Le concours des hauteurs d'un triangle

Daniel PERRIN

Introduction

L'objectif de ce texte est de produire plusieurs [1] démonstrations du concours des hauteurs d'un triangle du plan euclidien [2]. On pourra estimer que cette quête de multiples preuves d'un théorème bien connu est quelque peu vaine. Mais, d'abord, il s'agit d'un résultat qui n'est pas complètement évident (la meilleure preuve est qu'il n'est pas dans Euclide) et il m'a paru utile de montrer comment on peut l'expliquer à divers niveaux de l'enseignement et notamment au collège. Ensuite et surtout, mon objectif est d'illustrer le fait que plusieurs approches de la géométrie sont possibles et fructueuses, pourvu qu'elles s'appuient sur quelques principes simples. On verra notamment ici en action deux idées :

• l'utilisation des invariants élémentaires (longueurs et angles) ou de leur variante algébrique (produit scalaire),

• le fait que les théorèmes de géométrie proviennent des relations entre les invariants.

0.1 Notations

On travaille dans le plan affine euclidien X et on considère un triangle abc (c'est-à-dire trois points non alignés). On note A, B, C les hauteurs du triangle, c'est-à-dire les perpendiculaires issues de a, b, c aux côtés (bc), (ca), (ab) respectivement et a', b', c' leurs pieds, c'est-à-dire les intersections de A, B, C avec les côtés (bc), (ca) et (ab). Le théorème en vue est alors :

0.1 Théorème. *Les hauteurs A, B, C sont concourantes en un point h appelé* **orthocentre** *du triangle abc.*

0.2 Préliminaire : deux hauteurs se coupent

Dans presque toutes les preuves nous utiliserons le lemme suivant :

0.2 Lemme. *Les hauteurs B, C se coupent en un point h.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que B, C ne sont pas parallèles. On raisonne par l'absurde. Si B, C sont parallèles, comme (ac) est perpendiculaire à B elle est aussi perpendiculaire à C (ici, on utilise de manière essentielle

1. Neuf pour l'instant.
2. Pour le cas non euclidien, voir [DP] Partie IV.

le postulat d'Euclide [3] sous la forme de l'égalité des angles alternes-internes par exemple). Comme (ab) est aussi perpendiculaire à C on en déduit que (ab) et (ac) sont parallèles, ce qui est absurde (ici on n'utilise pas le postulat d'Euclide).

1 Les preuves élémentaires

1.1 La preuve classique

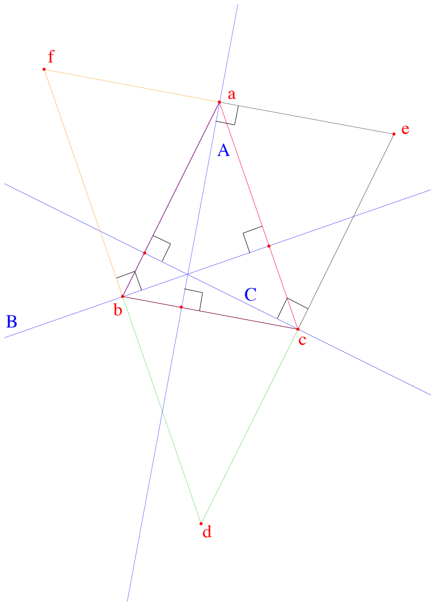

FIGURE 1 – La preuve classique

Elle consiste à ramener le concours des hauteurs à celui des médiatrices, qui est beaucoup plus simple. On considère les droites A', B', C', respectivement parallèles à (bc) passant par a, à (ca) par b et à (ab) par c. Elles se coupent en d, e, f (voir figure 1). Les points a, b, c sont les milieux des côtés du triangle def. En effet, les quadrilatères $afbc$ et $aecb$ sont des parallélogrammes et on a donc $af = bc = ae$. Par ailleurs, les droites A, B, C sont perpendiculaires à (ef), (fd) et (de) respectivement (car elles sont perpendiculaires à des droites parallèles à celles-ci). On en déduit que A, B, C sont les médiatrices de def, d'où leur concours.

3. Et cette propriété est en défaut en géométrie hyperbolique, voir sur ma page web la Partie IV de mon projet de livre de géométrie projective [DP].

1.2 La preuve par les angles

1.2.1 Introduction

J'aime beaucoup cette preuve, pour trois raisons. D'abord, parce que je ne l'ai jamais rencontrée nulle part [4]. Ensuite parce qu'elle est conforme à la théorie, inspirée du programme d'Erlangen, qui dit que tout théorème d'une géométrie relative à un certain groupe doit pouvoir se montrer en utilisant les invariants de ce groupe. Ici, le groupe est celui des similitudes et l'invariant est l'angle. Enfin, corollaire de ce point, parce qu'elle illustre bien la doctrine didactique que je préconise s'agissant des angles : pour les utiliser il faut employer quatre types d'accessoires :

- les notions de complémentaires et supplémentaires,
- la somme des angles du triangle,
- les théorèmes liés au parallélisme (alternes-internes, etc.),
- et enfin, le théorème de l'angle inscrit.

Hormis le troisième point, tous sont à l'œuvre ici, directement ou non.

1.2.2 Quadrilatères inscriptibles

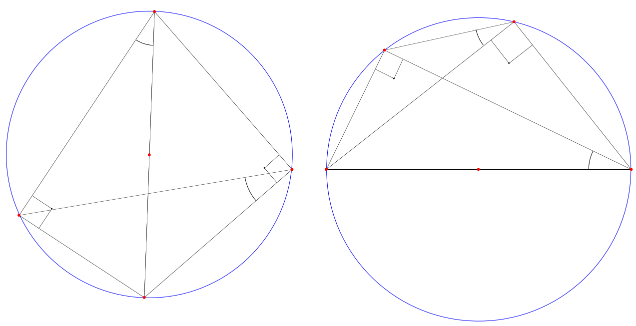

Figure 2 – Quadrilatères inscriptibles

Nous utiliserons le théorème de l'angle inscrit par le biais des quadrilatères inscriptibles, avec les deux types de figures remarquables ci-dessus, toutes deux formées de triangles rectangles inscrits dans un demi-cercle et accolés par leur hypoténuse, dans un cas de part et d'autre et dans l'autre du même

4. Comme me l'a signalé Sylvain Baron, le ressort de cette preuve est le même que celui qui permet de prouver la propriété classique du triangle orthique : les hauteurs de *abc* sont les bissectrices du triangle formé par les pieds des hauteurs.

côté. L'existence de ces triangles montre que les points sont cocycliques et on en déduit l'égalité des angles interceptant le même arc.

1.2.3 Le théorème

On appelle h l'intersection de B et C et on montre que (ah) est perpendiculaire à (bc). Il suffit pour cela de montrer que les angles $\alpha = \widehat{bah}$ et $\widehat{b} = \widehat{abc}$ sont complémentaires. Mais, le quadrilatère $ac'hb'$ est inscriptible (à cause des angles droits en b' et c'). On a donc $\alpha = \widehat{c'b'h}$. De même $bcb'c'$ est inscriptible, toujours à cause des mêmes angles droits, mais vus de l'autre côté. On a donc $\widehat{c'b'h} = \widehat{c'cb}$. Mais il est clair que $\widehat{c'cb}$ et $\widehat{b}$ sont complémentaires et on a gagné.

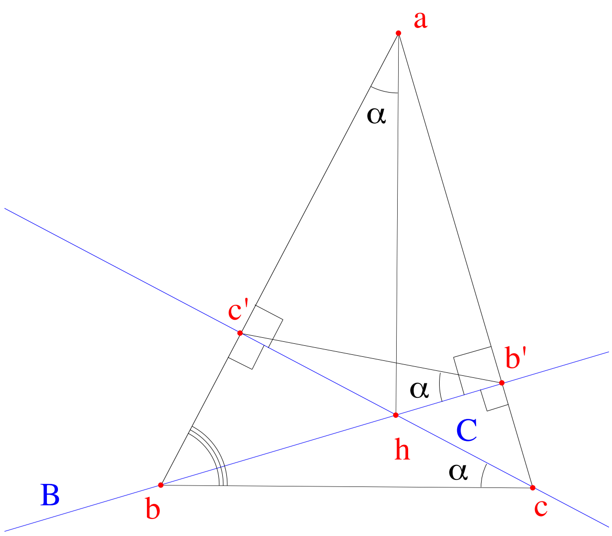

FIGURE 3 – La preuve par les angles

1.3 La preuve par les longueurs

Là encore, il s'agit d'une preuve utilisant les invariants euclidiens, ici les longueurs.

Le lemme crucial est le suivant :

1.1 Lemme. *Le point m est sur la hauteur A issue de a si et seulement si on a $mb^2 - mc^2 = ab^2 - ac^2$.*

Démonstration. Supposons que m est sur la hauteur. On applique Pythagore avec les angles droits en a' et on a $mb^2 = ma'^2 + a'b^2$, $mc^2 = ma'^2 + a'c^2$, d'où $mb^2 - mc^2 = a'b^2 - a'c^2$. Mais cette relation vaut en particulier pour $m = a$, d'où l'égalité cherchée.

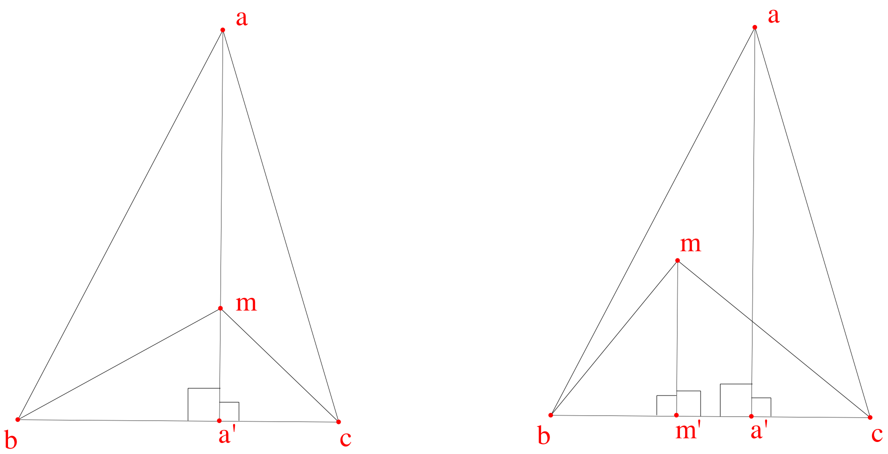

FIGURE 4 – La preuve par les longueurs

Réciproquement, si on a l'égalité, on introduit le projeté orthogonal m' de m sur (bc). Il s'agit de montrer qu'on a $m' = a'$. Une nouvelle application de Pythagore donne $m'b^2 - m'c^2 = a'b^2 - a'c^2$, ou encore $(m'b - m'c)(m'b + m'c) = (a'b - a'c)(a'b + a'c)$. Traitons d'abord le cas où a' et m' sont tous deux intérieurs à $[bc]$. On a alors $m'a + m'b = a'b + a'c = bc$ et on en déduit $m'b - m'c = a'b - a'c$, donc, avec les deux équations, $m'b = a'b$ et $m'c = a'c$ donc $a' = m'$. En fait, la position n'a pas d'importance car on a le lemme :

1.2 Lemme. *Soient b, c deux points distincts et $p, q \in (bc)$ vérifiant $pb^2 - pc^2 = qb^2 - qc^2$. Alors, on a $p = q$.*

Démonstration. (du lemme 1.2) On a $\xi(p) := pb^2 - pc^2 = (pb - pc)(pb + pc)$ et cette quantité est du signe de $pb - pc$. Comme les deux quantités $\xi(p)$ et $\xi(q)$ ont même signe, p et q sont tous deux soit plus près de c soit de b, disons de c : $pb \geq pc$ et $qb \geq qc$. Si p est intérieur à $[bc]$ on a $pb + pc = bc$ et $pb - pc \leq bc$, donc $\xi(p) \leq bc^2$, tandis que si p est extérieur, on a $pb - pc = bc$ et $b + pc \geq bc$, donc $\xi(p) \geq bc^2$. Comme ξ est le même pour p et q, on voit qu'ils sont tous deux intérieurs ou tous deux extérieurs. Dans les deux cas on en déduit $pb - pc = qb - qc$ et $pb + pc = qb + qc$ donc, par addition, $pb = qb$ et $pc = qc$, donc $p = q$ (par exemple parce que les positions de p et q par rapport à b, c sont les mêmes).

On peut alors finir la preuve de 0.1. Soit h le point d'intersection des hauteurs B et C. D'après le sens direct de 1.1 on a $ha^2 - hb^2 = ca^2 - cb^2$ et

$ha^2 - hc^2 = ba^2 - bc^2$. Par différence on en déduit $hb^2 - hc^2 = ab^2 - ac^2$ et on conclut par le sens réciproque de 1.1.

1.4 La preuve qui annonce la droite d'Euler

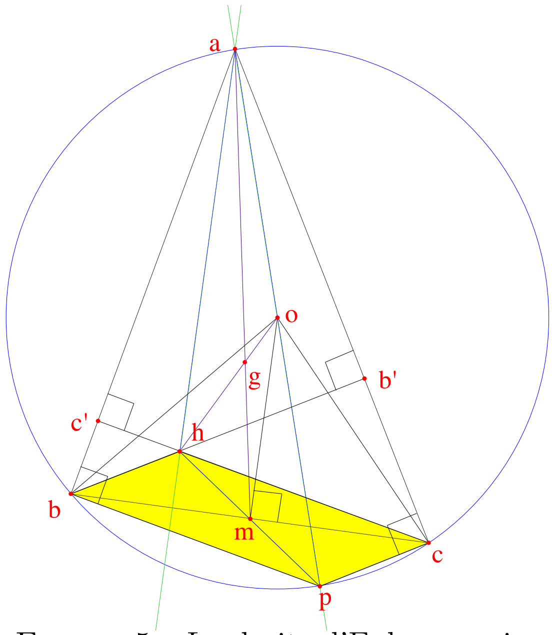

FIGURE 5 – La droite d'Euler en prime

On considère les hauteurs issues de b et c qui se coupent en h. Il s'agit de montrer que (ah) est perpendiculaire à (bc). Pour cela, on introduit le cercle Γ circonscrit au triangle abc, centré en o. On appelle p le point diamétralement opposé à a sur Γ. Les triangles apb et apc, inscrits dans des demi-cercles, sont rectangles en b et c, donc les droites (pb) et (ab) (resp. (pc) et (ac)) sont perpendiculaires et donc (pb) et (pc) sont respevtivement parallèles aux hauteurs (ch) et (bh). Il en résulte que $bhcp$ est un parallélogramme, donc ses diagonales $[ph]$ et $[bc]$ se coupent en leur milieu m. Dans le triangle ahp, la droite (om) est une droite des milieux, donc parallèle à (ah). Il suffit donc de montrer que (om) est perpendiculaire à (bc). Mais (om) est la médiane du triangle obc, qui est isocèle en o. C'est donc aussi la hauteur et on a gagné[5] .

1.3 *Remarque.* La figure ci-dessus mène aussi à la propriété de la droite d'Euler de abc. On considère encore le triangle ahp, dont $[ho]$ et $[am]$ sont des médianes. Elles se coupent donc en g, centre de gravité de ahp, situé au tiers de $[am]$ à partir de m. Mais, comme $[am]$ est aussi la médiane de abc, le

5. Je remercie Gérald Forhan de m'avoir soufflé cette preuve.

point g est le centre de gravité de abc. On voit ainsi que o, g, h sont alignés et, de plus, avec la médiane $[ho]$ de ahp, on a l'égalité $hg = 2go$.

2 Les preuves utilisant le produit scalaire

2.1 Théorèmes et relations

La première preuve est une magnifique illustration du principe, déjà évoqué ci-dessus : les théorèmes proviennent des relations entre invariants. Ici, l'invariant est le produit scalaire et on a une relation triviale :

2.1 Lemme. *Soient a, b, c, h quatre points de X. On a la relation :*

$$(\overrightarrow{ha}|\overrightarrow{bc}) + (\overrightarrow{hb}|\overrightarrow{ca}) + (\overrightarrow{hc}|\overrightarrow{ab}) = 0.$$

Démonstration. Il suffit de faire apparaître h en écrivant la relation de Chasles $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{bh} + \overrightarrow{hc}$ et de même pour les autres et d'utiliser la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire.

On en déduit 0.1. On applique la relation en prenant pour h l'intersection de B et C. Les deux derniers produits scalaires sont nuls, donc aussi le premier, ce qui montre que la droite (ha) est perpendiculaire à (bc), donc est la hauteur A.

2.2 Délit d'initié

On montre le lemme suivant :

2.2 Lemme. *Soit o le centre du cercle circonscrit à abc et soit h le point défini par la formule : $\overrightarrow{oh} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{oc}$. Alors h est sur les trois hauteurs.*

Démonstration. Montrons par exemple que h est sur la hauteur issue de a, i.e. qu'on a $(\overrightarrow{ah}|\overrightarrow{bc}) = 0$. On écrit $\overrightarrow{ah} = \overrightarrow{ao} + \overrightarrow{oh} = \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{oc}$ et $\overrightarrow{bc} = \overrightarrow{oc} - \overrightarrow{ob}$ et on en déduit $(\overrightarrow{ah}|\overrightarrow{bc}) = (\overrightarrow{ob} + \overrightarrow{oc}|\overrightarrow{oc} - \overrightarrow{ob}) = oc^2 - ob^2 = 0$ puisque o est le centre du cercle circonscrit.

2.3 Commentaire. Je déteste cette preuve, qui est correcte, mais dans laquelle h est parachuté sans explication. Bien entendu, il y en a une, c'est la relation de la droite d'Euler. Si on appelle g le centre de gravité de abc on a $3\overrightarrow{og} = \overrightarrow{oa} + \overrightarrow{ob} + \overrightarrow{oc}$ et donc $3\overrightarrow{og} = \overrightarrow{oh}$, on reconnaît la propriété de la droite d'Euler. Mais cette relation ne se conçoit que comme une propriété qui relie les trois points de concours remarquables et donc elle vient normalement après le concours des hauteurs.

2.3 La preuve par Céva

Rappelons le théorème de Céva (voir par exemple [ME] ch. 7, ex. 196) :

2.4 Théorème. *Soit abc un triangle et a', b', c' des points situés respectivement sur (bc), (ca) et (ab). Les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes ou parallèles si et seulement si on a la relation :*

$$(*) \qquad \frac{\overline{a'b}}{\overline{a'c}} \times \frac{\overline{b'c}}{\overline{b'a}} \times \frac{\overline{c'a}}{\overline{c'b}} = -1.$$

Pour montrer le concours des hauteurs il suffit donc de prouver $(*)$. On peut utiliser les angles en montrant par exemple la formule $a'b = ab \sin \widehat{baa'}$ et les formules analogues, mais on doit alors distinguer des cas de figure. Pour éviter cela, le plus simple est d'utiliser le produit scalaire. On note que, pour calculer avec des rapports de mesures algébriques on peut prendre n'importe quel vecteur comme base, ici on prendra $\overrightarrow{bc}$, $\overrightarrow{ca}$ et $\overrightarrow{ab}$. Avec cette précaution, on a des égalités du type : $\overline{a'b} = \dfrac{(\overrightarrow{ab}|\overrightarrow{bc})}{bc^2}$ et la relation de Céva est évidente.

3 Homothéties ou similitudes

3.1 Homothéties

Cette preuve est très voisine [6] de la preuve classique, mais en diminuant le triangle au lieu de l'augmenter. On appelle a'', b'', c'' les milieux des côtés $[bc]$, $[ca]$ et $[ab]$ et on suppose qu'on a montré le concours des médianes (aa''), (bb'') et (cc'') en g avec la propriété pour le centre de gravité d'être au tiers de la médiane. Cela signifie que si H est l'homothétie de centre g et de rapport $-1/2$, elle transforme a, b, c en a'', b'', c''. Dans cette homothétie, les hauteurs A, B, C de abc deviennent celles, notées A', B', C', de $a''b''c''$ et il suffit de montrer que celles-ci sont concourantes (on aura alors le concours de A, B, C en appliquant H^{-1}). Or, comme $(b''c'')$ est parallèle à (bc) par le théorème de la droite des milieux, on voit que A' est perpendiculaire à (bc). Comme de plus A' passe par a'', c'est la médiatrice de $[bc]$. Autrement dit, A', B', C' sont les médiatrices de abc, donc concourantes.

3.2 Similitudes

J'emprunte cette preuve au livre de R. Hartshorne [H]. Comme une de celle qui précède, elle utilise implicitement la droite d'Euler. Soit a'' le milieu

6. En fait c'est une variante savante, je dirais même pédante, de cette preuve.

de $[bc]$. On suppose connu le concours des médianes en le centre de gravité g et le fait que g est au tiers de $[aa'']$ du côté de a''. On considère aussi le centre du cercle circonscrit o et on appelle h le point d'intersection de (og) et de la hauteur (aa'). Les triangles oga'' et hga sont semblables car les droites (oa'') et (aa') sont parallèles. Comme on a $2\overrightarrow{ga''} = -\overrightarrow{ga}$, on en déduit $2\overrightarrow{go} = -\overrightarrow{gh}$. On constate que le point h ne dépend que de g et o. Mais, ce que l'on vient de faire avec la hauteur (aa'), on peut le refaire avec (bb') et (cc') et les points h', h'' obtenus vérifieront la même égalité vectorielle, donc seront égaux. Cela montre que les hauteurs sont concourantes (et on a la relation de la droite d'Euler en prime).

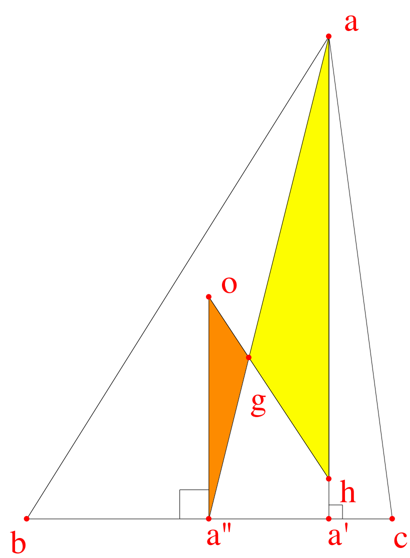

FIGURE 6 – La preuve par similitude

4 Équations et relation de Chasles

4.1 Le cadre

On choisit un repère orthonormé du plan, donc des coordonnées x, y. Une droite est alors donnée par une équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ et α, β non tous deux nuls, deux telles équations définissant la même droite si et seulement si leurs coefficients sont proportionnels. Il faut connaître deux résultats faciles :

4.1 Lemme. *Trois droites A, B, C sont concourantes ou parallèles si et seulement si leurs équations sont linéairement dépendantes.*

Démonstration. Voir *Concours et parallélisme de droites*, sur ma page web : `http://www.math.u-psud.fr/ perrin/CAPES.html`.

Le deuxième résultat concerne l'orthogonalité. On introduit un "produit scalaire" (dégénéré) défini sur les droites $A = a_1x + a_2y + a_3$ et $B = b_1x + b_2y + b_3$ par la formule : $(A|B) = a_1b_1 + a_2b_2$. On a alors

4.2 Lemme. *Les droites A, B sont perpendiculaires si et seulement si on a $(A|B) = 0$.*

Démonstration. Cela résulte du fait que ce produit scalaire est aussi celui des vecteurs normaux.

4.2 Application au triangle

On considère un triangle abc et ses hauteurs.

Attention, on change de notations ici : on note A, B, C les côtés (bc), (ca) et (ab) et aussi des équations ces côtés. On cherche les équations A', B', C' des hauteurs. On sait que A', B, C concourent en a. On a donc $A' = \lambda B + \mu C$. Mais on sait aussi que A' est perpendiculaire à A. On en déduit $\lambda = (C|A)$ et $\mu = -(B|A)$ à un scalaire près. En définitive on a $A' = (C|A)B - (B|A)C$ et de même $B' = (A|B)C - (C|B)A$ et $C' = (B|C)A - (A|C)B$. Mais alors, il est clair qu'on a $A' + B' + C' = 0$, d'où le résultat en vertu de 4.1.

4.3 *Remarque.* On notera que le théorème est une conséquence d'une relation "de Chasles" triviale du genre $(B''-C'')+(C''-A'')+(A''-B'') = 0$. L'intérêt principal de cette preuve c'est qu'elle est universelle : tous les théorèmes de concours des droites remarquables du triangle, euclidiens ou non, peuvent se démontrer ainsi, voir [DP] Parties IV et V.

5 Références

[H] HARTSHORNE Robin *Geometry : Euclid and beyond*, Springer, 2000.

[DP] PERRIN Daniel *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes et euclidienne*,
`http://www.math.u-psud.fr/ perrin/Livre_de_geometrie_projective.html`.

[ME] PERRIN Daniel *Mathématiques d'école*, Cassini, (deuxième édition 2011).