

Les polyèdres

Daniel PERRIN

Avertissement *Ce texte est le quatrième de la série. Il s'agit de cours¹ donnés à l'ENS de jeunes filles entre 1976 et 1986. L'objectif de ces textes est de compléter le cours d'algèbre [6]. Sur ce sujet des polyèdres, je me suis très largement inspiré du livre de Marcel Berger [2]. En effet, je disposais de la version manuscrite de ce cours dès mon cours de Sèvres, au début des années 1980. Les seules modifications par rapport à ce texte sont à chercher dans les détails et les précisions, Berger étant parfois, disons, un peu rapide ...*

Sur un certain nombre de questions géométriques (la règle de la somme des angles, la formule d'Euler, la détermination des polyèdres archimédiens, etc.), le lecteur sera principalement renvoyé au chapitre 9 de mon livre Mathématiques d'école, cité [7].

Table des matières

1	Rappels sur la convexité	2
1.1	Généralités	3
1.2	Convexes et topologie	4
1.3	Théorèmes de séparation	8
1.4	Points extrémaux	10
2	Dualité	11
2.1	Définitions	11
2.2	Exemples	12
2.3	Propriétés de l'opération $*$	12
2.4	Étude de l'opération \perp	14
3	Polyèdres : généralités	15
3.1	Définition et théorème de structure	15

1. J'avais malencontreusement perdu mes notes de cours sur le sujet. Heureusement Jean-Yves Hee en avait fait une copie que j'ai pu récupérer. Je l'en remercie vivement.

3.2	Dualité des polyèdres	18
3.3	Exemples	23
3.4	Un lemme de connexité	27
4	Polyèdres réguliers	30
4.1	Le groupe d'un polyèdre	30
4.2	Définition des polyèdres réguliers	32
4.3	Exemples de polyèdres réguliers	36
5	Le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers	38
5.1	Construction du dodécaèdre régulier	38
5.2	Le groupe de l'ensemble S	40
5.3	Faces, arêtes, sommets et drapeaux du dodécaèdre	42
5.4	L'icosaèdre	46
6	Le groupe des rotations du dodécaèdre	46
6.1	La preuve utilisant le sous-groupe H^+	47
6.2	La preuve utilisant les ordres des éléments	49
7	Détermination des polyèdres réguliers de \mathbf{R}^3	50
7.1	Les étoiles d'un polyèdre régulier	50
7.2	Le théorème de Schäfli	52
8	Et si l'on faisait de la géométrie ?	56
8.1	Quelques rappels	56
8.2	Un premier résultat géométrique : la règle de la somme des angles	57
8.3	D'autres caractérisations de la régularité	59
8.4	Démonstration de 8.10	62
8.5	Remords	67

1 Rappels sur la convexité

Cette section ne prétend pas être un cours complet sur la convexité, mais plutôt un aide-mémoire, qui contient les éléments utiles pour traiter des polyèdres convexes.

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions

On travaille sur un espace affine réel E de dimension finie. Le lecteur est supposé familier avec cette notion, pour laquelle on renvoie à [4] par exemple. Si A est une partie de E , on note $\langle A \rangle$ le sous-espace affine engendré par A . Quitte à choisir une origine, on peut supposer que E est un espace vectoriel. Il est donc isomorphe à un espace \mathbf{R}^N et on le munit de la topologie produit, qui peut être définie par une norme quelconque. On définit d'abord la notion de segment :

1.1 Définition. Soient $x, y \in E$. Le **segment** $[xy]$ est l'ensemble :

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)y \mid \lambda \in [0, 1]\}.$$

Ici, le segment est dit en termes d'espaces vectoriels, mais la variante affine est évidente : c'est l'ensemble des barycentres de x, y affectés des coefficients λ et $1 - \lambda$, avec $\lambda \in [0, 1]$.

1.2 Définition. Soit A une partie de E . On dit que A est **convexe** si pour tous $x, y \in A$ le segment $[xy]$ est contenu dans A .

1.3 Exemples. Sont des convexes : les sous-espaces affines, les boules, les pavés de E ; les intervalles de \mathbf{R} .

1.4 Remarque. Attention, quand on dit que les boules sont convexes, il s'agit des boules associées à une norme. Pour une distance quelconque le résultat est inexact. Par exemple, dans \mathbf{R}^2 , on considère la fonction définie par $\Phi(x, y) = (x, y - x^2)$ qui est un homéomorphisme de \mathbf{R}^2 . On définit alors, à partir de la distance euclidienne d , une distance d' en posant $d'(a, b) = d(\Phi(a), \Phi(b))$ qui définit la même topologie que d . Pour cette distance, la boule unité est définie par $x^2 + y^2 - 2x^2y + x^4 \leq 1$ et elle est non convexe.

1.1.2 Propriétés

Les propriétés suivantes sont immédiates :

1.5 Remarques. 1) Si A est convexe, il est stable par barycentres à coefficients positifs : si $x_1, \dots, x_n \in A$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires ≥ 0 et de somme 1, $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ est dans A (raisonner par récurrence sur n en utilisant l'associativité des barycentres).

2) Si $f : E \rightarrow F$ est une application affine et si $A \subset E$ (resp. $B \subset F$) est convexe, il en est de même de $f(A)$ (resp. $f^{-1}(B)$) (c'est la conservation des barycentres par une application affine).

3) Une intersection quelconque de convexes est un convexe.

La remarque 2) ci-dessus fournit un exemple important de convexe :

1.6 Proposition. Soit $f : E \rightarrow \mathbf{R}$ une application² affine. Alors les demi-espaces fermé $E_\lambda = \{x \in E \mid f(x) \leq \lambda\}$ et ouvert E_λ° (avec $f(x) < \lambda$) sont convexes.

Une conséquence de ce fait c'est qu'une intersection quelconque de demi-espaces est un convexe. On verra une réciproque un peu plus loin.

La remarque 3), de son côté, donne aussitôt :

1.7 Proposition-Définition. Soit A une partie de E . Il existe un plus petit ensemble convexe contenant A qui est l'intersection de tous les convexes contenant A . On l'appelle **enveloppe convexe** de A et on le note $\mathcal{E}(A)$.

1.8 Proposition. L'ensemble $\mathcal{E}(A)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs des points de A : les x de E tels qu'il existe $n \in \mathbf{N}^*$, des points $a_1, \dots, a_n \in A$ et des scalaires $\lambda_i \geq 0$ et de somme 1 tels que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$.

Démonstration. Appelons $\mathcal{E}'(A)$ l'ensemble des barycentres. Il est contenu dans $\mathcal{E}(A)$ en vertu de 1.5.1. Inversement, il est convexe (si $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ et $y = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j$ sont dans $\mathcal{E}'(A)$, le barycentre $\alpha x + (1 - \alpha)y = \sum_{i=1}^m \alpha \lambda_i a_i + \sum_{j=1}^n (1 - \alpha) \mu_j b_j$ y est aussi). Comme $\mathcal{E}(A)$ est le plus petit convexe contenant A on a $\mathcal{E}(A) \subset \mathcal{E}'(A)$.

1.9 Commentaire. On voit qu'il y a deux manières de comprendre l'enveloppe convexe de A : par l'extérieur, comme intersection des convexes contenant A , par l'intérieur comme ensemble des barycentres des points de A .

1.2 Convexes et topologie

1.2.1 Intérieur, adhérence

Bien entendu, un convexe est connexe (par arcs). La proposition suivante résume les propriétés relatives à l'adhérence et à l'intérieur :

1.10 Proposition. Soit A un convexe de E . On note \bar{A} son adhérence et A° son intérieur.

- 1) L'adhérence de A est convexe.
- 2) Soient $x \in A^\circ$, $y \in \bar{A}$. Alors, $[xy[$ est contenu dans A° .
- 3) L'intérieur de A est convexe.
- 4) Si A° est non vide, on a $\bar{A} = \overline{A^\circ}$ et $A^\circ = (\bar{A})^\circ$.

2. On parle aussi de forme affine.

Démonstration. 1) Soit λ un réel de $[0, 1]$ fixé. L'application $\varphi_\lambda : E \times E \rightarrow E$ qui à (x, y) associe $\lambda x + (1 - \lambda)y$ est continue et envoie $A \times A$ dans A par définition de la convexité. On considère $\varphi_\lambda^{-1}(\overline{A})$. Cet ensemble est fermé, contient $\varphi_\lambda^{-1}(A)$, donc $A \times A$, donc son adhérence qui est $\overline{A} \times \overline{A}$. On obtient ainsi $\varphi_\lambda(\overline{A} \times \overline{A}) \subset \overline{A}$, d'où la convexité de \overline{A} .

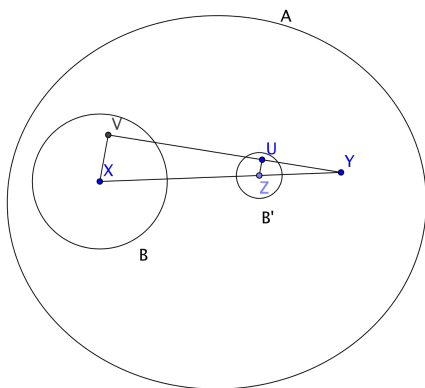


FIGURE 1 – Premier cas

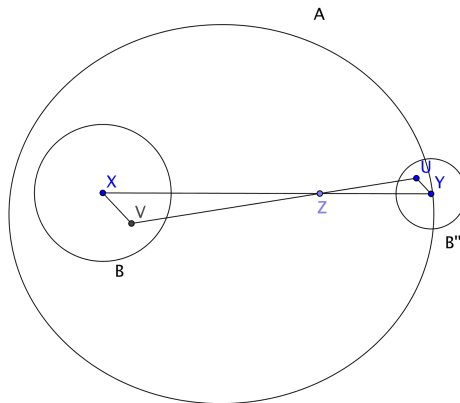


FIGURE 2 – Second cas

2) Soit $z \in]xy[$ et soit B une boule ouverte de centre x contenue dans A .

On suppose d'abord $y \in A$ et on considère l'homothétie de centre y qui envoie x sur z , donc de rapport $k < 1$. L'image de B est une boule B' de centre z qui est contenue dans A . En effet, si u est dans B' , u s'écrit $h(v)$ avec v dans B donc dans A et u est dans $]vy[$ donc dans A . On voit que z est bien intérieur à A .

On passe au cas général où y est dans \overline{A} . On considère cette fois l'homothétie de centre z qui envoie x sur y , elle est de rapport $k < 0$. L'image de B est une boule B'' de centre y . Comme y est dans \overline{A} , il existe $u \in B'' \cap A$. Comme u est égal à $h(v)$ avec $v \in B$, on voit que z est dans $^3]uv[$ avec $v \in A^\circ$ et $u \in A$ et on est ramené au premier cas.

3) C'est une conséquence immédiate de 2).

4) Il est clair qu'on a $\overline{A^\circ} \subset \overline{A}$. Inversement, si $y \in \overline{A}$ et $x \in A^\circ$, $]x, y[$ est contenu dans A° , de sorte que y est adhérent à A° .

Il est clair qu'on a $A^\circ \subset (\overline{A})^\circ$. Inversement, soit $y \in (\overline{A})^\circ$ et $x \in A^\circ$. Si $x = y$ on a fini. Sinon, il y a une boule ouverte $B := B(y, R)$ contenue dans

3. On peut supposer que z est différent de v donc de u .

\bar{A} . La droite (xy) contient un point z de B , donc de \bar{A} , tel que y soit dans $]zx[$. Mais alors, par 2), y est dans A° .

1.11 Remarque. Pour montrer que A° est convexe on peut utiliser un raisonnement analogue à celui utilisé pour montrer le point 1) mais il faut prouver que φ_λ est ouverte (ce qui est facile) mais nous aurons besoin en 3.7 de la précision apportée par le point 2).

1.12 Proposition. *Si E est de dimension n et si S est convexe, S est d'intérieur non vide si et seulement si il contient $n + 1$ points affinement indépendants, ou encore si l'on a $\langle S \rangle = E$.*

Démonstration. Si S est d'intérieur non vide, il contient une boule ouverte $B(a, R)$ donc un repère affine formé de a et des $a + \lambda e_i$ où les e_i forment une base de \vec{E} et où λ est assez petit. Inversement, si S contient un repère affine, on peut supposer que c'est $0, e_1, \dots, e_n$ où les e_i forment une base de E . Alors, S contient l'ouvert formé des $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ avec $0 < \lambda_i < 1$ pour tout i et $\sum_{i=1}^n \lambda_i < 1$ qui est non vide (il contient le point $\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n e_i$).

1.2.2 Compacité

Le résultat principal sur ce thème est dû à Carathéodory et il précise 1.8 :

1.13 Théorème. *Soit E un espace affine de dimension n et soit A une partie de E . On a :*

$$\mathcal{E}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \mid x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Démonstration. On prouve d'abord un lemme :

1.14 Lemme. *Soient a_1, \dots, a_p des points de X avec $p \geq n + 2$. Alors l'un des a_i est barycentre des autres.*

Démonstration. (du lemme) Comme on a $p \geq n+2$, les points sont affinement dépendants, ce qui signifie que, pour tout i , les vecteurs $a_j - a_i, j \neq i$ sont liés. On choisit parmi les points un système maximal de points affinement indépendants et, quitte à permuter, on peut supposer que ce sont a_2, \dots, a_q . Alors, a_1, \dots, a_q ne le sont plus et on a donc $\sum_{i=2}^q \alpha_i (a_i - a_1) = 0$ avec des α_i non tous nuls, soit $(\sum_{i=2}^q \alpha_i) a_1 = \sum_{i=2}^q \alpha_i a_i$. Si $\alpha := \sum_{i=2}^q \alpha_i$ est non nul, en divisant par α , on voit que a_1 est barycentre des autres. Si $\alpha = 0$, on a $\sum_{i=2}^q \alpha_i a_i = 0$ et, comme $\alpha_2 = -\sum_{i=3}^q \alpha_i$, on trouve $\sum_{i=3}^q \alpha_i (a_i - a_2) = 0$, ce qui contredit le fait que a_2, \dots, a_q sont affinement indépendants.

On revient à Carathéodory. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il y a des points de $\mathcal{E}(A)$ qui ne sont pas barycentres de $n+1$ points de A et on en choisit un, $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i a_i$, avec $a_i \in A$, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et $p \geq n+2$, mais p minimal. On va montrer qu'on peut l'écrire comme barycentre de moins de p points de A , ce qui sera une contradiction.

Quitte à permuter les a_i , on peut supposer, en vertu du lemme, que a_1 est barycentre des autres et on a $a_1 = \sum_{i=2}^p \alpha_i a_i$ avec $\sum_{i=2}^p \alpha_i = 1$. Si l'on pose $\mu_1 = 1$ et $\mu_i = -\alpha_i$ pour $i \geq 2$ on a $\sum_{i=1}^p \mu_i a_i = 0$, avec $\mu_i \in \mathbf{R}$, $\mu_1 = 1$ et $\sum_{i=1}^p \mu_i = 0$.

Soit alors k un entier tel que $\frac{\lambda_k}{\mu_k}$ soit minimum parmi les $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$ avec $\mu_i > 0$ (il y en a puisque $\mu_1 = 1$). Par construction, on a $x = \sum_{i=1}^p (\lambda_i + \alpha \mu_i) a_i$ et on cherche α de telle sorte que le terme d'indice k soit nul. Cela impose $\alpha = -\frac{\lambda_k}{\mu_k}$ et la somme des coefficients $\lambda_i + \alpha \mu_i$ est égale à 1. De plus, tous sont positifs (c'est évident si $\mu_i \leq 0$ et sinon cela vient du choix de k). On voit que x est barycentre des a_i pour $i \neq k$ et on a la contradiction cherchée.

1.15 Corollaire. *Si A est compact il en est de même de $\mathcal{E}(A)$.*

Démonstration. Soit $K \subset \mathbf{R}^{n+1}$ l'ensemble des $\lambda_i \geq 0$ et de somme 1. Il est clair que K est compact (il est fermé car défini par une équation et il est borné car les λ_i sont dans $[0, 1]$). D'après Carathéodory, l'application $\Phi : K \times A^{n+1} \rightarrow \mathcal{E}(A)$ qui à $((\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}); (a_1, \dots, a_{n+1}))$ associe $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i$ est surjective. Comme elle est continue et que $K \times A^{n+1}$ est compact, on a le résultat.

1.16 Remarque. Le résultat est vrai si A est fini (et il n'utilise pas le théorème 1.13).

Enfin, les résultats suivants (qui n'utilisent pas Carathéodory) seront importants dans le cas des polyèdres :

1.17 Proposition. *Si une partie $A \subset E$ est convexe, compacte et non vide, elle est l'enveloppe convexe de sa frontière.*

Démonstration. Soit $x \in A$ et D une droite passant par x . La trace de D sur A est convexe et compacte, donc un segment $[ab]$ contenant x . Mais comme a, b sont des points frontières de A (car il y a sur D des points voisins de a et b qui ne sont pas dans A) on voit que x est barycentre de points de la frontière de A .

1.18 Proposition. *On vectorialise E en o , on le munit d'une norme quelconque et on désigne par S la sphère unité pour cette norme. Soit K un*

convexe compact d'intérieur non vide de E . Alors la frontière de K est homéomorphe à S (donc connexe si la dimension de E est ≥ 2).

Démonstration. Quitte à faire une translation on peut supposer que l'origine o est un point intérieur à K . On considère alors l'application de $\text{Fr}(K)$ dans S qui à x associe $x/\|x\|$. Elle est bien définie et continue, injective en vertu de 1.10 et surjective en vertu du théorème des valeurs intermédiaires. C'est donc un homéomorphisme par compacité.

1.3 Théorèmes de séparation

1.3.1 Hahn-Banach en dimension finie

Dans ce paragraphe, E est un espace affine de dimension finie.

1.19 Théorème. *Soit $A \subset E$ un convexe fermé et soit $x \notin A$. Il existe un hyperplan H de E séparant strictement x et A , autrement dit, une forme affine f qui vérifie $f(x) > 0$ et $f(a) < 0$ pour tout $a \in A$.*

Ce théorème admet le corollaire important suivant :

1.20 Corollaire. *Tout convexe fermé de E distinct de E est intersection (en général infinie) de demi-espaces fermés.*

Démonstration. (de 1.19) On munit E (ou plutôt l'espace vectoriel sous-jacent) d'une structure euclidienne, donc d'un produit scalaire et de la norme associée. Comme x n'est pas dans A , on a $d(x, A) > 0$ et il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = d(x, A)$ (en coupant par une boule fermée de centre x assez grande on se ramène au cas où A est compact). On considère l'hyperplan médiateur de a et x . Précisément, soit o le milieu de $[ax]$. On choisit o comme origine de E , faisant ainsi de E un espace vectoriel, et on pose :

$$H = \{y \in E \mid f(y) := (y|x - a) = 0\}.$$

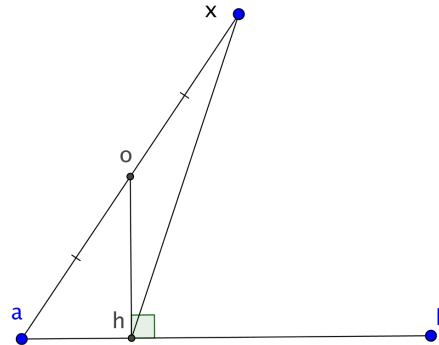
Comme on a $a = -x$, on a $f(x) = (x|x - a) = (x|2x) = 2\|x\|^2 > 0$. Soit $b \in A$. Il s'agit de montrer qu'on a $(b|x - a) < 0$. Vu l'égalité $x = -a$ cela revient à $(a|b) > 0$. On raisonne par l'absurde. Sinon, on a $(a|b) \leq 0$, de sorte que l'angle \widehat{aob} est obtus ou droit. Mais on a le lemme suivant :

1.21 Lemme. *On suppose $(a|b) \leq 0$. Alors, le projeté orthogonal h de o sur (ab) est dans $[ab]$ (donc dans A).*

Démonstration. On écrit que h est sur (ab) : $h = a + \lambda(b - a)$, puis que h est orthogonal à $b - a$, ce qui donne $\lambda = \frac{(a|a - b)}{\|a - b\|^2}$. Comme on a $(a|b) \leq 0$

on voit que λ est ≥ 0 . De plus, on a $\|a\| \leq \|a - b\|$ (toujours parce que $(a|b)$ est ≤ 0). On en déduit $\lambda \leq 1$ par Cauchy-Schwarz. Le point h est alors barycentre de a, b avec les coefficients $1 - \lambda, \lambda$ et il est bien dans le segment $[ab]$.

On revient alors à Hahn-Banach en notant uv la distance des points u et v . Dans le triangle rectangle oha (voir figure ci-contre), on a $oh < oa$. Par ailleurs, on a $xh \leq xo + oh = oa + oh < 2oa = ax$. C'est une contradiction avec le fait que a réalise le minimum de la distance de x à A .



1.3.2 Hyperplans d'appui

1.22 Proposition. *Soit A un convexe fermé de E , $A \neq E$, et soit $a \in \text{Fr}(A)$ un point frontière de A . Il existe un hyperplan d'appui H de A en a , c'est-à-dire un hyperplan défini par une équation $f(x) = 0$ tel que a soit dans H et que l'on ait $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in A$.*

Démonstration. On munit E d'une structure euclidienne quelconque et on note 0 son origine. Comme a est frontière, il est adhérent au complémentaire A^c , de sorte qu'il existe une suite de points $a_n \notin A$ qui converge vers a . Cette suite est bornée, donc a et les a_n sont dans une boule $B(0, R)$. Comme a_n n'est pas dans A , en vertu de 1.19, il existe un hyperplan H_n qui le sépare de A et on peut choisir un vecteur e_n orthogonal à H_n , unitaire, de sorte que H_n soit défini par une équation $(x|e_n) = \lambda_n$ avec $\lambda_n \in \mathbf{R}$. Quitte à changer e_n en $-e_n$, on peut supposer qu'on a, pour tout n , $(a_n|e_n) > \lambda_n$ et donc, pour tout $x \in A$, $(x|e_n) < \lambda_n$, en particulier $(a|e_n) < \lambda_n$.

En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point $h_n \in [a, a_n]$ tel que $(h_n|e_n) = \lambda_n$, c'est-à-dire $h_n \in H_n$ et le point h_n est dans la boule $B(0, R)$ comme a et a_n . On a donc $|\lambda_n| = |(h_n|e_n)| \leq \|h_n\| \|e_n\| \leq R$.

On a montré ainsi que la suite (λ_n) est bornée dans \mathbf{R} et donc aussi la suite (e_n, λ_n) de $E \times \mathbf{R}$. On peut en extraire une sous-suite (e_{n_i}, λ_{n_i}) qui converge vers (e, λ) avec e de norme 1 et $|\lambda| \leq R$. Comme on a, pour tout i , $(a_{n_i}|e_{n_i}) > \lambda_{n_i}$ on en déduit, à la limite, $(a|e) \geq \lambda$. Par ailleurs, on a,

pour tout $x \in A$, $(x|e_{n_i}) < \lambda_{n_i}$ donc, à la limite, $(x|e) \leq \lambda$. Cela vaut, en particulier, pour $x = a$, de sorte qu'on a finalement $(a|e) = \lambda$. On voit que l'hyperplan H défini par $(x|e) = \lambda$ est bien un hyperplan d'appui de A en a .

1.4 Points extrémaux

1.23 Définition. Soit A un convexe et a un point de A . On dit que a est **extrémal** si $a \in [xy]$ avec $x, y \in A$ implique $a = x$ ou $a = y$.

1.24 Exemple. Les points extrémaux d'un segment sont ses extrémités, ceux d'un polygone sont ses sommets, ceux d'un disque tous les points du cercle. Un demi-plan fermé n'a pas de points extrémaux (cf. 1.26).

On a la proposition suivante :

1.25 Proposition. Soit $a \in A$ un point extrémal du convexe A .

1) Si a est barycentre à coefficients positifs d'un nombre fini de points a_1, \dots, a_k de A , il est égal à l'un des a_i .

2) Si A est l'enveloppe convexe de B , a est dans B .

3) Si A est enveloppe convexe de B , si $a \in B$ et si a n'est pas barycentre des points de $B - \{a\}$, a est extrémal.

Démonstration. Seul le point 3) mérite l'attention. Si a n'est pas extrémal il est barycentre strict de $x, y \in A$ et on a donc $a = \lambda x + (1-\lambda)y$ avec $0 < \lambda < 1$. Mais on peut écrire x, y avec B : $x = \mu a + \sum_{i=1}^m \mu_i b_i$ et $y = \nu a + \sum_{j=1}^n \nu_j b_j$ avec les b_i dans B , $\mu + \sum_i \mu_i = \nu + \sum_j \nu_j = 1$ et $\mu, \nu < 1$. Mais $(1-\lambda\mu - (1-\lambda)\nu)a$ est combinaison des b_i à coefficients positifs et comme $1 - \lambda\mu - (1-\lambda)\nu$ est positif, c'est une contradiction.

Le théorème principal sur ces questions est dû à Krein-Milman :

1.26 Théorème. Si A est convexe, compact et non vide, A est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur la dimension n de E , le cas $n = 1$ étant évident (les convexes compacts sont les segments $[ab]$ et leurs points extrémaux sont a et b). En vertu de 1.17, on sait que A est l'enveloppe convexe de sa frontière. Soit x un point frontière. Il suffit de montrer qu'il est barycentre de points extrémaux. On considère un hyperplan d'appui H en a (voir 1.22) et le convexe $A \cap H$. En vertu de l'hypothèse de récurrence il est enveloppe convexe de ses points extrémaux. Il ne reste plus qu'à prouver le lemme suivant :

1.27 Lemme. Si un point est extrémal dans $A \cap H$ il l'est dans A .

Démonstration. (du lemme) On suppose que l'équation de H est $f(x) = \lambda$ et que les points de A vérifient $f(x) \leq \lambda$. Soit a extrémal dans $A \cap H$. Supposons qu'on a $a \in [x, y]$ avec $x, y \in A$ et $a \neq x, y$. Si, disons, x n'est pas dans H , on a $f(x) < \lambda$, $f(y) \leq \lambda$, donc $f(a) < \lambda$ et c'est absurde car a est dans H . Si x, y sont dans H , a est barycentre strict de deux points de $A \cap H$ et cela contredit le fait qu'il y est extrémal.

2 Dualité

Le but de ce paragraphe est d'expliquer la dualité, qui vaut notamment pour les polyèdres et permet de comprendre que ces objets vont (en général) deux par deux : le cube et l'octaèdre, l'icosaèdre et le dodécaèdre. On verra que cette notion est aussi importante pour établir une connexion entre les diverses définitions des polyèdres.

Dans ce qui suit, E est un espace vectoriel euclidien de dimension n , son origine est le vecteur nul 0 et on note $(x|y)$ le produit scalaire de x et y .

2.1 Définitions

Il y a deux notions que nous désignons sous les noms de dual et de polaire (même si ces appellations ne sont pas communément admises) :

2.1 Définition. Soit A une partie de E . On définit deux ensembles :

- 1) $A^* = \{x \in E \mid \forall a \in A, (a|x) \leq 1\}$, (A "étoile"), le **dual** de A .
- 2) $A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, (a|x) = 1\}$, (A "ortho"), la **polaire** de A .

2.2 Remarques. 1) Il est clair que les applications $A \mapsto A^*$ et $A \mapsto A^\perp$ sont décroissantes : si $A \subset B$ on a $A^* \supset B^*$ et $A^\perp \supset B^\perp$.

2) Pour tout A , A^* est une intersection de demi-espaces fermés de E , donc un convexe fermé de E .

3) Pour tout A , A^\perp est une intersection d'hyperplans affines, donc un sous-espace affine de E .

- 4) On a les formules $(A \cup B)^* = A^* \cap B^*$ et $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.

La proposition qui suit montre que l'on peut respectivement restreindre ces opérations aux convexes fermés contenant 0 et aux sous-espaces affines :

2.3 Proposition. 1) Si $\mathcal{E}(A)$ est l'enveloppe convexe de A , on a $A^* = \mathcal{E}(A)^* = (A \cup \{0\})^* = (\mathcal{E}(A \cup \{0\}))^* = (\overline{A})^*$.

- 2) Si $\langle A \rangle$ est le sous-espace affine engendré par A , on a $A^\perp = \langle A \rangle^\perp$.

Démonstration. 1) L'égalité $A^* = (A \cup \{0\})^*$ est évidente. Pour l'enveloppe convexe, il suffit de montrer $A^* \subset (\mathcal{E}(A))^*$. Mais, si x est dans A^* et a dans $\mathcal{E}(A)$, on peut écrire $a = \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i$ avec $a_i \in A$ et des coefficients λ_i positifs et de somme 1. On a alors $(x|a) = \sum_{i=1}^r \lambda_i (x|a_i) \leq \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$. Enfin, pour l'adhérence, on a $(\bar{A})^* \subset A^*$ par décroissance. Inversement, si x est dans A^* et a dans \bar{A} , a est limite d'une suite a_n de points de A et on a $(a|x) = \lim (a_n|x)$ par continuité du produit scalaire, d'où le résultat.

2) La démonstration est analogue en écrivant chaque $a \in \langle A \rangle$ comme combinaison linéaire d'éléments $a_i \in A$.

2.4 Exercice. Montrer que l'unique partie A qui vérifie $A^* = A$ est le disque unité fermé D .

2.2 Exemples

Le cercle est le cercle unité. On construit M' tel que $\overline{OM} \times \overline{OM'} = 1$ comme inverse de M par rapport au cercle, puis la droite rouge perpendiculaire à (OM) passant par M' . Cette droite est la polaire de M et le demi-plan limité par cette droite qui contient O est son dual.

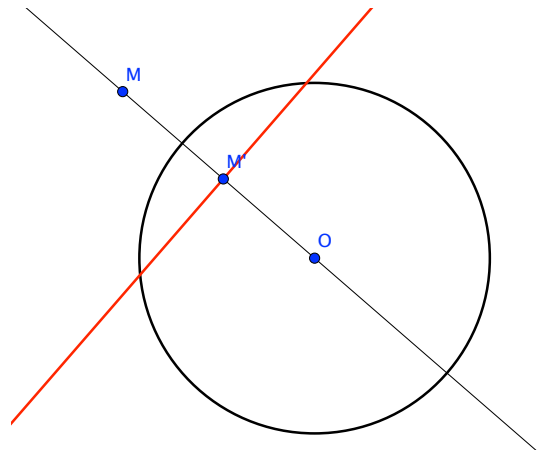


FIGURE 3 – Dual et polaire d'un point

2.3 Propriétés de l'opération *

2.5 Proposition. 1) On suppose A borné. Alors l'origine 0 est un point intérieur de A^* .

2) Inversement, on suppose 0 intérieur à A . Alors, A^* est borné.

Démonstration. 1) Supposons $A \subset B(0, R)$ avec $R > 0$ (boule fermée). Alors, la boule $B(0, 1/R)$ est contenue dans A^* en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(x|y) \leq \|x\| \|y\|$.

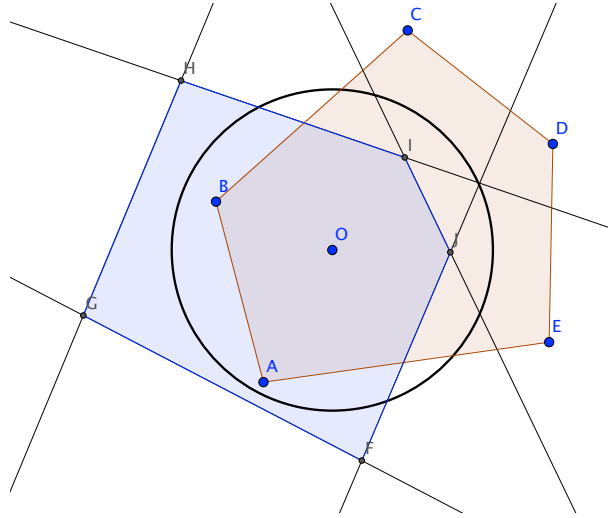


FIGURE 4 – Le dual du pentagone $ABCDE$ est le pentagone $FGHIJ$

2) On suppose $B(0, \epsilon) \subset A$ avec $\epsilon > 0$ (boule fermée). Alors on a $A^* \subset B(0, 1/\epsilon)$. On montre l'inclusion inverse sur les complémentaires : si x n'est pas dans cette boule on a $\|x\| > 1/\epsilon$. On considère $y := \epsilon \frac{x}{\|x\|}$ qui est de norme ϵ , donc dans A . On a $(x|y) > 1$, de sorte que x n'est pas dans A^* .

On peut maintenant prouver une propriété de bidualité :

2.6 Proposition. *Si A est un convexe fermé contenant 0 , on a $A^{**} = A$.*

Démonstration. Il est clair qu'on a $A \subset A^{**}$. Montrons l'inclusion inverse en passant aux complémentaires. Soit $x \notin A$. En vertu de Hahn-Banach (voir 1.19) on peut séparer x et A par un hyperplan H , que l'on peut écrire $H = \{y \in E \mid (y|b) \leq 1\}$ pour $b \in E$, $b \neq 0$. Comme 0 est dans A et qu'on a $(0|b) = 0 \leq 1$, on a $(a|b) \leq 1$ pour tout $a \in A$, ce qui signifie que b est dans A^* . Mais, comme H sépare A et x on a $(x|b) > 1$, donc x n'est pas dans A^{**} et on a le résultat.

2.7 Remarque. Plus généralement, si A est une partie quelconque, on a $A^{**} = \overline{\mathcal{E}(A \cup \{0\})}$. En effet, si on pose $B = \overline{\mathcal{E}(A \cup \{0\})}$, on a vu qu'on a $A^* = B^*$, donc aussi $A^{**} = B^{**}$, mais, comme B est convexe fermé et contient 0 , on a $B^{**} = B$ et la conclusion.

Le résultat principal sur la dualité est le suivant :

2.8 Théorème. *Soit \mathcal{C} l'ensemble des convexes fermés de E contenant 0 et soit \mathcal{K} l'ensemble des convexes compacts K de E tels que 0 soit intérieur à K . Alors, l'application $A \mapsto A^*$ est une involution de \mathcal{C} (resp. de \mathcal{K}).*

Démonstration. C'est une conséquence des propositions précédentes.

2.4 Étude de l'opération \perp

Pour un sous-espace vectoriel V de E on note⁴ V° son orthogonal : $V^\circ = \{x \in E \mid \forall y \in V, (x|y) = 0\}$. On a d'abord un lemme :

2.9 Lemme. *Soit F un sous-espace affine de E ne contenant pas 0 et soit \vec{F} le sous-espace vectoriel associé. Alors, $F \cap (\vec{F})^\circ$ est un singleton.*

Démonstration. Montrons d'abord que l'intersection n'est pas vide. On sait qu'on a $E = \vec{F} \oplus (\vec{F})^\circ$. Soit $b \in F$. On écrit $b = x + y$ avec $x \in \vec{F}$ et $y \in (\vec{F})^\circ$. Alors, $b - x = y$ est dans $F \cap (\vec{F})^\circ$. Si l'intersection contient x et x' , on a $x - x' \in \vec{F}$ par définition d'un sous-espace affine et $x - x' \in (\vec{F})^\circ$ par stabilité du sous-espace, donc $x = x'$ par la somme directe.

On peut maintenant décrire F^\perp :

2.10 Proposition. *Soit F un sous-espace affine de E ne contenant pas 0, soit a l'élément de $F \cap (\vec{F})^\circ$ donné par 2.9 et soit M le sous-espace vectoriel engendré par F . Alors, on a $F^\perp = \lambda a + M^\circ$ avec $\lambda = \frac{1}{\|a\|^2}$.*

Démonstration. 1) Montrons qu'on a $\lambda a + M^\circ \subset F^\perp$ et d'abord que λa est dans cet ensemble. En effet, si x est dans F on peut l'écrire $x = a + y$ avec $y \in \vec{F}$ et on a $(\lambda a | a + y) = \lambda \|a\|^2 + \lambda (a|y) = 1 + 0 = 1$. Ensuite, si $u := \lambda a + x$ est dans $\lambda a + M^\circ$ et y dans F , on a $(u|y) = (\lambda a|y) + (x|y) = 1 + 0$ car y est dans F donc dans M et x dans M° .

2) Inversement, si $\lambda a + x$ est dans F^\perp on a, pour tout y de F , $(\lambda a + x|y) = 1 = (\lambda a|y) + (x|y)$. Mais, comme λa est dans F^\perp par le point 1), le premier terme vaut 1, donc on a $(x|y) = 0$, de sorte que x est orthogonal à F , mais aussi, évidemment, à 0, donc à M .

2.11 Corollaire. *Soit F un sous-espace affine de E ne contenant pas 0 et $k \leq n - 1$ sa dimension. Alors, on a $\dim F^\perp = n - k - 1$.*

Démonstration. C'est clair car M est un sous-espace vectoriel de dimension $k + 1$ en vertu du lemme suivant :

2.12 Lemme. *Soit F un sous-espace affine de E ne contenant pas 0 et M le sous-espace vectoriel engendré par F . Alors tout repère affine de F est une base de M .*

4. Cette notation, qui peut prêter à confusion avec celle de l'intérieur, ne sera utilisée que dans ce paragraphe.

Démonstration. (du lemme) Soit a_0, a_1, \dots, a_k un repère affine de F . Le sous-espace vectoriel engendré par les a_i contient F car tout élément de F s'écrit $a_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i(a_i - a_0)$. Il contient donc aussi M , ce qui montre que les a_i engendrent M . Ils sont libres. Sinon, on a une relation $\sum_{i=0}^k \lambda_i a_i = 0$. Si $\sum_{i=0}^k \lambda_i$ est non nul, l'origine est barycentre des a_i donc est dans F , contrairement à l'hypothèse. Si $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$, la relation devient $\sum_{i=1}^k \lambda_i(a_i - a_0) = 0$. Mais, comme les a_i forment un repère de F , les $a_i - a_0$ sont libres et on a $\lambda_i = 0$ pour $i \geq 1$ donc aussi $\lambda_0 = 0$.

2.13 Corollaire. *Soit F un sous-espace affine de E ne contenant pas 0 . On a $F^{\perp\perp} = F$. L'application $F \mapsto F^\perp$ est une involution de l'ensemble des sous-espaces affines ne contenant pas 0 .*

Démonstration. On a $F \subset F^{\perp\perp}$ et on conclut parce que ces sous-espaces ont même dimension.

2.14 Corollaire. *Soient F, G, H des sous-espaces affines de E tels que $F = G \cap H$. Alors, F^\perp est le sous-espace affine engendré par G^\perp et H^\perp .*

Démonstration. Appelons L le sous-espace engendré par G^\perp et H^\perp . On a $L^\perp = (G^\perp \cup H^\perp)^\perp = G^{\perp\perp} \cap H^{\perp\perp}$ par 2.2.4, puis $L^\perp = G \cap H = F$ par 2.13. Mais alors, on a $F^\perp = L^{\perp\perp} = L$, toujours par 2.13.

3 Polyèdres : généralités

Dans ce paragraphe, E est un espace affine de dimension n .

3.1 Définition et théorème de structure

3.1.1 Un résultat préliminaire

3.1 Lemme. 1) *Un hyperplan de E est d'intérieur vide dans E .*

2) *Une réunion finie d'hyperplans de E est d'intérieur vide dans E .*

Démonstration. 1) Soit H un hyperplan. Si H contient la boule ouverte $B(a, R)$, pour tout vecteur e non nul, $a + \lambda e$ est dans H dès que λ vérifie $0 < |\lambda| < R$. Mais alors, $e = \frac{a + \lambda e - a}{\lambda}$ est dans \vec{H} qui est égal à \vec{E} tout entier et H n'est pas un hyperplan.

2) Cela résulte du lemme purement topologique suivant :

3.2 Lemme. *Soit X un espace topologique et soient F_1, \dots, F_n des fermés d'intérieur vide. Alors $F_1 \cup \dots \cup F_n$ est d'intérieur vide.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde en supposant que la propriété n'est pas vraie et on prend un contre-exemple avec n minimum, $n \geq 2$. Supposons que l'ouvert non vide U soit inclus dans la réunion. Alors, par minimalité, il n'est pas dans le fermé $F := F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$. Il en résulte que l'ouvert $U - F$ est non vide et inclus dans F_n , ce qui est absurde.

3.3 Remarque. L'exemple des rationnels et des irrationnels, d'intérieurs vides mais dont la réunion est \mathbf{R} , montre que la condition "fermés" est indispensable.

3.1.2 Définition des polyèdres convexes

3.4 Définition. On appelle **polyèdre convexe** de E une intersection finie P de demi-espaces fermés, qui est compacte et d'intérieur non vide.

3.5 Remarques. 0) Par abus de langage, nous dirons souvent "polyèdre" au lieu de "polyèdre convexe".

1) En dimension 1, un polyèdre est un segment non réduit à un point. En dimension 2 on parle de polygones. Souvent, en dimension ≥ 4 , on parle de polytopes.

2) La condition de compacité veille à ce que P ne soit pas trop gros (par exemple un demi-espace ou une bande) et celle sur l'intérieur assure qu'il n'est pas trop petit (non contenu dans un hyperplan).

3) Nous verrons plus loin que l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points non contenus dans un hyperplan est un polyèdre convexe.

3.6 Exemple. Nous donnerons plus loin des exemples de polyèdres. En voici déjà un, bien connu, le cube, ou l'hypercube si l'on est en dimension n . Il s'agit de l'ensemble $C_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \forall i = 1, \dots, n, |x_i| \leq 1\}$. Nous le reverrons au paragraphe 3.3.2.

3.1.3 Le théorème de structure

3.7 Proposition. Soit P un polyèdre. On écrit $P = \bigcap_{i=1}^r R_i$ où les R_i sont des demi-espaces fermés limités par les hyperplans H_i et on suppose cette écriture minimale. On a les propriétés suivantes :

1) Les R_i et les H_i sont bien déterminés par P .

2) Pour tout i , $F_i(P) := P \cap H_i$ est un polyèdre de H_i , appelé i -ième **face** de P .

3) On a $\text{Fr}(P) = \bigcup_{i=1}^r F_i(P)$.

Démonstration. 3) On a $P^\circ = \bigcap_i R_i^\circ$. Comme P est fermé, dire qu'un $x \in P$ est frontière c'est dire qu'il existe un i tel que $x \notin R_i^\circ$. Comme x est dans R_i , il est dans H_i , donc dans $F_i(P)$.

2) Il est clair que $F_i(P)$ est compact. On note que la trace d'un demi-espace R de frontière H sur un hyperplan L est soit un demi-espace de L (si L et H ne sont pas parallèles), soit \emptyset ou L (s'ils le sont). On a $P \cap H_i = \bigcap_{j \neq i} H_i \cap R_j$ et $P \cap H_i$, s'il est non vide, est une intersection finie de demi-espaces. Il reste à prouver que l'intérieur de $P \cap H_i$ est non vide⁵. Pour cela, on regarde $P' = \bigcap_{j \neq i} R_j$. L'hypothèse de minimalité montre que P' est strictement plus grand que P . On a $P \cap H_i = P' \cap H_i$ et il suffit de montrer que H_i rencontre P'° . Pour cela, on prend $a \in P^\circ \subset P'^\circ$ et $x \in P' - P$. Le point x n'est pas dans R_i , tandis que a est dans R_i° , donc le segment $[ax]$ coupe H_i en y par le théorème des valeurs intermédiaires. Le lemme adhérence-intérieur 1.10 montre que y est dans P'° , cqfd.

1) On suppose qu'on a deux écritures minimales $P = \bigcap_i R_i = \bigcap_j S_j$ avec des hyperplans H_i, K_j . On va montrer que H_i est l'un des K_j . On regarde $F_i(P)$, il est contenu dans l'union des K_j et dans H_i . On conclut par le lemme suivant :

3.8 Lemme. Soient K_1, \dots, K_s, H des hyperplans, avec H distinct de tous les K_j . La réunion $\bigcup_{i=1}^s K_j \cap H$ est d'intérieur vide dans H .

Démonstration. Chaque $K_j \cap H$ est un hyperplan de H (ou le vide) et on conclut par 3.1.

3.9 Définition. Soit P un polyèdre. On appelle **face** ou $n - 1$ -face de P un des ensembles $F_i(P)$ vus en 3.7. On définit ensuite par récurrence descendante une k -**face** de P comme une face d'une $k + 1$ -face. Les 1-faces de P sont ses **arêtes** et les 0-faces ses **sommets**.

Notons alors une conséquence immédiate de 3.8 :

3.10 Corollaire. Soit P un polyèdre convexe, H un hyperplan, A une partie de H contenue dans la frontière de P et d'intérieur non vide dans H . Alors H est un hyperplan frontière de P et A est contenue dans la face $P \cap H$.

Une partie F contenue dans $\text{Fr}(P)$, est une face de P si et seulement si le sous-espace affine $\langle F \rangle$ engendré par F est de dimension $n - 1$ et si l'on a $F = P \cap \langle F \rangle$.

3.11 Remarques. 1) Si F est une k -face d'une k' -face de P (avec $k < k'$), c'est une k -face de P .

5. Ce qui prouvera aussi que $P \cap H_i$ est non vide.

2) Une arête de P est un segment de droite.

3) Si F est une k -face de P , le sous-espace affine $\langle F \rangle$ engendré par F est de dimension k et on a $F = P \cap \langle F \rangle$, mais, attention, sauf dans le cas $k = n - 1$, cette condition ne suffit pas à assurer que F est une k -face (penser à un segment joignant deux points du bord d'une face de cube).

3.12 Proposition. *Soit P un polyèdre. Les k -faces sont en nombre fini et P est enveloppe convexe de ses k -faces, notamment de ses sommets.*

Démonstration. Les deux assertions sont claires par récurrence descendante, le cas $k = n - 1$ étant justiciable de 1.17.

3.13 Remarque. Il résulte de la proposition précédente que P a au moins $n + 1$ sommets (car l'enveloppe convexe de n points dans un espace affine de dimension n est contenue dans un hyperplan, cf. 1.12).

3.2 Dualité des polyèdres

3.2.1 Généralités

On choisit une origine dans E , qui devient donc un espace vectoriel (et on note 0 l'origine), et on le munit d'une structure euclidienne. On a le théorème suivant :

3.14 Théorème. *Soit \mathcal{P} l'ensemble des polyèdres P de E tels que 0 soit un point intérieur de P . Alors, l'application de dualité $P \mapsto P^*$ est une involution de \mathcal{P} .*

Démonstration. On sait que P^* est convexe, compact et contient 0 dans son intérieur (voir 2.5). Par ailleurs, comme P est l'enveloppe convexe de l'ensemble fini A_0 de ses sommets, on a $P^* = \mathcal{E}(A_0)^* = (A_0)^*$, donc P^* est intersection d'un ensemble fini de demi-plans (les duaux des sommets) et P^* est bien un polyèdre convexe ce qui montre que l'application $P \mapsto P^*$ va de \mathcal{P} dans lui-même. Comme on a $P^{**} = P$ en vertu de 2.6, c'est bien une involution.

3.15 Corollaire. *L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de E non contenus dans un hyperplan est un polyèdre.*

Démonstration. Soient $a_1, \dots, a_p \in E$ et $Q = \mathcal{E}(a_1, \dots, a_p)$. On sait que Q est compact (voir 1.16), d'intérieur non vide (car les a_i ne sont pas contenus dans un hyperplan, voir 1.12) et on peut supposer, quitte à changer d'origine, que 0 est dans Q° . On considère Q^* qui est un polyèdre (car Q est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini). Mais, comme Q est convexe fermé et contient 0 dans son intérieur, on a $Q^{**} = Q$, donc Q , dual du polyèdre Q^* , est lui-même un polyèdre.

3.16 Commentaire. On voit qu'il y a deux définitions équivalentes de polyèdre, l'une par l'extérieur, l'autre par l'intérieur :

- intersection finie de demi-espaces, compact et d'intérieur non vide,
- enveloppe convexe d'un ensemble fini de points non contenus dans un hyperplan.

3.2.2 Une application : le théorème de Carathéodory

Les résultats sur les polyèdres permettent de donner une preuve très simple du théorème 1.13. On raisonne par récurrence sur n . Le cas $n = 1$ est évident car tout point de $\mathcal{E}(A)$ est barycentre de $a_1, \dots, a_r \in A$ avec des coefficients $\lambda_i > 0$ et il est barycentre de $a = \text{Min}(a_i)$ et $b = \text{Max}(a_i)$.

Passons de $n - 1$ à n . Soit $x \in \mathcal{E}(A)$. Il est barycentre à coefficients > 0 de points a_1, \dots, a_r de A . On peut supposer que le sous-espace affine engendré par les a_i est égal à \mathbf{R}^n sinon on applique l'hypothèse de récurrence. Il résulte de 3.15 que $\mathcal{E}(a_1, \dots, a_r)$ est un polyèdre de \mathbf{R}^n , et, comme ses sommets sont extrémaux (voir ci-dessous 3.19), ils sont parmi les a_i . On est donc ramené à montrer l'assertion suivante :

3.17 Lemme. *Soit P un polyèdre de \mathbf{R}^n . Alors tout point x de P est barycentre d'au plus $n + 1$ de ses sommets.*

Démonstration. On raisonne encore par récurrence sur n . Le résultat est clair si x est un point frontière car alors il est dans une face et on applique l'hypothèse de récurrence. Si x est intérieur, on choisit un sommet s de P . La demi-droite $[sx)$ recoupe la frontière de P en b (car la trace d'une droite sur un polyèdre est un convexe compact de \mathbf{R} donc un segment). Mais alors, b est dans une $n - 1$ -face F (voir 3.7) donc barycentre de n sommets t_1, \dots, t_n de F et x est barycentre de s et des t_i .

3.2.3 La dualité des faces

Le théorème suivant est nettement plus ardu :

3.18 Théorème. *Soit P un polyèdre convexe contenant 0 dans son intérieur.*

- 1) *Si F est une k -face de P , $F^\perp \cap P^*$ est une $n - k - 1$ -face de P^* .*
- 2) *L'application $F \mapsto F^\perp \cap P^*$ est une bijection décroissante de l'ensemble des k -faces de P sur celui des $n - k - 1$ -faces de P^* , de réciproque $G \mapsto G^\perp \cap P$.*

Démonstration. La preuve de ce théorème nécessite plusieurs étapes dans lesquelles on utilisera les notations de 3.7 (les demi-espaces R_i , leurs frontières H_i , les faces $F_i(P) = P \cap H_i$, etc.).

3.19 Lemme. *Si P est un polyèdre convexe, ses sommets et ses points extrémaux coïncident.*

Démonstration. Notons A_0 l'ensemble des sommets de P . Comme on a $P = \mathcal{E}(A_0)$ (voir 3.12) on en déduit que les points extrémaux sont des sommets en vertu de 1.25.

Pour la réciproque on raisonne par récurrence sur n , le cas $n = 1$ étant clair (P est un segment). Pour passer de la dimension $n - 1$ à la dimension n on considère un sommet s de P . Ce sommet est sur une $n - 1$ -face $F_i = H_i \cap P$. Si s est barycentre non trivial de $x, y \in P$, x, y sont dans R_i et même dans H_i . En effet, si, disons, x est dans R_i^c , s aussi en vertu de 1.10 et c'est absurde. Les points x, y sont donc dans la face F_i et l'hypothèse de récurrence montre que c'est absurde, ce qui prouve que s est extrémal dans P .

Ce lemme donne déjà un peu du théorème 3.18 (le cas $k = 1$) :

3.20 Proposition. *Soit P un polyèdre convexe contenant 0 dans son intérieur, s_1, \dots, s_p ses sommets. Alors, les $n - 1$ -faces de P^* sont les $s_i^\perp \cap P^*$.*

Démonstration. On note $R_i^* = s_i^* = \{x \mid (x|s_i) \leq 1\}$ et $H_i^* = s_i^\perp = \{x \mid (x|s_i) = 1\}$. Comme on a $P = \mathcal{E}(s_1, \dots, s_p)$, on a $P^* = \{s_1, \dots, s_p\}^* = \bigcap_{i=1}^p R_i^*$. Si l'on prouve que cette écriture est minimale, les faces de P^* seront bien les $H_i^* \cap P^* = s_i^\perp \cap P^*$. Supposons que l'on ait $P^* = \bigcap_{i \neq j} R_i^*$ et notons $K = \mathcal{E}(0, s_1, \dots, \widehat{s}_j, \dots, s_p)$ (le chapeau signifie qu'on omet le sommet s_j). On a $K \subset P$ et, comme l'écriture de P^* ne fait pas intervenir R_j^* , $K^* = P^*$. Mais comme K est un convexe fermé contenant 0 on a $K = K^{**} = P^{**} = P$ (voir 2.6) et P est enveloppe convexe des sommets autres que s_j et de 0, ce qui contredit le fait que s_j est un point extrémal (voir 1.25).

3.21 Remarques. 1) La démonstration de 3.20 permet de montrer que l'application $s \mapsto s^\perp \cap P^*$ est une bijection des sommets de P sur les faces de P^* . En effet, la proposition donne la surjectivité et, pour l'injectivité, si l'on a $s_i^\perp \cap P^* = s_j^\perp \cap P^*$, comme les faces sont d'intérieur non vide dans les hyperplans $H_i = s_i^\perp$, on en déduit $s_i^\perp = s_j^\perp$ donc $s_i = s_j$ en vertu de 2.13.

2) On déduit aussi de 3.20 le cas $k = n - 1$. En effet, si G est une $n - 1$ -face de P^* on a $G = s^\perp \cap P^*$ et, comme G est d'intérieur non vide dans l'hyperplan s^\perp , $\langle G \rangle = s^\perp$, donc $G^\perp = \langle G \rangle^\perp = s^{\perp\perp} = \{s\}$. On voit que $G^\perp \cap P$ est un sommet de P . Mais si l'on applique cette propriété à $P = (P^*)^*$, on a prouvé l'assertion de 3.18 dans le cas $k = n - 1$!

Pour passer aux k intermédiaires il faut encore prouver quelques lemmes.

3.22 Lemme. *Soit P un polyèdre écrit sous forme minimale $P = \bigcap_{i=1}^r R_i$ où R_i est un demi-espace d'hyperplan H_i . Soit F une k -face de P . Il existe des indices i_1, \dots, i_{n-k} tels que l'on ait $\langle F \rangle = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_{n-k}}$.*

Démonstration. On raisonne par récurrence descendante sur k , le cas $k = n - 1$ étant clair. On écrit F comme face d'une $k + 1$ -face G de P et on a, par hypothèse de récurrence, $\langle G \rangle = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_{n-k-1}}$. On a donc $G = \langle G \rangle \cap P = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_{n-k-1}} \cap \bigcap_{j \neq i_p} R_j$ (voir la remarque 3.11.3) et on supprime de cette écriture les R_j superflus, laissant subsister l'ensemble d'indices J . Dans le sous-espace affine $\langle G \rangle$, l'intérieur G° est l'intersection $G \cap (\bigcap_{j \in J} R_j^\circ)$ de sorte que la frontière de G est l'ensemble $\bigcup_{j \in J} (G \cap H_j)$ et les $G \cap H_j$ sont les faces de G . En particulier F est l'un de ces ensembles et, comme F est d'intérieur non vide dans $\langle G \rangle \cap H_j$, on a bien l'égalité $\langle F \rangle = \langle G \rangle \cap H_j = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_{n-k-1}} \cap H_j$.

3.23 Lemme. *Soit P un polyèdre et X un convexe contenu dans $\text{Fr}(P)$. Alors, X est contenu dans une face de P .*

Démonstration. On considère le sous-espace $V := \langle X \rangle$. On sait que X est d'intérieur non vide dans V (voir 1.12). Comme X est contenu dans $\text{Fr}(P) = \bigcup_{i=1}^r F_i(P) = \bigcup_{i=1}^r P \cap H_i$, X est contenu dans la réunion des H_i , donc aussi dans la réunion $\bigcup_{i=1}^r (H_i \cap V)$. Les $H_i \cap V$ sont des sous-espaces affines de V et comme X est d'intérieur non vide dans V , l'un, disons $H_i \cap V$, est nécessairement égal à V (voir 3.8). On a donc $V \subset H_i$, donc $X \subset V \subset P \cap H_i = F_i(P)$.

3.24 Corollaire. *Soient P un polyèdre et F, G deux k -faces distinctes de P . Alors $F \cap G$ est contenu dans une $k - 1$ -face de P .*

Démonstration. L'assertion est évidente si $F \cap G$ est vide. Si on montre que $F \cap G$ est contenu dans la frontière de F dans $\langle F \rangle$, on aura gagné en vertu de 3.23. Pour cela, on écrit $\langle G \rangle = H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_{n-k}}$ grâce à 3.22. Comme on a $F = \langle F \rangle \cap P$ et $G = \langle G \rangle \cap P$ par 3.11.3, les sous-espaces $\langle F \rangle$ et $\langle G \rangle$ sont distincts de sorte qu'il existe i parmi i_1, \dots, i_{n-k} tel que $\langle F \rangle \not\subset H_i$. Mais alors, $\langle F \rangle \cap H_i$ est un hyperplan de $\langle F \rangle$ et comme on a $F \subset \langle F \rangle \cap R_i$, on voit que $F \cap H_i$ (donc aussi $F \cap G$) est contenu dans la frontière de F dans $\langle F \rangle$.

Une adaptation immédiate de la preuve précédente fournit la proposition plus précise suivante :

3.25 Proposition. *Soit P un polyèdre, F (resp. G) une k -face (resp. une l -face) de P . On suppose $k \leq l$, $F \not\subset G$ et $F \cap G \neq \emptyset$. Alors $F \cap G$ est une m -face de P , avec $0 \leq m \leq k - 1$.*

On peut maintenant finir de prouver le théorème 3.18.

1) Soit F une k -face de P . Il s'agit de montrer que $F^\perp \cap P^*$ est une $n - k - 1$ -face de P^* . On raisonne par récurrence, le cas $k = 0$ ayant été vu en 3.20.

On suppose donc $k \geq 1$ et on considère deux $k - 1$ -faces G et G' de F . Par hypothèse de récurrence, $G^\perp \cap P^*$ et $(G')^\perp \cap P^*$ sont deux $n - k$ -faces de P^* . Par décroissance de l'application \perp , on a $F^\perp \cap P^* \subset (G^\perp \cap P^*) \cap ((G')^\perp \cap P^*)$, donc (voir 3.24) $F^\perp \cap P^*$ est contenu dans une $n - k - 1$ -face Φ de P^* . Il suffit maintenant de prouver le lemme suivant :

3.26 Lemme. *On a l'inclusion $F^\perp \subset \langle \Phi \rangle$.*

Admettons un instant ce lemme. Comme on a $\dim \langle \Phi \rangle = n - k - 1$ (car Φ est une $n - k - 1$ -face) et $\dim F^\perp = n - k - 1$ (en vertu de 2.11), ces sous-espaces sont donc égaux. Mais, on a $\Phi = \langle \Phi \rangle \cap P^*$, donc $\Phi = F^\perp \cap P^*$ comme annoncé.

Il reste à prouver le lemme et pour cela il suffit de montrer qu'on a $F^\perp = \langle F^\perp \cap P^* \rangle$ (car on a $F^\perp \cap P^* \subset \Phi$). Il suffit même de prouver $F^\perp \subset \langle F^\perp \cap P^* \rangle$ car l'autre inclusion est évidente, donc de montrer que l'espace affine F^\perp est engendré par des points de P^* . Mais, d'après 3.22, on a $\langle F \rangle = H_{i_1} \cap \dots \cap H_{i_{n-k}}$ où les H_i sont des hyperplans limitant des faces de P . On en déduit $F^\perp = \langle F \rangle^\perp = \langle H_{i_1}^\perp, \dots, H_{i_{n-k}}^\perp \rangle$ par 2.14. Mais, on a vu que $H_i^\perp = (H_i \cap P)^\perp$ est un sommet s_i de P^* (voir 3.21.2). On voit que F^\perp est engendré par des points de P^* et on a gagné.

2) L'assertion sur la bijection est maintenant facile. Si F est une k -face de P , et si on pose $G = F^\perp \cap P^*$, il s'agit de montrer qu'on a $F = G^\perp \cap P$. Mais, comme F^\perp est de dimension $n - k - 1$, on a $\langle G \rangle = F^\perp$ et, par suite, $G^\perp = \langle G \rangle^\perp = F^{\perp\perp} = \langle F \rangle^{\perp\perp} = \langle F \rangle$ et $G^\perp \cap P = \langle F \rangle \cap P = F$.

3.2.4 Quelques conséquences

La dualité permet de prouver quelques propriétés bien naturelles. On se contente de les énoncer en dimensions 2 et 3 :

3.27 Corollaire. *On suppose $n = 2$. Soit P un polygone convexe. Toute arête contient deux sommets et tout sommet est commun à deux arêtes. Le polygone a le même nombre n de sommets et d'arêtes et on a $n \geq 3$.*

Démonstration. Le premier point est évident car une arête est un segment de droite donc a deux sommets et le second vient de la dualité. Pour le dénombrement, voir 3.29 ci-dessous. Le nombre de sommets est ≥ 3 car P est d'intérieur non vide et enveloppe convexe de ses sommets.

3.28 Corollaire. *On suppose $n = 3$. Soit P un polyèdre convexe.*

- 1) *Toute arête de P contient deux sommets et est commune à deux faces.*
- 2) *Toute face contient au moins trois sommets et trois arêtes et chaque sommet est commun à au moins trois faces et trois arêtes.*

Démonstration. 1) On a vu qu'une arête a deux sommets. En appliquant cette propriété au polyèdre dual on voit qu'une arête est commune à deux faces.

2) Une face est un polygone plan de sorte que la première assertion vient de 3.27. En appliquant cette propriété au dual on obtient l'assertion sur les sommets.

3.3 Exemples

3.3.1 Un lemme de dénombrement

Nous formalisons ici un procédé de dénombrement presque évident mais très efficace.

3.29 Lemme. (Fubini) *Soient X, Y deux ensembles finis et R une relation entre les éléments de X et Y , autrement dit une partie de $X \times Y$. On note respectivement p et q les projections de R sur X et Y . Les fibres de p et q sont les ensembles $p^{-1}(x)$ et $q^{-1}(y)$ pour $x \in X$ et $y \in Y$. On a la formule : $\sum_{x \in X} |p^{-1}(x)| = \sum_{y \in Y} |q^{-1}(y)|$. En particulier, si les fibres de p (resp. q) sont toutes de même cardinal m (resp. n) on a $m|X| = n|Y|$.*

3.30 Commentaire. L'appellation de Fubini pour ce lemme trivial est évidemment une plaisanterie. N'empêche que c'est la même idée que le vrai théorème de Fubini : il revient au même de sommer en piles ou en tranches. Ce lemme s'applique notamment avec la relation d'incidence entre sommets, arêtes et faces des polyèdres.

3.31 Exemple. Le lemme précédent permet, avec la formule d'Euler, de calculer les nombres de sommets d'arêtes et de faces d'un polyèdre archimédien, voir [7]. Soit par exemple un polyèdre P qui admet la propriété suivante : ses faces sont soit des triangles équilatéraux, soit des carrés, soit des pentagones réguliers et, en chaque sommet, il y a un triangle, deux carrés et un pentagone. Notons s le nombre de sommets de P , a son nombre d'arêtes, f_3, f_4, f_5 le nombre de ses faces à 3, 4, 5 sommets et $f = f_3 + f_4 + f_5$. Appliquant Fubini à l'incidence sommet-arêtes on a $4s = 2a$, donc $a = 2s$ (en chaque sommet il y a 4 faces et aussi 4 arêtes, une arête possède 2 sommets). En l'appliquant à l'incidence sommet-faces à k sommets on trouve les relations : $s = 3f_3$, $2s = 4f_4$ et $s = 5f_5$. Pour conclure, il faut connaître la formule d'Euler : $s - a + f = 2$ (voir [7]) qui donne $s - 2s + \frac{s}{3} + \frac{s}{2} + \frac{s}{5} = 2$, d'où $s = 60$, $a = 120$, $f_3 = 20$, $f_4 = 30$ et $f_5 = 12$.

3.3.2 Le cube (ou hypercube)

Rappelons qu'il s'agit de l'ensemble $C_n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \forall i = 1, \dots, n, |x_i| \leq 1\}$. C'est un polyèdre comme intersection des demi-espaces R_i donnés par $x_i \leq 1$ et des S_i donnés par $x_i \geq -1$. Si l'on pose $\|x\| = \sup_i |x_i|$, C_n est la boule unité fermée pour cette norme, donc compact et d'intérieur non vide, ce qui montre qu'on a bien affaire à un polyèdre.

3.32 Remarques. 1) En fait, si l'on n'a pas de structure euclidienne sur \mathbf{R}^n , C_n est un pavé plutôt qu'un cube. On obtient d'ailleurs d'autres pavés en considérant les $f(C_n)$ où f est une bijection affine de \mathbf{R}^n .

2) Pour avoir un cube véritable on se donne une structure euclidienne sur E et on utilise une base orthonormée pour identifier E et \mathbf{R}^n . L'ensemble C_n est alors un cube mais on en a d'autres en considérant les $s(C_n)$ où s est une similitude.

3) Le cube ordinaire correspond au cas $n = 3$. Dans le cas $n = 2$ on a un parallélogramme, voire un carré.

Faces, arêtes, sommets

On vérifie que les R_i et les S_i forment une écriture minimale de C_n et les faces sont donc les $C_n \cap H_i$ et les $C_n \cap K_i$ où H_i (resp. K_i) est l'hyperplan d'équation $x_i = 1$ (resp. $x_i = -1$). En identifiant \mathbf{R}^{n-1} et H_i par $(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$, on voit que $C_n \cap H_i$ est un cube de dimension $n - 1$ dans H_i . On détermine ainsi, par récurrence descendante, les p -faces de C_n . Pour cela, on se donne $n - p$ indices $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-p} \leq n$ et $n - p$ nombres ϵ_{i_k} correspondant à ces indices et égaux à ± 1 . On obtient alors la p -face suivante :

$$F_{i_1, \dots, i_{n-p}; \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-p}} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid x \in C_n \text{ et } \forall k = 1, \dots, n - p, x_{i_k} = \epsilon_{i_k}\}.$$

Cette p -face est un cube du sous-espace affine de dimension p défini par les équations $x_{i_k} = \epsilon_{i_k}$. Il y a $2^{n-p} \binom{n}{n-p} = 2^{n-p} \binom{n}{p}$ telles p -faces. En particulier, il y a $2n$ faces (de dimension $n - 1$), $n \times 2^{n-1}$ arêtes et 2^n sommets (qui sont les points $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ avec $\epsilon_i = \pm 1$). Dans le cas $n = 3$ on retrouve bien les nombres 6, 12, 8 attendus.

3.3.3 Le simplexe

Il s'agit du polyèdre le plus simple (au sens où il admet le nombre minimum de sommets possibles, à savoir $n + 1$), généralisation du triangle et du tétraèdre. Dans le cas général, il est commode de l'écrire dans un hyperplan

de \mathbf{R}^{n+1} . On considère donc l'hyperplan $H \subset \mathbf{R}^{n+1}$ défini comme l'ensemble des $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ vérifiant $\sum_{i=0}^n x_i = 1$ et on pose :

$$S_n = \{x \in H \mid \forall i = 0, 1, \dots, n, x_i \geq 0\}.$$

Alors S_n est un polyèdre de H appelé **simplexe**⁶ de \mathbf{R}^{n+1} . En effet, il est défini comme intersection des demi-espaces R_i d'équations $x_i \geq 0$, il est fermé et borné (car on a $0 \leq x_i \leq 1$ pour tout i) et il est d'intérieur non vide dans H , l'intérieur étant l'ensemble des points tels que l'on ait $x_i > 0$ pour tout i (par exemple $(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$ est un point intérieur).

Faces, arêtes, sommets

Il est clair que l'écriture $S_n = \bigcap_{i=0}^n (R_i \cap H)$ est minimale, de sorte que les faces de S_n sont les $F_j = \{x \mid x \in S_n \text{ et } x_j = 0\}$ et il y en a donc $n + 1$. Si l'on identifie l'hyperplan $x_j = 0$ avec \mathbf{R}^n de la manière évidente, on voit que F_j est le simplexe standard de \mathbf{R}^n . On en déduit, par récurrence, les p -faces de S_n : on se donne $n - p$ indices i_k avec $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{n-p} \leq n$ et on pose :

$$F_{i_1, \dots, i_{n-p}} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n x_i = 1, \forall i = 0, \dots, n, x_i \geq 0 \text{ et } x_{i_1} = \dots = x_{i_{n-p}} = 0\}.$$

Il y a donc $\binom{n+1}{n-p} = \binom{n+1}{p+1}$ p -faces, en particulier, $n+1$ faces ($p = n-1$), $\frac{n(n+1)}{2}$ arêtes ($p = 1$) et $n+1$ sommets ($p = 0$). On retrouve, dans le cas $n = 3$, les nombres correspondant au tétraèdre : 4 faces, 6 arêtes, 4 sommets. Les p -faces sont toutes des simplexes d'un espace de dimension p et les sommets sont les points de la base canonique de \mathbf{R}^{n+1} : $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$.

3.3.4 Le dual du cube

On sait que le cube C_n est l'enveloppe convexe de ses sommets qui sont les points $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ avec $\epsilon_i = \pm 1$. Le dual $K_n = C_n^*$ est donc aussi le dual de l'ensemble des sommets de C_n :

$$K_n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \forall \epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{1, -1\}^n, \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i \leq 1\}$$

et on sait⁷ qu'il s'agit d'un polyèdre en vertu de 3.14.

Faces, arêtes, sommets

6. Que l'on dit standard dans le cas où il est donné par les équations ci-dessus.

7. Le lecteur pourra le vérifier directement en introduisant la norme $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Le nombre de p -faces peut se calculer par application de 3.18, mais on peut aussi procéder directement. On considère, pour $\epsilon \in \{+1, -1\}^n$ le demi-espace $R_\epsilon = \{x \mid \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i \leq 1\}$. Le polyèdre K_n est l'intersection des R_ϵ et on vérifie sans peine que cette écriture est minimale. Les faces de K_n sont donc les ensembles $K_n \cap H_\epsilon$ où H_ϵ est l'hyperplan frontière de R_ϵ défini par l'équation $\sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i = 1$. On a la proposition suivante :

3.33 Proposition. *Pour tout $\epsilon \in \{+1, -1\}^n$, la face $H_\epsilon \cap K_n$ est un simplexe de H_ϵ .*

Démonstration. On considère l'involution linéaire u_ϵ de \mathbf{R}^n qui à (x_1, \dots, x_n) associe $(x_1 \epsilon_1, \dots, x_n \epsilon_n)$. Si H est l'hyperplan $\sum_{i=1}^n y_i = 1$, on a $u_\epsilon(H) = H_\epsilon$ et si S_{n-1} est le simplexe standard de \mathbf{R}^n , $S_{n-1} = \{x \mid x_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, on vérifie qu'on a $u_\epsilon(S_{n-1}) = H_\epsilon \cap K_n$. (Le seul point délicat est de montrer que, si x est dans $H_\epsilon \cap K_n$, $u_\epsilon^{-1}(x) = u_\epsilon(x)$ est dans S_{n-1} . Il est clair qu'on a $\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i = 1$ et il reste à voir que les $\epsilon_i x_i$ sont ≥ 0 . Mais on a $\sum_{i=1}^n \eta_i x_i \leq 1$ pour tous les $\eta_i = \pm 1$ possibles et, en prenant η_i du signe de x_i , on en déduit $\sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1$. Comme on a $\sum_{i=1}^n |x_i| \geq \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i = 1$, cela impose que tous les $\epsilon_i x_i$ soient ≥ 0 .)

Cette proposition permet de ramener la détermination des p -faces de K_n à celles des simplexes. On considère des indices i_k vérifiant les inégalités $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{p+1} \leq n$ et, pour chaque $k = 1, \dots, p+1$, un nombre $\epsilon_{i_k} = \pm 1$ et la p -face associée à cette donnée est :

$$F_{\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_{p+1}}} = \{x \mid x_i = 0 \text{ pour } i \neq i_k, x_{i_k} \epsilon_{i_k} \geq 0 \text{ et } \sum_{k=1}^{p+1} x_{i_k} \epsilon_{i_k} = 1\}.$$

On en déduit que le nombre de p -faces est $2^{p+1} \binom{n}{p+1}$. Pour $p = n-1$ on a 2^n faces, pour $p = 1$, $4 \binom{n}{2}$ arêtes et pour $p = 0$, $2n$ sommets. Plus généralement, si c_p est le nombre de p -faces du cube et k_p celui de son dual, on vérifie qu'on a $c_p = k_{n-p-1}$ comme annoncé par 3.18.

Dans le cas de la dimension 3, le dual du cube est l'octaèdre et il a 8 faces, 12 arêtes et 6 sommets.

Résumons les calculs précédents :

3.34 Proposition. *Les nombres de p -faces du cube, du simplexe et du dual du cube dans l'espace \mathbf{R}^n sont respectivement :*

$$c_p = 2^{n-p} \binom{n}{p}, \quad s_p = \binom{n+1}{p+1} \quad \text{et} \quad k_p = 2^{p+1} \binom{n}{p+1}.$$

3.35 Remarque. Sur les exemples précédents, on constate le phénomène suivant : si P est un polyèdre convexe de \mathbf{R}^n et si a_p est le nombre de ses p -faces ($p = 0, \dots, n - 1$), on a $\chi_n := \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p a_p = 1 + (-1)^{n+1}$ autrement dit, χ_n vaut 0 si n est pair et 2 si n est impair. Ce nombre est ce qu'on appelle la caractéristique d'Euler-Poincaré du polyèdre. Pour une preuve élémentaire de cette formule dans le cas $n = 3$, voir [7] Ch. 9.

3.36 Remarques. 1) Le lecteur peut à bon droit se demander ce qu'est le dual du simplexe. Pour le voir, on choisit une origine intérieure à S_n dans H et on munit H d'une structure euclidienne. Si F_0, \dots, F_n sont les faces de S_n , leur duals sont des points f_0, \dots, f_n et le dual S_n^* est l'enveloppe convexe des f_i . Comme c'est un polyèdre, cela montre que les f_i sont affinement indépendants. Il existe alors une bijection affine qui envoie les sommets s_0, \dots, s_n de S_n sur ceux de S_n^* , ce qui montre que S_n^* est un simplexe et qu'il est affinement équivalent à S_n .

2) Attention, en revanche, relativement à la structure euclidienne donnée, le dual de S_n n'est pas en général semblable à S_n , même en dimension 2. La figure ci-dessous montre un contre-exemple.

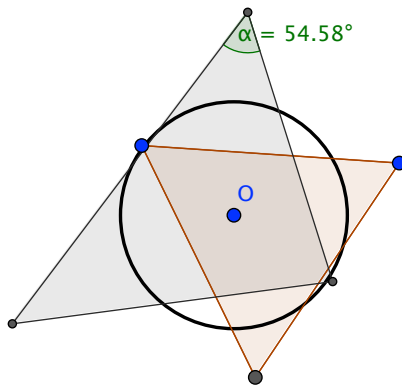


FIGURE 5 – Si le cercle unité n'est pas centré au centre d'un triangle équilatéral, son dual est un triangle non équilatéral

3.4 Un lemme de connexité

3.4.1 Définitions et résultats

L'objectif de ce paragraphe est de montrer un résultat intuitivement évident, mais pas si facile à établir, à savoir qu'on peut, dans un polyèdre

convexe, disons en dimension 3, passer d'une face à une autre par l'intermédiaire de faces contigües, c'est-à-dire admettant une arête commune. Ce résultat sera utile dans la suite, notamment pour la classification des polyèdres réguliers, voir 7.13. On commence par une définition :

3.37 Définition. Soit P un polyèdre convexe d'un espace affine de dimension n et soient F, G deux k -faces de P .

1) On dit que F et G sont **contigües** si $F \cap G$ est une $k - 1$ -face et si F et G sont contenues dans une $k + 1$ -face. Dans le cas $k = n - 1$ (resp. $k = 0$), seule la première (resp. la deuxième) condition subsiste.

2) On dit que F et G sont **liées** s'il existe un entier $r \geq 0$ et des k -faces F_0, \dots, F_r telles que $F = F_0$, $G = F_r$ et que F_i et F_{i+1} soient contigües pour $i = 0, \dots, r - 1$.

3.38 Remarque. Les exemples de deux arêtes parallèles d'un cube ou de deux arêtes d'un octaèdre, issues d'un même sommet mais non successives, montrent la nécessité des deux conditions de la définition précédente.

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant :

3.39 Théorème. Soit P un polyèdre convexe d'un espace affine de dimension n et soient F, G deux k -faces de P . Alors, F et G sont liées.

La démonstration se fait par récurrence sur n . Appelons (H_n) l'hypothèse : deux k -faces d'un polyèdres d'un espace affine de dimension $\leq n$ sont liées. Le cas $n = 2$ (un polygone) est géométriquement évident, mais en voici une preuve formelle :

3.40 Lemme. Soit P un polygone convexe du plan. Alors deux arêtes (resp. deux sommets) sont liées au sens de 3.37.

Démonstration. Traitons d'abord le cas de deux arêtes. Si elles se coupent, c'est en un sommet en vertu de 3.25 et elles sont contigües donc liées. On obtient ainsi une partition de la frontière de P en des réunions d'arêtes liées, donc en des ensembles fermés. Si toutes ne sont pas liées, cela contredit le fait que $\text{Fr}(P)$ est connexe (car homéomorphe au cercle, voir 1.18).

Si maintenant on considère deux sommets, chacun est dans une arête et ces arêtes sont liées, donc aussi leurs sommets.

On suppose désormais l'hypothèse vraie jusqu'au rang $n - 1$.

3.4.2 Le polyèdre section

3.41 Proposition. *Soit P un polyèdre convexe d'un espace affine de dimension n et soit H un hyperplan contenant un point $a \in P^\circ$.*

1) *Alors, $P \cap H$ est un polyèdre convexe de H .*

2) *Soient R^+ et R^- les demi-espaces ouverts limités par H . On suppose que R^+ contient un unique sommet s de P et que H n'en contient pas. Si k est un entier compris entre 1 et $n - 1$, les $k - 1$ -faces de $P \cap H$ sont les traces sur H des k -faces de P contenant s et deux k -faces de P contenant s sont contiguës (resp. liées) dans P si et seulement si leurs traces sur H le sont dans $P \cap H$.*

Démonstration. 1) Si P est l'intersection des demi-espaces R_i de frontières H_i , $P \cap H$ est l'intersection des $R_i \cap H$. Comme on a $H \neq H_i$ puisque H contient un point intérieur de P , ces intersections sont des demi-espaces de H ou sont égales à H si H est parallèle⁸ à H_i . Comme il est clair que $P \cap H$ est compact et qu'il contient le point a intérieur (au sens de H), c'est bien un polyèdre convexe.

2) Si H_j est un hyperplan frontière de P qui ne contient pas s , le demi-espace $R_j \cap H$ est superflu dans l'écriture de $P \cap H$. En effet, sinon $H_j \cap P \cap H$ serait une face de $P \cap H$, donc non vide. Or, comme les sommets de P autres que s sont dans R^- et que la face $P \cap H_j$ est enveloppe convexe de certains de ces sommets, elle est entièrement dans R^- donc ne rencontre pas H . Inversement, si H_i est un hyperplan frontière de P qui contient s , il rencontre H (car il contient d'autres sommets de P qui sont de l'autre côté de H). Si x est un point de P , intérieur à la face $P \cap H_i$ et situé dans R^- , le segment $[sx]$ coupe H en un point qui est intérieur à $P \cap H_i \cap H$ dans H . Cela montre que $P \cap H \cap H_i$ est une face de $P \cap H$ en vertu de 3.10.

On a donc montré que les $n - 2$ -faces de $P \cap H$ sont exactement les traces sur H des $n - 1$ -faces de P contenant s . On prouve l'assertion analogue pour les k -faces par récurrence descendante sur k . Si F est une k -face de $P \cap H$, elle est de la forme $\widehat{F} \cap H$ où \widehat{F} est une $k + 1$ -face de P . On applique alors au polyèdre \widehat{F} le résultat précédent : toute face de F (donc $k - 1$ -face de $P \cap H$) est trace sur H d'une face de \widehat{F} (donc d'une k -face de P).

Les assertions sur la contiguïté et la liaison sont alors immédiates.

3.42 Corollaire. *Soit P un polyèdre convexe et F, G deux k -faces distinctes qui se rencontrent. Alors F et G sont liées.*

⁸. Et H n'est pas parallèle à tous les H_i : il y a au plus deux faces parallèles dans un polyèdre convexe !

Démonstration. En effet, l'intersection de F et G est une m -face avec $m < k$ (cf. 3.25) donc contient un sommet s . On peut alors, en vertu de Hahn-Banach 1.19, séparer s de l'enveloppe convexe des autres sommets de P par un hyperplan H , on applique l'hypothèse (H_{n-1}) au polyèdre section $P \cap H$ et on conclut par 3.41.

3.4.3 La fin de la preuve

On montre d'abord que les $n - 1$ -faces de P sont liées. Pour une face F , on considère la réunion des faces liées à F . En vertu de 3.42, on obtient ainsi une partition en fermés de $\text{Fr}(P)$. Mais on a vu en 1.18 que cette frontière est connexe, ce qui montre qu'il n'y a qu'une seule classe.

On passe ensuite aux k -faces. Si F, G sont deux k -faces, elles sont dans deux $n - 1$ -faces \widehat{F} et \widehat{G} lesquelles sont liées par une chaîne de $n - 1$ -faces $V_0 = \widehat{F}, V_1, \dots, V_n = \widehat{G}$. On choisit dans chaque intersection $V_i \cap V_{i+1}$ une k -face F_i . L'hypothèse de récurrence (H_{n-1}) montre que F_i et F_{i+1} sont liées dans V_{i+1} donc dans P . Par transitivité on en déduit que F et G sont liées.

4 Polyèdres réguliers

4.1 Le groupe d'un polyèdre

4.1.1 Polyèdres et transformations affines

On commence par un lemme général :

4.1 Lemme. *Soient E, F deux espaces affines réels de dimension n et soit $g : E \rightarrow F$ une application affine bijective. Si P est un polyèdre convexe de E , $g(P)$ est un polyèdre convexe de F et les p -faces de $g(P)$ sont exactement les images des p -faces de P par g .*

Démonstration. Comme g transforme demi-espace en demi-espace et est un homéomorphisme, il est clair que $g(P)$ est un polyèdre. Si $P = \bigcap_{i=1}^m R_i$ est une écriture minimale de P comme intersection de demi-espaces R_i de frontières H_i , $g(P) = \bigcap_{i=1}^m g(R_i)$ est une écriture minimale de $g(P)$ comme on le voit en appliquant g^{-1} . On en déduit que les $n - 1$ -faces de $g(P)$ sont les $g(P) \cap g(H_i) = g(P \cap H_i)$, donc les images des $n - 1$ -faces de P . Le reste suit par récurrence⁹.

9. Car on a pris soin d'énoncer le résultat avec E, F distincts !

4.1.2 Le groupe d'un polyèdre

On suppose que E est un espace affine **euclidien** de dimension n . On note $\text{Is}(E)$ (resp. $\text{Is}^+(E)$) le groupe des isométries affines (resp. des isométries affines positives, ou déplacements) de E .

4.2 Définition. Soit P un polyèdre. On pose $G(P) = \{g \in \text{Is}(E) \mid g(P) = P\}$ et on note $G^+(P)$ le sous-groupe analogue de $\text{Is}^+(E)$.

Il est clair que $G(P)$ et $G^+(P)$ sont des sous-groupes de $\text{Is}(E)$. Les remarques suivantes sont essentielles :

4.3 Remarques. 1) Comme P est compact et g une isométrie, il revient au même d'imposer $g(P) \subset P$ ou $g(P) = P$ (voir ci-dessous exercice 4.4). Attention, si P n'est pas compact ou si g n'est pas une isométrie la propriété n'est plus valable (penser à une demi-droite avec une translation ou à un disque avec une homothétie de rapport < 1).

2) En vertu de 4.1, g permute les faces, arêtes, sommets de P . Si S est l'ensemble (fini) des sommets de P , on obtient ainsi un homomorphisme $\varphi : G(P) \rightarrow \mathfrak{S}(S)$ et, comme S contient $n+1$ points affinement indépendants en vertu de 1.12, cet homomorphisme est injectif. On voit que le groupe $G(P)$ est **fini**.

3) Soit o l'isobarycentre des sommets de P . Comme $G(P)$ permute S , il fixe o . Autrement dit, si on vectorialise E en prenant o comme origine, les transformations de $G(P)$ sont dans le groupe orthogonal $O(E)$. (En particulier $G(P)$ ne contient pas de translation.) Il est clair que o est un point de P (car P est convexe). Mieux, le point o est intérieur à P . En effet, sinon, o est dans la frontière de P , donc dans une face, donc dans un hyperplan H_i . On peut numéroter les sommets s_1, \dots, s_N de P de telle sorte que s_1, \dots, s_R (avec $R < N$) soient dans H_i et que les autres s_{R+1}, \dots, s_N soient dans R_i° . Mais alors, par associativité, o est barycentre de $s := \frac{1}{R} \sum_{i=1}^R s_i$ (qui est dans H_i) et de $t := \frac{1}{N-R} \sum_{i=R+1}^N s_i$ (qui est dans R_i°). Il résulte de 1.10 que o est dans R_i° , ce qui est absurde.

4) Si on note S_p la réunion des p -faces de P , on a $G(P) = G(S_p)$ (cela vient du lemme 4.1 et du fait que P est l'enveloppe convexe de S_p). On peut donc, pour définir $G(P)$, le voir comme un polyèdre plein, ou comme la surface réunion de ses faces, le squelette de ses arêtes, voire un nombre fini de points.

5) On peut aussi définir le groupe des transformations affines conservant P : $G_a(P) = \{g \in \text{Aff}(E) \mid g(P) = P\}$ où $\text{Aff}(E)$ est le groupe affine de E . On montre comme ci-dessus que $G_a(P)$ est fini et fixe l'isobarycentre o des sommets de P en lequel on vectorialise.

En fait, ce groupe est celui des isométries de P relatives à une forme euclidienne bien choisie. En effet, si q est une forme euclidienne quelconque et si on pose, pour $x \in E$, $Q(x) = \sum_{u \in G_a(P)} q(u(x))$, on vérifie aussitôt que Q est une forme euclidienne invariante par $G_a(P)$.

Attention cependant, si l'on considère la forme euclidienne comme donnée d'avance, le groupe $G_a(P)$ est en général strictement plus grand que $G(P)$. Ainsi, dans le plan, si P est un triangle quelconque (scalène), $G(P)$ est réduit à l'identité, alors que $G_a(P)$ est de cardinal 6 (car on peut envoyer P sur un triangle équilatéral par une application affine).

4.4 Exercice. Soit X un espace métrique compact et $g : X \rightarrow X$ une isométrie. Montrer qu'on a $g(X) = X$. (Sinon, $Y := g(X)$ est un fermé de X distinct de X . On considère $a \in X - Y$, on pose $\epsilon = d(a, Y)$ qui est un nombre > 0 . Alors la suite des $a_n = g^n(a)$ est dans Y et les distances mutuelles de ces points sont $\geq \epsilon$ ce qui contredit Bolzano-Weierstrass.)

4.2 Définition des polyèdres réguliers

4.2.1 La définition

L'idée qui préside à cette définition de régularité est la suivante : un polyèdre régulier doit être partout "pareil", avoir les mêmes faces, les mêmes arêtes, les mêmes sommets. La formalisation de cette idée est bien entendu la transitivité de son groupe d'isométries : il doit y avoir une isométrie qui échange deux faces quelconques, deux arêtes, ou deux sommets. Évidemment, il y a une contrainte dans tout cela : si une arête est incluse dans une face, elle ne peut s'envoyer que sur une arête de la face image. On formalise cette contrainte avec la notion de drapeau :

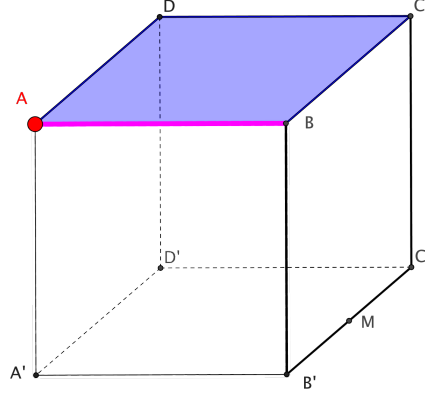
4.5 Définition. Soit P un polyèdre convexe. On appelle **drapeau** de P une suite $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1}$ où F_p est une p -face de P . On note \mathcal{D}_P l'ensemble des drapeaux de P .

Bien entendu, l'ensemble des drapeaux est fini et $G(P)$ opère sur cet ensemble, précisément :

4.6 Proposition. Le groupe $G(P)$ opère simplement sur l'ensemble \mathcal{D}_P , i.e. si $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1}$ est un drapeau et si $g \in G(P)$ est tel que $g(F_i) = F_i$ pour tout i , on a $g = \text{Id}$.

Démonstration. On sait que g fixe l'isobarycentre o des sommets de P , qui est un point intérieur de P . On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 1$,

La figure ci-contre montre un drapeau du cube C_3 : le sommet A , inclus dans l'arête $[AB]$, elle-même incluse dans la face $ABCD$.



P est un segment dont u fixe une extrémité (un sommet) et le milieu o , qui forment un repère affine de la droite, de sorte que g est l'identité. Passons de $n - 1$ à n . Si g laisse invariant le drapeau $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-1}$ de P , g laisse stable l'hyperplan H_{n-1} de la face F_{n-1} (car elle est d'intérieur non vide dans H_{n-1}). Cette face est un polyèdre de H_{n-1} et $g|_{H_{n-1}}$ en laisse invariant le drapeau $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{n-2}$. Par l'hypothèse de récurrence, g est l'identité sur H_{n-1} et comme il fixe o , c'est l'identité en vertu du lemme suivant :

4.7 Lemme. Soient E un espace vectoriel E et H un hyperplan affine ne passant pas par 0 . Alors H contient une base de E .

Démonstration. On prend une base e_1, \dots, e_n avec e_1 n'appartenant pas à l'hyperplan vectoriel parallèle à H et on modifie les autres e_i par $\lambda_i e_i$.

4.8 Corollaire. On a $|G(P)| \leq |\mathcal{D}_P|$.

On peut alors définir :

4.9 Proposition-Définition. Soit P un polyèdre convexe. On dit que P est **régulier** si $G(P)$ opère **transitivement** sur \mathcal{D}_P . On a alors $|G(P)| = |\mathcal{D}_P|$. En particulier, le groupe $G(P)$ opère **transitivement** sur l'ensemble des k -faces de P pour $k = 0, 1, \dots, n - 1$.

4.10 Remarques. 1) Si P est un polyèdre régulier, l'isobarycentre o de ses sommets¹⁰ est l'unique point fixe du groupe $G(P)$. En effet, si ω est un autre point fixe, la droite $(O\omega)$ est fixe point par point par les éléments de $G(P)$. Comme o est un point intérieur de P , cette droite coupe la frontière de P en

10. On appellera ce point le **centre** de P .

un point a . Ce point est intérieur à une k -face ($k = 0, \dots, n-1$). Mais alors, cette k -face est invariante par $G(P)$, ce qui contredit la transitivité de $G(P)$.

2) La transitivité du groupe sur les sommets et le fait que o soit fixe montre que les sommets d'un polyèdre régulier sont sur une même sphère de centre o dite **circonscrite** à P .

4.11 Proposition. *Si P est un polyèdre régulier, ses k -faces sont des polyèdres réguliers.*

Démonstration. Soit F une k -face de P et soient $\delta_1 := F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{k-1}$ et $\delta_2 := G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{k-1}$ deux drapeaux de F . Comme chaque k -face (avec $k < n-1$) est, par définition, contenue dans une $k+1$ -face, on peut compléter ces drapeaux en des drapeaux de P : $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{k-1} \subset F \subset \dots \subset F_{n-1}$ et $G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_{k-1} \subset F \subset \dots \subset F_{n-1}$. Comme P est régulier il existe $g \in G(P)$ qui envoie le premier drapeau de P sur le second. Mais alors g stabilise F , donc est dans $G(F)$, et envoie δ_1 sur δ_2 .

4.2.2 Dualité

4.12 Proposition. *Si P est un polyèdre régulier et si l'origine est l'isobarycentre de ses sommets, P^* est un polyèdre régulier et on a $G(P) = G(P^*)$.*

Démonstration. Montrons d'abord l'inclusion $G(P) \subset G(P^*)$. Soit $g \in G(P)$ et $x \in P^*$. En vertu de 4.4, il suffit de voir que $g(x) \in P^*$. Soit $a \in P$, on calcule $(g(x)|a) = (x|g^{-1}(a))$ et comme g^{-1} est dans $G(P)$ donc $g^{-1}(a)$ dans P , on a $(g(x)|a) \leq 1$ comme souhaité.

Le théorème 3.18 montre que l'application $F \mapsto F^\perp \cap P^*$ est une bijection décroissante des k -faces de P sur les $n-k-1$ -faces de P^* . Cette bijection induit donc une bijection sur les drapeaux et on a $|\mathcal{D}(P)| = |\mathcal{D}(P^*)|$. Comme P est régulier, on a donc $|G(P^*)| \leq |\mathcal{D}(P^*)| = |\mathcal{D}(P)| = |G(P)| \leq |G(P^*)|$ et toutes les inégalités sont donc des égalités, ce qui montre que P^* est régulier et que les groupes $G(P)$ et $G(P^*)$ sont égaux.

4.13 Remarques. 1) Comme le centre de P est fixe par $G(P) = G(P^*)$ et que le centre de P^* est le seul point fixe par $G(P^*)$, on voit que P et P^* ont même centre.

2) Si P n'est pas régulier, ou si o n'est pas le centre de P , on n'a pas en général l'égalité $G(P) = G(P^*)$. On s'en convaincra en regardant, dans les deux sens, l'exemple d'un triangle équilatéral qui n'est pas centré à l'origine de E .

4.2.3 Dualité et centres des faces

Dans le cas des polyèdres réguliers, il y a une façon très simple de comprendre le polyèdre dual :

4.14 Proposition. *Soit P un polyèdre régulier. Le polyèdre dual est semblable au polyèdre Q enveloppe convexe des centres des faces de P .*

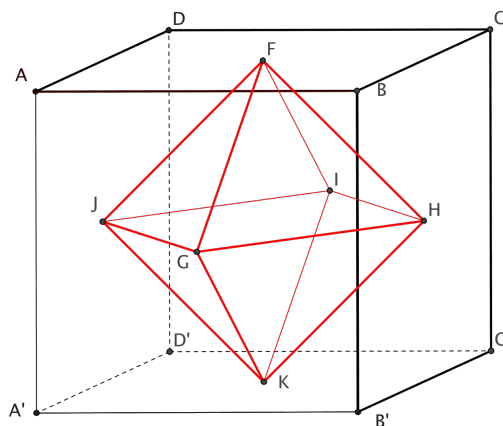


FIGURE 6 – Le cube et l’octaèdre

Démonstration. Notons o le centre de P que l’on prend comme origine de l’espace vectoriel. Soit F une face de P , s_1, \dots, s_p ses sommets et c son centre (qui est l’isobarycentre des s_i). On a le lemme suivant :

- 4.15 Lemme.** 1) *Les produits scalaires $(c|s_i)$ sont indépendants de i .*
 2) *La droite (oc) est perpendiculaire à l’hyperplan de F .*
 3) *On a $(c|s_i) = \|c\|^2 > 0$.*

Démonstration. 1) Soient s_i, s_j deux sommets de F . Comme $G(P)$ est transitif sur les drapeaux de P , il existe $g \in G(P)$ qui laisse F stable et envoie s_i sur s_j . Mais alors, g permute les s_k donc fixe c et, comme g fixe aussi o , on a le résultat.

2) Le point 1) implique qu’on a $(c|s_i - s_j) = 0$ pour tous i, j , ce qui montre que (oc) est orthogonal à l’hyperplan de F .

3) Enfin, le point 3) vient de la relation de Chasles : $s_i = c + (s_i - c)$ et du point 2). La norme de c est non nulle car o est un point intérieur de P tandis que c est frontière.

Revenons à la proposition. Comme le groupe $G(P)$ est transitif sur les faces F_k , il l’est aussi sur leurs centres c_k , de sorte que les vecteurs c_k ont

tous même norme $\lambda > 0$. On considère alors le polyèdre Q , enveloppe convexe des c_k et son homothétique $Q' := \frac{1}{\lambda^2}Q$, enveloppe convexe des $c'_k := c_k/\lambda^2$. Le lemme montre qu'on a $(c'_k|s) = 1$ si s est un sommet de F_k et que cette équation est celle de l'hyperplan de F_k . Comme on a $(c'_k|o) = 0$, on a $(c'_k|s) < 1$ pour les autres sommets de P , ce qui prouve que Q' est contenu dans P^* . De plus, on sait que les sommets de P^* sont exactement les $F_k^\perp \cap P^*$ (voir 3.18) et comme c'_k est dans cet ensemble, c'est le sommet en question. Cela montre que Q' est égal à P^* .

4.3 Exemples de polyèdres réguliers

Dans ce paragraphe, l'espace E est l'espace vectoriel \mathbf{R}^n , muni du produit scalaire canonique pour lequel la base e_1, \dots, e_n avec $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ est orthonormée.

4.3.1 Le cube et son dual

4.16 Proposition. *Le cube C_n et son dual K_n sont des polyèdres réguliers de \mathbf{R}^n . Leurs groupes sont tous deux égaux au groupe W_n des permutations et changements de signe c'est-à-dire le groupe des isométries vectorielles $u_{\sigma, \epsilon}$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\epsilon \in \{-1, +1\}^n$, définies par $u_{\sigma, \epsilon}(e_i) = \epsilon_i e_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, \dots, n$. On a $|W_n| = 2^n \times n!$.*

Démonstration. En vertu de 4.12, il suffit de traiter le cas du cube. Il est clair que $u_{\sigma, \epsilon}$ est dans le groupe orthogonal $O(E)$ et un calcul immédiat montre que ces éléments forment un groupe W_n avec les formules $u_{\sigma, \epsilon} \circ u_{\tau, \eta} = u_{\sigma\tau, \zeta}$ avec $\zeta_i = \eta_i \epsilon_{\tau(i)}$. De plus, W_n est contenu dans $G(C_n)$. En effet, comme les sommets de C_n sont les points $\pm e_i$, W_n les permute et comme C_n est l'enveloppe convexe de ses sommets, on a la conclusion. La régularité vient alors du lemme suivant :

4.17 Lemme. *On a $|\mathcal{D}(C_n)| = 2^n \times n!$.*

Démonstration. Le lemme se démontre par récurrence : on a $|\mathcal{D}(C_n)| = |\mathcal{D}(C_{n-1})| \times f_n$ où f_n est le nombre de faces de C_n , c'est-à-dire $2n$.

4.18 Remarques. 1) La formule de composition montre que le groupe W_n est isomorphe à un produit semi-direct $W_n = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$.

2) Le groupe $G^+(C_n)$ est le groupe W_n^+ formé des isométries positives de W_n , c'est-à-dire des $u_{\sigma, \epsilon}$ qui vérifient $\det u_{\sigma, \epsilon} = \epsilon(\sigma) \epsilon_1 \cdots \epsilon_n = 1$ (où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ).

3) On a $-\text{Id} \in W_n$ mais $-\text{Id}$ n'est dans W_n^+ que si n est pair. Il en résulte que si n est impair le groupe W_n est produit direct $W_n = W_n^+ \times \{\text{Id}, -\text{Id}\}$. (En dimension paire on a seulement un produit semi-direct $W_n = W_n^+ \rtimes \{\pm 1\}$).

4.3.2 Le simplexe

4.19 Proposition. *Le simplexe S_n est un polyèdre régulier de l'hyperplan $H \subset \mathbf{R}^{n+1}$ défini par $\sum_{i=0}^n x_i = 1$. Son groupe est isomorphe au groupe des matrices de permutations de \mathbf{R}^{n+1} , lui-même isomorphe à \mathfrak{S}_{n+1} .*

Démonstration. On définit, pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$, $u_\sigma \in O(\mathbf{R}^{n+1})$ par $u_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Vu la description des sommets de S_n comme les vecteurs de la base canonique et de S_n comme enveloppe convexe de ses sommets, il est clair que la restriction de u_σ à H est dans $G(S_n)$ et que cette opération de restriction est injective. De plus, on a $|\mathcal{D}(S_n)| = (n+1)!$, comme on le voit par une récurrence immédiate (le simplexe S_n admet $n+1$ faces qui sont des simplexes S_{n-1}). Il en résulte que S_n est régulier.

4.20 Remarques. 1) Le groupe $G^+(S_n)$ est isomorphe au groupe alterné \mathfrak{A}_{n+1} .
2) Le groupe du simplexe ne contient pas la symétrie centrale $-\text{Id}_H$.

4.3.3 Le groupe des rotations du cube en dimension 3

4.21 Proposition. *On suppose $n = 3$. Le groupe $G^+(C_3)$ est isomorphe à \mathfrak{S}_4 , le groupe $G(C_3)$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4 \times \{\pm 1\}$.*

Démonstration. La seconde assertion découle de la première et de 4.18.3. On sait que $G := G(C_3)$ est de cardinal 48 et $G^+(C_3) = W_3^+$ de cardinal 24. Le principe de la démonstration est de faire opérer G sur un ensemble à 4 éléments. Pour cela, on considère les 8 sommets du cube, les quatre de la face "avant" : $a = (1, 1, 1)$, $b = (1, -1, 1)$, $c = (1, -1, -1)$ $d = (1, 1, -1)$ et leurs opposés $a' = (-1, -1, -1)$, $b' = (-1, 1, -1)$, $c' = (-1, 1, 1)$ et $d' = (-1, -1, 1)$. Les segments joignant ces sommets ont trois longueurs possibles : 2 s'il s'agit d'arêtes (deux coefficients égaux), $2\sqrt{2}$ s'il s'agit de diagonales de faces (un seul coefficient égal) et $2\sqrt{3}$ s'il s'agit de grandes diagonales (aucun coefficient égal). Il y a quatre grandes diagonales : $[aa']$, $[bb']$, $[cc']$, $[dd']$. Comme G opère sur les sommets et conserve les longueurs, il opère sur les grandes diagonales et on obtient ainsi un homomorphisme $\varphi : G \rightarrow \mathfrak{S}_4$. Le lemme crucial est le suivant :

4.22 Lemme. *Le noyau de φ est égal à $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$.*

Ce lemme implique le résultat car la restriction de φ à $G^+(C_3)$ est alors injective, donc un isomorphisme pour une raison de cardinal.

Démonstration. (du lemme) Il est clair que Id et $-\text{Id}$ sont dans $\text{Ker } \varphi$. Inversement, soit $u \in \text{Ker } \varphi$, $u \neq \text{Id}$. Comme il laisse invariantes les grandes diagonales, il envoie chaque sommet sur lui-même ou son opposé. Comme u n'est pas l'identité, il ne fixe pas tous les sommets. Supposons par exemple qu'on a $u(a) = a'$. Alors, comme $ab = 2$ tandis que $a'b = 2\sqrt{2}$, et que u est une isométrie, on a $u(b) = b'$ et le même argument donne $u(d) = d'$. Mais alors, comme o, a, b, d est un repère affine de \mathbf{R}^3 et que u et $-\text{Id}$ coïncident sur ce repère, on a $u = -\text{Id}$.

4.23 Remarque. Il est facile de décrire les 24 éléments de $G^+(C_3)$. Il y a 6 éléments d'ordre 4, les rotations de $\pm\frac{\pi}{2}$ autour des axes de coordonnées, qui correspondent aux permutations circulaires de \mathfrak{S}_4 , 8 éléments d'ordre 3, rotations de $\pm\frac{2\pi}{3}$ autour des grandes diagonales, qui correspondent aux 3-cycles et 9 éléments d'ordre 2 : les trois rotations de π autour des axes de coordonnées, qui correspondent aux doubles transpositions et enfin les 6 rotations de π autour des droites joignant les milieux de deux arêtes opposées qui correspondent aux transpositions.

5 Le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers

L'espace $V = \mathbf{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel pour lequel la base canonique $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ est orthonormée. On note o l'origine, $o = (0, 0, 0)$. On définit et on étudie dans ce paragraphe les deux polyèdres réguliers de \mathbf{R}^3 les plus compliqués (mais aussi les plus beaux) : le dodécaèdre et l'icosaèdre.

5.1 Construction du dodécaèdre régulier

Pour comprendre comment est fabriqué un dodécaèdre régulier, le mieux est d'en réaliser une maquette, en carton ou avec le matériel polydron. Le dodécaèdre¹¹ est un polyèdre dont les faces sont des pentagones réguliers tous identiques, assemblés par trois en chaque sommet, voir fig.7. Il possède 12 faces, 30 arêtes et 20 sommets. Quand on a réalisé cet objet, on voit apparaître dedans un cube¹² et inversement, on peut reconstituer le dodécaèdre à partir du cube standard C_3 de \mathbf{R}^3 en installant des toits à quatre pentes sur

11. On oubliera souvent de dire : régulier.

12. Et même cinq cubes !

chacune de ses faces. Bien entendu, il faut que les pans des toits se recollent de manière à donner des pentagones réguliers, voir fig.7.

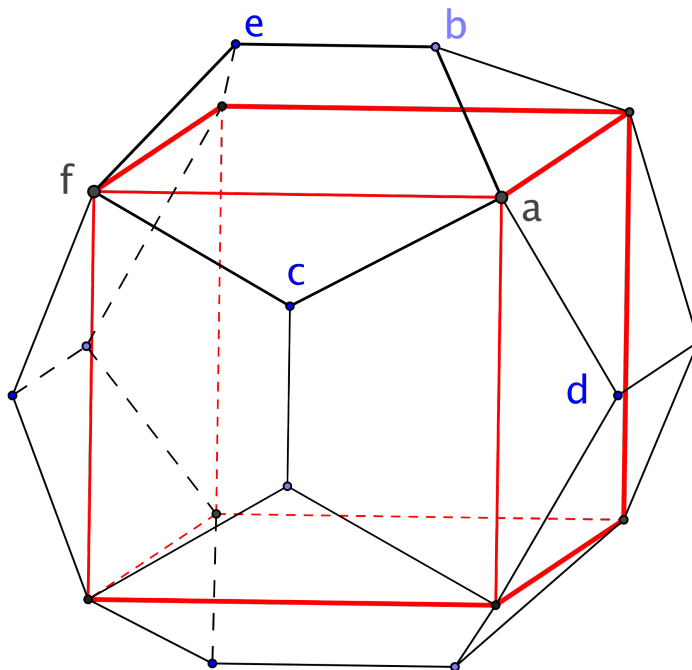


FIGURE 7 – Le dodécaèdre comme toiture du cube

5.1.1 Rappels

On rappelle que, dans un pentagone régulier, le rapport entre la diagonale et le côté est le nombre d'or, $\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \sim 1,618$ et qu'on a les formules : $\tau^2 = \tau + 1$, $\tau^{-1} = \tau - 1$, $\tau^{-2} = 2 - \tau$.

5.1.2 Construction

On a vu que les sommets de C_3 sont les huit points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. On appelle C leur ensemble. On cherche ensuite, par exemple, les points b, e formant l'arête du toit située au-dessus de la face du haut voir fig.7. On

suppose que cette arête est parallèle à l'axe des y et dans le plan vertical $x = 0$, de sorte que les points b, e sont de la forme $(0, y, z)$, et qu'elle est symétrique par rapport au plan $y = 0$, donc que b, e ont des ordonnées opposées. Comme l'arête du cube, qui devient la diagonale des faces pentagonales du dodécaèdre, est de longueur 2, l'arête du dodécaèdre, qui est un côté du pentagone, est de longueur $2\tau^{-1}$ et on en déduit que l'ordonnée de b vaut τ^{-1} et que celle de e vaut $-\tau^{-1}$. Pour trouver la cote de b et e , il suffit d'écrire que la longueur ab avec $a = (1, 1, 1)$ vaut aussi $2\tau^{-1}$. On a ainsi l'équation $1 + (1 - \tau^{-1})^2 + (z - 1)^2 = 4\tau^{-2}$ qui donne $(z - 1)^2 = 2 - \tau = \tau^{-2}$ donc $z - 1 = \tau^{-1}$ et $z = \tau$ et on a trouvé les points $b = (0, \tau^{-1}, \tau)$ et $e = (0, -\tau^{-1}, \tau)$. Pour trouver les autres on peut procéder de la même manière avec chaque face ou faire agir le groupe W_3 du cube, formé des permutations et changements de signes, en se limitant aux permutations **paires**¹³. On obtient en définitive l'ensemble S formé des 20 points ci-dessous (le signe \pm prend toutes les valeurs possibles) :

$$S = \{ (\pm 1, \pm 1, \pm 1) ; (0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau) ; (\pm \tau, 0, \pm \tau^{-1}) ; (\pm \tau^{-1}, \pm \tau, 0) \}$$

5.1 Définition. *On définit le dodécaèdre D comme l'enveloppe convexe de l'ensemble S ci-dessus.*

5.2 Le groupe de l'ensemble S

On désigne par G le sous-groupe de $O(V)$ formé des éléments g qui laissent invariant S , c'est-à-dire vérifient $g(S) = S$ et on pose $G^+ = G \cap O^+(V)$. On a le théorème suivant :

5.2 Théorème. *Le groupe G est de cardinal 120 et le groupe G^+ est de cardinal 60.*

Démonstration. Notons déjà qu'il suffit de prouver l'assertion concernant G . En effet, il est clair que $-\text{Id} \in G - G^+$, de sorte que l'application $\det : G \rightarrow \{\pm 1\}$ est surjective et que son noyau G^+ est de cardinal moitié.

Rappelons qu'on a posé $C = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ (les points du cube). On note $T = \{(0, \pm \tau^{-1}, \pm \tau) ; (\pm \tau, 0, \pm \tau^{-1}) ; (\pm \tau^{-1}, \pm \tau, 0)\}$ (les points des toits). On a posé $a = (1, 1, 1)$ et $b = (0, \tau^{-1}, \tau)$.

1) On a $\|(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\|^2 = 3$ et, pour les points de T , le carré de la norme vaut $\tau^2 + \tau^{-2}$ qui est aussi égal à 3 en vertu des formules $\tau^2 = \tau + 1$

13. Les permutations impaires transforment le dodécaèdre en un autre (penser par exemple à la transposition qui échange les vecteurs de base e_1, e_2 , donc l'axe des x et celui des y : l'arête $[be]$ devient parallèle à (ox) et n'est plus dans le dodécaèdre).

et $\tau^{-2} = 2 - \tau$. Les points de S sont donc tous sur la sphère de centre o et de rayon $\sqrt{3}$.

Comme S est stable par la symétrie de centre o il est clair que l'isobarycentre de S est o .

2) Soit σ une permutation **paire** de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et soit $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ un élément de $\{1, -1\}^3$. On considère la transformation $u_{\sigma, \epsilon}$ définie par la formule $u_{\sigma, \epsilon}(e_i) = \epsilon_i e_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, 2, 3$ (voir 4.16).

Soit H l'ensemble des transformations $u_{\sigma, \epsilon}$ pour $\sigma \in \mathfrak{A}_3$ et $\epsilon \in \{1, -1\}^3$. L'image par un élément de H de la base canonique étant une base ortho-normée, on a $H \subset O(V)$.

On a $|H| = |\mathfrak{A}_3| \times |\{1, -1\}^3| = 3 \times 8 = 24$. Il est clair que les transformés par H des points de C sont dans C et c'est vrai aussi pour T car les éléments de H correspondent à des permutations paires. Il en résulte que H est contenu dans G et qu'il opère sur S avec les orbites C et T .

3) Il s'agit maintenant de montrer qu'on peut passer d'une orbite à l'autre, par exemple de a à b , par un élément de G . Pour cela on considère $m = a + b = (1, \tau, \tau^2)$. Comme a et b ont même norme, le vecteur $a - b$ est orthogonal à $a + b$. Si v_m est le demi-tour d'axe (om) on a donc $v_m(a + b) = a + b$ et $v_m(a - b) = b - a$, donc $v_m(a) = b$.

Il reste à voir que v_m est dans G c'est-à-dire laisse stable S . On note successivement :

a) que $(1, 1, -1)$ et $(\tau, 0, -\tau^{-1})$ sont orthogonaux à m donc sont transformés en leurs opposés par v_m ,

b) que les couples ci-dessous ont leurs milieux sur (om) , donc s'échangent par v_m :

$$(\tau, 0, \tau^{-1}) + (-1, 1, 1) = (\tau - 1, 1, 1 + \tau^{-1}) = (\tau^{-1}, 1, \tau) = \tau^{-1}m,$$

$$(\tau^{-1}, \tau, 0) + (0, -\tau^{-1}, \tau) = (\tau^{-1}, 1, \tau) = \tau^{-1}m,$$

$$(1, -1, 1) + (-\tau^{-1}, \tau, 0) = (2 - \tau, \tau^{-1}, 1) = (\tau^{-2}, \tau^{-1}, 1) = \tau^{-2}m,$$

c) enfin, que les points restants sont les opposés de points traités ci-dessus, donc, comme v_m est linéaire et S stable par $-\text{Id}_V$, ces points sont envoyés dans S par v_m .

4) Il résulte du point 3) que G est transitif sur S . En effet, l'orbite du point a contient C (à cause des éléments de H), elle contient $b = v_m(a)$ donc aussi T (à cause des éléments de H).

On sait que le cardinal d'un groupe est multiple du cardinal de ses orbites dans une opération quelconque. Il en résulte que $|G|$ est multiple de $|S| = 20$. On sait aussi qu'il est multiple du cardinal de ses sous-groupes donc de $|H| = 24$. En définitive $|G|$ est multiple du *ppcm* de 20 et 24, donc de 120.

5) On étudie maintenant le stabilisateur G_a de a . On a le lemme suivant :

5.3 Lemme. *On pose $c = (\tau, 0, \tau^{-1})$ et $d = (\tau^{-1}, \tau, 0)$. Soient L (resp. E^+ , resp. E^-) le plan (resp. le demi-espace) d'équation $x + y + z = \sqrt{5}$ (resp. $x + y + z > \sqrt{5}$, resp. $x + y + z < \sqrt{5}$). Alors les points b, c, d sont dans L , le point a dans E^+ et tous les autres points de S sont dans E^- .*

Démonstration. On a $\tau + \tau^{-1} = 2\tau - 1 = \sqrt{5}$ de sorte que les trois points b, c, d sont dans le plan L . Pour a on a $x + y + z = 3 > \sqrt{5}$. Pour les autres points de C , on a $x + y + z = \pm 1$ ou -3 . Enfin, pour les points de T autres que b, c, d , on a $x + y + z < \tau + \tau^{-1} = \sqrt{5}$ car l'un au moins des nombres τ ou τ^{-1} est muni du signe moins.

Soit alors $g \in G_a$. Comme le plan L est orthogonal à a il est stable par g et donc aussi $S \cap L = \{b, c, d\}$. Il en résulte que g permute les points b, c, d . On en déduit un homomorphisme $\varphi : G_a \rightarrow \mathfrak{S}(S \cap L) \simeq \mathfrak{S}_3$. De plus, cet homomorphisme est injectif car si $g \in G_a$ fixe b, c, d c'est l'identité. En effet, on vérifie aussitôt que o, b, c, d est un repère affine de V (par exemple parce que le déterminant des trois vecteurs b, c, d est non nul).

On voit qu'on a $|G_a| \leq 6$. Comme G est transitif sur S la relation entre cardinaux du groupe, de l'orbite et du stabilisateur donne $|G| = 20 \times |G_a| \leq 120$ et, avec 4) on a $|G| = 120$.

5.3 Faces, arêtes, sommets et drapeaux du dodécaèdre

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant :

5.4 Théorème. *Soit D le dodécaèdre défini en 5.1. Le cardinal de l'ensemble \mathcal{D}_D des drapeaux de D est égal à 120. Le polyèdre D est régulier.*

La démonstration comprend plusieurs étapes qui concernent successivement les sommets, les faces, les arêtes et les drapeaux de D .

5.3.1 Les sommets

5.5 Proposition. *Les sommets de D sont les points de S . Le polyèdre D a donc 20 sommets.*

Démonstration. En vertu de 3.19 il suffit de montrer que les points de S sont exactement les points extrémaux de D . Comme on a $D = \mathcal{E}(S)$, les points extrémaux sont dans S en vertu de 1.25.2. Par ailleurs, comme le groupe G est transitif sur S , il suffit de montrer que a est extrémal. Pour cela, en vertu de 1.25.3, il suffit de montrer qu'il n'est pas barycentre des points de $S - \{a\}$. Mais on en vu en 5.3 que $S - \{a\}$ est contenu dans le demi-espace

fermé défini par $x + y + z \leq \sqrt{5}$ (donc aussi tout barycentre de ces points) et que a n'est pas dans ce demi-espace.

5.6 Corollaire. *On a $G(D) = G$ et $G^+(D) = G^+$.*

Démonstration. Cela résulte de 4.3.4. On notera que, si f est une isométrie affine qui conserve S , elle fixe l'isobarycentre de S donc l'origine o et c'est donc une isométrie vectorielle donc un élément de G .

5.7 Remarque. Ce corollaire assure que l'assertion de régularité de 5.4 découle de celle sur le cardinal des drapeaux.

5.3.2 Les faces

On reprend les notations précédentes concernant a, b, c (voir 5.3) et on appelle Q le plan (abc) .

5.8 Lemme. *L'ensemble $Q \cap D$ est une face de D .*

Démonstration. On note d'abord qu'une équation de Q est $x + \tau z = \tau^2$. On note ensuite que Q contient deux autres points de S , $e := (0, -\tau^{-1}, \tau)$ et $f := (1, -1, 1)$. On note ensuite que tous les autres points de S sont dans le demi-espace $x + \tau z < \tau^2$. C'est clair pour les points de C . Pour les autres, les points avec $z = \tau$ sont b et e et sinon on a $\tau z \leq \tau\tau^{-1} = 1$ et $x \leq \tau$, donc $x + \tau z \leq \tau + 1 = \tau^2$ et l'égalité n'a lieu que si $z = \tau^{-1}$ et $x = \tau$ donc pour le point c .

Les points de $Q \cap D$ sont des points frontières de D (car tous les points vérifiant $x + \tau z > \tau^2$ sont extérieurs à D) et $Q \cap D$ est d'intérieur non vide dans D car elle contient les trois points non alignés a, b, c . Il résulte alors de 3.10 que $D \cap Q$ est une face de D .

5.9 Lemme. *Les faces de D contenant a sont les traces sur D des plans (abc) , (abd) et (acd) .*

Démonstration. Soit u l'élément de $H \subset G$ défini par $u(x, y, z) = (z, x, y)$. On a $u(a) = a$, $u(b) = c$, $u(c) = d$, $u(d) = b$. Comme $D \cap (abc)$ est une face, et que u est dans $G = G(D)$, les autres intersections sont aussi des faces. Il s'agit de montrer que ce sont les seules. Pour cela on considère le plan $L = (bcd)$ d'équation $x + y + z = \sqrt{5}$ et le polygone $P = D \cap L$.

Montrons d'abord que P est l'enveloppe convexe de b, c, d , autrement dit le triangle bcd . Il est clair qu'on a $\mathcal{E}(b, c, d) \subset P$. Inversement, il suffit de montrer, par exemple, que P est tout entier dans le demi-plan de L limité par (bc) et contenant d . Mais c'est clair car D est tout entier dans le demi-espace limité par (abc) et contenant d .

Montrons ensuite que tous les points du triangle P non situés sur les côtés sont intérieurs à D . On considère pour cela le point $\omega = (\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3})$, isobarycentre des points b, c, d . Il est situé sur le segment $[oa]$, donc intérieur à D en vertu de 4.3 et 1.10. Mais alors, comme les points des côtés de bcd sont dans D , il résulte encore de 1.10 que les points intérieurs de P sont dans D° .

Soit F une face de D contenant a . Comme c'est un polygone convexe plan, dont les sommets sont parmi les sommets de D , elle contient au moins trois sommets de D , donc a et deux autres, disons s, t et les droites (as) et (at) sont distinctes (car les sommets sont extrémaux). Or, on a vu que les sommets de D autres que a sont tous dans le demi-espace $x + y + z \leq \sqrt{5}$, de sorte que les droites (as) et (at) coupent L en u et v qui sont dans $L \cap D = P$. Mais comme F est contenue dans la frontière de D , le segment $[uv]$ est dans un côté du triangle bcd par la remarque ci-dessus. Mais alors, la face F est contenue dans l'un des trois plans (abc) , (abd) , (acd) et on a le résultat.

5.3.3 Arêtes et drapeaux

5.10 Lemme. 1) Les arêtes contenant a sont $[ab]$, $[ac]$ et $[ad]$.

2) Les drapeaux contenant a sont $\{a\}$, $[ab]$, $(abc) \cap D$; $\{a\}$, $[ac]$, $(abc) \cap D$; $\{a\}$, $[ab]$, $(abd) \cap D$; $\{a\}$, $[ad]$, $(abd) \cap D$; $\{a\}$, $[ac]$, $(acd) \cap D$; $\{a\}$, $[ad]$, $(acd) \cap D$.

Démonstration. 1) En vertu de 3.28 il y a au moins trois arêtes en a et chacune est commune à deux faces. Comme on a déterminé les faces contenant a , les arêtes sont leurs intersections, donc $[ab]$, $[ac]$ et $[ad]$.

2) L'assertion sur les drapeaux est claire.

5.11 Corollaire. On a $|\mathcal{D}| = 120$.

Démonstration. En effet, comme $G(D)$ est transitif sur les sommets, le nombre de drapeaux est le même en chaque sommet et il est donc de $6 \times 20 = 120$.

5.12 Corollaire. Le dodécaèdre D a 12 faces¹⁴ qui sont des pentagones réguliers, 30 arêtes et 20 sommets.

Démonstration. L'assertion sur les sommets a été vue. Le fait que les faces soient des pentagones découle de la preuve de 5.8. On a vu en effet que les sommets de D contenus dans $Q \cap D$ sont a, b, c, e, f . Les assertions sur les arêtes et les faces découlent alors de 5.10 et 5.9, en utilisant 3.29 ("Fubini") si l'on veut être précis.

14. D'où son nom.

5.13 Corollaire. *Le groupe G^+ est transitif sur les sommets de D , sur ses arêtes et sur ses faces.*

Démonstration. On sait que G est transitif sur les sommets, les arêtes et les faces, voir 4.9. Pour montrer qu'il en est de même de G^+ il suffit de montrer que le stabilisateur de chaque type de k -face contient une isométrie négative et, vu la transitivité de G , il suffit même de le faire pour l'une d'entre elles. Mais il est clair que la réflexion de plan yo z qui à (x, y, z) associe $(-x, y, z)$ fixe b et e donc aussi l'arête $[be]$ et que la réflexion de plan xo z qui à (x, y, z) associe $(x, -y, z)$ fixe c , échange a et f ainsi que b et e donc laisse stable la face $abcef$. De plus, ces transformations sont dans H , donc dans G .

5.14 Corollaire. *Le groupe $G^+ = G^+(D)$ contient, outre l'identité, 15 éléments d'ordre 2, 20 d'ordre 3 et 24 d'ordre 5. Les éléments de $G^- := G - G^+$ sont les opposés de ceux de G^+ , donc d'ordre 2 (16 = 1+15 éléments), ou 6 (20) ou 10 (24).*

Démonstration. Comme G^+ est d'ordre 60, il suffit de montrer qu'on a au moins les nombres annoncés.

Commençons par les éléments d'ordre 3. On a vu en 5.9 que la transformation $u : (x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ est dans G . Sa matrice est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc de

déterminant 1 (ce qui montre que u est une rotation, donc est dans G^+) et de trace nulle. Il est clair que u est un élément d'ordre 3 (ce qu'on retrouve en notant que la trace d'une rotation d'angle θ vaut $1 + 2 \cos \theta$, ici $\theta = \pm 2\pi/3$). On a $u(a) = a$ ce qui montre que l'axe de u est (oa) et il y a une autre rotation d'axe (oa) qui est u^2 . Comme le groupe G est transitif sur les 20 sommets, et qu'il y a 10 axes joignant o aux sommets (car ils sont opposés deux à deux), les transformations gug^{-1} et gu^2g^{-1} pour $g \in G$ donnent 20 rotations d'ordre 3.

Passons maintenant aux éléments d'ordre 2. On a repéré dans la preuve de 5.2 le demi-tour v_m avec $m = a + b$. Son axe passe par o et par le milieu de l'arête $[ab]$. Comme il y a 30 arêtes, que le groupe G est transitif sur ces arêtes et qu'elles sont deux à deux symétriques par rapport à o , les éléments gv_mg^{-1} donnent 15 demi-tours, donc 15 éléments d'ordre 2.

Il reste les éléments d'ordre 5. Considérons la face $D \cap (abc)$. Un calcul facile permet de distinguer ses arêtes, qui sont de longueur $2\tau^{-1}$ de ses diagonales, qui sont de longueur 2, et d'écrire le pentagone F dans l'ordre $abefc$. Il existe alors un élément w de G qui envoie le drapeau $(F, [ab], a)$ sur $(F, [be], b)$. Comme l'image de l'arête $[ab]$ est l'arête $[be]$ et que a s'envoie sur b , c'est que b a pour image e . L'image de l'arête $[ca]$ est une arête contenant

b , donc c s'envoie sur a ou e et ce ne peut plus être que a . Enfin, $[be]$ s'envoie sur $[ef]$ et e sur f . L'isométrie w agit donc sur l'ensemble $\{a, b, c, e, f\}$ comme le cycle d'ordre 5 $(abefc)$. Comme elle fixe o , on a $w^5 = \text{Id}$, donc w est de déterminant 1 et c'est un élément d'ordre 5 de G^+ . Il y a 4 tels éléments dans le stabilisateur de la face $F : w, w^2, w^3, w^4$ et, comme D a 12 faces, opposées deux à deux et que le groupe agit transitivement sur les faces, on obtient ainsi 24 éléments d'ordre 5, ce qui conclut l'énumération.

5.15 Commentaire. Si l'on dispose d'une maquette du dodécaèdre on se convainc facilement de la nature des éléments de G^+ qui sont les rotations conservant D . Il y a 24 rotations d'ordre 5 d'axes passant par les centres de deux faces opposées (il y a 6 axes et 4 rotations par axe d'angles $\pm \frac{2\pi}{5}$ et $\pm \frac{4\pi}{5}$). Il y a ensuite 20 rotations d'ordre 3 d'axes passant par deux sommets opposés (il y a 10 axes et 2 rotations par axe d'angles $\pm \frac{2\pi}{3}$). Il y a enfin les 15 demi-tours autour des droites joignant les milieux de deux arêtes opposées.

5.4 L'icosaèdre

L'autre grand polyèdre de dimension 3 s'obtient par dualité :

5.16 Proposition-Définition. *On note I le polyèdre dual D^* . C'est un polyèdre régulier appelé **icosaèdre régulier** qui a 20 faces, 30 arêtes et 12 sommets. Les groupes $G(D)$ et $G(I)$ sont égaux.*

Démonstration. C'est 4.12 et 3.18.

On a une jolie description analytique de l'icosaèdre :

5.17 Proposition. *L'icosaèdre régulier I est semblable au polyèdre enveloppe convexe des 12 points suivants : $(\pm 1, 0, \pm \tau)$; $(\pm \tau, \pm 1, 0)$; $(0, \pm \tau, \pm 1)$.*

Démonstration. En vertu de 4.14, on sait que I est semblable au polyèdre enveloppe convexe des centres des faces de D . On calcule le centre ω de la face $abefc$, on obtient $5\omega = (\tau + 2, 0, 3\tau + 1) = (\tau + 2)(1, 0, \tau)$, d'où le sommet $(1, 0, \tau)$ d'un icosaèdre régulier J semblable à I . Pour obtenir les autres sommets de J , il suffit de faire agir le groupe $G(D) = G(I)$ et même seulement son sous-groupe H des permutations paires et changements de signes et on obtient les 12 points annoncés.

6 Le groupe des rotations du dodécaèdre

Le théorème est le suivant :

6.1 Théorème. *Le groupe $G^+(D)$ des rotations conservant le dodécaèdre est isomorphe au groupe alterné \mathfrak{A}_5 . Le groupe $G(D)$ est isomorphe¹⁵ à $\mathfrak{A}_5 \times \{1, -1\}$.*

La deuxième assertion est évidente en utilisant le sous-groupe central $\{\text{Id}, -\text{Id}\}$. La première peut se prouver de multiples manières. Le point essentiel, à chaque fois, est de faire opérer G^+ sur un ensemble à 5 éléments. En effet, on peut alors appliquer le lemme suivant :

6.2 Lemme. *Si un groupe G^+ d'ordre 60 opère fidèlement sur un ensemble X à 5 éléments, il est isomorphe au groupe \mathfrak{A}_5 .*

Démonstration. Dire qu'on a une opération de G^+ sur X signifie qu'on a un homomorphisme $\varphi : G^+ \rightarrow \mathfrak{S}(X) \simeq \mathfrak{S}_5$, dire qu'elle est fidèle signifie qu'aucun élément de G^+ distinct de 1 n'opère sur X comme l'identité ou encore que φ est injectif. Il en résulte que G^+ est isomorphe à un sous-groupe d'ordre 60 de \mathfrak{S}_5 . Il est bien connu qu'il s'agit alors de \mathfrak{A}_5 . Plus généralement, on a le lemme suivant :

6.3 Lemme. *L'unique sous-groupe d'indice 2 de \mathfrak{S}_n est \mathfrak{A}_n .*

Rappelons que \mathfrak{S}_n (resp. \mathfrak{A}_n) est engendré par les transpositions (resp. les produits pairs de transpositions) et que les transpositions sont toutes conjuguées dans \mathfrak{S}_n . Soit G un sous-groupe d'indice 2 de \mathfrak{S}_n . Ce sous-groupe est distingué et on a donc un homomorphisme $\varphi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$ surjectif de noyau G . Soit τ une transposition. Si elle est dans G , on a $\varphi(\tau) = 1$ et si $\tau' = g\tau g^{-1}$ est une autre transposition on a $\varphi(\tau') = \varphi(\tau) = 1$ (car $\{\pm 1\}$ est abélien), toutes les transpositions sont dans G et c'est absurde. On a donc $\varphi(\tau) = -1$. Mais alors, si σ est un produit pair de transpositions on a $\varphi(\sigma) = 1$, de sorte que \mathfrak{A}_n est inclus dans G , donc égal pour une raison de cardinal.

Il reste à trouver une opération de G^+ sur un ensemble à 5 éléments. Il y a de nombreuses méthodes pour cela. Nous en montrons deux ci-dessous, assez algébriques, mais on peut aussi utiliser des méthodes plus géométriques, par exemple en utilisant les pistes suivantes :

- Il y a dans D cinq cubes analogues à C qui sont permutés par G^+ .
- Il y a cinq trièdres analogues à $o;xyz$ qui sont permutés par G^+ .

6.1 La preuve utilisant le sous-groupe H^+

On reprend le sous-groupe H de G , d'ordre 24, défini dans la preuve de 5.2 dont on conserve les notations, en particulier celles concernant les ensembles

15. Et donc pas à \mathfrak{S}_5 ...

C (les points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$) et S . Il est formé des transformations $u_{\sigma, \epsilon}$ où σ est une permutation paire de (x, y, z) et $\epsilon = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ un changement de signe. L'intersection de H et de G^+ est le sous-groupe H^+ de G^+ formé des $u_{\sigma, \epsilon}$ tels que ϵ comporte zéro ou deux signes moins. Il comprend 12 éléments qui, outre l'identité, sont des rotations d'ordre 2 ou 3. Précisément, il y a 8 rotations d'ordre 3 (donc d'angles $\pm 2\pi/3$) comme $u : (x, y, z) \mapsto (z, x, y)$ et son carré $u^2(x, y, z) = (y, z, x)$ qui sont d'axes joignant $a = (1, 1, 1)$ et $-a$. Les 6 autres correspondent aux autres paires de sommets opposés de C . Il y a aussi 3 rotations d'ordre 2 (ou demi-tours), donnés par $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, z)$ ou $(-x, y, -z)$ ou $(x, -y, -z)$. Ces demi-tours ont pour axes des droites joignant o au milieu d'arêtes de D (par exemple $[be]$ pour le premier).

Le groupe G^+ opère sur l'ensemble G^+/H^+ des classes à gauche modulo H^+ par $g.aH^+ = (ga)H^+$. Comme G^+/H^+ est de cardinal 5 on obtient un homomorphisme $\varphi : G^+ \rightarrow \mathfrak{S}_5$ dont le noyau N est l'intersection des conjugués $\bigcap_{a \in G^+} aHa^{-1}$ (voir [6] ou faire un petit calcul). Ce noyau est donc un sous-groupe distingué de G^+ , contenu dans H^+ et il s'agit de prouver qu'il est réduit à $\{\text{Id}\}$. Mais, si N contient un élément d'ordre 3, rotation d'axe (os) avec $s \in C$, donc aussi $s \in S$, comme G^+ est transitif sur S , il contient toutes ces rotations (donc 20 éléments, voir 5.14) et c'est absurde. Si N contient un demi-tour autour de l'axe joignant o au milieu d'une arête, comme G^+ est transitif sur les arêtes il contient les 15 demi-tours et c'est encore absurde.

6.1.1 Une variante

Le lecteur trouvera une autre preuve, voisine de la précédente, en résolvant l'exercice ci-dessous.

6.4 Exercice. On considère le cube C_3 , enveloppe convexe de $C = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ et on note $\Delta_i, i = 1, \dots, 4$, ses grandes diagonales. Dans ce qui suit on confondra le cube et l'ensemble C de ses sommets. On rappelle que C est contenu dans l'ensemble S des sommets de D .

1) Montrer que les rotations ρ_i , d'axe Δ_i et d'ordre 3, conservent C et permutent circulairement les Δ_j pour $j \neq i$.

2) Montrer que si C, C' sont deux cubes de E , isométriques, avec deux grandes diagonales en commun, ils sont égaux.

3) a) Montrer que le stabilisateur de C dans $G(D)$ (resp. $G^+(D)$) est le sous-groupe H des permutations paires et changements de signes (resp. $H^+ := H \cap G^+(D)$, permutations paires et 0 ou 2 changements de signes). En déduire que l'orbite Ω de C sous l'action de G^+ est de cardinal 5.

b) On note \mathcal{F} l'ensemble des grandes diagonales de D . Montrer que $G(D)$ opère transitivement sur \mathcal{F} et que, si Δ est dans \mathcal{F} , Δ est commune à deux cubes de Ω .

c) Montrer que l'opération de $G^+(D)$ sur Ω est fidèle et conclure (on utilisera 4.21).

6.2 La preuve utilisant les ordres des éléments

Cette preuve repose sur la connaissance des ordres des éléments de G^+ , voir 5.14 et sur les deux lemmes purement algébriques ci-dessous. Son intérêt est que la description des éléments de G^+ peut se faire “avec les mains” quand on dispose d'un modèle du dodécaèdre, voir 5.15.

6.5 Lemme. *Soit G un groupe d'ordre 60 qui contient 24 éléments d'ordre 5, 20 d'ordre 3 et 15 d'ordre 2. Alors, G est simple.*

Démonstration. Soit N un sous-groupe distingué de G , différent de $\{1\}$. S'il contient un élément d'ordre 5 (resp. 3), il contient le Sylow correspondant, donc il les contient tous puisqu'ils sont conjugués, donc il contient tous les éléments d'ordre 5 (resp. 3). Il contient donc au moins 21 éléments et comme son cardinal divise 60 il vaut 30 ou 60, donc contient à la fois des éléments d'ordre 3 et 5, donc son cardinal vaut au moins $20 + 24 + 1 = 45$ et N est égal à G .

Ce qui précède montre que si N est différent de G il ne contient que des éléments d'ordre 2 et, comme son ordre divise 60, c'est donc 2 ou 4. Si c'est 4 c'est un 2-Sylow, mais alors N contient tous les 2-Sylow, donc tous les éléments d'ordre 2 et c'est absurde. Si c'est 2, l'unique élément de N distinct de 1 est central. Mais alors il commute aux éléments d'ordre 5 et N contient des éléments d'ordre 10 et c'est absurde.

6.6 Lemme. *Tout groupe simple¹⁶ d'ordre 60 est isomorphe au groupe alterné \mathfrak{A}_5 .*

Démonstration. Un tel groupe ne peut opérer non banalement sur un ensemble de cardinal ≤ 4 et, s'il opère sur un ensemble de cardinal 5, il se plonge dans \mathfrak{S}_5 comme sous-groupe d'indice 2 donc est isomorphe à \mathfrak{A}_5 . Notons n_p le nombre de p -Sylow de G . Comme G est simple, n_5 , qui divise 12 et est congru à 1 modulo 5, est égal à 6. Cela montre qu'il y a 24 éléments d'ordre 5 dans le groupe. De même, n_3 divise 20, est > 4 et congru à 1 modulo 3, donc vaut 10 et on a 20 éléments d'ordre 3. Enfin, n_2 divise 15, il ne

16. Dans ce lemme on ne suppose pas *a priori* qu'on a la répartition d'éléments précédente.

peut valoir 3 et s'il vaut 5 on a gagné, de sorte qu'on peut supposer $n_2 = 15$. Les 2-Sylow sont des groupes à 4 éléments (donc abéliens) et ils ne peuvent être "disjoints" (i.e. ne se couper que sur le neutre) car on aurait plus que 60 éléments. On considère deux tels Sylow S_1, S_2 se coupant selon un sous-groupe d'ordre 2 engendré par x et on regarde le centralisateur $H = C(x)$. Il contient au moins les 6 éléments de S_1 et S_2 (ils sont abéliens) et il est de cardinal multiple de 4 et diviseur de 60. Son cardinal est donc ≥ 12 . S'il était > 12 , G aurait une opération transitive sur G/H de cardinal < 5 et c'est impossible. On a donc $|H| = 12$ et l'opération de G sur G/H , de cardinal 5, permet de conclure.

6.7 Remarque. L'idée de considérer le centralisateur d'un élément d'ordre 2, utilisée ici dans le cas le plus trivial, est à la racine de la classification des groupes simples finis. Le point de départ de cette méthode est le théorème de Feit-Thomson (1963) qui affirme que tout groupe d'ordre impair est résoluble et dont une conséquence est que tout groupe simple non trivial est d'ordre pair, donc contient un élément d'ordre 2.

7 Détermination des polyèdres réguliers de \mathbf{R}^3

7.1 Les étoiles d'un polyèdre régulier

Dans ce qui suit P désigne un polyèdre régulier de \mathbf{R}^3 , de centre $o = (0, 0, 0)$.

7.1 Lemme. *Soit s un sommet de P et soient $[sx_1], [sx_2], \dots, [sx_p]$ les arêtes de P contenant s . Alors, les sommets¹⁷ x_1, \dots, x_p sont coplanaires, leur nombre p est ≥ 3 et trois quelconques d'entre eux sont non alignés. On note H_s le plan défini par les x_i .*

Démonstration. Soit $x = x_1$ et H le plan perpendiculaire à (os) passant par x . Si y est l'un des x_i , $i \geq 2$, il existe $g \in G(P)$ tel que $g(s) = s$ et $g(x) = y$ par transitivité de $G(P)$ sur les drapeaux. Comme g fixe o et s , donc toute la droite (os) et en particulier le point d'intersection de (os) et de H , le plan H est invariant par g et il en résulte que y est dans H et les x_i sont tous dans H , donc coplanaires. On a vu en 3.28 qu'on a $p \geq 3$. Comme les sommets de P sont extrémaux en vertu de 3.19, trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés et ils définissent bien un plan.

17. Que l'on dira *voisins* de s .

7.2 Remarques. 1) Les faces de P contenant s sont des polygones plans. Chaque face contient donc deux sommets x_i voisins de s .

2) Notons que le point s n'est pas dans H_s . En effet, comme il y a au moins trois faces distinctes contenant s , définissant trois plans, les x_i et s ne sont pas tous dans un même plan.

7.3 Proposition-Définition. Avec les notations de 7.1, l'ensemble $\text{Et}_s(P) := P \cap H_s$ est un polygone régulier du plan H_s appelé **étoile de P en s** .

Démonstration. On prouve ce résultat en plusieurs étapes.

7.4 Lemme. L'ensemble $\text{Et}_s(P)$ est un polygone convexe.

Démonstration. Comme $P \cap H_s$ contient le point d'intersection de $[os]$ et de H_s qui est intérieur à P , le résultat vient de 3.41.

7.5 Lemme. 1) Avec les notations de 7.1, les sommets de $E_s := \text{Et}_s(P)$ sont les points x_1, \dots, x_p .

2) Les arêtes (ou côtés) de $\text{Et}_s(P)$ sont les traces sur $H := H_s$ des faces F de P contenant s . Précisément, ce sont les segments $[xy]$ où x, y sont les sommets de la face F voisins de s .

Démonstration. Notons d'abord que les x_i , qui sont des sommets de P , sont *a fortiori* extrémaux dans E_s donc des sommets de E_s . On note E'_s l'enveloppe convexe des x_i . C'est un polygone convexe de H , dont les x_i sont exactement les sommets.

Soit F une face de P contenant s et appelons x, y les sommets de F voisins de s et \widehat{F} le plan défini par F . Comme H ne contient pas s , l'intersection de F et de H est un segment, nécessairement égal à $[xy]$ car ces points sont extrémaux dans F . Ce segment est une arête de E_s comme de E'_s . En effet, \widehat{F} est un plan frontière de P . Appelons V^+ le demi-espace limité par \widehat{F} extérieur à P . L'intersection de V^+ et de H est un demi-plan de H qui ne rencontre ni E_s ni E'_s ce qui montre que $[xy]$ est dans la frontière de E_s et de E'_s . Comme x, y sont extrémaux dans E_s et dans E'_s , $[xy]$ est égal à l'intersection de ces polygones avec la droite (xy) . En vertu de 3.10, c'est une arête de chacun de ces polygones. On a ainsi, pour chaque x_i , deux arêtes de E'_s issues de x_i , donc toutes les arêtes de E'_s .

On conclut en invoquant le lemme suivant :

7.6 Lemme. Soient A, B deux polygones convexes d'un même plan. On suppose que tous les sommets (resp. les côtés) de A sont des sommets (resp. des côtés) de B . Alors on a $A = B$.

Démonstration. Comme A est l'enveloppe convexe de ses sommets on a $A \subset B$, comme il est intersection des demi-plans limités par ses arêtes on a $B \subset A$, donc $A = B$.

7.7 Lemme. 1) L'ensemble \mathcal{D}_{E_s} des drapeaux de E_s a $2p$ éléments.

2) Le sous-groupe $G_s(P)$ de $G(P)$ des éléments qui fixent s admet $2p$ éléments. Il opère transitivement sur les drapeaux de E_s qui est donc un polygone régulier.

Démonstration. 1) C'est le fait que l'étoile est un polygone à p côtés.

2) L'ensemble $\mathcal{D}_s(P)$ des drapeaux de P contenant s a $2p$ éléments car chacune des p arêtes issues de s est commune à deux faces. Comme le groupe $G(P)$ est transitif sur les drapeaux de P , le stabilisateur de s est transitif sur $\mathcal{D}_s(P)$ et, comme il stabilise H_s , il est transitif sur les traces des éléments de $\mathcal{D}_s(P)$ sur H_s , qui sont les drapeaux de E_s .

Il en résulte que E_s est régulier.

7.2 Le théorème de Schäfli

7.2.1 Quelques calculs sur les polygones réguliers

La proposition suivante est immédiate :

7.8 Proposition. Soit E un polygone régulier à p côtés, R le rayon du cercle circonscrit à E (voir 4.10.2), L la longueur des côtés de E et L' la distance de deux sommets sous-consécutifs (i.e. joints par un côté à un même sommet). On a les formules suivantes :

$$L = 2R \sin \frac{\pi}{p} ; L' = 2R \sin \frac{2\pi}{p} = 4R \sin \frac{\pi}{p} \cos \frac{\pi}{p} = 2L \cos \frac{\pi}{p}.$$

7.2.2 Quelques formules pour les polyèdres réguliers

7.9 Proposition-Définition. Soit P un polyèdre régulier de \mathbf{R}^3 , de centre o . Le nombre p d'arêtes de P issues d'un sommet est indépendant du sommet et on a $p \geq 3$. Le nombre q de côtés d'une face de P est indépendant de la face et on a $q \geq 3$. Le couple (p, q) s'appelle le **symbole** de P .

Démonstration. C'est la transitivité du groupe $G(P)$ sur les drapeaux, jointe à 3.28.

7.10 Proposition. Soit P un polyèdre régulier de \mathbf{R}^3 , de centre o , de symbole (p, q) . On appelle R le rayon de la sphère circonscrite à P , l (resp. l') la longueur des arêtes de P (resp. des côtés des étoiles de P), r (resp. r') le

rayon du cercle circonscrit aux faces (resp. aux étoiles) de P , d la distance de o aux centres des faces de P . Les formules suivantes permettent de calculer toutes les longueurs précédentes en fonction de R et du symbole (p, q) :

$$l^2 = 4R^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \frac{\pi}{q}}{\sin^2 \frac{\pi}{p}} \right) ; l' = 2l \cos \frac{\pi}{q} = 2r' \sin \frac{\pi}{p} ; l = 2r \sin \frac{\pi}{q} ; d^2 = R^2 - r^2.$$

Démonstration. On considère un sommet s de P , F une face contenant s , x, y les sommets voisins de s dans F , qui sont des sommets consécutifs de $E := Et_s(P)$, on note o' le centre de E et ω celui de F . On se reportera aux figures ci-dessous.

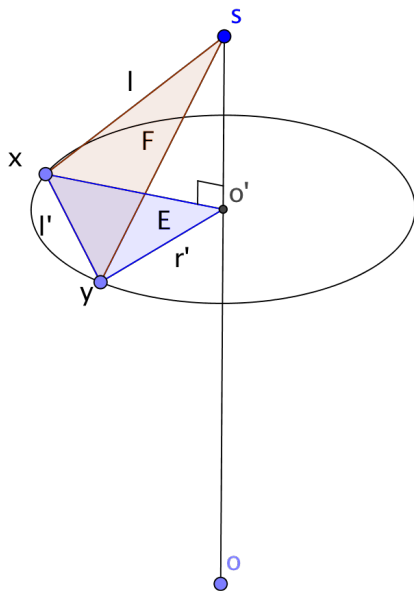


FIGURE 8 –

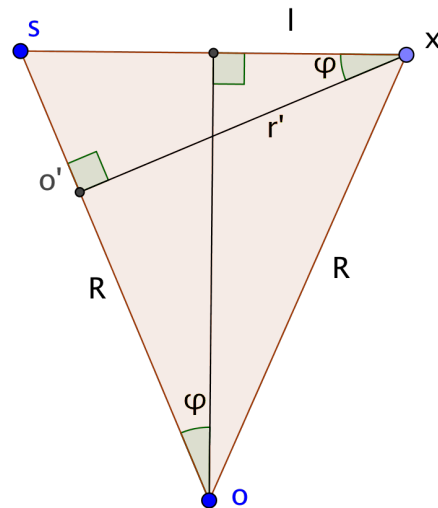


FIGURE 9 –

Les formules reliant l, r et l', r' viennent de 7.8 appliqué aux polygones faces et étoiles respectivement et on en déduit $\frac{r'}{l} = \frac{\cos \frac{\pi}{q}}{\sin \frac{\pi}{p}}$.

Pour trouver le lien entre R et l on utilise la figure 9 qui donne $l = 2R \sin \varphi$ et $r' = l \cos \varphi$ et, en élevant au carré, $l^2 = 4R^2 \sin^2 \varphi = 4R^2 \left(1 - \frac{r'^2}{l^2} \right)$ et on obtient la formule annoncée. Enfin, si ω est le centre de la face F , on a $d^2 = R^2 - r^2$ par Pythagore¹⁸.

18. En effet, si ω est le projeté orthogonal de o sur la face F , tous les triangles du type

7.2.3 La partie combinatoire du théorème de Schäfli

7.11 Théorème. *Soit P un polyèdre régulier de \mathbf{R}^3 , de symbole (p, q) . Les seules valeurs possibles pour le couple (p, q) sont $(3, 3)$; $(3, 4)$; $(3, 5)$; $(4, 3)$ et $(5, 3)$. Elles sont atteintes respectivement pour le tétraèdre, le cube, le dodécaèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre réguliers.*

Démonstration. Comme l^2 est positif, on a $\cos^2 \frac{\pi}{q} < \sin^2 \frac{\pi}{p}$ et, comme les entiers p, q sont ≥ 3 , on utilise la table des valeurs suivante :

n	3	4	5	≥ 6
$\cos^2 \frac{\pi}{n}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3 + \sqrt{5}}{8} \sim 0.65$	$\geq \frac{3}{4}$
$\sin^2 \frac{\pi}{n}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{8} \sim 0.35$	$\leq \frac{1}{4}$

Il est clair que la relation $\cos^2 \frac{\pi}{q} < \sin^2 \frac{\pi}{p}$ ne peut avoir lieu si p ou q est ≥ 6 . On examine les cas $p = 3, 4, 5$. Pour $p = 3$ la relation est vraie si $q = 3, 4, 5$, pour $p = 4$ ou 5 elle n'est vérifiée que pour $q = 3$, d'où le résultat.

7.2.4 Une variante

On peut montrer le théorème 7.11 d'une autre manière, à condition de connaître le résultat suivant sur la somme des angles d'un polyèdre (voir [7], ch. 9, Annexe ou 8.5 ci-dessous) :

7.12 Proposition. *Soit P un polyèdre convexe de \mathbf{R}^3 . La somme des angles des faces en un sommet (mesurés en radians) est $< 2\pi$.*

Le théorème en résulte aisément : on montre qu'on a $p < 6$, $q < 6$ et que les cas $(4, 4)$, $(5, 4)$ et $(4, 5)$ sont exclus. Il reste ceux attendus.

ω s sont isométriques (rectangles avec un côté de l'angle droit commun et des hypoténuses égales), donc toutes les longueurs ω s sont égales et ω est le centre de la face.

7.2.5 La partie géométrique du théorème de Schäfli

Le théorème suivant achève la classification des polyèdres réguliers :

7.13 Théorème. (Schäfli, 1850) *À similitude près, les seuls polyèdres réguliers de \mathbf{R}^3 sont le tétraèdre, le cube, le dodécaèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre réguliers.*

Démonstration. Vu 7.11, il reste à montrer que si P et P' sont deux polyèdres réguliers de même symbole (p, q) ils sont semblables.

a) Quitte à effectuer une translation, on peut supposer que P et P' ont même centre o .

b) Quitte à faire une homothétie, on peut supposer que les sphères circonscrites à P et P' ont même rayon R . Toutes les longueurs répertoriées en 7.10 sont alors les mêmes pour P et P' .

c) Soit ω (resp. ω') le centre d'une face F de P (resp. F' de P'). On a $o\omega = o\omega'$ par 7.10. Quitte à effectuer une rotation de centre o , on peut supposer qu'on a $\omega = \omega'$.

d) Les faces F et F' sont maintenant dans le plan perpendiculaire à $(o\omega)$ en ω (voir la note dans 7.10).

e) Si s (resp. s') est un sommet de F (resp. F') on a $\omega s = \omega s'$ (cette longueur est le r' de 7.10). Quitte à faire une rotation d'axe $(o\omega)$ on peut supposer qu'on a $s = s'$. Alors F et F' sont des polygones réguliers à q côtés, situés dans le même plan, de même centre et avec un sommet commun : ils sont égaux.

f) Pour conclure, il reste à établir :

7.14 Proposition. *Soient P, P' deux polyèdres réguliers de \mathbf{R}^3 , de même centre et ayant une face commune. Alors, on a $P = P'$.*

Démonstration. Soit F la face commune et soit $[ab]$ une arête de F . Soit K (resp. K') l'unique face de P (resp. P') contenant l'arête $[ab]$ et distincte de F . Comme P et P' sont réguliers, il existe $g \in G(P)$ (resp. $g' \in G(P')$) tel que $g(a) = a$, $g([ab]) = [ab]$ et $g(F) = K$ (resp. $g'(a) = a$, $g'([ab]) = [ab]$ et $g'(F) = K'$). On a alors $g(b) = g'(b) = b$ et g, g' admettent le plan (oab) de points fixes donc sont toutes deux la réflexion par rapport à ce plan et on en déduit $K = K'$. On voit que les faces de P et P' contigües à F au sens de 3.37 sont égales, donc aussi les faces de P et P' liées à F toujours au sens de 3.37. Il résulte alors de 3.39 que toutes les faces de P et P' sont égales et on a $P = P'$ par 3.12.

8 Et si l'on faisait de la géométrie ?

Dans ce paragraphe, on revient à une approche plus géométrique des polyèdres, à la manière de celle utilisée par Euclide. On renvoie à [2] ou [7] pour de plus amples précisions.

8.1 Quelques rappels

Dans ce paragraphe, on utilise la notion d'angle (non orienté), voir [4] :

8.1 Définition. Soient v, w deux vecteurs unitaires de l'espace euclidien \mathbf{R}^n . On appelle (mesure en radians) de l'angle de v et w le θ nombre de $[0, \pi]$ défini par la formule $\cos \theta = (v|w)$.

8.2 Remarques. 1) Je dirai souvent "angle" au lieu de mesure en radians (voire en degrés) de l'angle. Les puristes critiqueront sans doute cet abus de langage mais j'assume ce choix et renvoie les contestataires au texte que j'ai écrit sur un sujet voisin :

<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/Blasco1.pdf>

En un mot, pour moi l'angle n'est pas un objet géométrique, mais une grandeur qui est un invariant de l'objet géométrique secteur.

2) La définition de l'angle de vecteurs unitaires permet de donner celle d'angles de vecteurs non nuls en divisant par la norme, puis de l'angle de deux demi-droites, et enfin de l'angle \widehat{abc} pour trois points vérifiant $a, c \neq b$ comme l'angle de \overrightarrow{ba} et \overrightarrow{bc} .

En dimension 3, une autre notion importante est celle d'angle dièdre :

8.3 Définition. Soient H' et H'' deux plans de \mathbf{R}^3 se coupant selon une droite D . On choisit un demi-espace E' (resp. E'') limité par H' (resp. H''). Soit o un point de D et δ' et δ'' les demi-droites de H' et H'' perpendiculaires à D en o et situées respectivement dans E'' et E' . L'angle dièdre de (H', E') et (H'', E'') est l'angle des demi-droites δ' et δ'' . Il ne dépend pas du choix du point o . Cette définition s'applique en particulier à deux faces d'un polyèdre P se coupant selon une arête A en choisissant les demi-espaces contenant le polyèdre. On parle alors de l'angle dièdre de P le long de A et on le note $\delta_A(P)$.

Nous aurons aussi besoin des résultats suivants qui concernent les sphères :

8.4 Proposition. On travaille dans l'espace euclidien \mathbf{R}^3 .

1) Si a, b, c, d sont quatre points non coplanaires, il existe une unique sphère contenant a, b, c, d .

2) Soient a, b, c trois points non alignés et S_a, S_b, S_c trois sphères de centres a, b, c . Alors l'intersection $S_a \cap S_b \cap S_c$ contient au plus deux points. Si elle contient deux points, ils sont situés de part et d'autre du plan (abc) .

Démonstration. 1) On note que l'hypothèse implique que trois des points sont toujours non alignés et que deux sont toujours distincts. On considère les points a, b, c . Soit ω le centre du cercle circonscrit à abc (dans le plan (abc)) et soit D la droite perpendiculaire à (abc) en ω . Le théorème de Pythagore montre que tous les points de D sont équidistants de a, b, c . Pour trouver un point o de D qui soit aussi équidistant de d , le plus simple est de prendre un repère d'origine ω , dans lequel le plan (abc) a pour équation $Z = 0$ et où la droite D est l'axe des Z . Si $d = (x, y, z)$ avec $z \neq 0$, l'unique point o convenable est $o = (0, 0, t)$ avec $\omega a^2 = \omega d^2 - 2zt$ ce qui détermine t .

2) On sait, voir par exemple [4] 5.4.3, que l'intersection de S_a et S_b est $S_a \cap H$ où H est le plan radical de S_a et S_b et de même, $S_a \cap S_c = S_a \cap K$ où K est le plan radical de S_a et S_c . Comme le plan radical est perpendiculaire à la droite des centres et que ceux-ci ne sont pas alignés, H et K se coupent suivant une droite D , donc on a $S_a \cap S_b \cap S_c = S_a \cap D$ et cette intersection contient au plus deux points. De plus, la réflexion par rapport au plan (abc) conserve les sphères donc aussi leur intersection, de sorte que, s'il y a deux points, ils sont symétriques par rapport à (abc) .

8.2 Un premier résultat géométrique : la règle de la somme des angles

8.2.1 Le théorème

8.5 Théorème. Soit P un polyèdre convexe de \mathbf{R}^3 et s un sommet de P . La somme des angles des faces de P admettant s comme sommet est $< 2\pi$.

On peut reformuler le résultat en termes d'angle polyèdre convexe :

8.6 Définition. 1) On appelle **trièdre** la donnée de trois demi-droites non coplanaires de même origine : $[ox), [oy), [oz)$. On note $oxyz$ un tel trièdre.

2) Soit n un entier ≥ 3 et soient $[ox_1), [ox_2), \dots, [ox_n)$, n demi-droites distinctes de même origine. On suppose que pour tout $i = 1, \dots, n$ les demi-droites $[ox_k)$ pour $k \neq i, i+1$ sont toutes dans le même demi-espace ouvert E_i^+ limité par le plan $(ox_i x_{i+1})$ (par convention on pose $ox_{n+1} = ox_1$). L'intersection $A = \bigcap_{i=1}^n E_i^+$ est appelée **angle polyèdre convexe** et notée $ox_1 \dots x_n$.

Le théorème 8.5 peut alors être reformulé ainsi :

8.7 Théorème. Soit $ox_1 \dots x_n$ un angle polyèdre convexe. On a (avec la convention $\widehat{x_n ox_{n+1}} = \widehat{x_n ox_1}$) : $\sum_{i=1}^n \widehat{x_i ox_{i+1}} < 2\pi$.

8.2.2 La preuve

La preuve donnée ci-dessous est recopiée de [5], mais elle est déjà dans Euclide (Livre XI, propositions XX et XXI), voir [3].

La proposition suivante montre que 8.7 est vraie pour un trièdre :

8.8 Proposition. Soit $oxyz$ un trièdre.

- 1) On a $\widehat{xoy} < \widehat{xoz} + \widehat{zoy}$.
- 2) On a $\widehat{xoy} + \widehat{yoz} + \widehat{zox} < 2\pi$.

Démonstration. Prouvons d'abord le point 1). On peut supposer $\widehat{xoy} > \widehat{xoz}$ sinon le résultat est évident. On trace une demi-droite $[oz')$ dans le plan xoy , située entre $[ox)$ et $[oy)$ et telle que $\widehat{xoz'} = \widehat{xoz}$. On prend un point a sur $[ox)$, un point c sur $[oz)$ et on porte sur $[oz')$ le point c' tel que $oc' = oc$. Les triangles oac et oac' sont isométriques (on a $oa = oa$, $oc = oc'$ et $\widehat{aoc} = \widehat{aoc'} = \widehat{xoz}$). On en déduit qu'on a aussi $ac' = ac$. La droite (ac') coupe $[oy)$ en b . On a $ab < ac + cb$ (inégalité triangulaire dans le triangle abc) et, comme $ab = ac' + c'b = ac + c'b$, on en déduit $c'b < cb$. Mais alors, en appliquant la formule d'Al-Kashi en le sommet o des triangles $c'ob$ et cob on voit qu'on a $\widehat{c'ob} < \widehat{cob}$, c'est-à-dire $\widehat{z'oy} = \widehat{xoy} - \widehat{xoz} < \widehat{zoy}$, cqfd.

Passons au point 2). On considère la demi-droite $[oz')$ symétrique de $[oz)$ par rapport à o . On applique 1) à $oxyz'$. On a ainsi $\widehat{xoy} < \widehat{xoz'} + \widehat{z'oy}$. Mais les angles $\widehat{xoz'}$ et \widehat{xoz} (resp. $\widehat{z'oy}$ et \widehat{zoy}) sont supplémentaires et l'inégalité ci-dessus devient :

$$\widehat{xoy} < \pi - \widehat{xoz} + \pi - \widehat{zoy},$$

d'où le résultat.

Nous pouvons maintenant démontrer 8.7. On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 3$ le résultat n'est autre que 8.8. On le suppose acquis pour n et on considère un angle polyèdre $ox_1 \dots x_{n+1}$. Les plans (ox_1x_2) et (ox_3x_4) ont o en commun. Ils ne sont donc pas parallèles et se coupent suivant une droite D . Comme les demi-droites $[ox_1)$ et $[ox_2)$ sont dans le même demi-espace limité par le plan (ox_3x_4) , elles sont dans le même demi-plan de (ox_1x_2) limité par D . De même, $[ox_3)$ et $[ox_4)$ sont dans le même demi-plan de (ox_3x_4) limité par D . On choisit sur D la demi-droite $[ox)$ de telle sorte que $[ox_2)$ soit dans le secteur saillant $\widehat{x_1ox}$. Considérons alors le plan (ox_2x_3) . Le choix précédent assure que $[ox_1)$ et $[ox)$ sont de part et d'autre de ce plan et, comme $[ox_1)$ et

$[ox_4)$ sont du même côté, cela prouve que $[ox)$ et $[ox_4)$ sont de part et d'autre de (ox_3) . Comme $[ox_3)$ et $[ox_4)$ sont dans le même demi-plan de (ox_3x_4) limité par D , il en résulte¹⁹ que $[ox_3)$ est dans l'angle $\widehat{xo_3x_4}$. On applique l'hypothèse de récurrence à l'angle polyèdre $ox_1x_4 \dots x_{n+1}$ qui n'a plus que n arêtes. On a donc

$$\widehat{x_1ox} + \widehat{xox_4} + \widehat{x_4ox_5} + \dots + \widehat{x_{n+1}ox_1} < 2\pi.$$

Mais on a $\widehat{x_1ox} = \widehat{x_1ox_2} + \widehat{x_2ox}$ et $\widehat{xox_4} = \widehat{xox_3} + \widehat{x_3ox_4}$ et comme on a, en vertu de 8.8, $\widehat{x_2ox_3} < \widehat{x_2ox} + \widehat{xox_3}$, on en déduit le résultat.

8.3 D'autres caractérisations de la régularité

8.3.1 Introduction et résultats

La définition de polyèdre régulier donnée ci-dessus est commode et efficace à utiliser, mais, en revanche, il n'est pas facile, avec cette approche²⁰, de prouver qu'un polyèdre est régulier, en raison du caractère "global" de cette définition. L'objectif de ce paragraphe est donc de disposer de moyens de reconnaître qu'un polyèdre est régulier qui soient exclusivement "locaux", c'est-à-dire en examinant séparément chaque face et chaque sommet. Commençons par une définition qui généralise 7.3 :

8.9 Définition. *Soit P un polyèdre convexe et s un sommet de P . On appelle étoile de P en s l'ensemble²¹ des extrémités des arêtes issues de s .*

Attention, pour un polyèdre quelconque, l'étoile n'est pas plane en général.

On peut maintenant énoncer les résultats :

8.10 Théorème. *Soit P un polyèdre convexe de \mathbf{R}^3 . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- 0) *Le polyèdre P est régulier (au sens de 4.9).*
- 1) *Les faces de P sont des polygones réguliers isométriques et les angles dièdres de P sont tous égaux.*
- 2) *Les faces de P sont des polygones réguliers isométriques et les étoiles de P sont des polygones réguliers plans tous isométriques.*

19. Pour le lecteur sceptique : on peut faire le calcul en prenant o comme origine et les demi-droites $[ox_1)$, $[ox_2)$, $[ox_3)$ dirigées par les vecteurs $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$. La demi-droite $[ox_4)$ est alors dirigée par $(1, \beta, \gamma)$ avec $\beta < 0$ et $\gamma > 0$ et $[ox)$ est engendrée par $(-1, -\beta, 0)$. La conclusion en découle.

20. Qui est donc la meilleure et la pire, comme la langue d'Ésope.

21. On pourrait aussi considérer son enveloppe convexe.

2') Les faces de P sont des polygones réguliers et les étoiles de P sont des polygones réguliers plans.

3) Les faces de P sont des polygones réguliers isométriques et les sommets de P sont sur une même sphère.

4) Les faces de P sont des polygones réguliers, toutes avec le même nombre q de côtés, et il y a le même nombre p de faces en chaque sommet.

8.11 Remarque. Les conditions 1), 2) et 3) sont plus géométriques et pas encore vraiment commodes à utiliser pour prouver la régularité. La condition 4) est évidemment la plus simple, mais on verra que l'équivalence de cette condition et de la régularité est aussi la plus difficile à établir! Dans le cas de faces à 4 côtés au moins on a le résultat suivant, un peu meilleur.

8.12 Proposition. Soit P un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers admettant le même nombre $q \geq 4$ de côtés. Alors P est un polyèdre régulier (et précisément un cube ou un dodécaèdre régulier).

8.3.2 Le lemme des trois triangles

Dans la preuve du théorème ci-dessus nous serons souvent confronté à la situation étudiée dans le théorème suivant, celle de trois faces triangulaires contigües en un sommet :

8.13 Théorème. Soient s, a, b, c, d cinq points de l'espace. On suppose s, b, c non alignés et les deux points a, d dans le même demi-espace ouvert limité par le plan (sbc) . On suppose de plus que les triangles sab, sbc et scd sont équilatéraux. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1) Les points a, b, c, d sont coplanaires.
- 2) On a $ac = bd$.
- 3) Les angles dièdres²² des plans $(sab), (sbc)$ et $(sbc), (scd)$ sont égaux.
- 4) Les cinq points sont sur une même sphère.

Démonstration. On note α la longueur commune des côtés des triangles équilatéraux. L'équivalence des points 2) et 3) vient du lemme suivant :

8.14 Lemme. Soient sab et sbc deux triangles équilatéraux comportant un côté commun $[sb]$. Soit φ l'angle dièdre des plans (sab) et (sbc) le long de (sb) . On a la formule $ac^2 = \frac{3}{2}sa^2(1 - \cos \varphi)$.

Démonstration. (du lemme) Le pied h de la hauteur issue de a dans sab est le milieu de $[sb]$ et c'est aussi le pied de la hauteur issue de c dans sbc , de

22. Relatifs aux demi-espaces contenant respectivement d et a .

sorte que l'angle dièdre est $\varphi = \widehat{ahc}$. Comme on a $ah = ch = sa \frac{\sqrt{3}}{2}$, on conclut par la formule d'Al-Kashi dans ahc .

Revenons à 8.13 et à l'équivalence de 1) et 2). Supposons d'abord les points a, b, c, d coplanaires et soit ω le projeté orthogonal de s sur le plan $(abcd)$. Le théorème de Pythagore donne $sa^2 = s\omega^2 + \omega a^2$ et de même avec b, c, d et on en déduit qu'on a $\omega a = \omega b = \omega c = \omega d$. Les points a, b, c, d sont donc cocycliques dans le plan $(abcd)$. Comme a, d sont du même côté de (bc) , le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{bac} = \widehat{bdc}$, il en résulte que les triangles isocèles abc et bcd sont isométriques et on en déduit $ac = bd$.

Inversement, supposons $ac = bd$. On considère la symétrie τ par rapport au plan H médiateur de $[bc]$. Comme τ échange b et c , le plan (abc) est stable par τ , donc $d' = \tau(a)$ est dans (abc) . On a $cd = ba = cd'$, $bd = ca = bd'$ et, comme s est équidistant de b et c , donc dans H , on a $sd = sa = sd'$. Les points d, d' sont à l'intersection de trois sphères de centres s, b, c . Comme ils sont du même côté du plan (sbc) (car (sbc) est stable par τ) ils sont égaux (voir 8.4) et a, b, c, d sont coplanaires.

Soit maintenant o le centre de la sphère circonscrite à $sabc$ (voir 8.4), de rayon R . Soit u le projeté orthogonal de o sur le plan (sab) . En vertu de Pythagore, on a $ou^2 + us^2 = ou^2 + ua^2 = ou^2 + ub^2 = R^2$ et on a les relations analogues avec le projeté v de o sur (sbc) , de sorte que u, v sont les centres des triangles sab et sbc et on a $ou^2 = R^2 - \frac{\alpha^2}{3}$. Le projeté orthogonal de u sur $[sb]$ est donc le milieu h de $[sb]$ et c'est aussi le projeté de v sur $[sb]$ et l'angle $\varphi := \widehat{uhv}$ est l'angle dièdre des plans (sab) et (sbc) le long de $[sb]$. Les quatre points o, u, v, h sont dans le plan médiateur de $[sb]$, donc coplanaires, et les deux triangles ouh et ovh sont rectangles en u, v , de sorte l'angle \widehat{uov} est le supplémentaire de φ . Par Al-Kashi, on obtient : $uv^2 = 2ou^2(1 + \cos \varphi)$. Mais on a $\vec{uv} = \vec{uh} + \vec{hv} = \frac{1}{3}\vec{ah} + \frac{1}{3}\vec{hc} = \frac{1}{3}\vec{ac}$. On obtient ainsi $ac^2 = 18ou^2(1 + \cos \varphi)$ et enfin $ac^2 = 18(R^2 - \frac{\alpha^2}{3})(1 + \cos \varphi)$ et cette quantité est aussi $\frac{3}{2}\alpha^2(1 - \cos \varphi)$ en vertu de 8.14, d'où une relation entre R et φ :

$$R^2 = \frac{\alpha^2}{3} \left(1 + \frac{1}{4} \times \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \right).$$

Le même calcul vaut pour les triangles sbc et scd . Comme le centre des sphères circonscrites est sur la perpendiculaire au plan (sbc) en le centre v de sbc , les sphères sont égales si et seulement si les distances ov sont égales, c'est-à-dire si et seulement si elles ont même rayon, ou encore si et seulement si les angles dièdres sont égaux, ce qui montre l'équivalence de 3) et 4).

8.4 Démonstration de 8.10

Deux points sont évidents :

- La propriété 0) implique toutes les autres comme on le voit en utilisant le paragraphe 4, notamment 4.11, la transitivité de $G(P)$ sur les faces et 7.3.
- La propriété 2) implique la propriété 4).

8.4.1 Premiers pas

On a le lemme suivant :

8.15 Lemme. *Soit P un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers à q côtés. On a les propriétés suivantes :*

- 0) *Tous ces polygones sont isométriques et on a $q \leq 5$.*
- 1) *Si $q = 4$ ou 5 , il y a $p = 3$ faces en chaque sommet et la condition 2) de 8.10 est réalisée.*
- 2) *Si $q = 3$, les propriétés 1), 2) et 3) de 8.10 sont équivalentes, avec $p = 3, 4$ ou 5 faces en chaque sommet.*

Démonstration. 0) Les arêtes de deux faces contigües sont de même longueur, donc aussi celles de deux faces liées (voir 3.37) et on conclut en utilisant le résultat de connexité 3.39. Comme il y a au moins trois faces en un sommet, la règle de la somme des angles 8.5 implique que q est ≤ 5 (les angles d'un polygone régulier à $n \geq 6$ côtés sont $\geq 2\pi/3$ et on a $3 \times \frac{2\pi}{3} = 2\pi$).

1) Comme les angles d'un carré (resp. un pentagone) valent $\pi/2$ (resp. $3\pi/5$), on déduit aussi de la règle de la somme des angles qu'il y en a exactement trois en chaque sommet. Les étoiles sont alors des triangles, dont les côtés sont les diagonales des faces, donc toutes de même longueur et on a la condition 2).

2) L'équivalence résulte essentiellement du lemme des trois triangles 8.13. Montrons l'implication 1) \implies 2), le reste est facile²³. On considère les voisins d'un sommet. Quatre quelconques sont coplanaires en vertu de l'hypothèse faite sur les dièdres, donc ils le sont tous. Les étoiles sont des polygones plans à p côtés et le nombre p est indépendant du sommet. En effet, comme les angles dièdres sont égaux, c'est une conséquence du lemme suivant :

8.16 Lemme. *Soit P un polyèdre convexe, s un sommet de P en lequel aboutissent p faces qui sont des triangles équilatéraux.*

- 1) *Si $p = 3$, les angles dièdres en s sont tous égaux à φ avec $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.*
- 2) *Si $p = 4$, et si les angles dièdres en s sont tous égaux, ils sont donnés par $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$.*

²³. Pour 3) on utilise le fait qu'une sphère est déterminée par 4 points et le résultat de connexité 3.39.

3) Si $p = 5$, et si les angles dièdres en s sont tous égaux, ils sont donnés par $\cos \varphi = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Démonstration. (de 8.16) Le premier cas vient directement de 8.14 car on a $ac = sa$. Pour les autres, l'égalité des angles dièdres donne l'égalité des segments joignant deux sommets "sous-consécutifs" parmi les voisins de s et on en déduit que tous les sommets voisins de s sont coplanaires par 8.13. Ils forment alors un polygone régulier à 4 ou 5 sommets et on conclut avec 8.14 et le fait que le rapport de la diagonale d'un carré (resp. d'un pentagone régulier) au côté vaut $\sqrt{2}$ (resp. le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).

Revenons à 8.15. Le fait que les étoiles soient régulières est alors évident si ce sont des triangles et dans le cas des carrés ou des pentagones, cela résulte du fait que leurs diagonales sont égales en vertu de 8.13.

8.17 Remarques. 1) Les valeurs approchées des dièdres sont respectivement $70^\circ.53$, $109^\circ.47$, $138^\circ.19$ pour les cas $p = 3, 4, 5$.

2) Si l'on note s, a, f les nombres de sommets, d'arêtes et de faces de P , les seules valeurs possibles des nombres p, q, s, a, f sont les suivantes : 3, 3, 4, 6, 4 (donc les chiffres du tétraèdre), 3, 4, 8, 12, 6 (les chiffres du cube), 4, 3, 6, 12, 8 (les chiffres de l'octaèdre), 3, 5, 20, 30, 12 (les chiffres du dodécaèdre) et 5, 3, 12, 30, 20 (les chiffres de l'icosaèdre). En effet, pour calculer s, a, f on utilise Fubini (3.29) pour exprimer ces nombres en fonction de s : on a $a = ps/2$ et $f = ps/q$. On applique alors la formule d'Euler (voir [7] Ch 9, §2) : $s - a + f = 2$ qui donne la valeur de s . On voit ainsi que la condition 4) à elle seule détermine les nombres s, a, f .

8.4.2 L'équivalence de 2) et 2')

Il est clair que 2) implique 2'), clair aussi que si toutes les faces sont régulières, les arêtes ont toutes même longueur en vertu de 3.39. Pour les faces il faut montrer qu'elles ont le même nombre q de côtés. Sinon, on aurait deux faces F, F' avec des nombres de côtés distincts, q, q' et on peut les supposer contigües. En effet, en vertu de 3.39, ces faces sont liées par une suite de faces contigües $F = F_1, F_2, \dots, F_n = F'$. Si i est le plus petit entier tel que le nombre de faces de F_i soit différent de q , F_{i-1} et F_i sont contigües et n'ont pas le même nombre de côtés. Si s est un sommet commun à ces deux faces, les côtés de l'étoile en s sont les (petites) diagonales²⁴ des faces, donc, si les nombres de sommets sont distincts, elles ne sont pas égales.

Il reste à montrer que les étoiles ont le même nombre de côtés. C'est clair si $q = 4$ ou 5 en vertu de 8.15 car alors on a $p = 3$. On peut donc supposer que

24. Voire des arêtes dans le cas de faces triangulaires.

les faces sont des triangles équilatéraux et les côtés des étoiles sont aussi des côtés des faces, donc tous égaux. Si deux étoiles avaient des nombres de côtés différents, on pourrait supposer les sommets correspondants s et t adjacents par 3.39. Mais alors, les faces contenant l'arête $[st]$ seraient sta et stb et ab serait à la fois une diagonale de l'étoile en s et de l'étoile en t . Comme les côtés des étoiles sont ceux des faces, cela impose que les nombres de côtés des étoiles sont les mêmes.

8.4.3 L'implication 2) \implies 0) de 8.10

Donnons d'abord une définition :

8.18 Définition. Soit P un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers à q côtés. On dit que P est **rigide** en un sommet s si la donnée d'une face F de P en s et du demi-espace limité par F et contenant P détermine entièrement les autres faces contenant s . Dans le cas contraire, on dit que P est **flexible** en s .

8.19 Remarque. L'assertion signifie que si Q est un autre polyèdre convexe dont les faces sont aussi des polygones réguliers à q côtés, si P et Q ont la face F en commun et s'ils sont situés du même côté de F , les faces de P et Q contenant s sont égales.

On utilisera la remarque suivante, évidente, mais essentielle :

8.20 Lemme. Soit F un polygone (plan) régulier à n côtés plongé dans \mathbf{R}^3 . Le polygone F est déterminé par la donnée de trois sommets consécutifs.

L'expérience montre que la rigidité est acquise dans le cas de 3 faces, quelle que soit leur nature, mais pas dans le cas de 4 ou 5 faces triangulaires. C'est ce que montre le lemme suivant :

8.21 Lemme. Soit P un polyèdre convexe dont toutes les faces sont des polygones réguliers à q côtés et soit s un sommet de P . Si l'étoile de P en s est un polygone régulier plan à p côtés, le polyèdre est rigide en s . C'est le cas en particulier si l'on a $p = 3$ (donc si l'on a $q \geq 4$).

Démonstration. Soit F une face de P en s . On considère l'étoile $E := \{a_1, \dots, a_p\}$ de P en s , a_1 et a_2 étant les sommets voisins de s sur F . Montrons alors que a_3 est déterminé (ce qui montrera que E l'est en vertu de 8.20). On connaît la longueur commune α des arêtes de P . Comme F est un polygone régulier, on en déduit la longueur β des diagonales (i.e. des segments joignant deux sommets sous-consécutifs) de F , qui sont aussi les côtés

du polygone régulier E et on en déduit la longueur γ des diagonales de E . Comme on a $sa_3 = \alpha$, $a_2a_3 = \beta$ et $a_1a_3 = \gamma$, le point a_3 est bien déterminé en vertu de 8.4.2.

Si l'on a $p = 3$, l'étoile est plane et ses côtés étant les diagonales des faces, elle est régulière (voir 8.15).

8.22 Remarque. L'exemple de l'octaèdre ou de l'icosaèdre montre que le fait que l'étoile soit plane est essentiel.

8.23 Corollaire. On a l'implication $2) \implies 0)$ de 8.10.

Démonstration. Soit P un polyèdre convexe vérifiant l'hypothèse 2) et soit Q un polyèdre régulier du même type combinatoire que P (c'est-à-dire avec le même symbole (p, q)). Quitte à faire une similitude, on peut supposer que P et Q ont une face commune et qu'ils sont situés du même côté de cette face. Ils ont alors un point intérieur en commun (prendre un point voisin du centre de la face commune). On conclut alors par le lemme suivant :

8.24 Lemme. Avec les notations et les hypothèses précédentes :

- 1) Toute face G de P (resp. de Q) contigüe à F est commune à P et Q .
- 2) Toute face de P (resp. de Q) liée (3.37) à F est commune à P et Q .
- 3) On a $P = Q$ (et donc P est régulier).

Démonstration. (du lemme) 1) Soit s un sommet commun à F et G . Comme P et Q vérifient 2), il sont rigides en s en vertu de 8.21, de sorte que G est aussi dans Q . La même propriété vaut aussi, de proche en proche, pour les faces liées, et on conclut en utilisant le résultat de connexité 3.39.

8.25 Remarque. Il peut être intéressant d'expliciter la preuve précédente dans le cas du cube. On a un polyèdre convexe P vérifiant 2) avec les chiffres p, q, s, a, f du cube : 3, 4, 8, 12, 6 et on montre que P est vraiment un cube. Quitte à faire une similitude, on peut supposer que l'une des faces carrées de P a pour sommets les points $a = (1, 1, 1)$, $b = (-1, 1, 1)$, $c = (-1, -1, 1)$, $d = (1, -1, 1)$ et que les autres sommets sont dans le demi-espace $z < 1$. Soit a' le sommet extrémité de l'arête issue de a autre que $[ab]$ et $[ad]$. Comme les faces sont carrées, l'arête $[aa']$ est perpendiculaire à $[ab]$ et $[ad]$, donc au plan horizontal $z = 1$, donc a' est sur la verticale passant par a et comme les arêtes ont toutes même longueur, on a $a' = (1, 1, -1)$. Un argument analogue donne les autres sommets $b' = (-1, 1, -1)$, $c' = (-1, -1, -1)$, $d' = (1, -1, -1)$ qui forment une face. Par rapport au cube standard C on constate donc que les faces de C sont des faces de P , de sorte que P , intersection des demi-espaces correspondant aux plans des faces, est contenu dans C . On note aussi que les sommets de C sont des sommets de P , de sorte que P , enveloppe convexe de ses sommets, contient C . On a donc $P = C$ (c'est 7.6) et P est bien un cube.

D'après 8.15 et 8.21, l'implication 2) \implies 0) fournit déjà une partie²⁵ de l'implication 4) \implies 0) :

8.26 Corollaire. *Soit P un polyèdre convexe.*

1) *On suppose que toutes les faces de P sont des carrés (resp. des pentagones réguliers). Alors P est un cube (resp. un dodécaèdre régulier).*

2) *On suppose que toutes les faces de P sont des triangles équilatéraux et qu'il y a 3 faces en chaque sommet. Alors P est un tétraèdre régulier.*

8.4.4 L'implication 4) \implies 0)

Dans les deux cas qui restent, celui de l'octaèdre et celui de l'icosaèdre, la démonstration de l'implication 4) \implies 0) n'est pas évidente.

L'octaèdre

Le cas de l'octaèdre est plus difficile, mais abordable (en utilisant la formule d'Euler, voir 8.17). Voilà le résultat :

8.27 Lemme. *Soit P un polyèdre convexe admettant six sommets s, a, b, c, d, t et huit faces qui sont des triangles équilatéraux : sab, sbc, scd, sda et tab, tbc, tcd, tda . Alors P est un octaèdre régulier.*

Démonstration.

Attention, le fait que les quatre faces sab, sbc, scd et sda soient des triangles équilatéraux ne suffit pas à assurer que a, b, c, d sont coplanaires comme on l'a vu en 8.13 et comme on le vérifie expérimentalement en fabriquant un modèle. Il y a besoin du sixième sommet pour assurer la rigidité.

Considérons le triangle sac , isocèle en s . Quitte à faire un changement de repère orthonormé en prenant l'origine o au milieu de $[ac]$ et les droites (os) et (oc) comme axes des z et des y , on peut supposer qu'on a $s = (0, 0, 1)$, $a = (0, -\alpha, 0)$ et $c = (0, \alpha, 0)$ avec $\alpha > 0$. Comme les points b, d sont équidistants de a, c , ils sont dans le plan médiateur de $[ac]$, à savoir le plan $y = 0$. On peut donc écrire $b = (\beta, 0, \zeta)$ et $d = (\beta', 0, \zeta')$. En écrivant $sb = ab$ on obtient $\alpha^2 = 1 - 2\zeta$ et avec $sd = ad$, $\alpha^2 = 1 - 2\zeta'$, d'où $\zeta = \zeta'$. Avec $sb = sd$ on en déduit $\beta^2 = \beta'^2$, donc, puisque b, d sont distincts, $\beta' = -\beta$ et on suppose par exemple $\beta > 0$. On a donc $b = (\beta, 0, \zeta)$ et $d = (-\beta, 0, \zeta)$ (avec $\zeta \neq 0$, *a priori*).

Le dernier sommet t de P est équidistant des points a, b, c, d , il est dans les plans médiateurs de $[ac]$ et $[bd]$, donc dans les plans $y = 0$ et $x = 0$ et on pose $t = (0, 0, \omega)$ avec $\omega \neq 1$. L'égalité de longueurs $sa = sb$ donne $\alpha^2 = \beta^2 + \zeta^2 - 2\zeta$ tandis que $ta = tb$ donne $\alpha^2 = \beta^2 + \zeta^2 - 2\omega\zeta$ et comme

25. Et on a le rabiote 8.12, donc aussi l'équivalence de toutes les propriétés de 8.10.

ω est $\neq 1$, on en déduit $\zeta = 0$. Il s'ensuit alors $\alpha = \beta$ et, avec $sa = ab$, on obtient $\alpha = 1$. Enfin, avec $sa = ta$ on trouve $\omega = -1$ et les six sommets de P sont $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ et $(0, 0, \pm 1)$, qui forment l'octaèdre standard.

L'icosaèdre

Le cas de l'icosaèdre est encore beaucoup plus ardu, et je n'en ai pas de preuve élémentaire. On comprend bien la difficulté si l'on construit un icosaèdre, par exemple avec le matériel Polydron. En effet, on constate que l'assemblage reste flexible jusqu'à la dix-huitième et avant-dernière face. Le résultat vient du théorème de rigidité de Cauchy :

8.28 Théorème. (Cauchy) *Soient P, P' deux polyèdres convexes, f une bijection de $\text{Fr}(P)$ dans $\text{Fr}(P')$ respectant faces, arêtes et sommets. On suppose que, pour chaque face F , la restriction de f à F est une isométrie. Alors, il existe une isométrie $\hat{f}: P \rightarrow P'$ qui prolonge f .*

Démonstration. La démonstration est vraiment difficile, voir [2] 12.8.3 ou [1] ch.12.

Bien entendu, l'implication $4) \implies 0)$ est une conséquence évidente de ce théorème (dans tous les cas). Soit P un polyèdre convexe vérifiant 4). On raisonne comme dans la preuve de 8.23 en introduisant P' régulier de même symbole que P et on peut supposer qu'ils ont même longueur d'arête. Alors l'hypothèse 4) jointe à la formule d'Euler, voir 8.17, montre l'existence d'une bijection des frontières respectant faces, arêtes et sommets et le théorème de Cauchy permet de conclure.

8.5 Remords

Le texte ci-dessus n'épuise pas le sujet, tant s'en faut. Le lecteur trouvera des compléments dans [7], notamment la formule d'Euler et la détermination des polyèdres archimédiens. Il trouvera dans [2] la classification des polyèdres en dimension > 3 et beaucoup de belle géométrie. Il pourra consulter, sur ma page web, l'excellent mémoire de master de Cyrielle Danel et Olivier Dupuy sur les deltaèdres (les polyèdres convexes dont toutes les faces sont toutes des triangles équilatéraux), voir :

<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/Deltaedre8.pdf>

Enfin, il trouvera dans la littérature ou sur Internet d'autres éléments sur les polyèdres non convexes (éventuellement réguliers), sur les volumes et bien d'autres choses passionnantes encore.

Références

- [1] Aigner Martin, Ziegler Günther M., *Raisonnements divins*, Springer, 2006.
- [2] Berger Marcel, *Géométrie, tome 2*, Cassini, 2016
- [3] Euclide, *Les éléments*, Traduction et présentation de Georges Kayas, éditions du CNRS, 1978.
- [4] David Marie-Claude, Haglund Frédéric, Perrin Daniel, *Géométrie affine*, Orsay, 2008.
<https://www.math.u-psud.fr/~perrin/CAPES/geometrie/GeometrieAffine.pdf>
- [5] Hadamard Jacques, *Leçons de géométrie, II, géométrie dans l'espace*, 8-ième édition, Armand Colin, 1988.
- [6] Perrin Daniel, *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.
- [7] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2005, 2011.