (site Images des maths, 11/10/09) : *Le développement des mathématiques a des possibilités que l'évolution n'a pas... D'abord, les mathématiciens ont une mémoire (et des bibliothèques) : une branche morte il y a longtemps peut parfois renaître en acquérant une nouvelle pertinence.*

un plaidoyer pour leur usage).

À côté de ces arguments discutables, mais scientifiques, il en est d'autres plus sournois. Je caricature, mais le thème est, en gros : *la géométrie ? mais c'est ringard*[10] *!* Un exemple est la déclaration de l'inspecteur général J. Moisan : *La géométrie c'est les mathématiques de papa. ... Je crois qu'on peut donner une formation d'aussi bonne qualité tant en contenus qu'en compétences acquises en enseignant les mathématiques discrètes, les statistiques ou l'algorithmique*[11] *qu'en enseignant la géométrie d'Euclide.*

En ce qui me concerne, je ne pense pas cela une seule seconde et j'essaierai, dans ce qui suit, de montrer pourquoi.

Pourquoi enseigner la géométrie ?

Parce qu'elle est utile

Il ne faut jamais perdre de vue la question de l'utilité lorsqu'on défend la géométrie ou même les mathématiques. L'exemple du latin est là pour montrer que les meilleurs arguments sur la valeur formatrice d'une discipline ne pèsent pas bien lourd quand il s'agit de la supprimer. Par ailleurs, il ne faut pas négliger le fait que les mathématiques n'ont généralement pas très bonne presse, ni parmi les politiques, ni parmi les journalistes. Ainsi Claude Allègre affirmait-t-il : *l'ordinateur va nous conduire à reconsidérer les mathématiques comme un auxiliaire des sciences,* tandis que Andrew Hacker dans le New-York Times pose carrément la question : *faut-il arrêter d'enseigner les mathématiques à l'école ?* Je sais bien que la plupart des hommes politiques et des journalistes sont incompétents sur ce sujet [12], mais on ne peut pas négliger leur influence. Il est donc absolument nécessaire de rappeler, encore et toujours, que les mathématiques sont partout présentes, y compris dans les endroits les plus improbables. Dans ce qui suit, je ne m'intéresserai

10. Je déteste ce type d'arguments, ayant eu à lutter sans succès contre eux il y a bien longtemps lors de la disparition des ENS de jeunes filles (*des écoles de filles, mais c'est ringard !*). Il n'y a pas d'assertions plus difficiles à réfuter que celles-là.

11. Voir par exemple `http://abcmathsblog.blogspot.fr/2007/11/epreuve-pratique-et-mathmatiques-sexy.html`. On notera l'absence d'une autre branche (sans doute morte ?) des mathématiques : l'analyse, et cela s'est traduit par la suppression des équations différentielles dans les nouveaux programmes de lycée.

12. Il y a quelques exemples savoureux, voir
`http://www.youtube.com/watch?v=OOSLpAJ_8aw` ou
`http://www.youtube.com/watch?v=ulnLgYAM-0U` ou encore
`http://fluctuat.premiere.fr/Societe/News-Videos/Video-Valerie-Pecresse-est-nulle-en-maths-3240614`.

qu'à la géométrie, mais le discours peut et doit être adapté [13] pour toutes les autres branches des mathématiques. L'utilité de la géométrie n'est pas nouvelle et l'histoire regorge d'applications. J'en ai choisi deux, que je trouve instructives.

Un premier exemple historique : le tunnel de Samos

Cet exemple [14] très ancien, met en évidence l'une des utilités de la géométrie : *atteindre l'inaccessible*. Bien entendu, il peut se transposer dans de très nombreuses situations actuelles, élémentaires ou non.

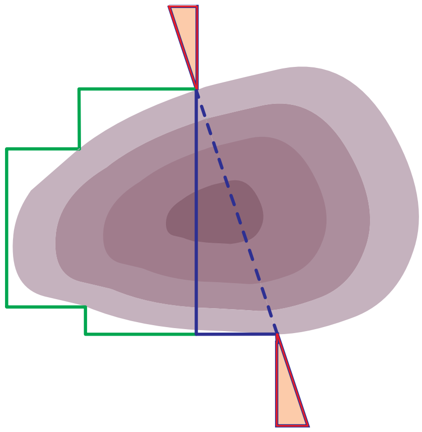


Figure 1 – Le tunnel de Samos

Samos est une île grecque, proche de la Turquie, dont les habitants ont construit, au 6-ième siècle avant notre ère un tunnel d'un kilomètre de long à travers le mont Castro. Ce tunnel permettait d'assurer l'approvisionnement en eau de la ville (fortifiée) de Samos (du nord vers le sud). Il a été construit par l'architecte Eupalinos de Megara, en partant des deux extrémités et en se rejoignant au milieu, avec une erreur négligeable.

Il est clair qu'une telle performance nécessite des connaissances de géométrie [15]. Une hypothèse sur la méthode a été fournie par Héron d'Alexandrie (premier siècle après J.-C.). Apostol (qui conteste cette hypothèse) la résume ainsi (voir figure ci-dessus) : *By measuring the net distance traveled in each of two perpendicular directions, the lengths of two legs of a right triangle*

13. On trouvera un aperçu de ce que je propose en direction du public des collégiens et lycéens sur ma page web `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/conferences.html`.

14. On renvoie le lecteur à l'article de Tom Apostol, *The tunnel of Samos* sur Internet ou à Wikipedia pour des détails.

15. Rappelons que cela se passe plusieurs siècles avant Euclide.

are determined, and the hypotenuse of the triangle is the proposed line of the tunnel. By laying out smaller similar right triangles at each entrance, markers can be used by each crew to determine the direction for tunneling.

Indépendamment des controverses historiques et techniques, cet exemple illustre bien la puissance des concepts de la géométrie (ici, parallèles, perpendiculaires, longueurs, angles, etc.) comme moyens d'action sur le réel.

Un autre exemple historique : la première loi de Kepler

Kepler (1571-1630) vient après Copernic et son système héliocentrique, il est contemporain de Galilée et il précède Newton. Il est le disciple de l'astronome danois Tycho Brahé et bénéficie des observations, d'une précision extraordinaire pour l'époque, de celui-ci. L'une des caractéristiques de Kepler est sa croyance métaphysique en un agencement divin de l'univers, qui doit donc trouver son écho dans les mathématiques, autre symbole de perfection.

Cela le mène d'abord à une tentative [16] délirante d'explication du système solaire à l'aide des polyèdres réguliers. Mais cela le conduit aussi à l'énoncé de sa première loi. Kepler, grâce aux mesures de Tycho Brahe, sait [17] que les trajectoires des planètes sont des ovales et non des cercles et cela le perturbe beaucoup, il dit avoir rencontré *une charretée de fumier : l'ovale. Ah, si seulement la forme était une ellipse parfaite, on trouverait toutes les réponses dans Archimède et dans Apollonius.*

Il finit par se convaincre que ces trajectoires sont bien des ellipses (c'est sa première loi, parue en 1609 dans l'*Astronomia nova*) et le détail qui provoque la découverte est la coïncidence de deux nombres relatifs à l'orbite de Mars (la plus elliptique de toutes) et reliés à la géométrie de l'ellipse, voir figure ci-dessous.

Deux remarques concernant cette découverte :

• D'abord, elle marque la mutation d'un domaine (les coniques) qui relevait jusqu'alors essentiellement des mathématiques pures et qui, d'un coup, devient partie prenante dans l'explication du monde.

• Ensuite, ce qui est fascinant dans la démarche de Kepler, c'est cette foi extraordinaire (de source essentiellement religieuse) en les mathématiques [18]. Ce qui est remarquable dans cet exemple c'est justement que les mathématiques (ici la géométrie) permettent de prévoir le déroulement des

---

16. Voir l'article Kepler sur Wikipedia ou le livre d'Arthur Koestler *Les somnambules*.
17. Contrairement à Galilée.
18. On notera que ses lois sont purement empiriques. Une preuve en sera donnée par Newton à partir de la loi physique de la gravitation universelle.

Dans la figure ci-contre, O est le centre de l'orbite de Mars et F est le soleil (l'échelle n'est pas respectée). On a $BB'/OB = (a-b)/b = 0,00429$ et $\sec\theta = 1/\cos\theta = a/b = 1,00429$.

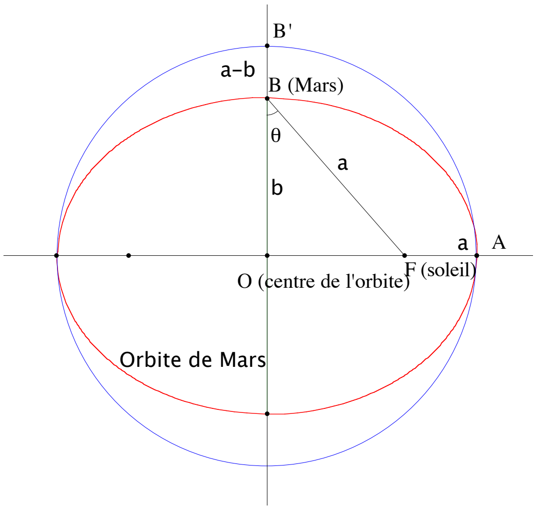


FIGURE 2 – La trajectoire de la planète Mars

phénomènes (ici les trajectoires des planètes), avant même que l'explication physique n'ait véritablement été obtenue.

La géométrie aujourd'hui : inventaire

Heureusement, l'utilité de la géométrie n'est pas seulement une histoire ancienne, sinon ses détracteurs auraient beau jeu de la liquider. De fait elle est utile actuellement dans de très nombreux domaines. Je cite, en vrac : l'architecture, l'urbanisme, la topographie, les mesures agraires, l'horticulture, l'imagerie, la CAO, l'infographie, le dessin industriel, le design, la robotique, l'astronomie, la mécanique, la physique, la balistique, la charpente, la menuiserie, la carrosserie (courbes de Bézier), la typographie (idem), la biologie (ADN et double hélice), la tomographie, la statistique, la recherche opérationnelle, l'optique, la cristallographie, la navigation, la cartographie, le bricolage, etc [19]. Le lecteur pourra par exemple consulter [JEG97] [20].

19. Sans oublier les ratons laveurs.

20. Une autre application de la géométrie m'a été signalée par Pascal Gamblin : elle peut être utile pour entrer en contact avec les extra-terrestres ! On trouve ce thème dans le livre de Pierre Boulle *La planète de singes* qui a inspiré la célèbre série de films.

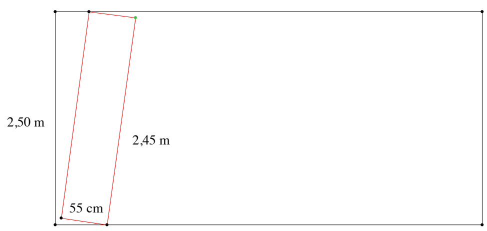
Comment n'avais-je pas utilisé plus tôt ce moyen simple ? Rassemblant mes souvenirs scolaires, je traçai la figure géométrique qui illustre le théorème de Pythagore. ... L'effet sur Zira fut extraordinaire. Son mufle devint pourpre et elle poussa une violente exclamation. ... Ensuite, elle se retourna vers moi et me saisit la main, la pression de ses doigts ayant une tout autre signification que lorsqu'elle me flattait comme un jeune animal, après un tour réussi. Elle me présenta enfin le carnet et le stylo d'un air suppliant. C'est elle, à présent, qui se montrait avide d'établir un contact. Je remerciai Pythagore et m'engageai

L'utilité pratique : construction, bricolage, etc.

Je renvoie au rapport de la commission Kahane pour une discussion sur ce point (voir aussi [RB94]). Il y a une foule d'exemples d'utilisation pratique de faits géométriques (par exemple la "règle $30, 40, 50$" des menuisiers pour déterminer si un angle est droit). Citons en deux autres :

• Un vitrier doit remplacer une vitre en forme de parallélogramme [21]. Cela présente une difficulté [22] car ce qu'il fait d'habitude pour une vitre rectangulaire, à savoir mesurer longueur et largeur, ne suffit plus.

• Lorsqu'on veut installer un grand meuble dans une pièce (j'ai été personnellement confronté à ce problème), il faut bien entendu vérifier que sa hauteur est inférieure à celle de la pièce. Mais, attention, cela ne suffit pas (il faut le transporter à l'horizontale pour passer les portes, puis le basculer) et Pythagore est ici bien utile !



L'architecture

L'architecture moderne, à base de verre et d'acier, est une grande utilisatrice de la géométrie. L'illustration ci-dessus est extraite de l'article *Geometric Computing for Freeform Architecture*, Journal of Mathematics in

---

un peu plus sur la voie géométrique. Sur une page du carnet, je dessinai de mon mieux les trois coniques, avec leurs axes et leurs foyers : une ellipse, une parabole et une hyperbole. Puis, sur la page d'en face, je traçai un cône de révolution. Je rappelle ici que l'intersection d'un tel corps par un plan est l'une des trois coniques, suivant l'angle de coupe. Je fis la figure dans le cas de l'ellipse et, revenant à mon premier dessin, j'indiquai du doigt la courbe correspondante à ma guenon émerveillée. Elle m'arracha le carnet des mains, traça à son tour un autre cône, coupé par un plan sous un angle différent, et me désigna l'hyperbole de son long doigt. Je me sentis bouleversé par une émotion si intense que des larmes me vinrent aux yeux ...

21. Ça existe, par exemple dans certaines cages d'escalier de Colmar !

22. L'idée importante qu'il faut avoir ici est celle du nombre de paramètres dont dépend un parallélogramme. Comme un demi-parallélogramme est un triangle, trois paramètres sont nécessaires pour le déterminer, voir Partie V ou la conférence *Même aire, même périmètre et pourtant* sur ma page web `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/APM-aire-perimetre9.pdf` ou la video `http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/meme_aire_meme_perimetre_et_pourtant/`.

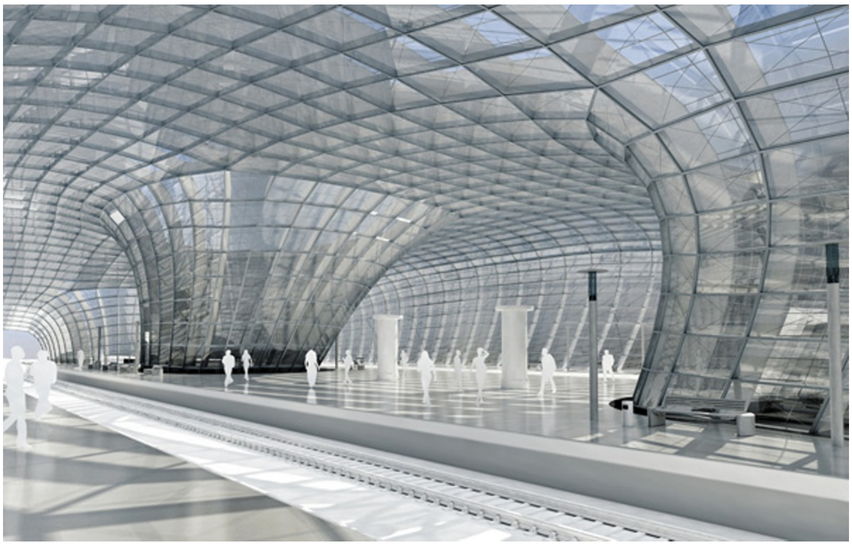


Figure 7 This mesh which possesses a face-face offset at constant distance has been created by an iterative design process which employs subdivision and optimization using both (2) and (3) in an alternating way (image courtesy B. Schneider).

Industry, 2011. Les auteurs s'intéressent aux maillages (*mesh*) à faces quadrilatères gauches et les problèmes traités sont essentiellement des problèmes d'optimisation. Le point important est que la géométrie est indispensable pour concevoir et mener à bien les calculs : *"It is important to know that in many cases optimization without additional geometric knowledge does not succeed."*

L'imagerie

Notre société est paradoxale : l'image y est omniprésente, mais la théorie de l'image (c'est-à-dire la géométrie) est en voie de disparition ! Pourtant, dans ce domaine, il est indéniable que la géométrie est fondamentale, et notamment la géométrie projective, objet principal de ce livre [23]. Pour des détails sur cet exemple on consultera le cours de Peter Sturm à L'INRIA Rhône-Alpes :

`steep.inrialpes.fr/people/Sturm/Teaching/poly_3D.pdf`

23. Et pratiquement plus enseignée nulle part.

FIG. 4 – Quatre images des quais de Grenoble, prises du même point de vue.

Le problème est celui de la reconstitution [24] d'images par **mosaïque**, à partir de plusieurs images fournies par une caméra, du même point de vue, mais avec des orientations différentes. On utilise un modèle dit *sténopé* (ou trou d'épingle) qui représente une telle image comme une projection centrale (c'est-à-dire une perspective). Pour recoller les images, il faut composer les perspectives : on obtient ainsi une homographie d'un plan sur l'autre. Cette homographie est déterminée par la donnée de quatre points génériques et de leurs images. On peut ensuite recoller les images et obtenir une image plus grande. Sur les deux groupes de figures données ici, on voit bien la déformation des rectangles par homographie : ils deviennent des quadrilatères quelconques.

Puisqu'on parle d'image, un mot sur les logiciels de dessin et de géométrie. Il est clair qu'ils constituent un progrès considérable pour tous ceux qui ont à réaliser figures, dessins, animations, etc. Mais, de même que les outils des anciens (règle et compas) avaient suscité un grand nombre de problèmes non triviaux (par exemple la quadrature du cercle), les logiciels de géométrie en posent aussi aux mathématiciens actuels. Pour ne donner qu'un exemple élémentaire, tous les logiciels actuels ont une macro qui renvoie la conique passant par cinq points généraux du plan. En revanche, ils n'en ont pas, en général, qui donnent la conique tangente à cinq droites, ou passant par quatre points et tangente à une droite, etc. Voilà des questions que le lecteur attentif de ce livre n'aura pas manqué de résoudre (voir Partie III, l'exercice **??** et les suivants).

En physique

Le lecteur qui serait curieux de voir apparaître les triangles de la géométrie euclidienne dans les théories quantiques de la gravitation consultera l'article

24. On notera parmi les applications possibles, les véhicules autonomes (i.e. sans pilote), voir le projet MDARS de l'US Army ou celui de Google.

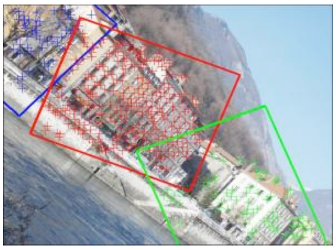


FIG. 5 – Mosaïque obtenue et illustration des positions relatives des trois premières images, vues dans la quatrième.

Planar maps, circle patterns and 2d gravity de François David et Bertrand Eynard `http://arxiv.org/abs/1307.3123` et ses références.

Penser géométriquement

Au-delà de l'utilité directe de la géométrie, il est un second point, peut-être plus important encore, en mathématiques et ailleurs, qui est le fait de penser géométriquement. Je cite le rapport [dpJPK02] :

Face à une situation qui n'est pas a priori géométrique, penser géométriquement signifie d'abord être capable de faire un dessin. De fait, chaque mathématicien a ses représentations concrètes de situations complexes qui lui servent de raccourcis de pensée. ... Parfois ces raccourcis, lorsqu'ils sont particulièrement efficaces, deviennent des objets mathématiques à part entière, véritables condensés d'information (on pense ici aux diagrammes de Dynkin).

Au-delà de cet aspect pratique, penser géométriquement c'est aussi être capable de s'appuyer sur l'intuition géométrique qu'on a acquise dans le plan et l'espace pour l'appliquer à des situations plus complexes. ...

En résumé, penser géométriquement, c'est avoir une vision globale d'une question mathématique, la perception plus locale intervenant ensuite, notamment avec les calculs[25].

Là encore, je vais essayer d'illustrer ces idées par quelques exemples.

La deuxième loi de Kepler

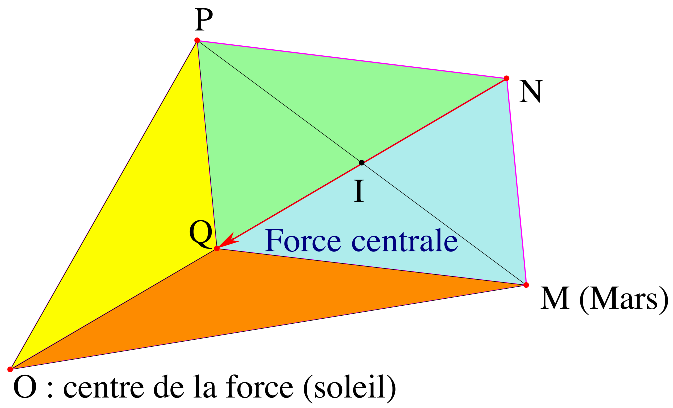


FIGURE 3 – La loi des aires

Revenons à Kepler, mais cette fois avec sa deuxième loi. On a vu que les planètes M ont une trajectoire elliptique dont le soleil occupe un foyer O. Le long de cette trajectoire, leur mouvement n'est pas uniforme, mais la deuxième loi de Kepler affirme que les aires balayées par le rayon vecteur OM pendant des laps de temps égaux sont égales. Newton a prouvé ce résultat à partir de la loi fondamentale de la dynamique (l'accélération est proportionnelle à la force) et de la seule hypothèse de l'existence d'une force d'attraction **centrale**, par un raisonnement géométrique simple et convaincant. Cette preuve se situe dans le cadre d'un modèle physique discret (mais on peut retrouver le modèle continu par un passage à la limite). Nous considérons donc ici le temps comme formé de la juxtaposition d'instants très brefs, voire infinitésimaux, de durée dt.

Durant le premier laps de temps dt le mobile va de M à N, durant le second (égal au même dt) de N à P. Pendant ces temps très petits, on

25. Je ne peux que répéter ce que je disais dans l'introduction : *la géométrie est à l'algèbre ce que le cinéma est au livre, plus de choses sont dites parfois dans un seul plan (dans une seule figure) que dans de longs discours (de longs calculs).*

peut considérer que les vitesses vectorielles sont constantes, donc le mouvement rectiligne. En revanche, elles varient entre deux instants successifs. Comme les vitesses sont uniformes de M à N et de N à P, la variation de vitesse est colinéaire à $\overrightarrow{NP} - \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NQ}$ ($MNPQ$ est donc un parallélogramme). Cette variation de vitesse c'est l'accélération, elle est proportionnelle à la force, qui est centrale, donc (NQ) passe par O.

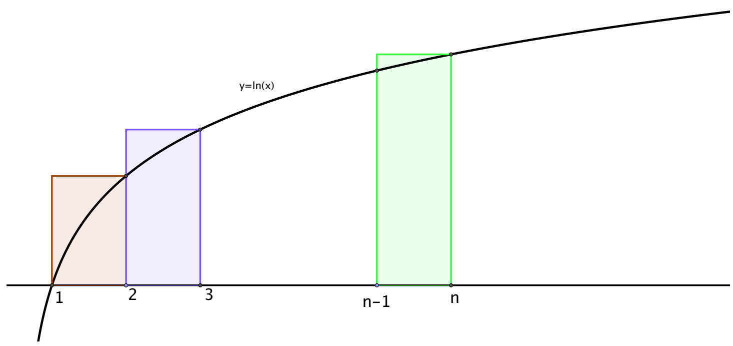
Mais alors, on a $\mathcal{A}(MNQ) = \mathcal{A}(NPQ)$ par le lemme du demi-parallélogramme [26] et $\mathcal{A}(OMQ) = \mathcal{A}(OPQ)$ par le lemme du chevron (car les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu), donc $\mathcal{A}(OMN) = \mathcal{A}(ONP)$: les aires balayées par le rayon vecteur OM pendant des laps de temps égaux sont égales.

Commentaire. Bien entendu, on peut retrouver cette loi par le calcul, mais la description géométrique met plus encore en évidence la racine des choses : la loi des aires provient uniquement du fait que la force est centrale, indépendamment de son intensité.

La formule de Stirling

Il s'agit de déterminer l'ordre de grandeur de la suite $n!$. La formule est bien connue : $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$. On peut obtenir, de manière presque immédiate, un ersatz de cette formule, suffisant dans la plupart des applications, que l'on peut expliquer à des élèves de lycée. On trouvera les détails sur ma page web `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/analyse/Suites/Stirling.pdf`.

L'idée est de transformer le produit $n!$ en somme en prenant son logarithme. On étudie donc $\ln n! = \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n$ et on contemple la figure suivante, qui illustre la méthode des rectangles :



26. Voir [Per11b] chapitre 7. En fait, le lemme du chevron (voir Partie II **??**) suffit.

Elle nous donne l'encadrement :

$$\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln(n-1) \leq \int_1^n \ln(x)dx \leq \ln 2 + \cdots + \ln(n-1) + \ln n.$$

Mais, on sait calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n \ln(x)dx = \big[x\ln x - x\big]_1^n = n\ln n - n + 1$. On en déduit $n\ln n - n + 1 \leq \ln n! \leq (n+1)\ln n - n + 1$ et, en passant à l'exponentielle $e\, n^n e^{-n} \leq n! \leq e\, n^n e^{-n} n$, ce qui n'est pas si mal. On obtient facilement le terme[27] $\sqrt{n}$ en remplaçant la méthode des rectangles par celle des trapèzes et du point médian.

Commentaire. On voit ici de manière éclatante la force de la **vision** géométrique : la seule vue de la figure montre qu'on a une estimation de $\ln n!$ par l'aire sous la courbe et il ne reste plus qu'à calculer l'intégrale pour avoir explicitement cette valeur. De plus, si l'on juge l'encadrement trop grossier, on a aussitôt le moyen de l'affiner en encadrant de plus près la courbe par ses sécantes et ses tangentes.

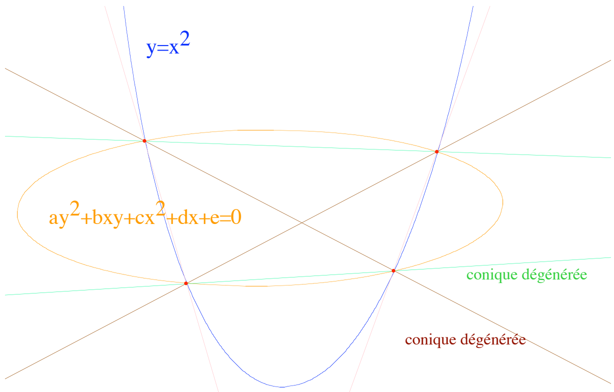
Gaspard Monge a bien décrit cette utilisation de la vision géométrique :
Il faut donc que l'élève s'accoutume de bonne heure à sentir la correspondance qu'ont entre elles les opérations de l'analyse et celles de la géométrie ; il faut qu'il se mette en état, d'une part, de pouvoir décrire en analyse tous les mouvements qu'il peut concevoir dans l'espace, et, de l'autre, de se représenter perpétuellement dans l'espace le spectacle mouvant dont chacune des opérations analytiques est l'écriture.

L'équation de degré 4

Il s'agit d'expliquer la méthode de Ferrari, disciple de Cardan, pour résoudre les équations du quatrième degré (1545). Autant le calcul paraît abscons quand il est présenté de manière uniquement algébrique, autant il s'éclaire avec la figure ci-dessous.

On interprète l'équation de degré 4 comme celle qui donne les points d'intersection des deux coniques. Elle se ramène à résoudre une équation de degré 3 pour trouver les coniques dégénérées du pinceau, puis deux équations de degré 2 pour trouver les intersections de deux droites et d'une conique. On renvoie à Partie III **??** pour les détails.

27. À la place du $\sqrt{2\pi} \sim 2,5$ qui sort des intégrales de Wallis, on a un encadrement entre $2,43$ et $2,72$. Contrairement à ce que croient beaucoup de nos étudiants qui ne retiennent de la formule que le $\sqrt{2\pi}$, ce terme n'a pas grande importance.



En probabilités : le problème du scrutin

Un problème classique sur les marches aléatoires est le problème du dépouillement d'un scrutin. On suppose que, dans une élection, deux candidats P et Q sont en lice, obtenant respectivement p et q voix avec $p > q$. La question est de déterminer la probabilité [28] que le candidat gagnant P soit en tête durant tout le dépouillement. Ce problème peut se traiter de manière géométrique. On représente le dépouillement comme une ligne brisée formée de segments de pentes ± 1 dans $\mathbf{R}^2$, partant de l'origine et allant au résultat final $B = (p + q, p - q)$ en passant par les scores intermédiaires (x, y) où x est le nombre de bulletins dépouillés et y la différence des voix en faveur de P. La question revient à dénombrer les lignes qui ne coupent pas l'axe des x ou, ce qui revient au même, celles qui le coupent. Il y en a de deux sortes : celles qui partent du point $A' = (1, -1)$ (premier vote pour Q) et celles qui partent de $A = (1, 1)$, premier vote pour P, mais qui rencontrent l'axe des x. Celles-là sont dénombrés par une méthode géométrique très simple, le "principe de symétrie", qui consiste à noter que ces lignes sont en bijection avec celles allant de A' à B, voir figure 4.

Je cite W. Feller à ce sujet : *The reflection principle is used frequently in various disguises, but without the geometrical interpretation it appears as an ingenious but incomprehensible trick.*

Extrema liés

Un problème d'extrema liés consiste à étudier la variation d'une fonction de deux variables $F(x, y)$ le long d'une courbe C d'équation $G(x, y) = 0$. On comprend beaucoup mieux le théorème principal (dit "des multiplicateurs

28. Le résultat est $(p - q)/(p + q)$.

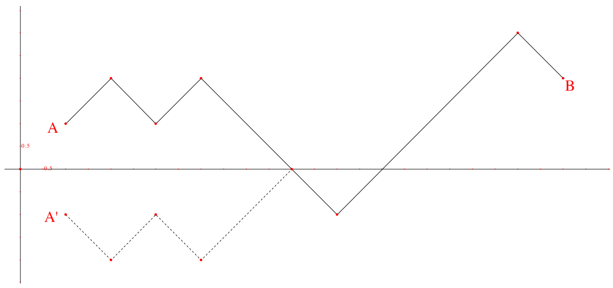
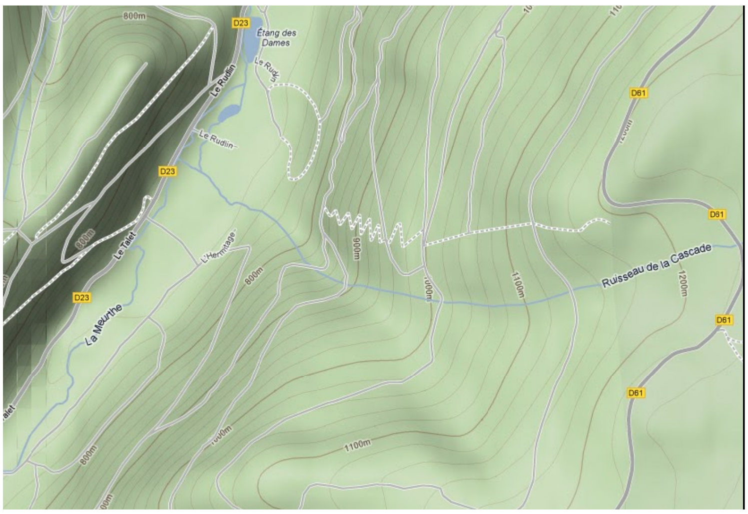


FIGURE 4 – Le problème des scrutins

de Lagrange") quand on en a une vision géométrique. On peut imaginer par exemple que la fonction $F(x,y)$ est l'altitude d'un point de la terre (vue localement comme un plan) en fonction de ses coordonnées, et deux objets géométriques duaux, que l'on voit parfaitement sur une carte, sont alors pertinents :

- Les courbes de niveau $F(x,y)=k$,
- Le vecteur $\operatorname{grad} F$ qui indique la direction dans laquelle F augmente (ou diminue) le plus. Il correspond à la ligne de plus grande pente (le trajet des ruisseaux) et il est normal aux courbes de niveau.



Le problème est alors d'étudier la variation de l'altitude sur une courbe (par exemple un chemin de randonnée) et l'expérience physique donne aussitôt le théorème :

- La fonction F varie beaucoup le long de C lorsque son gradient est tangent à C (donc normal au gradient de G). Sur un chemin, c'est notamment le cas dans les épingles.

• Au contraire, F stationne le long de C lorsque les gradients sont colinéaires (on retrouve ainsi les multiplicateurs de Lagrange). C'est le cas lorsque le chemin est perpendiculaire au ruisseau.

Commentaire. Ici encore, ce résultat que les étudiants ont souvent du mal à comprendre, devient par la vision géométrico-physique, intuitif jusqu'à être ressenti dans les jambes !

Conjugaison

On trouve souvent dans les manuels de Terminale des exercices où, pour étudier une suite récurrente homographique, par exemple $u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{2}{1+u_n}$, on introduit une suite auxiliaire, ici $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$, dont on montre qu'elle est géométrique. On en déduit aisément la valeur de u_n et son comportement.

Il s'agit de décrypter ce genre d'exercice et notamment de comprendre d'où sort la suite (v_n). On peut déjà noter que v_n est égale à $\dfrac{u_n - p}{u_n - q}$ où p, q sont les points fixes de f, mais cela n'explique pas pourquoi cette suite est géométrique.

On comprend ce phénomène en étudiant **la géométrie** des homographies et notamment leur conjugaison. Pour cela, on travaille dans la droite projective $\widehat{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ (voire dans $\widehat{\mathbf{C}}$) avec les conventions usuelles concernant le point à l'infini. On sait que les homographies $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $ad - bc \neq 0$ forment un groupe, qui contient celui des applications affines $x \mapsto ax+b$ (celles qui fixent ∞) et en particulier les homothéties $f(x) = \lambda x$ et les suites récurrentes associées aux homothéties sont les suites géométriques $u_{n+1} = \lambda u_n$. Le lien entre conjugaison et suites récurrentes vient du lemme évident suivant :

Lemme. *Si (u_n) est la suite récurrente associée à f et si on pose $v_n = h(u_n)$, (v_n) est la suite récurrente associée à $g = hfh^{-1}$.*

Maintenant, la stratégie est claire. On veut transformer une suite récurrente relative à une homographie f en une suite récurrente géométrique, donc relative à une homothétie g. Il suffit pour cela de trouver une homographie h telle que l'on ait $g = hfh^{-1}$. Pour cela, il suffit d'utiliser le :

Principe de conjugaison. *Si f est une transformation géométrique d'un certain type, alors :*

- *$g = hfh^{-1}$ est une transformation de même type,*
- *les éléments géométriques de g sont ceux de f, transportés par h.*

Dans notre cas, on se contente d'un lemme trivial :

Lemme. *Si f est une homographie de points fixes p et q, ceux de $g = hfh^{-1}$ sont $h(p)$ et $h(q)$.*

Pour réaliser notre objectif, il reste à trouver une homographie h qui envoie les points fixes p et q de f sur ceux d'une homothétie qui sont 0 et ∞ et il suffit de poser $h(x) = \dfrac{x-p}{x-q}\cdot$ La suite auxiliaire à introduire est donc bien $v_n = h(u_n) = \dfrac{u_n - p}{u_n - q}\cdot$

Commentaire. Cet exemple est une magnifique illustration des idées que l'on a essayé de développer dans ce livre : conjugaison, transitivité, etc. Le fait de **voir** géométriquement l'opération de conjugaison avec cette idée de transport des invariants est ici décisive.

Penser géométriquement ?

S'il est une chose dont je suis intimement convaincu [29] c'est bien de l'apport de cette vision géométrique, en mathématiques ou ailleurs. D'ailleurs, même les fossoyeurs de la géométrie en sont souvent persuadés. Je cite un extrait des motivations des récents programmes des classes préparatoires : *La disparition de chapitres de géométrie un tantinet poussiéreux est souhaitable, mais l'importance de la représentation géométrique en mathématiques garde tout son intérêt et toute sa force. L'intuition géométrique doit rester un guide essentiel, en Algèbre comme en Analyse.*

La question que je pose à ces apprentis sorciers est alors la suivante : **Mais comment penser géométriquement quand on n'a pas fait de géométrie ?**

L'apprentissage du raisonnement

Le dernier argument en faveur de l'apprentissage de la géométrie est qu'il concourt à développer l'aptitude au raisonnement. Ce point a été développé

29. Mes étudiants de CAPES ne s'y étaient pas trompés lorsqu'en 1992 ils avaient écrit une chanson avec un couplet sur chacun de leurs enseignants, le mien commençait ainsi :
Avec le p'tit père Perrin
Il faut toujours faire des dessins
Je confirme !

dans [dpJPK02]. Rappelons l'objectif affiché alors : *poser des problèmes, observer, réfléchir, raisonner, essayer, se tromper, surmonter ses erreurs.* Cet objectif reste tout à fait d'actualité et vaut pour la formation de **tous les citoyens**, notamment les scientifiques, mais pas seulement. Bien entendu, les mathématiques ne sont pas le seul lieu de l'apprentissage du raisonnement, mais elles en sont une composante essentielle. Je cite Jean-Pierre Kahane :

Les mathématiques permettent de comprendre la différence entre condition nécessaire et condition suffisante, elles font le lien entre le général et le particulier, elles conduisent à organiser la pensée, à catégoriser les problèmes. Elles forcent à expliciter les évidences, à décomposer les difficultés, à enchaîner les résultats, à dénombrer tous les cas possibles : elles sont la logique cartésienne en action.

Bien entendu encore, en mathématiques, d'autres domaines que la géométrie, contribuent à réaliser cet objectif. Malgré tout, qu'il me soit permis ici de faire état de mon expérience personnelle. J'ai, après plus de vingt ans passés à enseigner en préparation au CAPES [30], une grande expérience des exercices proposés dans le second degré. C'est sans doute en géométrie (et en arithmétique) qu'on rencontre les problèmes les plus intéressants. Je ne dis pas que les autres domaines ne sont pas importants, mais, au niveau du second degré, ils sont parfois ennuyeux. De plus, j'ai toujours constaté que la géométrie, où je passe pour un expert, est le seul domaine où je sèche parfois. Je ne dis pas non plus qu'il n'y a pas de choses difficiles en analyse, en algèbre, en probabilités, mais, là encore, pas vraiment au niveau du second degré. Cela me semble important, si l'on veut que les jeunes s'intéressent aux mathématiques, de leur proposer des contenus qui soient à la fois attractifs et stimulants. C'est bien entendu une opinion personnelle, mais pour me sentir moins seul en la défendant je vais convoquer deux illustres mathématiciens. Voici d'abord Condorcet, parlant de Jacques Bernoulli dans ses *Éloges des académiciens* :

... dans ses leçons, il faisait sentir à ses disciples que la géométrie n'est pas une science isolée, et la leur présentait comme la base et la clef de toutes les connaissances humaines, comme la science où l'on peut le mieux observer la marche de l'esprit, celle dont la culture exerce le plus utilement nos facultés, puisqu'elle donne à l'entendement de la force et de la justesse à la fois ; enfin, comme une étude également précieuse par le nombre ou la variété de ses applications, et par l'avantage de faire contracter l'habitude d'une méthode de raisonner, qui peut s'employer ensuite à la recherche des vérités de tous

30. Il s'agit du concours de recrutement des professeurs en France : Certificat d'Aptitude au Professorat de l'Enseignement Secondaire. Il y a un autre concours, de niveau plus élevé, l'agrégation, dont je m'étais occupé auparavant pendant 15 ans.

les genres, et nous guider dans la conduite de la vie.

Plus proche de nous, voici l'opinion d'Alain Connes [31], médaille Fields 1982 :

J'ai toujours pensé que l'on progressait davantage en séchant sur un problème de géométrie qu'en absorbant toujours plus de connaissances mal digérées.

Attention, pour que la géométrie remplisse cette fonction d'apprentissage du raisonnement, encore faut-il qu'elle soit enseignée de manière intelligente. Ce n'est pas si simple. En effet, comme on l'a dit, la géométrie n'est pas facile et elle demande des efforts [32]. Mais je persiste à penser que cela en vaut la peine. Il y a une autre difficulté qui tient à la nature de la validation mathématique : *le raisonnement géométrique ne doit pas être réduit à l'apprentissage formel de la démonstration.* À trop vouloir obtenir des rédactions conformes aux canons des mathématiciens, on en vient à ne proposer aux élèves que des exercices trop simples, tout découpés en rondelles. Je vais être brutal, si c'est cela qu'on fait, et seulement cela, c'est contre-productif : cela va former des générations de gens pour qui les mathématiques seront synonymes de pensum. Gian-Carlo Rota (1997) a une métaphore culinaire pour dire cela : *An axiomatic presentation of a mathematical fact differs from the fact that is being presented as medicine differs from food. It is true that this particular medicine is necessary to keep mathematicians from self-delusions of the mind. Nonetheless, understanding mathematics means being able to forget the medicine and enjoy the food.*

Alors, que faire ? Pour résumer mon opinion, je proposerai un slogan : il faut **faire (vraiment) des mathématiques**. Cela signifie poser (de temps en temps) des problèmes ouverts (modestes évidemment), mais où il s'agit de trouver son chemin (pas trop long ce chemin, mais pas en une seule étape). J'en donnerai quelques exemples plus loin et il y en a plusieurs dans [JCD01] ou dans [Per03].

Et le plaisir ?

Je terminerai ce plaidoyer pour la géométrie par un dernier aspect, qui est celui du plaisir que l'on peut éprouver à chercher et résoudre des problèmes de géométrie. Là encore, il s'agit d'une opinion toute personnelle, mais partagée par de nombreux mathématiciens. Michel Broué dit, à propos de Jean-Pierre Serre [33] et de son activité mathématique : *Ce qui le motive, c'est le plaisir,*

31. Dans *Les déchiffreurs : Voyage en mathématiques* de Lesne, Dars et Papillaud.

32. Les jours où je désespère de notre enseignement j'en viens à penser que la paresse de nos contemporains est la cause principale de l'ostracisme qui frappe la géométrie.

33. Le plus grand mathématicien du XX-ième siècle ?

pas l'appât du gain. Serre dit souvent qu'il s'est étonné toute sa vie qu'on l'ait payé, si longtemps, pour une activité qu'il aimait tant. C'est bien la jouissance et la curiosité qui ont été, sans aucun doute, les moteurs du travail de Serre. et Daniel Pedoe [34], s'agissant plus précisément de géométrie : *If one could find nothing else to say about geometry, it was always been conceded that students enjoy it, and the Pleasure Principle should not be neglected in mathematics.*

Oui, on peut trouver beaucoup de plaisir à faire de la géométrie !

Unité, richesse et diversité des géométries

L'unité

La structure même de ce livre est une illustration de l'unité de la géométrie. On y voit en effet les trois géométries planes classiques (euclidienne, hyperbolique, elliptique) traitées sur le même mode et à partir de données initiales analogues. Nous faisons ici un bilan de leurs traits communs, tels qu'ils sont apparus dans ce livre.

Le point de départ est la vision de Klein : une géométrie c'est un groupe opérant sur un ensemble et nous avons toujours privilégié cette approche. Le second point, tributaire lui aussi de Klein, est de représenter toutes les géométries à l'intérieur de la géométrie projective (disons réelle ou complexe pour simplifier) mais avec des données supplémentaires. Le troisième point est la communauté de l'origine axiomatique : nous avons systématiquement employé l'axiomatique issue de l'algèbre linéaire [35] pour définir les espaces projectifs ainsi que les données complémentaires (essentiellement des formes quadratiques [36]). Cela nous a permis d'avoir à disposition des groupes naturels, linéaires ou orthogonaux [37]. Dans le traitement des géométries, un autre point est apparu de manière universelle : l'importance de la notion de transitivité [38], avec ses applications multiples : réduction à un cas particulier, conjugaison, etc. Avec cette notion en sont apparues d'autres : les orbites et leur description par des invariants, les critères de transitivité et notamment les cas d'isométrie, et enfin les relations entre invariants et leurs liens avec

34. *Thinking Geometrically.* The American Mathematical Monthly, pp 711-721 September 1970.

35. Rappelons qu'il ne s'agit pas d'une position didactique, voir plus loin.

36. Sur l'espace ou sur le dual.

37. Ou plutôt les variantes projectives de ces groupes.

38. Le sens que je donne au mot géométrie suppose une homogénéité de l'espace, au moins partielle, donc une propriété de transitivité. Il y a des géométries, moins rigides, qui ne supposent pas cela, mais, d'une certaine façon, il s'agit de théories d'une autre nature.

les théorèmes. Tout cela est commun à tous les thèmes abordés dans ce livre et d'ailleurs aussi à nombre d'autres situations géométriques.

La richesse

Rappelons aussi que ce qui a motivé le choix des géométries planes c'est leur richesse, sous-tendue par les isomorphismes entre les groupes linéaires ou orthogonaux qui y interviennent et qui sont abondamment apparus dans les parties précédentes. C'est à mon sens l'une des erreurs majeures de la réforme dite des mathématiques modernes d'avoir perdu de vue ce point, en mettant sur le même pied [39] les géométries en toutes dimensions. Si la géométrie en dimensions deux et trois a été la plus étudiée dans l'histoire, c'est bien sûr parce qu'elle est la plus immédiatement perceptible, mais il n'y a pas lieu de regretter cette limitation car au-delà [40] il n'y a plus beaucoup de géométrie.

La diversité

À côté de ces facteurs d'unité, dont je continue à penser qu'ils sont essentiels, il est temps maintenant de mettre en évidence ce qui fait la singularité de la géométrie euclidienne par rapport aux autres et qui va, à côté de raisons plus pratiques et plus utilitaires, justifier sa prééminence dans l'enseignement. Je dois dire que cette singularité est l'une des choses qui me sont apparues avec le plus de clarté en écrivant ce livre, alors que je n'étais pas nécessairement parti de cette idée *a priori*. Cela montre que, même si l'on s'intéresse principalement à la géométrie euclidienne, l'étude des autres géométries n'est pas inutile, notamment pour les futurs professeurs.

Avec l'entrée que nous avons choisie, la différence fondamentale entre la géométrie euclidienne et les deux autres (hyperbolique et elliptique) c'est qu'il s'agit d'une géométrie singulière. En effet, dans les trois cas on part d'un espace vectoriel [41] de dimension 3 muni d'une forme quadratique [42], mais dans le cas euclidien, cette forme est **dégénérée**. Cela a de très nombreuses conséquences que nous énumérons maintenant.

---

39. Ou, au moins, en n'insistant pas sur cette spécificité des petites dimensions.
40. Disons au-delà de la dimension 5.
41. Disons sur le corps des réels pour simplifier.
42. Dans le cas euclidien on rappelle que la forme est sur le dual (de dimension 3) et qu'il ne s'agit pas de la forme euclidienne sur le plan vectoriel, le lecteur ira réviser la Partie V.

Une géométrie affine

La première conséquence du fait que la forme de la géométrie euclidienne est dégénérée est l'existence d'une droite canonique dans le plan projectif, correspondant au noyau de la forme sur le dual, droite qui va être choisie comme droite à l'infini et fournir canoniquement un plan affine. Il n'y a rien de tel dans les géométries non euclidiennes : pas de droite à l'infini ni de plan affine naturels. Cela implique un grand nombre de conséquences :

• Qui dit géométrie affine dit parallélisme (les parallèles sont les droites qui se coupent sur la droite de l'infini). Elles jouent un rôle capital en géométrie euclidienne, comme on le sait depuis Euclide (penser aux liens avec les perpendiculaires, aux angles alternes-internes, etc.) et plus tard (penser à l'importance des parallélogrammes pour parler de vecteurs). En revanche – et c'est un paradoxe puisque c'est à partir du problème des parallèles que sont nées les géométries non euclidiennes – elles n'ont à peu près aucun intérêt en géométrie non euclidienne. C'est évident en géométrie elliptique puisqu'il n'y a pas de parallèles. C'est vrai aussi en géométrie hyperbolique. En effet, la notion naïve (deux droites qui ne se coupent pas) est trop grossière (c'est une propriété ouverte) et la variante forte (elles se coupent sur l'horizon) n'est que peu intéressante. Le lecteur se reportera à la Partie IV où il verra que l'on n'y a jamais ou presque utilisé cette notion.

• À partir du moment où l'on dispose d'un plan affine, on a un invariant du groupe affine qui est **l'aire**. On se reportera à la Partie II pour une discussion sur ce point (l'aire n'est autre que le crochet, invariant fondamental du groupe $SL(3)$). Cette notion est porteuse de nombreux résultats (ceux que j'appelle les "lemmes du collège"), gouvernant toute la partie affine de la géométrie élémentaire (par exemple le théorème de Thalès) et utiles aussi en géométrie euclidienne (voir la preuve du théorème de Pythagore chez Euclide). En revanche, même si l'on peut définir l'aire en géométrie non euclidienne, elle n'est pas d'un grand intérêt puisque la formule de Gauss-Bonnet montre, dans le cas du triangle, qu'elle est égale à la valeur absolue de la différence entre π et la somme des angles. Elle ne constitue donc pas à proprement parler un invariant supplémentaire.

Un groupe de dimension 4

Dans les trois géométries considérées, le groupe des isométries est un groupe de dimension 3 et c'est un de leurs points communs (qui explique qu'il y a toujours besoin de trois invariants pour déterminer un triangle). Mais une autre singularité de la géométrie euclidienne est l'existence, au-delà du groupe des isométries, de celui des similitudes (qui est son normalisateur dans le groupe des bijections du plan), qui est de dimension 4, et qui donne à cette géométrie une souplesse incomparable : on peut non seulement déplacer les figures, mais les augmenter ou les réduire [43] en conservant les angles et les rapports de longueur, donc la *forme*. Il n'y a rien de tel en géométrie non euclidienne, ni homothéties, ni similitudes. Ce point, déjà noté par Wallis ou Gauss, est essentiel. C'est lui qui justifie la place occupée chez Euclide par les triangles semblables. C'est lui aussi qui est à la racine d'un théorème aussi essentiel que le théorème de Thalès. Tout cela justifie que le groupe des similitudes soit appelé *groupe principal* par Klein.

La somme des angles du triangle

On se reportera par exemple aux Parties V ou VI pour constater qu'une conséquence directe et essentielle du fait que la forme qui définit la géométrie euclidienne est dégénérée est le résultat sur la somme des angles d'un triangle. La différence de forme des triangles dans les trois géométries (maigrichons en géométrie hyperbolique, joufflus en elliptique) est sans doute l'une des plus visuellement frappantes pour le néophyte. Mais le fait que la somme des angles d'un triangle euclidien est égale à 180 degrés est aussi la source technique d'innombrables utilisations des angles en géométrie euclidienne et, en négatif, comme on l'a dit, la justification de l'importance de l'invariant aire.

Les sous-groupes distingués et les invariants orientés

Une autre différence entre les géométries est la structure du groupe lui-même. Dans le cas non dégénéré, le groupe des isométries est simple (ou presque, dans le cas hyperbolique il y a juste le sous-groupe des isométries directes, d'indice 2). Cela confère à ces géométries une sorte de rigidité que n'a pas la géométrie euclidienne. En effet, rappelons qu'au contraire, le groupe $\mathrm{Sim}\, X$ est totalement dévissé par la suite de sous-groupes distingués :

$$\{\mathrm{Id}\} \subset T(X) \subset \mathrm{Is}^+(X) \subset \mathrm{Is}\,(X) \subset \mathrm{Sim}\,(X),$$

où $T(X)$ est le groupe des translations, $\mathrm{Is}^+(X)$ le groupe des déplacements et $\mathrm{Is}\,(X)$ celui des isométries. Ces sous-groupes étant distingués donnent naissance à des quotients et le point essentiel c'est que, dans cette suite, **tous les quotients** sont abéliens : le groupe des isométries est résoluble. Cela fournit à chaque pas des invariants **orientés** ou algébriques, successivement, les vecteurs, les angles orientés, le signe des transformations, le rapport de

43. On comparera avec la condition d'hyperbolicité de Gromov, voir Partie IV **??**.

similitude. De plus, le fait d'avoir des homomorphismes à valeurs dans les quotients assure que tous ces invariants se comportent de manière raisonnable par rapport à la composition des transformations : le vecteur de la translation composée est la somme des vecteurs, l'angle de la rotation composée est la somme des angles, les transformations se multiplient en respectant la règle des signes, le rapport de l'homothétie composée est le produit des rapports. Il n'y a rien de tel en géométrie non euclidienne [44]. On peut bien essayer de définir l'angle d'une rotation ou le vecteur d'une translation, mais ces objets se comportent à peu près aussi mal qu'il est possible (voir Partie IV Ch. 8) : ils ne s'ajoutent que si les rotations ont même centre ou les translations même direction. En un mot, on perd en géométrie non euclidienne, l'un des outils les plus puissants [45] de la géométrie euclidienne : **la relation de Chasles**. C'est d'ailleurs aussi une différence [46] entre la géométrie euclidienne de dimension 2 et celle de dimension 3 où il n'y a plus d'angles orientés.

Un point crucial des différences : la notion d'angle

Lorsqu'on pratique la géométrie euclidienne à la manière d'Euclide, c'est-à-dire en utilisant les cas d'égalité et de similitude des triangles (vus comme critères de transitivité si l'on veut parler en termes modernes), on est aussitôt confronté à la nécessité d'établir des égalités de longueurs et d'angles. Ce dernier point repose sur plusieurs accessoires qui permettent de faire efficacement ce travail. J'en répertorie quatre types :

• les notions de complémentaires et supplémentaires [47],

• les propriétés des angles vis à vis des parallèles (alternes-internes, correspondants),

• la somme des angles d'un triangle, voire celle des angles d'un polygone,

• le théorème de l'angle inscrit.

En géométrie non euclidienne [48], à l'exception du premier point, tous ces outils disparaissent : les propriétés des parallèles ne subsistent pas, la somme des angles d'un triangle n'est plus égale à deux droits (elle n'est

44. Sauf le signe des transformations en hyperbolique.

45. Ce n'est pas parce qu'il s'agit d'une relation connue dès le lycée (autrefois dès le collège) ni parce que nos élèves l'utilisent parfois à tort et à travers qu'elle n'est pas essentielle !

46. Sur ce point, je suis en désaccord total avec G. Choquet à propos des angles orientés : *Pourquoi les monter en épingle ainsi que la cocyclicité alors que dans* $\mathbf{R}^3$ *cette notion n'a plus de sens. En fait l'essentiel de la géométrie euclidienne peut être traité sans les angles.* (Conférence pour Math. en Jeans, 1995) On voit ici en action ce que je décrivais plus haut : le refus de prendre en compte la richesse de la géométrie plane.

47. Et la relation de Chasles si l'on utilise des angles orientés.

48. Même avec des angles non orientés.

même pas fixe, les triangles équilatéraux peuvent avoir à peu près n'importe quel angle[49]), le théorème de l'angle inscrit n'existe plus[50]. Autrement dit, on n'a plus à disposition de quoi utiliser les cas d'isométrie (pour la similitude, c'est encore plus radical puisqu'elle n'existe plus) et c'est pourquoi, même s'ils sont encore vrais en non euclidien, ils ne sont pas aussi utiles. Je considère qu'en référence à l'enseignement du collège et du lycée, c'est une différence essentielle.

Cette difficulté d'utilisation des angles en géométrie non euclidienne ne fait que renforcer en creux leur importance en euclidien où l'on dispose d'outils efficaces pour les utiliser. Contrairement à ce que dit Choquet, l'invariant angle est vraiment l'un des fondements essentiels de la géométrie euclidienne.

Dualité

Après ce panégyrique de la géométrie euclidienne, mettons un bémol. Il y a tout de même un point qui est un atout de la géométrie non euclidienne et qui n'existe pas en euclidien, c'est la dualité. Nous l'avons vu à de nombreuses reprises dans la Partie IV et notamment à propos du concours des droites remarquables du triangle.

Comment enseigner la géométrie au collège et au lycée ?

Faire plus de géométrie

Il n'est que temps de revenir sur terre, c'est-à-dire à l'enseignement de la géométrie au collège et au lycée. J'ai dit plus haut tout le mal que je pensais des programmes actuels, mais il faut reconnaître que ce qui est en cause n'est pas seulement une question de contenus, mais aussi de volume global des enseignements. Je pense fondamentalement qu'il faut **faire plus de géométrie**[51] que l'on n'en fait à l'heure actuelle, surtout au lycée. Les

49. De même, les carrés peuvent avoir des angles variables, mais surtout pas quatre angles droits : il n'y a pas de rectangles en géométrie non euclidienne.

50. Voir Partie IV, et le *Lotensatz* n'en est qu'un bien piètre ersatz.

51. Je suis toujours agacé par les discours de ceux qui trouvent qu'on enseigne trop de choses aux enfants. C'est méconnaître totalement leurs capacités d'apprentissage qui sont énormes, et qui ne durent pas longtemps, comme chacun de nous peut s'en rendre compte en prenant de l'âge. Un exemple absolument frappant est celui des langues étrangères. Je connais des enfants de moins de dix ans qui maîtrisent trois langues, ce que je serais bien en peine de faire.

propositions que je vais faire s'inscrivent donc dans une perspective d'augmentation modérée de la place de la géométrie. Je n'ai évidemment aucun moyen de faire évoluer la situation dans ce sens et je vois aussitôt venir les objections : si l'on accroît la place de la géométrie, ce ne peut être qu'au détriment d'autres domaines. Je ne voudrais pas entrer dans ce débat, mais si l'on m'y contraint je dirai au moins deux choses :

1) Je suis convaincu [52] que le passage des sections C en première et terminale aux sections S a été catastrophique pour l'enseignement scientifique en France. En effet, les actuelles sections S ne sont plus de vraies sections scientifiques mais uniquement des voies de sélection et elles ne permettent ni à ceux qui auraient une véritable vocation scientifique de trouver des contenus motivants, ni aux autres de se rendre compte qu'ils ne sont pas faits pour ce type d'études. Je pense donc qu'il faut rétablir de vraies sections scientifiques, avec plus de sciences et notamment de mathématiques.

2) S'il faut absolument faire de la place, au sein des mathématiques, je pense que la solution est une diminution des actuels programmes en probabilités et statistiques. Je n'ai évidemment rien contre ces domaines, qui sont utiles, et je reconnais qu'ils étaient, jadis, mal-aimés, voire absents. Mais l'ostracisme ancien a suscité un tel lobbying de la part des collègues de ces domaines qu'ils ont tendance à devenir hégémoniques. Un exemple récent est l'introduction de la loi normale en terminale. Il me semble que l'on est allé trop loin, aux dépens non seulement de la géométrie, mais aussi de l'analyse. De plus, ces programmes sont totalement incohérents avec ceux des classes préparatoires : on introduit les probabilités continues au lycée (sans vraiment disposer des outils pour les traiter) et on ne considère que des probabilités discrètes ensuite !

Quelle géométrie enseigner ?

En ces temps de disette, il vaut mieux être modeste : il n'est guère raisonnable de penser enseigner aux collégiens et aux lycéens autre chose que la géométrie euclidienne, en dimensions deux et trois [53] et ce n'est déjà pas si mal.

52. Et je ne suis pas le seul. C'est aussi l'avis de Pierre Arnoux par exemple, voir `http://skhole.fr/de-la-désaffection-pour-les-Etudes-scientifiques`.

53. Avec les anciens programmes où l'on étudiait en Terminale les applications géométriques des nombres complexes, il aurait été possible d'ouvrir le programme vers la géométrie anallagmatique vue au travers des homographies et anti-homographies. Cela présenterait l'intérêt de montrer une géométrie riche (on peut déplorer que les lycéens d'aujourd'hui n'en voient plus aucune) et des transformations qui transforment. Mais ne rêvons pas.

Sur ce point, il me semble que l'une des erreurs des promoteurs de la réforme des mathématiques modernes a été de vouloir enseigner, avec les espaces vectoriels, une géométrie susceptible de généralisation (voir ci-dessus la phrase de Choquet). Mais, d'abord il s'agit là d'un point de vue de mathématicien et le citoyen n'a guère besoin de travailler en dimension quelconque. Ensuite, et surtout, pour un mathématicien justement, cette généralisation est triviale, notamment parce qu'elle ne s'accompagne pas d'une complexification du domaine. Au contraire, comme on l'a vu, la complexité n'existe qu'en petite dimension. Enfin, la pratique géométrique en dimensions 2 et 3 est la source de l'intuition géométrique, utile dans toutes les dimensions y compris les très grandes [54].

Comment enseigner la géométrie : les principes de ma position

Le lecteur garde le droit de penser que je n'ai aucune légitimité pour faire des propositions sur l'enseignement de la géométrie, n'ayant jamais moi-même enseigné dans le second degré. Je pense pourtant en avoir de deux ordres :

- il y a bientôt quarante ans que je m'occupe presque exclusivement de formation des maîtres et je connais bien les contenus et les professeurs de l'enseignement secondaire,
- il y a presque aussi longtemps que je réfléchis à la géométrie du point de vue mathématique et didactique, comme en témoigne ce livre.

Je vais donc expliciter les principes qui sous-tendent mes propositions [55], avec circonspection. Je n'oublie pas, en effet, que d'autres avant moi ont tenté l'expérience et notamment les éminents mathématiciens initiateurs de la réforme des mathématiques modernes (je pense à Dieudonné, Choquet, Revuz, etc.) L'échec de cette réforme doit nous inciter à la prudence.

Les trois premiers principes sont dans la droite ligne d'Euclide :

1. L'entrée par l'algèbre linéaire est à bannir avant l'enseignement supérieur.
2. L'idée de transitivité est essentielle, l'une de ses manifestations principales étant les cas d'isométrie et de similitude des triangles.
3. Le rôle des invariants (longueur, angle, aire) est primordial.

   Les trois suivants, en revanche, constituent des progrès par rapport à la mathématique grecque :

4. Les nombres sont un outil essentiel de toute géométrie.

54. Voir par exemple les travaux de S. Mallat sur le traitement de l'image.
55. Je l'ai déjà fait à de nombreuses reprises et notamment dans [dpJPK02] ou [Per03].

5. L'existence d'invariants algébriques orientés (vecteurs et angles) est l'un des avantages de la géométrie euclidienne.
6. La notion de groupe est l'une des plus importantes des mathématiques.

1. L'algèbre linéaire

L'axiomatique de l'algèbre linéaire est, pour le mathématicien, la plus simple pour faire de la géométrie et c'est celle que j'ai utilisée tout au long de ce livre. Mais ce livre ne s'adresse pas à des collégiens ou des lycéens ! C'est l'un des enseignements majeurs de la réforme des mathématiques modernes : vouloir enseigner l'algèbre linéaire avant la géométrie c'est mettre la charrue avant les bœufs et il est sans doute plus raisonnable de réserver cette introduction au premier cycle de l'enseignement supérieur, en la préparant dans le second degré par une pratique de la géométrie vectorielle [56] et des transformations. Ce point ne fait plus vraiment débat aujourd'hui.

2. Transitivité et cas d'isométrie

Tout ce livre est une illustration de l'importance de l'idée de transitivité. Elle peut sembler bien théorique, mais elle a des conséquences très pratiques : c'est le défaut de transitivité qui donne naissance aux invariants et les critères de transitivité sont souvent les théorèmes les plus efficaces qui soient, et notamment les cas d'isométrie et de similitude des triangles.

Les cas d'isométrie des triangles étaient un des outils essentiels des collégiens d'autrefois pour faire de la géométrie. Bannis par la réforme des mathématiques modernes, ils ont fait leur réapparition en seconde dans les années 1990, avant d'être balayés par les dernières modifications de programmes. Pourtant, il y a en leur faveur de solides arguments, à la fois théoriques et didactiques.

En effet, que font les cas d'isométrie des triangles ? Ils décrivent les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des éléments

56. Comme il est dit dans [dpJPK02] : *D'ailleurs, l'intérêt du lien entre algèbre linéaire et géométrie nous semble plutôt en sens inverse, dans le fait que la géométrie usuelle en dimensions* 2 *et* 3 *fournit un support intuitif pour travailler en dimension supérieure à* 3*, voire en dimension infinie (par exemple en analyse fonctionnelle), voire sur un anneau au lieu d'un corps, etc.* Pour une discussion sur ce thème, voir la thèse de G. Chartier-Gueudet. Ce procédé qui consiste à utiliser l'intuition d'une situation simple dans un cas plus compliqué est extrêmement intéressant et mériterait d'être discuté plus longuement. Déjà, on peut réfléchir sur le fait que, même pour travailler en dimension 3, la pratique de la géométrie plane est essentielle *via* les représentations, projections, coupes, etc.

autres que ceux utilisés) **sans être obligé d'exhiber celle-ci**. Parodiant le sketch de Pierre Dac et Francis Blanche on pourrait avoir ce dialogue :

— *Votre sérénité, pouvez-vous envoyer ce triangle ABC sur cet autre triangle $A'B'C'$?*

— *Oui*

— *Vous pouvez le faire ?*

— *Oui*

— *Il peut le faire ! On l'applaudit bien fort.*

Côté didactique, je me contenterai d'un exemple très simple.

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte des points D et E sur (AB) et (BC) tels que $BD = CE = AB - BC$. Montrer que ADE est isocèle.

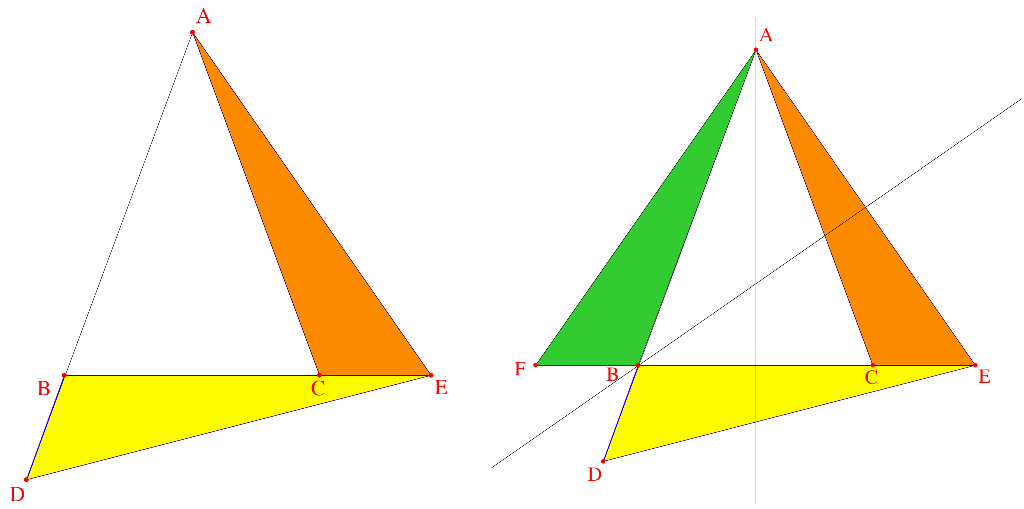


Figure 5 – Les segments ajoutés

C'est très facile avec les cas d'isométrie. En effet, on considère ACE et EBD. Ils sont isométriques (deux côtés et un angle). On a donc $AE = DE$.

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations. Il suffit de trouver la transformation qui passe de ACE à EBD. L'examen du sens des angles montre que c'est une rotation. On peut la trouver comme composée de deux symétries en introduisant le point F symétrique de E dans la symétrie σ_1 par rapport à la médiatrice de $[BC]$. On compose ensuite par la symétrie σ_2 par rapport à la bissectrice de $\widehat{ABC}$ et F vient en D (la droite (BC) vient sur (AB) et précisément la demi-droite $[BC)$ sur $[BA)$ et on conclut en utilisant $BF = BD$). On en conclut que, si $\rho = \sigma_2\sigma_1$, on a

$\rho(E) = D$. Par ailleurs, on a $\sigma_1(A) = A$ et $\sigma_2(A) = E$ (car le triangle ABE est isocèle en B donc la bissectrice est axe de symétrie). On a donc aussi $\rho(A) = E$ et, en définitive, $EA = DE$.

On peut faire plusieurs critiques à cette preuve.

0) Elle est beaucoup moins visuelle. C'est un fait relevé par de nombreux psychologues que, pour les jeunes enfants, les surfaces (ici les triangles pleins) utilisées dans la preuve avec les cas d'égalité, sont plus faciles à percevoir que les lignes ou les points utilisés dans la seconde preuve.

1) Il faut déjà repérer quelle est la transformation pertinente.

2) Elle nécessite une construction supplémentaire (le point F).

3) Elle est nettement plus délicate à rédiger (voir la discussion sur les demi-droites) et nécessiterait de donner des indications aux élèves.

Cet exemple montre que l'utilisation des cas d'isométrie est souvent plus commode que celle des transformations. Mais, en vérité, le problème est maintenant bien plus grave : avec les nouveaux programmes, cet exercice ne pourrait plus être donné nulle part car il n'y a plus ni cas d'isométrie ni transformations, Raminagrobis les a tous dévorés.

Un autre argument important en faveur des cas d'isométrie est qu'ils permettent de donner un sens intuitif à la dimension de l'espace des triangles. Il s'agit là d'une idée importante, même si elle ne peut pas être entièrement formalisée au niveau de l'enseignement secondaire : dans chaque situation, d'ailleurs pas nécessairement géométrique, l'idée de savoir de combien de paramètres dépendent les objets est essentielle. On l'a vu dans ce livre à de nombreux endroits et mon expérience d'enseignement c'est que cette idée, comme beaucoup d'idées simples, met longtemps à se construire.

Dans le cas présent, il s'agit d'avoir en tête qu'un triangle, à isométrie près, est déterminé par trois paramètres. Les cas d'isométrie [57] donnent parfaitement cette intuition, avec en plus une variété de paramètres possibles. Cela permet, par exemple, de résoudre deux problèmes dont nous avons déjà parlé.

• Le problème de la vitre en forme de parallélogramme : les longueurs des côtés du parallélogramme ne suffisent certainement pas à la construire.

• Le problème de savoir si un triangle est déterminé par son aire et son périmètre. Là encore, l'idée intuitive qui devrait être immédiate est :

57. Et aussi les exercices de "résolution de triangles" que l'on donnait autrefois et qui consistaient à déterminer un triangle – voire un nombre fini – à partir de trois éléments. Cet exemple est intéressant du point de vue des programmes d'enseignement en ce qu'il révèle deux écueils. Le premier est la dérive qui consiste à abuser d'un thème en le mettant à toutes les sauces. Le second, qui découle du premier, est d'y remédier en supprimant complètement ce thème. J'appelle ça jeter le bébé avec l'eau du bain et c'est un processus très classique dans les réformes de programmes.

évidemment non, puisqu'un triangle est déterminé par trois paramètres.

Un dernier exemple est la démonstration du théorème de Pythagore [58] suggérée par les figures ci-dessous. Cette preuve est particulièrement convaincante, mais elle repose de manière cruciale sur les cas d'égalité des triangles (pour pouvoir affirmer que deux quelconques des triangles rectangles de côtés a, b ont même hypoténuse et mêmes angles). Voilà typiquement un endroit où l'absence de l'idée de dimension évoquée ci-dessus (un triangle est déterminé par trois éléments) se fait sentir.

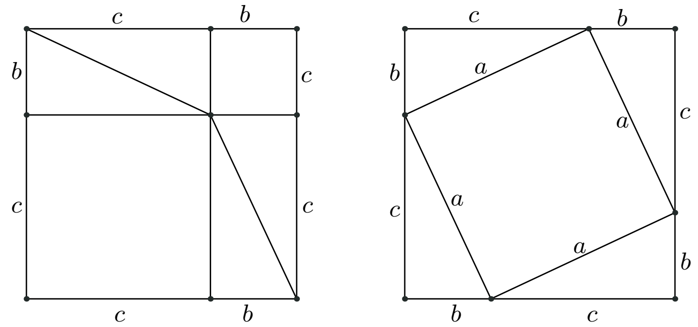


Figure 6 – Le théorème de Pythagore

Il est d'autant plus dommage que ces outils ne soient pas introduits au collège qu'ils y sont presque par le biais des constructions. Je cite le programme de cinquième :

- *Construire un triangle connaissant :*

- *la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents,*
- *les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés,*
- *les longueurs des trois côtés.*

Entre cela et les cas d'isométrie, il manque juste la formulation des théorèmes, mais cette absence est essentielle.

58. Puisqu'on parle du théorème de Pythagore, je voudrais commenter une phrase de Cédric Villani dans une interview au journal le Monde (*Les maths nouvelle langue morte 29/03/2013*). Il dit : *On peut vivre en ignorant le théorème de Pythagore, pourvu qu'on sache qu'il existe un lien entre les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.* Malgré tout le respect que j'ai pour Villani, je pense qu'il néglige un aspect : pour que se constitue l'idée qu'il évoque (et qui est essentiellement le fait qu'un triangle est déterminé par trois paramètres) encore faut-il qu'elle s'appuie sur des exemples concrets et explicites et Pythagore en est un magnifique.

3. Invariants

Là encore, les justifications théoriques ne font que voler au secours de l'évidence : chacun sait que les invariants sont des outils fondamentaux du géomètre. Je n'insisterai que sur les plus mal-aimés d'entre eux : aires et angles.

On a vu plus haut qu'on dispose en géométrie euclidienne d'excellents atouts pour travailler avec les angles : les notions de complémentaire et de supplémentaire, la somme des angles d'un triangle, les propriétés relatives aux parallèles et le théorème de l'angle inscrit et sa réciproque. Avec ces accessoires, l'outil angle devient performant et souple. Profitons-en !

S'agissant de l'outil "aire", il requiert lui aussi quelques accessoires que, prenant mes désirs pour des réalités, j'appelle les "lemmes du collège", lemme du demi-parallélogramme, de la médiane, du trapèze, des proportions et du chevron, (voir [Per11b] ou Partie II ci-dessus, mais presque tous ces lemmes sont dans Euclide).

4. Nombres

C'est le talon d'Achille de la mathématique grecque. L'absence d'une notion utilisable de nombres rationnels, voire réels, a bloqué les Grecs, les empêchant notamment de résoudre les problèmes classiques de constructions à la règle et au compas (duplication du cube, trisection de l'angle, etc.). Heureusement, Stevin a inventé les décimaux, et nous disposons ainsi d'un outil que l'on peut enseigner dès le primaire. Heureusement aussi, Descartes a inventé la géométrie analytique. Là encore, profitons-en, mais avec modération !

5. Invariants orientés

Je pense ici aux vecteurs et aux angles orientés. Par rapport aux Grecs, il s'agit d'un progrès essentiel, notamment, dans le cas des vecteurs, par leur usage en physique [59]. Dans le cas des angles, l'usage des angles orientés, essentiel pour définir les rotations, permet d'éviter d'avoir à traiter pléthore de cas de figures. Attention, toutefois, je suis partisan de ne pas les introduire trop tôt, et là encore avec modération : au collège et au début du lycée, les angles non orientés sont bien suffisants.

59. Si toutefois les physiciens veulent bien se servir des outils que nous leur proposons !

6. Groupes

La notion de groupe est essentielle en mathématiques. Dans *Récoltes et Semailles*[60] A. Grothendieck n'hésite pas à parler de l'invention du zéro et de l'idée de groupe comme des deux plus grandes innovations mathématiques de tous les temps. On a vu aussi que cette notion est le fondement de la géométrie au sens de Klein. Il est donc important que les lycéens en aient un aperçu. Or, hormis les groupes[61] abéliens qui interviennent dans le domaine numérique, ils n'ont plus jamais l'occasion d'en rencontrer. Pourtant, avec les transformations et leur composition, les groupes seraient tout proches du programme. Alors, même si je pense qu'il faut limiter l'usage des transformations au collège et lui préférer celui des cas d'isométrie, il me semble déplorable que cette notion ne soit plus du tout abordée au lycée : c'est un recul de plus de cinquante ans, voir [RD89] par exemple.

Chercher en géométrie

Comme je l'ai rappelé, je ne suis pas, et n'ai jamais été, enseignant du second degré. Je vais pourtant essayer d'expliquer ici, à partir de ma propre expérience, comment on peut apprendre aux élèves à chercher en géométrie. Bien sûr, les positions que je vais avancer devront être adaptées à chaque élève et chaque classe. Mais je suis convaincu qu'il y a des constantes et des principes qui valent pour tous.

Principes

Je résume souvent ma position vis à vis des mathématiques par une formule ambitieuse et modeste à la fois : *faire des mathématiques c'est poser et, si possible, résoudre des problèmes.*

Il est bon de rappeler cela car c'est loin d'être apparent dans les manuels, même si certains font des efforts en ce sens. J'entends par là qu'il faut, de temps en temps, poser aux élèves des problèmes ouverts, où toutes les réponses ne sont pas données (en évitant le sempiternel *Montrer que ...*) et dont les énoncés ne sont pas détaillés à l'extrême.

Voici un exemple concret, volontairement provocateur, qui porte sur la question célèbre de la droite d'Euler. J'aime bien donner comme seule indication la figure ci-dessous, en précisant éventuellement que le point O est le

60. Voir `www.math.jussieu.fr/~leila/grothendieckcircle/RetS.pdf`

61. On ne prononce d'ailleurs pas ce nom, sans doute considéré comme un gros mot.

centre du cercle circonscrit au triangle ABC, H son orthocentre et G son centre de gravité et en demandant de prouver ce que l'on voit sur la figure.

Bien sûr, on peut penser qu'il s'agit de devinette, et c'est partiellement vrai, mais pas tant que ça. En effet, avec le fait d'avoir désigné les trois points O, H, G, ce qui apparaît – et constitue un objectif raisonnable – c'est qu'ils sont alignés sur la droite verte (et si l'on a une bonne vue, que OG est la moitié de GH). Mais deux autres éléments doivent sauter aux yeux (surtout si on les met en évidence grâce aux couleurs et à l'épaisseur des traits) : le parallélogramme rose $A'CHB$ et le triangle bleu AHA'. C'est maintenant à l'élève de faire son chemin en essayant de prouver ce qu'il voit. C'est sans doute difficile, mais l'expérience montre que ce n'est pas impossible et peut-être plus facile avec une classe entière en utilisant les suggestions de chacun.

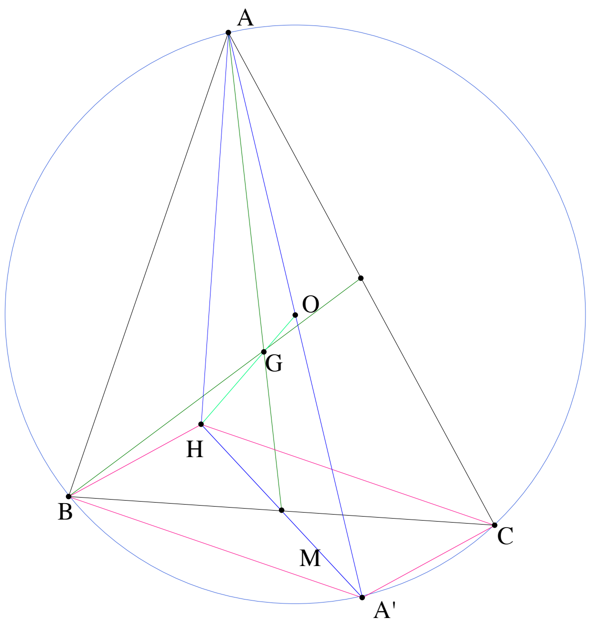


Figure 7 – La droite d'Euler

À l'opposé, avec exactement la même approche du problème, le texte suivant a été donné par un professeur stagiaire :

1) Montrer que (BH) *est perpendiculaire à* (AC) *et* (CH) *à* (AB).

2) Montrer que le triangle $AA'C$ *est rectangle en* C. *En déduire que* $(A'C)$ *est parallèle à* (BH).

3) Montrer que le quadrilatère $BHCA'$ *est un parallélogramme.*

4) Montrer que le point d'intersection M de (BC) et (HA') est le milieu de $[BC]$ et de $[HA']$.

5) Montrer que G est sur (AM), au tiers de $[AM]$ à partir de M et en déduire que G est aussi le centre de gravité de AHA'.

6) Montrer que G est sur (HO), au tiers de $[HO]$ à partir de O.

Cette rédaction est emblématique de ce que je critiquais ci-dessus à propos de l'apprentissage du raisonnement : avec un tel texte, l'élève devient une sorte d'OS de la géométrie qui n'a plus que des tâches parcellaires à accomplir, sans avoir le contrôle de la stratégie globale. Cela ne me semble pas d'un grand intérêt pour sa formation, ni comme futur (éventuel) scientifique, ni comme citoyen. J'insiste sur ce point avec toujours en tête l'image des mathématiques dans le grand public. Qu'au moins si elles sont difficiles, elles soient intelligentes !

Quelques exemples de problèmes ouverts

La géométrie est un domaine (mais ce n'est pas le seul, l'arithmétique aussi se prête bien à l'étude de problèmes ouverts, voir par exemple [Per07]) où les problèmes ouverts abondent. En particulier, les problèmes de lieux géométriques et de constructions peuvent la plupart du temps être posés de manière ouverte.

J'ai donné de nombreux exemples de problèmes ouverts dans différents textes, par exemple [Per11a]. En voici trois que j'aime bien :

Les segments décalés

Soit ABC un triangle. Construire des points $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ tels que les droites (MN) et (BC) soient parallèles et qu'on ait l'égalité de longueurs $AN = MB$.

Le lieu du centre du cercle circonscrit

Soit ABC un triangle, E un point du cercle circonscrit. La droite (AE) coupe (BC) en D. Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit à BDE ?

Le problème de Magali

Soit ABC un triangle rectangle en A, P un point de l'hypoténuse et M, N ses projetés orthogonaux sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. Pour

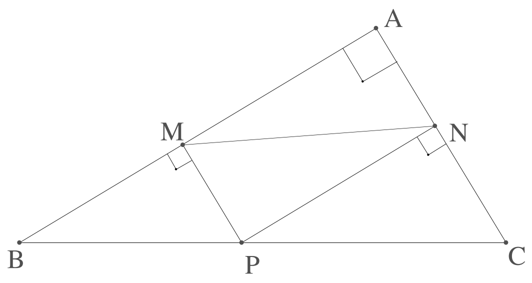


FIGURE 8 – Le problème de Magali

quelle position du point P la longueur MN est-elle minimale ? Et si le triangle n'est pas rectangle ?

Le premier problème (voir [JCD01]) comporte au moins neuf solutions distinctes dont beaucoup ont été trouvées par des élèves de lycée. Le second comporte lui aussi une multitude de solutions possibles avec une difficulté supplémentaire qui est la profusion de cas de figure [62]. Le dernier sera examiné en détail ci-dessous. Une idée importante que je veux faire passer avec ces exercices, et qui est très apparente dans les deux premiers problèmes, est que toute idée un tant soit peu intelligente peut mener à une solution, avec un peu d'obstination.

L'utilisation des logiciels

C'est un point essentiel. J'ai dit dans l'introduction de ce livre que l'un des événements qui m'avaient conduit à l'entreprendre était la lecture de la thèse d'Yves Martin sur l'utilisation de Cabri en géométrie non euclidienne. Nous disposons avec les logiciels de géométrie d'outils extraordinaires pour faire de la géométrie [63], profitons-en, les Anciens nous auraient envié cette possibilité de multiplier à l'infini et presque sans effort les figures, de les déplacer, de les modifier, etc. En particulier, les questions de recherches de lieux géométriques sont grandement facilitées par la possibilité d'avoir immédiatement la réponse (y compris les limitations du lieu), ce qui est un atout décisif.

Je renvoie le lecteur à ma conférence *Cabri et le chemin des huit vertus* donnée à Lille [64] où je faisais un inventaire des utilisations possibles des logiciels. J'en répertoriais huit : **Dessiner, Illustrer, Explorer, Conjecturer,**

62. Voir `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/SurGeometrie/circonscrit.pdf`
63. Le paradoxe est que nous avons d'excellents outils mais qu'ils sont inutiles puisque nous ne faisons plus de géométrie !
64. Conférence au colloque "Regards géométriques", Lille avril 2010, voir `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Lille2010.pdf`.

Éliminer, Vérifier, Prouver, Poser des problèmes. Je voudrais surtout insister ici sur ceux qui sont directement liés au thème de la résolution de problèmes, c'est-à-dire : explorer, conjecturer, éliminer, prouver. Ces points vont être abordés à propos du problème de Magali.

Un exemple : le problème de Magali

Je vais développer un peu cet exemple, qui me semble intéressant à plusieurs titres, mais je voudrais d'abord en préciser les contours. Ce problème a été proposé par Mireille Sauter dans [Sau00], et repris dans sa classe de cinquième par Magali Froger[65] et je l'ai découvert dans son mémoire IUFM[66]. Dans le cas du triangle rectangle le problème est facile, mais il est nettement plus ardu dans le cas général et je détaille ci-dessous une approche possible de ce cas. Attention, il s'agit de la façon dont j'ai moi-même abordé le problème et pas celle d'élèves (contrairement aux exemples de [JCD01] par exemple). J'y vois cependant deux intérêts. D'abord, celui de l'authenticité : j'ai vraiment procédé comme je le raconte. Ensuite, même si des élèves ne peuvent pas mener cette étude jusqu'au bout, la méthodologie de recherche, la procédure expérimentale, l'utilisation du logiciel, peuvent servir d'exemples pour d'autres cas.

S'agissant de recherche, je retire de mon expérience de mathématicien la conviction que la phase des conjectures est essentielle, mais aussi la certitude que c'est souvent la plus amusante, celle où l'on peut donner libre cours à son imagination. Il m'est impossible d'évoquer cette phase du travail de recherche sans citer Alexandre Grothendieck (*loc. cit.*) :

Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle ... Souvent la question prend la forme d'une affirmation – une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque".

Je souscris totalement à cette façon de voir les choses. L'essentiel dans cette phase, comme le dit Grothendieck, est de **for-mu-ler**. En ce sens, l'utilisation d'un logiciel est un atout maître car il suffit souvent de déplacer les objets pour comprendre quel va être le résultat. De plus, on dispose d'outils

65. Ancienne élève du CAPES d'Orsay.

66. *Initier à la démarche scientifique en classe de 5e à l'aide des problèmes ouverts*, Mémoire PLC2, IUFM de Versailles, 2006.

très efficaces avec les mesures de longueurs, d'angles, d'aires, etc. et les outils lieu, trace et animation, etc.

Un mot sur le problème initial avec le triangle rectangle. Dans la classe de Magali, sans utilisation de logiciel de géométrie, la bonne conjecture n'a pas été si évidente à se dégager : les élèves pensent d'abord au milieu de $[BC]$, puis à la bissectrice. Ces conjectures ne résistent pas à l'utilisation de Géoplan, avec lequel la conjecture émerge très vite : *le minimum de MN est atteint lorsque P est le projeté orthogonal de A sur (BC)*. La preuve de la conjecture est d'ailleurs très simple : le quadrilatère $AMPN$ étant un rectangle a ses diagonales égales, de sorte que minimiser MN c'est minimiser AP et on sait bien que le minimum est atteint lorsque P est le pied de la hauteur issue de A.

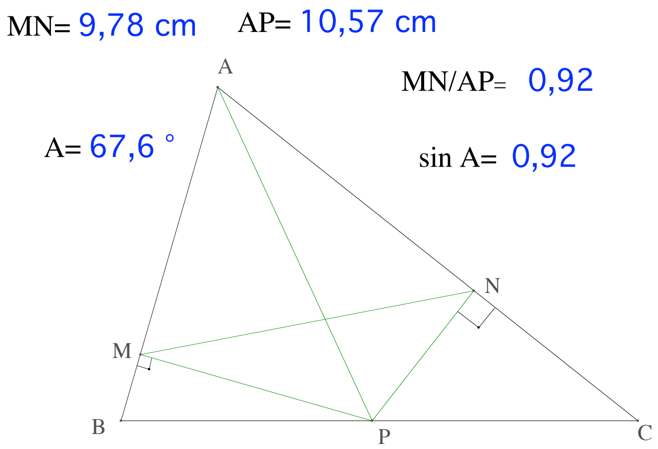


FIGURE 9 – Le problème de Magali généralisé

Soit, mais comme on l'a dit plus haut, faire des mathématiques c'est poser des problèmes. En l'occurrence je me suis demandé : et si le triangle ABC n'est pas rectangle ? L'expérience Cabri montre que le minimum est encore atteint en le projeté H de A. Cette fois l'argument du rectangle tombe à l'eau et AP n'est plus égal à MN comme on le vérifie aussitôt avec Cabri. Cependant, on vérifie aussi expérimentalement que MN/AP est constant. Bien entendu, si l'on admet ce fait, on a le résultat, autrement dit, on a produit une conjecture intermédiaire décisive.

Il reste à comprendre pourquoi ce rapport est constant. Pour cela, on poursuit l'exploration en bougeant le point A, et on observe ce que devient le rapport. Bien entendu, il vaut 1 quand le triangle est rectangle et on constate que, sinon, il est toujours < 1 et d'autant plus petit que l'angle en A est petit ou au contraire très obtus. Cela fait penser au sinus de l'angle. Si on affiche l'angle et son sinus, on vérifie effectivement avec le logiciel qu'on a bien $\sin \widehat{A} = MN/AP$.

On obtient ainsi une deuxième conjecture intermédiaire décisive. On peut se demander en quoi celle-ci est meilleure que l'autre. En effet, il peut sembler plus facile de prouver que MN/AP est constant quand P varie, plutôt que de prouver l'assertion plus précise $MN/AP = \sin \widehat{A}$. En réalité, c'est l'inverse qui est vrai [67].

De fait, maintenant qu'on a vu apparaître les fonctions trigonométriques, on peut conclure sans trop de peine. Je laisse la fin de l'exercice au lecteur [68].

On voit ici en action trois types de raisonnements :

1. L'expérience ou **phase d'induction**, dont le but est de donner une conjecture robuste (le minimum est atteint en H). Dans cette phase, l'utilité d'un logiciel de géométrie est évidente

2. La seconde phase est ce que Peirce [69] appelle **l'abduction** [70]. Elle consiste à proposer des affirmations intermédiaires qui impliqueraient logiquement la conjecture : ici, on a d'abord MN/AP constant, puis $MN/AP = \sin \widehat{A}$. Dans cette phase aussi, le logiciel est essentiel, au moins pour une raison psychologique : on est sûr que la conjecture produite est à la fois juste et pertinente, ce qui est un encouragement fort pour la prouver.

3. Enfin, la dernière phase est la **déduction**. En ce qui me concerne, j'ai eu tout de suite l'idée de la preuve de la dernière conjecture et je ne vais pas faire semblant d'avoir utilisé des explorations supplémentaires. Cependant, je conseille au lecteur de faire vraiment l'exercice, sans regarder les indications données en note. Il s'apercevra peut-être, selon son degré de familiarité avec la géométrie de nos pères, qu'il a encore besoin d'une petite abduction supplémentaire, pour laquelle le logiciel pourra lui être utile.

67. Jean-Pierre Serre dit que parfois, quand on ne parvient pas à montrer un théorème, c'est parce qu'on cherche à montrer un résultat trop facile !

68. Au besoin je lui souffle deux indications : le quadrilatère $AMPN$ est inscriptible, donc justiciable de Ptolémée, et $\sin \widehat{A}$ peut se calculer avec une formule d'addition.

69. Charles Sanders Peirce (1839-1914) est un philosophe des sciences américain.

70. Comme monsieur Jourdain j'ai pratiqué longtemps l'abduction sans le savoir !

Discussion

Il est clair qu'on peut faire de la géométrie sans utiliser de logiciels et c'est bien ce que faisaient les anciens. De la même manière, on peut sans doute aller de Paris à Vladivostock à pied !

Cependant, l'intérêt du logiciel, dans la phase de recherche d'une preuve, c'est, comme on l'a vu, de produire des conjectures solides, puis de confirmer ou d'infirmer **immédiatement** les hypothèses intermédiaires que l'on peut formuler. C'est un gain de temps évident, mais aussi un gain psychologique, car il n'y a plus place pour le doute sur le résultat que l'on doit prouver [71]. Lorsqu'on travaille au voisinage de son niveau d'incompétence, ce qui est le cas pour un chercheur (ou un élève) dans la phase où les résultats ne sont pas acquis, c'est un atout considérable de savoir que le résultat qu'on cherche est vrai [72].

L'effort et le plaisir

Il est clair que l'apprentissage de la géométrie demande du temps et des efforts. Mais je pense fondamentalement que le jeu en vaut la chandelle. Je redis les termes du rapport de la commission Kahane : *poser des problèmes, observer, réfléchir, raisonner, essayer, se tromper, surmonter ses erreurs.* Ces objectifs, valables pour tous, méritent bien les efforts consentis. De plus, le plaisir de trouver [73] est une récompense qui rembourse largement ces investissements.

L'enseignement supérieur et la formation des maîtres

L'enseignement supérieur

La question se pose de ce que l'on doit enseigner en géométrie, au niveau de l'enseignement supérieur. Il n'y a pas une seule réponse, car cela dépend des nécessités du type de formation concerné, et je n'ai pas de compétence particulière pour dire ce qu'il faut faire pour tel ou tel public. Le seul point sur lequel j'ai des propositions est celui de la formation des maîtres, qui sera l'objet du paragraphe suivant.

71. Cela permet aussi d'éviter le recours au sempiternel "montrer que".

72. Bien entendu ça ne suffit pas : je suis totalement convaincu que l'hypothèse de Goldbach est vraie, mais je n'ai aucune idée pour la prouver.

73. Il y a plus de gens qu'on ne le croit qui sont sensibles à cet aspect comme en témoigne la vogue toujours renouvelée des mots croisés ou celle plus récente des sudokus.

Un mot cependant concernant des enseignements de géométrie plus pointus : il me semblerait dommage que, dans quelques années, plus personne ne connaisse la géométrie projective, les coniques, les géométries non euclidiennes, la géométrie anallagmatique, etc. Il est donc nécessaire qu'il demeure des enseignements optionnels où l'on puisse acquérir un minimum de connaissances en ces domaines [74].

La formation des maîtres

Je me contente ici de rappeler quelques principes sur ce sujet. On pourra trouver sur ma page web plusieurs textes qui l'abordent et font des propositions :

• le rapport sur la formation des maîtres de la commission Kahane, voir `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Debats-et-controverses/Sur-la-FdM/FdMKahane.pdf`,

• la conférence que j'ai faite lors du colloque en l'honneur de Michèle Artigue, voir `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/Artigue2012.pdf`,

• le contenu du module *Projet de géométrie* enseigné quelques années à Orsay, voir `http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projetgeometrie.html`.

L'expérience de ce module [75] me semble d'ailleurs très intéressante et pourrait être utile à d'autres.

Pour enseigner de manière efficace un domaine de la connaissance, deux points sont essentiels, la culture, pour connaître de manière approfondie ce qu'on doit enseigner, et la posture, pour passer d'une position d'étudiant à une position d'enseignant. Je décline ces points dans le cas de l'enseignement de la géométrie.

Replacer la discipline dans une perspective historique

Plus encore que dans d'autres domaines, la connaissance de l'histoire est indispensable pour enseigner la géométrie. En effet, cette science remonte aux Grecs qui l'avaient déjà portée à un haut degré de sophistication et il n'est pas inutile pour un futur professeur de regarder leurs écrits, ceux d'Euclide bien sûr, mais aussi ceux d'Archimède. Cela ne pourra que l'inciter à une salutaire modestie. Ensuite, comme on l'a dit plus haut, on pourra évoquer Descartes et l'irruption du nombre dans la géométrie, progrès décisif pour

74. Et c'est évidemment l'une des motivations qui m'ont poussé à écrire ce livre.

75. Ce module avait été créé dans le cadre de la (désastreuse) réforme dite de masterisation. La contre-réforme a conduit à supprimer tout ce qu'il pouvait y avoir d'intelligent dans la réforme dont – à mon avis – ce module.

résoudre notamment les problèmes de constructions sur lesquels les Grecs avaient achoppé (duplication du cube, trisection de l'angle, quadrature du cercle, etc.). Enfin, les révolutions apportées par les géomètres du XIX-ième siècle (la géométrie projective avec Poncelet, les vecteurs avec Grassmann, les groupes avec Klein) permettent au futur professeur de mesurer la chance qu'il a d'être né après ces illustres mathématiciens.

Le temps d'avance : l'exemple du programme d'Erlangen

La culture est un atout pour le professeur en ce qu'elle lui donne un *temps d'avance* sur l'élève, qui lui permet, face à un exercice, de trouver rapidement le résultat et d'envisager les méthodes possibles. C'est important pour lui permettre de comprendre les procédures des élèves, justes ou non, leurs intuitions, même non abouties, et ainsi de ne pas les rejeter de manière dogmatique.

Une des idées essentielles en ce sens est celle du programme d'Erlangen. Bien entendu, il n'est pas question de l'enseigner, sous quelque forme que ce soit, au collège et au lycée. Mais si les professeurs en ont compris le principe, cela peut leur être utile comme le montre l'exemple suivant. Il s'agit d'un exercice de collège ou de seconde [76] :

Soit $ABCD$ un parallélogramme et M un point intérieur. Comment doit-on choisir M pour que les aires des triangles AMB et BMC soient égales ?

Le professeur, avec les idées d'Erlangen, notera d'abord que le problème est affine et qu'on peut donc le transformer sans risque en supposant que $ABCD$ est un carré. Il verra alors aussitôt en comparant les hauteurs des triangles que M doit être sur la bissectrice de l'angle ABC. Comme les notions de hauteurs et de bissectrice ne sont pas affines, il devra traduire cette condition dans le cas général en disant que M doit être sur la diagonale $[BD]$. Le maître aura donc ici un temps d'avance sur les élèves puisqu'il aura immédiatement trouvé le résultat grâce à sa culture. Il devra ensuite imaginer une preuve accessible à des élèves. Ce n'est pas difficile pourvu qu'il dispose des outils adaptés (les "lemmes du collège" au sens de [Per11b], lemme du demi-parallélogramme et de la médiane, donnent facilement le résultat).

La rigueur : le problème des cas de figure

La formation des professeurs est parfois paradoxale. Il arrive que le but essentiel des éléments qu'elle apporte soit de ne pas les utiliser. L'exemple type en ce sens est celui des problèmes liés aux cas de figure et à la convexité. La

76. Il était proposé dans le document d'accompagnement des programmes de seconde de 2000.

question des cas de figure est épineuse en géométrie et il y a parfois pléthore de cas à considérer. De plus, l'une des difficultés des élèves dans l'apprentissage de la géométrie est cette question récurrente : pourquoi démontrer des propriétés qui sont bien évidentes sur la figure. Cette difficulté est encore renforcée par le fait que certaines des propriétés sont effectivement lues sur la figure, principalement les questions de position. Il en devient d'autant plus difficile pour les professeurs de faire comprendre aux élèves quelles sont les propriétés qu'ils sont en droit d'admettre et quelles sont celles qu'ils doivent démontrer. À mon avis, une formation des maîtres cohérente sur ce point doit mettre l'accent sur trois éléments.

1) La différence entre deux types d'assertions, des assertions fermées (disons des égalités d'angles, de longueurs, des propriétés de concours, d'alignement, etc.) qui doivent être en principe prouvées et des assertions ouvertes (position d'un point par rapport à une droite, à un secteur, etc.) qui peuvent, en général, être admises par lecture sur la figure.

2) Le fait qu'on peut **démontrer** les assertions de position, à partir d'axiomes. Bien entendu, ces axiomes doivent être les plus proches possibles de la pratique et ceux de Hilbert (éventuellement adaptés) conviennent assez bien. C'est un véritable travail, difficile et parfois aride, mais nécessaire. J'ai trop vu des professeurs refuser d'utiliser un résultat commode sous prétexte qu'il requérait un argument de convexité (l'exemple type est celui du théorème que j'appelle le mal-aimé : *si un quadrilatère* **convexe** *a deux côtés parallèles et égaux, c'est un parallélogramme*).

3) Le garde-fou d'un discours précisant l'objectif, qui n'est pas d'asséner aux élèves ce type d'arguments, mais, au contraire, d'être rassuré quant aux assertions admises sur les figures : on peut toujours convoquer les mathématiques si l'on veut absolument les prouver. Cela permet de ne pas hésiter à admettre les choses si cela apporte une simplification.

Un exemple très simple qui utilise le fameux théorème mal-aimé est le suivant : *Soit $ABCD$ un parallélogramme, M, N les milieux des côtés $[AB]$, $[CD]$. Alors $AMCN$ est un parallélogramme.*

Dans ce cas, la formation donne la caution des mathématiques et libère [77] l'initiative des professeurs. Le lecteur se reportera au module *Projet de géométrie* évoqué plus haut pour plus de précisions.

Les changements de programme : cas d'isométrie, transformations

J'ai expliqué plus haut pourquoi l'usage des cas d'isométrie, au collège, me semblait plus pertinent que celui des transformations. Cet exemple est

77. Comme aurait dit quelqu'un qui n'est pourtant pas de ma chapelle : *n'ayez pas peur.*

très instructif pour la formation des maîtres. En effet, avant la réforme des mathématiques modernes, ces outils étaient connus à la fois des élèves et des professeurs qui les utilisaient sans problème. Ils ont été bannis de l'enseignement secondaire au début des années 1970 et ont aussi disparu de la formation des maîtres, souvent trop arrimée aux programmes. Le résultat c'est que lorsque l'on a voulu les réintroduire dans les programmes de seconde en 2000, comme les professeurs formés pendant les 30 ans qui venaient de s'écouler ignoraient jusqu'à l'existence de ces résultats et ne voyaient pas l'intérêt qu'ils pouvaient présenter, ces outils ne se sont pas imposés. La meilleure preuve est que peu de voix se sont fait entendre quand ils ont de nouveau été supprimés [78] en 2009. Pourtant, je persiste à penser que ce sont des outils indispensables pour faire de la géométrie et qu'il est nécessaire de les enseigner en formation des maîtres, indépendamment de leur présence ou non dans les programmes. Le même discours vaut d'ailleurs maintenant pour les transformations (rotations, homothéties, etc.) qui elles aussi ont disparu des programmes et qui, si l'on n'y prend garde [79], disparaîtront aussi de la formation des maîtres, avec le risque de contrarier leur éventuel retour dans les programmes [80].

Les logiciels de géométrie

Il est clair que, de nos jours, la maîtrise d'un logiciel de géométrie dynamique fait partie des compétences indispensables pour un professeur. Au temps de l'image reine, il ne peut être question d'ignorer ces outils. Outre les aspects de réalisation de figures, d'illustration, d'animation, dont l'attractivité est indéniable, j'ai évoqué ci-dessus à propos du problème de Magali l'utilisation de ces logiciels comme aide à la conjecture et à la démonstration. Il y a là un atout essentiel dont il serait stupide de se priver. J'ajoute que les logiciels modernes comme Geogebra ou CaRMetal, permettent aussi (plus encore que ne le faisait Cabri) un dialogue fructueux entre le calcul et la géométrie.

78. Alors que le projet de suppression des vecteurs a provoqué un tollé général.

79. Ce n'est pas une prédiction alarmiste mais la réalité, comme je le vois sur la formation dont je m'occupe : nous n'enseignons plus ces notions.

80. Dans [dpJPK02], il est dit, avec une certaine candeur, à propos des cas d'isométrie : *Bien sûr, il ne s'agit pas de concepts très difficiles et tous les professeurs disposent dans leurs connaissances des outils sur les transformations permettant de comprendre rapidement l'intérêt de ces notions.* On voit que la situation a bien empiré depuis, puisque les connaissances sur les transformations aussi risquent de faire défaut chez les futurs enseignants.

La culture

Il me semble que nous devons viser à la formation de professeurs qui ne soient pas des ignorants. J'ai évoqué plus haut l'histoire, essentielle dans le cas de la géométrie. Une des conséquences que j'en tire est que les futurs professeurs doivent au moins avoir une idée de quelques-uns des problèmes qui ont motivé les géomètres d'autrefois. Outre la question des constructions à la règle et au compas, j'en citerai trois autres.

• **Le problème des axiomatiques**

Dans la plupart des cursus universitaires, la géométrie est tout simplement absente et lorsque qu'elle est enseignée c'est en général dans le cadre des espaces vectoriels et affines. Or, si cette approche est importante, elle n'est d'aucun secours pour un enseignant de collège [81]. Il me semble plus important, pour les professeurs de collège, d'avoir une connaissance (limitée) d'une axiomatique du type de celle d'Euclide-Hilbert. Sur ce point je renvoie à la rubrique *Projet de géométrie* de ma page web. Un autre point culturellement important est de donner une ouverture (modeste) vers certaines géométries non euclidiennes (hyperbolique et sphérique).

• **Les polyèdres réguliers**

C'est un des sommets de la mathématique grecque, mais la plupart des étudiants qui préparent le CAPES ignorent jusqu'à leur existence, de même qu'ils n'ont que rarement entendu parler de la formule d'Euler liant les nombres de faces, arêtes et sommets d'un polyèdre. Il n'est pourtant pas très difficile d'étudier ces objets, y compris en réalisant des maquettes, et il y a nombre de questions intéressantes qui s'y rattachent, voir [Per11b].

• **Aires, intégrales et primitives**

Dans leurs cursus universitaires, les étudiants rencontrent l'intégrale de Riemann, voire celle de Lebesgue, et c'est une bonne chose. Mais, il est exceptionnel qu'on ait attiré leur attention sur les rapports entre ces notions et le problème de la mesure des aires ou des volumes. Par exemple, un théorème comme celui de Bolyai, voir [Per11b], (qui dit que deux polygones de même aire sont équivalents par puzzle [82]) est rarement enseigné, bien qu'il constitue la justification théorique des pratiques de découpage et recollement que l'on utilise à l'école et au collège.

81. *Aussi utile qu'un couteau à une poule* dit Gilbert Arsac.

82. Pour la culture, on peut évoquer le problème analogue dans l'espace (troisième problème de Hilbert) que Dehn a résolu par la négative.

La contre-réforme, de Charybde en Scylla

La réforme dite de *masterisation* a provoqué un véritable raz de marée dans la formation des maîtres, et ses conséquences négatives sont encore très présentes. Outre la réduction drastique de la formation professionnelle, la principale conséquence en a été une diminution considérable du nombre de candidats aux concours de recrutement, notamment en mathématiques. On peut espérer que la contre-réforme récemment entreprise atténuera ces deux aspects. Cependant, elle a eu une conséquence très négative sur la formation en mathématiques des futurs professeurs. En effet, contraints par la masterisation, nous avions mis en place, notamment à Orsay, des formations nouvelles, souvent sous forme de projet, en particulier autour des thèmes de la géométrie et de la modélisation. Pendant trois ans, un travail de qualité a été mené dans le sens expliqué ci-dessus. Hélas, avec le retour du concours en fin de la première année de Master, l'espace de liberté que nous avions à ce niveau de la formation a disparu et il a fallu mettre à la poubelle les formations qui avaient été mises en place, notamment le *Projet de géométrie*. Outre qu'il est toujours détestable de voir détruit un travail dans lequel on s'est investi, c'est un vrai recul pour la formation mathématique des étudiants, dont nous commençons à percevoir les effets.

Pour un programme spécifique du CAPES

Je voudrais aborder un dernier point, plus technique, mais néanmoins important. Entre l'agrégation et le CAPES, il y a 38 ans que je m'occupe de préparation aux concours d'enseignement et je suis convaincu que ces préparations sont un moment important dans la formation des maîtres. Cependant, je trouve que les autorités ne nous facilitent guère la tâche. En effet, il y avait jusqu'il y a quelques années un programme du CAPES, qui valait pour l'écrit et partiellement pour l'oral et qui était tout à fait raisonnable. Ce programme a été supprimé et remplacé par le programme des classes de lycée, auquel est adjoint celui des classes préparatoires pour l'écrit et des BTS pour l'oral [83]. Cela ne pose pas de problème pour l'écrit, mais cela en pose de très importants pour l'oral. Ainsi, puisqu'il n'y a plus ni transformations, ni cas d'isométrie dans les programmes du lycée, tous les titres d'exposés qui portent sur ces thèmes ont disparu. Autrement dit, nous sommes en train de fabriquer une génération d'ignorants en géométrie, avec la conséquence

83. Si mes informations sont fiables la racine de cette décision est à chercher dans une volonté de mettre fin au caractère encyclopédique des programmes des concours **littéraires**. Si c'est le cas, voilà typiquement ce que j'appelle une connerie, il n'y a pas d'autre mot.

négative déjà évoquée plus haut : le retour des notions évoquées dans les programmes sera rendu très difficile par l'absence de formation des professeurs.

On nous dira que nous pouvons, dans les master, compléter cette formation. Mais, avec l'avancée des dates de concours en fin de M1, ce serait au détriment de la nécessaire préparation au concours et nous ne pouvons pas faire cela. À quoi servirait-il en effet de préparer d'excellents professeurs qui ne seraient pas reçus au CAPES ? À moins que l'on ne souhaite former de futurs vacataires, ce qui est sans doute le souhait de certains, mais sûrement pas le mien. Bref, il me semble urgent, fondamental, indispensable, sur ce point de la géométrie, mais aussi de beaucoup d'autres (notamment en analyse) de rétablir un programme spécifique pour le CAPES.

Résumé de mes propositions

Je résume ici, sans les détailler, un certain nombre de propositions, qui me semblent un minimum pour continuer à enseigner la géométrie. Je ne précise ni les niveaux exacts où ces thèmes doivent apparaître, ni la manière de les traiter. Sur ces points, c'est le débat [84] avec les acteurs de terrain qui doit permettre de préciser les choses.

Pour le collège

Le thème de la géométrie du collège pourrait être : réhabiliter Euclide [85].

1) Réintroduire les cas d'isométrie au collège, en partant de la formulation de l'actuel programme de cinquième :
- *Construire un triangle connaissant :*
- *la longueur d'un côté et les deux angles qui lui sont adjacents,*
- *les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre ces deux côtés,*
- *les longueurs des trois côtés.*

2) Mieux utiliser les angles en dégageant les outils principaux : complémentaire, supplémentaire, somme des angles d'un triangle, angles alternes-internes, théorème de l'angle inscrit (et sa réciproque).

3) Mieux utiliser les aires, dans l'esprit des "lemmes du collège" tels qu'ils apparaissent dans *Mathématiques d'école.*

84. Dans la confection des programmes, il y a depuis la suppression du Conseil National des Programmes un déficit de démocratie flagrant.

85. Sans toutefois y perdre l'usage des nombres, notamment décimaux, qui sont largement postérieurs.

Pour le lycée

Pour le lycée, le thème pourrait être : dépasser Euclide.

0) Continuer à faire de la géométrie autre qu'analytique, dans le prolongement de ce qui a été vu au collège.

1) Introduire, avec modération, les invariants orientés (vecteurs, produit scalaire, angles orientés) et les transformations qui vont avec : translations, rotations.

2) À partir des transformations du plan, donner une première idée de la notion de groupe.

Pour les classes préparatoires et l'université

Revisiter la géométrie à l'aide de l'algèbre linéaire et des formes quadratiques, en particulier, étudier les transformations de l'espace et le produit vectoriel.

En formation des maîtres

Rétablir **absolument** un programme du concours du CAPES qui ne se limite pas à celui des classes du second degré. En géométrie, ce programme doit comprendre en tous cas l'étude des transformations (isométries, similitudes), éventuellement avec l'aide de l'algèbre linéaire ou des nombres complexes, ainsi que les cas d'isométrie et de similitude et une réflexion sur les questions de position et de cas de figure.

Bibliographie

[Die64] Jean Dieudonné. *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Hermann, Paris, 1964.

[dpJPK02] (dirigé par) Jean-Pierre Kahane. *L'enseignement des sciences mathématiques*. Odile Jacob, Paris, 2002.

[JCD01] Jean-Pierre Richeton Jean-Claude Duperret, Daniel Perrin. Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission kahane : analyse de quelques exercices de géométrie. *Bull. APMEP 425*, 2001.

[JEG97] Joseph O'Rourke Jacob E. Goodman. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, New-York, 1997.

[MJPG13] Régis Leclercq Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Anne-Cécile Mathé. Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, 90 : 5–41, 2013.

[Per03] Daniel Perrin. Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations. *Repères IREM*, 53 : 91–110, 2003.

[Per07] Daniel Perrin. L'expérimentation en mathématiques. *Petit x*, 73 :6–34, 2007.

[Per11a] Daniel Perrin. La géométrie : un domaine hors programme. *Bull. APMEP*, 496 :587–600, 2011.

[Per11b] Daniel Perrin. *Mathématiques d'École*. Cassini, Paris, 2011.

[RB94] Marie-Hélène Salin René Berthelot. L'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Grand N*, 53 : 39–56, 1994.

[RD89] Daniel Caire Robert Deltheil. *Géométrie*. Jacques Gabay, Paris, 1989.

[Sau00] Mireille Sauter. Formation de l'esprit scientifique avec les narrations de recherche au cycle central du collège. *Repères-IREM*, 39 :7–20, 2000.