Des axiomes pour la géométrie du collège ?

Daniel PERRIN

Attention, ce texte a été écrit très rapidement et il recèle sans doute de nombreuses coquilles, imprécisions, maladresses, voire des erreurs plus graves. Je serai reconnaissant[1] *à toute personne qui me fera des remarques et/ou des critiques de fond et/ou de forme à son sujet.*

Introduction

Avertissement

Ce texte, évidemment, s'adresse **aux professeurs**[2] (et aux futurs professeurs) de collège et pas du tout[3] aux élèves. Il s'agit seulement de montrer que, derrière les choses que l'on admet (et il est normal et souhaitable d'admettre des propriétés à ce niveau), il peut y avoir une cohérence.

Les objectifs de ce texte

Le but de ce texte est de donner un arrière-plan mathématique[4] consistant à la géométrie (plane) du collège qui permette de proposer une progression cohérente et conforme aux programmes, actuels et peut-être futurs, selon les mots-clés rappelés ci-dessous. Certes, il n'est pas évident qu'il soit nécessaire de sous-tendre l'enseignement à ce niveau par des axiomes car la géométrie, à ses débuts, doit plutôt s'appuyer sur l'intuition. Mais dès qu'on réfléchit à une progression possible, cette question des bases se pose[5]. L'un des arguments forts en faveur d'une axiomatique est de permettre de clarifier l'éternelle discussion entre les deux pôles de la géométrie : admettre ou démontrer.

---

1. Merci à Antoine Sirianni et à Marie-Jeanne Perrin-Glorian pour une première série de critiques.
2. Et je ne ferai donc pas semblant de les croire ignorants : nombre de termes, de notions, de propriétés ne seront ni définis, ni rappelés, ni développés ici.
3. Du tout, du tout, du tout ...
4. Contrairement à un autre travail en projet (voir [19]) il n'y a ici aucune ambition mathématique (on ne cherche pas un système minimal d'axiomes, on ne s'astreint pas à donner des preuves complètes, etc.).
5. D'autres auteurs ont mené de semblables tentatives, voir [5], [7], [1], etc.

Les mots-clés des programmes

Voici les principaux mots-clés des programmes [6] des cycles 3 et 4 concernant la géométrie plane. On s'est efforcé de faire apparaître chacun d'eux dans le texte qui suit.

Au cycle 3

Longueur, périmètre (notamment du cercle), aire (carré, rectangle, triangle, disque), découpage et recollement, angle, aigu, droit, obtus, mesure d'angle, compas.

Déplacement, figures, triangles (isocèle, rectangle, équilatéral), quadrilatères (rectangle, losange, première approche du parallélogramme), cercle.

Perpendiculaire, parallèle, plus court chemin (entre deux points, un point et une droite, deux droites parallèles).

Alignement, appartenance.

Égalité de longueurs et d'angles, distance (entre deux points, un point et une droite).

Symétrie axiale (construction, symétrique d'une droite, d'un segment, d'un point), axe de symétrie, conservation des invariants, médiatrice.

Agrandissement et réduction.

Au cycle 4

Abscisse, ordonnée.

Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.

Position relative de deux droites dans le plan.

Caractérisation angulaire du parallélisme, angles alternes-internes.

Médiatrice d'un segment.

Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente).

Parallélogramme : propriétés relatives aux côtés et aux diagonales.

Théorème de Thalès et réciproque.

Théorème de Pythagore et réciproque.

---

6. Voir le BO du 26 novembre 2015.

Principes

Ma position s'appuie sur un certain nombre de réflexions, mathématiques et didactiques, que j'ai exprimées par ailleurs, voir [6], [3], [10], [11], [13], [17]. Dans ces réflexions je me suis fait une opinion sur ce que devrait être l'enseignement de la géométrie au collège. Les points essentiels en sont la primauté de la vision géométrique et donc de la figure, l'importance du raisonnement, le fait d'avoir de bons outils : invariants, cas d'isométrie et de similitude, calcul, transformations. Deux points me semblent essentiels.

• Je suis tout à fait hostile à une approche par le linéaire (à la Dieudonné, voir [2]) à ce niveau et même au niveau du lycée. L'expérience des mathématiques modernes a été suffisamment éclairante à ce sujet. Cela condamne donc toutes les axiomatiques à base d'espaces affines et vectoriels, même si, comme mathématicien, ce sont celles que je trouve les plus simples [7].

• Je suis assez hostile à l'enseignement qui a prévalu jusqu'à la fin des années 1990 et qui était fondé sur une introduction progressive des transformations [8] (symétrie axiale en sixième, symétrie centrale en cinquième, translation en quatrième, rotation en troisième). Je renvoie à plusieurs textes (cf. [6], [10], [17], [15], etc.) où j'explique cette position. Je suis plutôt favorable à la réintroduction [9] précoce des cas d'égalité et de similitude des triangles, dès le début du cycle 4 et à une utilisation plus intensive des invariants [10] (longueurs, angles, aires). L'un des intérêts de cette axiomatique est de permettre de justifier les notions de géométrie abordées dans le primaire (construction et reproduction de figures avec des instruments, etc.), voir [8].

Attention, dans ce qui suit on verra apparaître, sous le nom de mouvements, des transformations cachées. Le but n'est pas de les étudier en tant que telles au collège, mais seulement de donner un sens à l'opération de superposition utilisée par Euclide pour prouver le premier cas d'égalité des triangles.

---

7. On notera que ce sont les seules que rencontrent les futurs professeurs à l'Université, ce qui n'est pas sans poser problème.

8. C'est ce qui me sépare de ce que propose Annie Cousin-Fauconnet, voir [1].

9. Ils sont revenus dans les programmes de 2015 et je m'en réjouis. Mais, à lire les manuels, je crains qu'ils ne soient pas utilisés comme ils le devraient, c'est-à-dire comme outils. La plupart des exercices se contentent de demander de prouver que des triangles sont égaux ou semblables sans rien en faire. Il y a pourtant bien d'autres possibilités, voir [3] ou les exercices mis sur la Dropbox.

10. Voir [17] ou [12] pour une justification théorique de ce point.

Retour à Euclide ? Oui, mais avec quelques différences

Bien sûr, il existe depuis bien longtemps un système d'axiomes destiné à fonder la géométrie : ce sont les *Éléments* d'Euclide, voir [4]. C'est vrai, mais je m'en écarte sur plusieurs points que j'explicite maintenant.

Le langage des ensembles

Le premier point est l'usage, sinon de la théorie des ensembles, un bien grand mot, du moins du langage des ensembles, familier maintenant à tous les mathématiciens, de tous les ordres d'enseignement. Ce langage offre une facilité considérable pour formuler les propriétés mathématiques. Comme je m'adresse à des professeurs, j'utiliserai sans vergogne les notions usuelles de relations d'équivalence, d'ordre, ainsi que quelques rudiments de théorie des groupes.

L'explicitation

Il y a dans Euclide de nombreux points qui ne sont pas explicités, ni comme axiomes, ni comme théorèmes. C'est le cas par exemple des questions de position, ou de certaines propriétés des aires et cela rend parfois le discours un peu flou. On a essayé de remédier (partiellement) à ce défaut.

Le premier cas d'isométrie et la méthode de superposition

C'est le point essentiel, celui où je m'écarte des maîtres : Euclide et ses continuateurs modernes, notamment Hilbert, voir [5], et d'autres, voir par exemple [7].

Comme je l'ai expliqué plus haut, je trouve très positif le retour des cas d'égalité et de similitude des triangles dans les récents programmes du collège et ce texte se veut une contribution pour que cette décision ne soit pas lettre morte et que cet outil incomparable soit réellement utilisé. Je reviens donc aux sources et d'abord au premier cas d'égalité des triangles ([4], Livre 1, prop. 4) :

Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés et les triangles seront aussi égaux, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.

Voici, recopiée intégralement, la preuve d'Euclide :

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que l'on ait : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. Je dis qu'il est aussi $AC = A'C'$ et que ces *triangles sont égaux et ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est-à-dire que l'on aura aussi :* $AC = A'C'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ *et* $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.

En effet, si l'on appliquait le triangle ABC *sur le triangle* $A'B'C'$ *de manière à faire coïncider d'abord les points* B *et* B'*, puis les côtés* BC *et* $B'C'$*, le point* C *coïnciderait avec* C'*, car* $BC = B'C'$*. Les côtés* BA *et* $B'A'$ *coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles* $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$*, de sorte que le point* A *à son tour coïnciderait avec* A'*, car* $BA = B'A'$*. D'autre part, les points* C *et* C' *ayant déjà coïncidé, les côtés* AC *et* $A'C'$ *coïncideront aussi et ils seront égaux.*

Cette “preuve”, qui utilise la méthode dite de superposition, est celle que l'on donnait autrefois en classe de cinquième et elle convainquait la plupart des élèves. Cependant, le mathématicien attentif y décèle évidemment un point faible : que signifie le fait d'*appliquer*[11] le triangle ABC sur $A'B'C'$[12] ?

Cette faille dans Euclide a été notée dès 1557 par Jacques Peletier et, en tous cas, David Hilbert, quand il a entrepris la refonte de l'œuvre d'Euclide vers 1900, en était parfaitement conscient. La solution qu'il a adoptée est de prendre le premier cas d'égalité des triangles comme axiome et de bâtir le reste de la géométrie dessus. C'est une solution correcte, mais trop brutale à mon goût. Le but de ce qui suit est d'indiquer les bases d'une axiomatique qui permette de rendre valide la preuve d'Euclide et la méthode de superposition, tellement naturelle qu'elle ne peut pas vraiment être incorrecte. Ce qui est nécessaire pour cela est de donner un sens à l'opération consistant à appliquer ou transporter une demi-droite sur une autre, propriété qui manifeste l'homogénéité du plan. Avec nos connaissances actuelles, on subodore la présence d'un **groupe** de transformations. Précisément, je propose de postuler qu'il existe un tel groupe qui opère **transitivement** sur les **drapeaux** (un point, une demi-droite d'origine ce point, un demi-plan limité par cette demi-droite)[13].

11. On notera que le mot utilisé ici (et qui semble admis par tous les traducteurs) est celui qui sera retenu dans le langage moderne.

12. Il y a beaucoup d'autres zones d'ombre dans cette démonstration. Par exemple, lorsqu'Euclide parle de faire coïncider les côtés, il pense sans doute aux demi-droites qui les portent, mais il faut aussi faire attention aux demi-plans. En particulier, Euclide n'envisage pas le cas où les triangles sont échangés par une isométrie négative.

13. Cette idée n'est pas nouvelle. Houël, au XIX-ème siècle, Schur dans ses *Grundlagen der Geometrie*, Bkouche ou Hartshorne plus près de nous, et d'autres sans doute, l'ont émise.

Les nombres

La question des nombres est un autre point sur lequel je m'écarte d'Euclide. Je crois en effet que le nombre était le talon d'Achille de la mathématique grecque. Bien sûr, la théorie des grandeurs d'Euclide n'est pas loin d'une définition des réels telle que la donnera Dedekind vingt siècles plus tard, mais elle est bien peu commode à utiliser.

Sur ce thème du nombre, il y a deux avancées considérables des mathématiciens qui sont venus après les Grecs.

La première est l'invention par Stevin des nombres décimaux qui permettent des calculs réservés auparavant aux seuls experts. On dispose, avec les décimaux, d'un ensemble de nombres dense dans $\mathbf{R}$, qui certes ne suffit pas complètement pour faire de la géométrie (l'exemple de la diagonale du carré est là pour le rappeler), mais qui permet de calculer.

L'autre point est l'intervention de Descartes et de la géométrie analytique qui est aussi un progrès considérable. Pour schématiser, après Descartes, on peut penser à un produit ou un carré sans que cela désigne forcément une aire, ou à un cube sans qu'il corresponde à un volume. On peut aussi penser à une puissance quatrième bien que cette notion n'ait pas de sens géométrique. C'est un grand progrès, qui a notamment permis de résoudre les quatre grands problèmes de construction à la règle et au compas laissés par les Grecs (duplication du cube, trisection de l'angle, quadrature du cercle, construction des polygones réguliers).

Sur ces deux points, qu'on ne me fasse pas dire ce que je n'ai pas dit : ces progrès ne doivent pas être accomplis en un instant dans le système scolaire. Sur la question des nombres, je n'oublie pas que la notion de grandeur est essentielle, et qu'elle doit précéder celle de mesure (donc de nombres), notamment en ce qui concerne les longueurs, les aires et les volumes. Mais il me semble que nous pouvons considérer qu'en même temps qu'ils apprennent la géométrie, les collégiens perfectionnent leurs connaissances sur les nombres et que l'un nourrit l'autre.

Je suppose donc qu'on dispose dès le début du collège d'une notion de nombre. En fait, en étant maximaliste ce vers quoi il faut tendre c'est la notion de nombre réel. On n'en est pas là, mais il est nécessaire d'avoir à disposition les entiers (relatifs) et les décimaux. Ensuite viendront des nombres algébriques non rationnels (comme les racines carrées). Mais, dans un premier temps, l'essentiel est d'avoir une image de nombres réels **dense** (au sens non discrète). C'est pourquoi les décimaux semblent une bonne piste.

Sur la question de la géométrie analytique, il me semble qu'il faut réserver cette approche au lycée (où il n'y a d'ailleurs plus rien d'autre à l'heure actuelle) et je n'y reviendrai pas dans ce texte.

Les aires

Un autre point important du système d'axiomes proposé ci-dessous est l'utilisation précoce de la notion d'aire, particulièrement efficace pour traiter les problèmes de nature affine, (comme Thalès) voire certains problèmes euclidiens (comme Pythagore). On se reportera à [18] ou [9] et notamment à ce que j'appelle les "lemmes du collège". Cela conduit ici à enrichir le système avec des axiomes portant sur les aires, en dépit du fait qu'ils peuvent être conséquence des autres.

1 Axiomes d'incidence et d'ordre

La géométrie est une modélisation de l'espace. Les axiomes qui la gouvernent doivent donc être les plus proches possibles de la réalité qu'ils sont censés modéliser et il n'est pas du tout interdit de recourir aux images anciennes et un peu désuètes de la pointe d'un crayon, du fil à plomb ou tout autre, comme on le faisait autrefois, pour expliquer leur signification. Cela étant, ici, je me contente de donner les axiomes d'un modèle, sans entrer dans le débat sur l'adéquation de ce modèle à la réalité.

1.1 Les axiomes d'incidence

On postule l'existence d'un ensemble, appelé **plan** et noté $\mathcal{P}$. Ses éléments sont appelés les **points**. Il contient des parties remarquables appelées **droites**. L'expérience conduit à proposer l'axiome suivant [14] :

1.1 Axiome. (I) *Par deux points distincts du plan passe une droite et une seule.*

La droite définie par les points distincts A, B est notée (AB). On utilisera beaucoup la notion de triangle : un triangle est formé de trois points non alignés A, B, C et on le note ABC.

Il résulte de (**I**) que deux droites distinctes ont au plus un point commun. Cela mène à la définition des droites parallèles (on y englobe le cas des droites confondues pour plus de commodité) :

1.2 Définition. *Soient d, d' deux droites de $\mathcal{P}$. On dit qu'elles sont* **parallèles** *si elles sont confondues ou si elles n'ont aucun point commun.*

On ajoute tout de suite le postulat d'Euclide :

14. Pour ne pas risquer de ne considérer que des situations trop pauvres, on supposera bien sûr qu'il existe trois points non alignés.

1.3 Axiome. (P) *Soit d une droite et A un point non situé sur d. Il existe une unique droite parallèle à d passant par A.*

Une première conséquence du postulat d'Euclide est la suivante :

1.4 Proposition. *La relation de parallélisme est transitive.*

Démonstration. Supposons d, d' parallèles, ainsi que d' et d''. Il s'agit de montrer que d et d'' sont parallèles. Sinon, elles se coupent en un point A et sont distinctes, donc, par A, il passe deux parallèles à d', ce qui contredit l'axiome **(P)**.

1.2 Les axiomes d'ordre

1.2.1 Introduction

La problématique de ce paragraphe concerne les propriétés de position (au dessus, en dessous, de part et d'autre, du même côté, à l'intérieur, etc.) que l'on peut "lire sur la figure". Ces propriétés relèvent des connaissances spatiales et font l'objet d'un apprentissage dès l'école maternelle. C'est un point souvent incontournable car, selon la position, telle longueur ou tel angle sera somme ou différence de deux autres [15]. C'est aussi un point très épineux dans l'enseignement des mathématiques. Au niveau du collège, mon opinion est qu'on peut effectivement se contenter de constater les propriétés de position sur la figure. Cela gêne toujours certains collègues qui disent : *Mais, si on demande aux élèves de lire sur la figure, à quoi sert de leur demander de prouver d'autres propriétés ?* Je leur réponds deux choses :

• Je fais une différence, au moins à ce niveau, entre lire les propriétés "fermées" [16] (alignement, concours, égalités d'angles ou de longueurs), qu'on ne se contentera pas de constater et les propriétés "ouvertes" (du même côté, à l'intérieur, etc.), que l'on pourra sans encombre lire sur la figure à ce niveau.

• Le professeur scrupuleux et angoissé peut, lui, toujours établir rigoureusement (pour son usage personnel) les assertions de position. Il suffit pour cela d'avoir précisé soigneusement les axiomes et de faire un petit effort, voir les exercices ci-dessous.

Attention, je répète que ce que je propose maintenant est à l'usage des professeurs et absolument pas destiné aux élèves. Ce serait un contre-sens de

15. Et Euclide est souvent léger sur ce point.

16. Ces mots font référence à la formulation analytique : les propriétés fermées sont définies par des égalités et les propriétés ouvertes par des inégalités. Par exemple, un point (x, y) est sur une droite s'il vérifie $ax + by + c = 0$, il est d'un côté s'il vérifie $ax + by + c > 0$ ou < 0.

démontrer les assertions de position évidentes sur la figure dans une classe de collège. Au contraire, l'objectif est de convaincre les professeurs que c'est toujours possible et que donc ce n'est pas un drame, ni un crime de lèse-mathématiques, que de lire certaines choses sur la figure, puisque si l'on y était contraint, on serait capable de tout démontrer.

1.2.2 Les axiomes

1.5 Axiome. (D) *Les droites du plan sont des ensembles munis d'une relation d'ordre total sans plus petit ni plus grand élément.*

Il y a deux relations opposées et on se garde bien de préciser laquelle on choisit. Ces relations permettent d'avoir les notions de demi-droite $[AB)$ (si, par exemple, on a $A < B$, la demi-droite est formée des M qui vérifient $A \leq M$) et de segment $[AB]$ (le lecteur en écrira la définition formelle). On montre aisément que les segments non réduits à un point et les demi-droites sont infinis. On a aussi la notion de convexité (une partie $\mathcal{A}$ du plan est convexe si pour tous $A, B \in \mathcal{A}$ on a $[AB] \subset \mathcal{A}$).

On définit ensuite les demi-plans :

1.6 Axiome. (DP) *Si d est une droite, il existe des parties $\mathcal{P}_d^+$ et $\mathcal{P}_d^-$ de $\mathcal{P}$ appelés demi-plans ouverts limités par d, qui vérifient les propriétés suivantes :*

1) On a une partition de $\mathcal{P}$: $\mathcal{P} = \mathcal{P}_d^+ \cup \mathcal{P}_d^- \cup d$.

2) Les parties $\mathcal{P}_d^+$ et $\mathcal{P}_d^-$ sont convexes.

3) Si A est dans $\mathcal{P}_d^+$ et B dans $\mathcal{P}_d^-$, le segment $[AB]$ rencontre d.

Lorsque deux points $A, B \notin d$ sont dans un même demi-plan ouvert (resp. dans deux demi-plans ouverts distincts) on dira que A et B sont du même côté de d (resp. de part et d'autre de d).

On peut alors définir aussi les demi-plans fermés.

À partir de cette notion de demi-plan, on peut régler toutes les questions de position : tel segment coupe-t-il telle droite, tel et tel point sont-ils du même côté de telle droite, etc. L'axiomatique montre ici toute sa puissance. Pour s'en convaincre, voir ce qui suit (notamment 2.23) et surtout les exercices.

1.2.3 Quelques propriétés

1.7 Proposition. *Soient d, d' deux droites parallèles distinctes. Alors d' est contenue dans l'un des demi-plans ouverts limités par d.*

Démonstration. Soit $A \in d'$ et $\mathcal{P}_d^+$ le demi-plan ouvert limité par d qui contient A. Alors, si M est sur d' il est dans $\mathcal{P}_d^+$. En effet, M n'est pas dans d puisque les droites sont parallèles. Il n'est pas dans $\mathcal{P}_d^-$ sinon le segment $[AM]$ couperait d en vertu de 1.6.3, ce qui, comme on a $[AM] \subset d'$, contredit aussi le parallélisme.

De manière analogue, le lecteur établira sans peine la propriété suivante :

1.8 Proposition. *Soit d une droite, O un point de d et A un point du demi-plan $\mathcal{P}_d^+$ limité par d. Alors, la demi-droite $]OA)$ est entièrement contenue dans $\mathcal{P}_d^+$ et la demi-droite opposée est contenue dans $\mathcal{P}_d^-$.*

1.2.4 Les secteurs angulaires

Nous donnons maintenant la définition des secteurs. Les secteurs sont les objets géométriques qui vont donner naissance aux angles (de même que les segments donnent naissance aux longueurs).

1.9 Définition. *Soient $[OA)$ et $[OB)$ deux demi-droites d'origine O, non portées par la même droite. Soient U^+ (resp. V^+) le demi-plan (fermé) limité par (OA) contenant B (resp. par (OB) contenant A). On appelle* **secteur saillant** *défini par ces demi-droites l'intersection $U^+ \cap V^+$ et on le note $[\widehat{AOB}]$. Le point O est le* **sommet** *du secteur, les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ sont ses* **côtés***.*

1.10 *Remarques.* 1) On peut définir aussi le secteur rentrant déterminé par les demi-droites comme la réunion des demi-plans opposés à U^+ et V^+.

2) Si les demi-droites sont confondues, le secteur saillant qu'elles définissent est égal à $[OA)$ (on parle de secteur **nul**). Si elles sont opposées, on convient qu'elles définissent deux secteurs, à la fois saillants et rentrants : les deux demi-plans limités par (OA). On parle alors de secteurs **plats**.

Le lemme principal sur les secteurs saillants est le suivant [17], bel exemple de raisonnement sur les positions :

1.11 Lemme. *Soit $[\widehat{AOB}]$ un secteur saillant et soit C un point de ce secteur, non situé sur les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$. Alors, les points A et B sont situés de part et d'autre de la droite (OC) et, plus précisément, le segment $[AB]$ coupe la demi-droite $[OC)$.*

Démonstration. Montrons que A et B sont de part et d'autre de (OC). L'idée est d'introduire un point A' de la demi-droite opposée à $[OA)$. Comme C et

17. On s'inspire fortement ici du livre d'Annie Cousin-Fauconnet [1].

A sont du même côté de (OB), C et A' sont de part et d'autre et donc $[A'C]$ coupe (OB) en B'. De plus B' est dans $[OB)$ car tous les points de $[A'C]$ sont dans le demi-plan limité par (OA) qui contient B, C. Mais alors, si W^+ (resp. W^-) est le demi-plan limité par (OC) qui contient A (resp. l'autre), comme A' est dans W^-, $[CA')$ aussi, donc B' aussi, donc $[OB')$ aussi et donc B est dans W^- et on conclut par 1.6.3.

Le lecteur qui voudrait voir comment on peut, avec les axiomes qui précèdent, montrer les résultats de position les plus utiles au niveau du collège, se reportera aux exercices.

2 Axiomes de "groupes"

2.1 Drapeaux et axiome de transitivité

2.1.1 Introduction

Ce paragraphe est le seul qui soit (un peu) original dans ce texte. Son but est clair : mettre dans la machine ce qui est nécessaire pour que la preuve d'Euclide du premier cas d'égalité vue ci-dessus devienne correcte.

2.1.2 L'axiome

2.1 Définition. *On appelle* **drapeau** *de $\mathcal{P}$ un triplet $(A, \delta, \mathcal{F})$ formé d'un point $A \in \mathcal{P}$, d'une demi-droite δ d'origine A et d'un demi-plan $\mathcal{F}$ limité par la droite définie par δ.*

L'axiome suivant permet maintenant de réaliser l'opération d'Euclide :

2.2 Axiome. (G) *Il existe un groupe de bijections du plan (qu'on appellera provisoirement* **mouvements***), noté G, qui a les propriétés suivantes :*

1) L'image d'une droite d par un mouvement u est une droite $u(d)$ et la restriction de u à d est monotone.

2) L'image par u d'un demi-plan limité par d est un demi-plan limité par $u(d)$.

3) Le groupe G est simplement transitif[18] *sur les drapeaux (point, demi-droite, demi-plan).*

2.3 Définition. *Deux figures (c'est-à-dire deux parties du plan) qui se déduisent l'une de l'autre par un mouvement seront dites* **superposables***.*

18. Cela signifie qu'étant donnés deux drapeaux il existe un unique mouvement qui envoie l'un sur l'autre.

2.4 *Remarques.* 1) Le groupe G que nous avons en vue est bien entendu le groupe des isométries du plan. Les mouvements dont il est question sont donc les translations, les rotations, les réflexions et leurs composées.

2) Cet axiome est très naturel eu égard à l'expérience : c'est lui qui assure que le plan est homogène et qu'on peut y déplacer et éventuellement retourner les objets (les figures). Si l'on pense, pour figurer un drapeau, à une règle rectangulaire, présentant deux bords différents (par exemple un bord gradué et l'autre non) et deux faces différentes (par exemple de couleurs différentes), la transitivité des mouvements (au sens commun du terme) est bien naturelle : on amène l'extrémité de la première règle sur celle de la seconde, puis le bord gradué sur le bord gradué et enfin, au besoin, on retourne la règle pour qu'elle soit du bon côté. L'idée qui préside à cette définition est bien **l'homogénéité** de l'espace géométrique : points, droites, demi-plans sont "pareils" en quelque endroit qu'ils se trouvent.

Bien entendu, pour les élèves, on se contentera de montrer comment on peut, physiquement, déplacer ou retourner une figure, par exemple sur une table ou sur le tableau, le cas essentiel étant celui d'un triangle, par exemple en carton, pour justifier le premier cas d'égalité.

3) L'unicité est sans doute moins naturelle, mais elle est peut-être plus importante encore, car c'est elle qui assure que l'on travaille en géométrie euclidienne et pas en géométrie affine, par exemple. Ainsi, dans l'exemple du plan affine réel, si l'on omet l'unicité, le groupe G n'est pas nécessairement le groupe des isométries. On peut prendre aussi bien le groupe des similitudes et même le groupe des applications affines.

Le résultat suivant sera utile :

2.5 Corollaire. *Si l'image d'une demi-droite δ^+ (resp. d'un demi-plan $\mathcal{P}^+$) par un mouvement est une demi-droite γ^+ (resp. un demi-plan $\mathcal{Q}^+$), l'image de la demi-droite opposée δ^- (resp. du demi-plan $\mathcal{P}^-$) est γ^- (resp. $\mathcal{Q}^-$).*

2.2 Conséquences 1 : longueurs et angles

Pour une discussion plus approfondie sur grandeurs et mesures, on pourra se reporter à l'annexe du chapitre 4 de [18]. Nous retiendrons trois principes concernant les grandeurs :

1) Elles doivent pouvoir être comparées (dire si elles sont égales ou si l'une est plus petite que l'autre).

2) Elles doivent pouvoir être ajoutées.

3) Elles doivent être invariantes par les mouvements.

2.2.1 Longueurs

Fort de ces principes, comment définir la notion de longueur ? L'expérience la plus banale l'indique clairement. En effet, comment dire si une personne est plus petite qu'une autre, plus grande, ou de même taille. Pour cela, il suffit de mettre dos à dos les personnes et de les comparer. Ce faisant, on a postulé implicitement que la longueur est invariante par déplacement. Avec l'axiome sur les mouvements donné ci-dessus, on peut formaliser cette notion :

2.6 Définition. *On dit que deux segments $[AB]$ et $[CD]$ sont de même longueur s'il existe un mouvement u tel que $u(A) = C$ et $u(B) = D$. On dit que le segment $[AB]$ est plus court que $[CD]$ s'il existe un mouvement u tel que $u([AB]) \subset [CD]$. On note AB la longueur*[19] *du segment $[AB]$.*

2.7 *Remarques.* 1) Bien sûr, la notion d'égalité de longueur est une relation d'équivalence sur les segments et la comparaison est une relation d'ordre sur les longueurs.

2) Avec cette définition, l'invariance par les mouvements est évidente.

3) Pour être tout à fait correct il y a des choses à vérifier. Par exemple l'égalité de longueurs $AB = CD$ doit aussi être équivalente à l'existence d'un mouvement v tel que $v(A) = D$ et $v(B) = C$.

On peut ensuite définir l'addition des longueurs qui correspond à la mise bout à bout de deux segments (sur la même droite) :

2.8 Définition. *Si le point M est dans le segment $[AB]$ on définit la somme : $AM + MB = AB$.*

Il faut vérifier que cette notion est bien définie et montrer (entre autres) que la somme de deux longueurs ne peut être nulle que si chacune l'est.

Bien qu'il soit conséquence des autres, il est commode d'ajouter un axiome concernant les longueurs sur une droite :

2.9 Axiome. *Soit AB une longueur et soit $[OC)$ une demi-droite. Il existe un unique point $M \in [OC)$ tel que $OM = AB$.*

On peut aussi définir un cercle :

2.10 Définition. *Soit O un point et R une longueur. Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M du plan tels que $OM = R$.*

2.11 *Remarque.* On pourrait mettre ici un axiome qui assure que deux cercles de centres O, O' et de rayons R, R' se coupent en deux points pourvu qu'on ait $|R' - R| < OO' < R + R'$. D'ailleurs, Euclide utilise implicitement cet axiome. Cela étant, le lecteur perspicace vérifiera qu'avec l'axiome 2.9, ce résultat devient un théorème, voir exercice 6.7.

---

19. De manière formelle, c'est une classe d'équivalence pour la relation précédente.

2.2.2 Mesure des longueurs, abscisse et distance

Dès qu'on a défini une grandeur se pose le problème de sa mesure. En effet, la réalisation d'un mouvement amenant un objet sur un autre n'est pas toujours possible, par exemple, s'il s'agit de comparer la largeur du tableau et la hauteur de la porte. Dans ce cas on peut utiliser un intermédiaire (une ficelle), mais c'est plus problématique s'il s'agit de comparer la distance entre Paris et Lille et celle entre Nantes et Brest ? C'est ici que s'impose la notion de **mesure**. Le principe est d'utiliser un étalon, une **unité**. Dans le cas de la longueur, dans la pratique, les premières tentatives en ce sens ont sans doute utilisé les moyens du bord : le pied, l'empan d'une main, un bâton, une ficelle, etc. Dans notre cas, on choisit un segment dont on décrète que la longueur est une unité et on compare ensuite la longueur d'un segment à celle d'une ou plusieurs unités mises bout à bout. Autrement dit, on associe à un objet, vis-à-vis d'une grandeur donnée, un nombre : le nombre d'unités qu'il comporte. Si on considère une droite avec une origine O et un point unité I, la mesure du point M obtenu en reportant n fois la longueur OI grâce à 2.9 sera égale à n.

Bien entendu, si les premières mesures historiques se sont limitées à des nombres entiers d'unités, il a rapidement fallu utiliser des fractions, voire des réels. Par exemple, la mesure de OM est égale à $1/n$ si on obtient I en reportant n fois la longueur OM. C'est là que l'on peut maintenant surpasser Euclide, en introduisant les nombres décimaux, voire les réels, mais pour cela il faut ajouter des axiomes (axiome d'Archimède, existence de milieu, axiome de continuité, etc.). Sur ce sujet, je renvoie le lecteur à [19].

Une fois la mesure de longueur définie, on obtient l'abscisse d'un point d'une droite sur laquelle on a choisi une origine O et un point unité I. Si M est un point de la demi-droite $[OI)$ l'abscisse λ de M est le nombre tel que $OM = \lambda \times OI$. Sur la demi-droite opposée, l'abscisse sera l'opposée de λ.

On peut aussi définir la distance de deux points A et B comme la mesure de la longueur AB avec l'unité fixée. Mais il va falloir patienter pour avoir l'inégalité triangulaire.

2.2.3 Les angles

La définition de la grandeur angle est l'exact pendant de la longueur, mais avec les secteurs à la place des segments :

2.12 Définition. *On dit que deux secteurs* $[\widehat{AOB}]$ *et* $[\widehat{A'O'B'}]$ *ont même angle et on note* $\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$ *s'il existe un mouvement* u *tel que* $u(O) = O'$, $u([OA)) = [O'A')$ *et* $u([OB)) = [O'B')$.

On dit que l'angle du secteur $[\widehat{AOB}]$ *est plus petit que celui de* $[\widehat{A'O'B'}]$ *et on note* $\widehat{AOB} < \widehat{A'O'B'}$ *s'il existe un mouvement* u *tel que* $u(O) = O'$, $u([OA)) = [O'A')$ *et* $u([OB)) \subset [\widehat{A'O'B'}]$.

L'angle nul (noté 0*) est celui des secteurs nuls, l'angle plat (noté* π*) celui des secteurs plats.*

Comme dans le cas des longueurs il y a nombre de propriétés à vérifier. *Il peut le faire*, comme disaient Pierre Dac et Francis Blanche !

Avec cette définition, on peut définir un angle droit :

2.13 Définition. *Soient* A, B, C *trois points non alignés, et soit* A' *un point de la demi-droite opposée à* $[BA)$*. On dit que l'angle* $\widehat{ABC}$ *est* **droit** *s'il est égal à* $\widehat{A'BC}$*. On dit alors que les droites* (AB) *et* (BC) *sont* **perpendiculaires**. *Un angle est dit* **aigu** *(resp.* **obtus***) s'il est plus petit (resp. plus grand) qu'un angle droit.*

2.14 *Remarques.* 1) L'axiome des mouvements montre que les angles droits sont tous égaux.

2) Pour l'unicité de la perpendiculaire voir 2.28, pour l'existence voir 2.30 et 2.36.

On peut aussi définir la somme de deux angles :

2.15 Définition. *Si le point* B *est dans le secteur* $[\widehat{AOC}]$ *on a* $\widehat{AOC} = \widehat{AOB} + \widehat{BOC}$.

Il faut vérifier que cette définition est licite (i.e. qu'elle ne dépend pas du choix des représentants) et montrer que la somme de deux angles ne peut être nulle que si chacun l'est.

2.16 *Remarque.* Bien que ces mots ne figurent pas dans les programmes, il est essentiel de parler ici d'angles supplémentaires (dont la somme est un angle plat) et complémentaires (dont la somme est un angle droit). En effet, ces notions sont essentielles pour utiliser les angles.

Comme pour les longueurs, on ajoute un axiome, *a priori* inutile :

2.17 Axiome. *Soit* $\widehat{AOB}$ *un angle,* $[\Omega X)$ *une demi-droite et* $\mathcal{P}^+$ *un demi-plan limité par* (ΩX)*. Il existe une unique demi-droite* $[\Omega Y)$ *située dans* $\mathcal{P}^+$ *telle que l'on ait* $\widehat{X\Omega Y} = \widehat{AOB}$.

2.18 *Remarque.* Un corollaire de ce résultat c'est que si deux angles α et α' sont égaux il en est de même de leurs supplémentaires et cela montre en particulier que les angles opposés par le sommet sont égaux.

2.2.4 Et la mesure des angles ?

Comme dans le cas des longueurs, on peut faire des comparaisons d'angles directement (par exemple à l'aide d'un compas), mais la nécessité de mesurer s'impose rapidement. Il ne faut pas cacher qu'il s'agit là d'une notion plus difficile, liée à la longueur des arcs de cercle. On renvoie à [16] pour plus de précisions. Dans une classe de collège on se contentera de partager l'angle droit de sommet O en 90 parties égales en partageant un quart de cercle de centre O (qui sert donc de rapporteur) en 90.

2.3 Conséquences 2 : les cas d'égalité et leurs applications

2.3.1 Le premier cas d'égalité

2.19 Théorème. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que l'on ait : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$. Alors il existe un mouvement u tel que $u(A) = A'$, $u(B) = B'$ et $u(C) = C'$ et on a les égalités $AC = A'C'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$. Les triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits (au choix ...) égaux, isométriques, superposables, congruents, etc.*

Démonstration. Il existe un mouvement u qui envoie B sur B', la demi-droite $[BA)$ sur $[B'A')$ et le demi-plan limité par (BA) qui contient C sur celui limité par $(B'A')$ qui contient C'. Posons $A'' = u(A)$ et $C'' = u(C)$. Le point A'' est sur la demi-droite $[B'A')$ et, par conservation des longueurs par u, on a $B'A' = B'A''$, donc $A' = A''$ en vertu de 2.9. De même, on a $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C''}$ par conservation des angles, donc, par 2.17, on a $[B'C') = [B'C'')$. Mais, comme $B'C' = B'C''$, on conclut qu'on a $C' = C''$ par 2.9.

2.3.2 Le deuxième cas

On peut aussi prouver le second cas d'isométrie, soit par la méthode de superposition, soit en utilisant le premier cas et un raisonnement par l'absurde :

2.20 Théorème. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que l'on ait : $BC = B'C'$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$. Alors il existe un mouvement u tel que $u(A) = A'$, $u(B) = B'$ et $u(C) = C'$ et on a les égalités $AB = A'B'$, $AC = A'C'$ et $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$.*

2.3.3 Triangle isocèle

2.21 Proposition. *Soit ABC un triangle. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) On a $AB = AC$.

2) On a $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.

On dit alors que le triangle est **isocèle**.

Démonstration. Pour 1) $\Longrightarrow$ 2) on applique 2.19 à BAC et CAB, pour 2) $\Longrightarrow$ 1) on applique 2.20 à ABC et ACB.

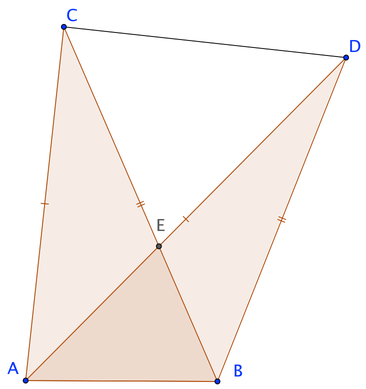
2.22 *Remarque.* On peut aussi définir un triangle rectangle ou équilatéral.

2.3.4 Le troisième cas d'égalité

2.23 Théorème. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que l'on ait : $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $CA = C'A'$. Alors il existe un mouvement u tel que $u(A) = A'$, $u(B) = B'$ et $u(C) = C'$ et on a les égalités $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$.*

Démonstration.

On se ramène à montrer que si l'on a deux triangles ABC et ABD avec $AC = AD$, $BC = BD$ et C, D du même côté de (AB) on a $C = D$, voir Figure ci-contre.



C'est une magnifique illustration de l'importance des questions de position. Le lecteur comblera les manques de la preuve suivante (inspirée d'Euclide). Supposons par exemple que B soit dans le secteur $[\widehat{ACD}]$. On a alors $\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD}$ en vertu de 2.15. Mais alors [20], A est dans le secteur

20. Voir l'exercice 6.6 pour le détail de la preuve, juste pour se convaincre qu'on peut prouver ce genre d'assertion.

$[\widehat{BDC}]$ et on a $\widehat{BDC} = \widehat{BDA} + \widehat{ADC}$. Comme les triangles CAD et CBD sont isocèles, on a $\widehat{ACD} = \widehat{ADC}$ et $\widehat{BDC} = \widehat{BCD}$ par 2.21 et on en déduit $\widehat{ACB} + \widehat{BDA} = 0$, ce qui est absurde.

2.3.5 Milieu et bissectrice

2.24 Définition. *On appelle milieu du segment $[AB]$ un point $M \in [AB]$ tel que $AM = MB$.*

On montre aussitôt :

2.25 Lemme. *Le milieu d'un segment, s'il existe, est unique.*

Démonstration. Si M, N sont deux milieux distincts de $[AB]$, on peut supposer par exemple $N \in [MB]$ et on a alors $AM = MB$ puis $AN = AM + MN = MB + MN > NB$ ce qui est absurde.

2.26 Axiome. *Tout segment admet un milieu.*

2.27 Définition. *Soit $\mathcal{S} = [\widehat{AOB}]$ un secteur saillant ou plat. On appelle bissectrice*[21] *de $\mathcal{S}$ (ou de l'angle $\widehat{AOB}$ par abus de langage) une demi-droite $[OX) \subset \mathcal{S}$ telle que l'on ait $\widehat{AOX} = \widehat{XOB}$.*

On montre facilement :

2.28 Lemme. *La bissectrice d'un secteur, si elle existe, est unique. En particulier, la perpendiculaire à une droite passant par un point, si elle existe, est unique.*

2.29 Axiome. *Tout secteur saillant ou plat admet une bissectrice.*

2.30 Corollaire. *Si d est une droite et O un point de d, il existe une unique droite d' perpendiculaire à d en O.*

Démonstration. C'est l'existence de la bissectrice de l'angle plat.

2.3.6 Conséquences 1 : médiatrice

2.31 Proposition. *Soit $[AB]$ un segment avec $A \neq B$. La droite d perpendiculaire à (AB) en le milieu M de $[AB]$ est exactement l'ensemble des points P du plan tels que l'on ait $PA = PB$. On l'appelle* **médiatrice** *de $[AB]$.*

21. Je n'ignore pas que le mot ne figure dans aucun programme, mais cela ne signifie pas que la notion n'existe plus.

Démonstration. Si P est un point de d, les triangles APM et BPM sont isométriques par le premier cas, d'où $AP = BP$. Inversement [22], si l'on a $PA = PB$ et si M désigne le milieu de $[AB]$, les mêmes triangles sont isométriques par le troisième cas et on en déduit l'égalité des angles en M qui sont donc droits.

2.3.7 Conséquences 2 : bissectrice

2.32 Proposition. *Soit $\mathcal{S} := [\widehat{AOB}]$ un secteur saillant. Si M est un point de $\mathcal{S}$ on note H et K ses projetés orthogonaux sur $[OA)$ et $[OB)$. Alors, la bissectrice de $\mathcal{S}$ est exactement l'ensemble des points M de $\mathcal{S}$ tels que $MH = MK$.*

Démonstration. Pour la preuve, on attendra de disposer de la somme des angles d'un triangle et de Pythagore.

2.3.8 Conséquences 3 : parallèles

Il s'agit d'établir les propriétés angulaires liées au parallélisme (angles alternes-internes, correspondants). On commence par un lemme [23] :

2.33 Lemme. *Soit ABC un triangle. Alors, la somme de deux angles n'est pas égale à un angle plat.*

Démonstration. Supposons qu'on ait $\widehat{A} + \widehat{C} = \pi$ (on note π l'angle plat). On prolonge le côté $[BC]$ en $[CD]$ avec $CD = AB$. Les triangles ABC et CDA sont isométriques. En effet, on a $AC = CA$, $AB = CD$ et les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DCA}$ sont égaux comme supplémentaires de $\widehat{ACD}$. On en déduit $\widehat{ACB} = \widehat{CAD}$, donc $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = \pi$, ce qui est absurde car les points B, A, D ne sont pas alignés.

On en déduit l'une des propriétés liant parallèles et perpendiculaires :

2.34 Corollaire. *Deux droites perpendiculaires à une même troisième sont parallèles.*

Démonstration. Sinon, on aurait un triangle avec deux angles dont la somme est un angle plat.

On en déduit aussi la propriété des angles alternes-internes :

22. Merci Euclide, merci Martine.

23. Ce lemme n'est utile que parce que nous avons pris le postulat d'Euclide sous la forme de Proclus. Avec celle d'Euclide on n'en a pas besoin.

2.35 Proposition. *Soient d, d' deux droites, $A, B \in d$, $A', B' \in d'$ tels que B, B' soient de part et d'autre de (AA').*

1) Si les angles "alternes-internes" $\widehat{BAA'}$ et $\widehat{AA'B'}$ sont égaux alors les droites d, d' sont parallèles.

2) Inversement, si d, d' sont parallèles, on a $\widehat{BAA'} = \widehat{AA'B'}$.

Démonstration. 1) Si d, d' se coupent en C, par exemple sur la demi-droite $[AB)$, le triangle $AA'C$ a deux angles supplémentaires $\widehat{CAA'}$ et $\widehat{CA'A}$, ce qui contredit 2.33.

2) Supposons par exemple $\widehat{AA'B'} < \widehat{BAA'}$. On trace une demi-droite δ passant par A qui fait avec $[AA')$ l'angle $\widehat{AA'B'}$. Le sens direct montre que δ est parallèle à d'. Mais alors δ est portée par d par le postulat d'Euclide.

On obtient comme corollaire les autres propriétés liant perpendiculaires et parallèles :

2.36 Corollaire. *1) Soient d, d' deux droites parallèles et soit δ une droite perpendiculaire à d. Alors elle est aussi perpendiculaire à d'.*

2) Si d est une droite et O un point du plan, il existe une unique droite d' perpendiculaire à d en O.

Démonstration. 1) provient de la propriété des angles alternes-internes. Pour 2), si O n'est pas sur d, on choisit un point $A \in d$, on trace la perpendiculaire d'' à d passant par A par 2.30. Alors, la parallèle à d'' passant par O convient.

On peut alors parler de projeté orthogonal d'un point sur une droite.

2.3.9 Conséquences 4 : parallélogrammes

Un parallélogramme est un quadrilatère $ABCD$ dont les côtés opposés sont parallèles. Avec les cas d'isométrie, on montre aisément que les longueurs des côtés opposés sont égales. On montre aussi que les diagonales se coupent en leur milieu. On discutera des réciproques de ces résultats.

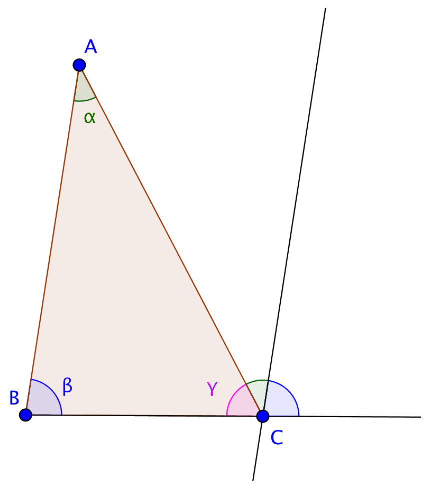
2.3.10 Conséquences 5 : autres propriétés des longueurs et des angles

2.37 Proposition. *La somme des angles d'un triangle est égale à un angle plat.*

Démonstration.

Le résultat suivant est souvent absent de l'enseignement bien que très utile :

On prolonge $[BC]$ du côté de C et on trace la parallèle à (AB) passant par C. Alors avec les angles alternes-internes et correspondants on a le résultat, voir Figure ci-contre.



2.38 Proposition. *Dans un triangle, les angles sont dans le même ordre que les côtés opposés :* $\widehat{A} \leq \widehat{B} \leq \widehat{C} \Longleftrightarrow BC \leq CA \leq AB$.

Démonstration. Supposons par exemple $BC < CA$ et montrons $\widehat{A} < \widehat{B}$. On considère $B' \in [CA]$ tel que $B'C = BC$. Le triangle $BB'C$ est isocèle en C, de sorte qu'on a $\widehat{B'BC} = \widehat{BB'C}$. Comme B' est dans le segment $[CA]$, on a $\widehat{B'BC} \leq \widehat{ABC} = \widehat{B}$. La somme des angles dans ABB' montre que $\widehat{BAB'} = \widehat{A}$ est plus petit que le supplémentaire de $\widehat{AB'B}$ qui n'est autre que $\widehat{B'BC}$ d'où la conclusion.

2.39 Proposition. *Dans un triangle ABC on a $BC \leq AB + AC$ avec égalité si et seulement si A, B, C sont alignés avec A entre B et C.*

Démonstration. On peut supposer $BC > AB$ sinon le résultat est évident. On porte $A' \in [BC]$ tel que $AB = A'B$. Il reste à voir qu'on a $A'C < AC$. Le triangle ABA' étant isocèle, ses angles à la base sont aigus, donc l'angle $\widehat{AA'C}$ est obtus, donc le côté opposé AC est le plus grand et on a le résultat.

2.40 *Remarques.* 1) L'inégalité triangulaire est la première manifestation du fait que la ligne droite est le plus court chemin entre deux points. Pour aller plus loin il faudrait définir la longueur d'une courbe ce qui est nettement plus délicat, voir [18] ch. 7 §4.

2) Si d est une droite et A un point, il résulte de 2.38 que le minimum de la distance AM pour $M \in d$ est atteint en le projeté orthogonal de A sur d.

2.4 Existence de symétries

L'axiome des mouvements donne l'existence des symétries centrales et axiales :

2.41 Proposition. *Soit O un point. Il existe un mouvement σ_O unique qui vérifie les propriétés suivantes :*

0) On a $\sigma_0^2 = \mathrm{Id}$.

1) On a $\sigma_O(O) = O$ et si M est un point distinct de O et si $M' = \sigma_O(M)$, O est milieu de $[MM']$.

2) L'application σ_O transforme une droite en une droite parallèle.

Démonstration. On choisit une droite d passant par O et il suffit de prendre le mouvement qui fixe O et échange les demi-droites portées par d et d'origine O ainsi que les demi-plans limités par d.

2.42 Proposition. *Soit d une droite. Il existe un mouvement τ_d unique qui vérifie les propriétés suivantes :*

0) On a $\tau_d^2 = \mathrm{Id}$.

1) L'application τ_d fixe les points de d. Si M n'est pas sur d et si $M' = \tau_d(M)$, d est la médiatrice de $[MM']$.

Démonstration. On choisit un point O de d et il suffit de prendre le mouvement qui fixe O ainsi que les demi-droites portées par d et d'origine O et échange les demi-plans limités par d.

3 Axiomes d'aires

Sur ce point on renvoie au chapitre 7 de [18]. On travaille dans le plan et on suppose qu'on a fixé une unité de longueur.

3.1 Homothéties

On aura besoin de la notion d'homothétie, mot savant pour l'opération d'agrandissement-réduction.

3.1 Définition. *1) Soit O un point et k un nombre réel. L'homothétie de centre O et de rapport k est l'application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ qui à un point M associe, si k est positif (resp. négatif), l'unique point M' situé sur la demi-droite $[OM)$ (resp. sur la demi-droite opposée) et tel que $OM' = kOM$.*

2) On dit qu'on passe d'une figure[24] F à une figure F' par agrandissement-réduction (ou encore par similitude) s'il existe une homothétie h et un mouvement u tels que $F' = h \circ u(F)$.

24. Ce mot est pris ici au sens de partie du plan.

3.2 *Remarque.* Si l'on parcourt les manuels de collège sur ce thème, on verra que parfois leur définition d'agrandissement-réduction est sujette à caution. Par exemple, il ne suffit évidemment pas de multiplier les longueurs des côtés d'un quadrilatère par 2 pour en obtenir un agrandissement "de même forme" (un carré pourrait alors devenir un losange).

3.2 Axiomes des aires

3.3 Axiome. *Il existe une application μ appelée* **mesure des aires planes***, définie pour toutes les parties bornées usuelles de $\mathcal{P}$ et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, vérifiant les propriétés suivantes :*

0) *si C est un carré de côté de longueur unité, on a $\mu(C) = 1$,*

1) *μ est* **simplement additive** *: si on a des parties A, B* **disjointes** *on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.*

2) *μ est* **invariante par les mouvements** *: si A est une partie et si g est un mouvement on a $\mu(g(A)) = \mu(A)$,*

3) *μ est* **homogène** *: si A est une partie et si h est une homothétie de rapport λ on a $\mu(h(A)) = \lambda^2 \mu(A)$.*

On a défini ici une mesure. L'aire est la grandeur associée. Par exemple, si l'unité est un carré d'un centimètre de côté (le cm^2), et si la mesure d'une partie avec cette unité est 5.8, son aire est $5.8\,cm^2$. Il est toujours préférable de parler d'aire, mais pour formuler l'axiome ci-dessus, c'est un peu plus compliqué. Voir [18] ch. 7 rem. 2.3 sur cette question.

3.3 Calcul de l'aire du rectangle et du triangle

Les axiomes permettent de montrer facilement que les aires d'un point et d'un segment sont nulles, que l'aire d'un carré de côté de longueur a est a^2 et celle d'un rectangle de côtés de longueurs a, b est égale à $a \times b$. On en déduit que l'aire d'un triangle de base b et de hauteur h vaut $\frac{1}{2} b \times h$.

3.4 Les lemmes du collège

Le calcul de l'aire du triangle [25] donne aussitôt les lemmes suivants :

3.4 Théorème. *1)* **(Demi-parallélogramme)** *Soit $P = ABCD$ un parallélogramme. Les diagonales divisent P en deux triangles de même aire.*

2) **(Médiane)** *Soit ABC un triangle et M le milieu de $[BC]$. Les triangles ABM et ACM ont même aire.*

25. Voir [18] pour des preuves indépendantes de ce calcul.

3) **(Trapèze)** *Soient ABC et ABD deux triangles de même base $[AB]$ et tels que les sommets C, D sont sur une même parallèle à la base. Alors ces triangles ont même aire.*

4) **(Proportions)** *Soient ABC et ADE deux triangles dont les bases $[BC]$ et $[DE]$ sont alignées. Alors le rapport des aires des triangles est égal au rapport de leurs bases.*

5) **(Chevron)** *Soit ABC un triangle et M un point du plan, distinct de A, tel que (AM) coupe (BC) en A'. Alors, le rapport des aires de ABM et ACM est égal à $A'B/A'C$.*

3.5 Applications

On obtient une foule de résultats à partir du théorème précédent : Pythagore, Thalès, le concours des médianes du triangle, etc. Voir [18] pour toutes précisions. On donne seulement ici un bref aperçu pour Thalès et Pythagore.

3.5.1 Thalès

3.5 Théorème. *Soit ABC un triangle. Soient $B' \in [AB]$ et $C' \in [AC]$. On suppose $(B'C')$ parallèle à (BC). On a les égalités : $\dfrac{BB'}{BA} = \dfrac{CC'}{CA}$ et $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{AC'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$.*

Démonstration. Voir figure ci-dessous. On a $\mathcal{A}(BCC') = \mathcal{A}(BCB')$ par le lemme du trapèze et donc $\dfrac{CC'}{CA} = \dfrac{\mathcal{A}(BCC')}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{\mathcal{A}(BCB')}{\mathcal{A}(ABC)} = \dfrac{BB'}{BA}$ par le lemme des proportions. Cela donne la première formule et la première égalité de la seconde, en tenant compte des relations $\dfrac{AB'}{AB} + \dfrac{B'B}{AB} = 1$ et $\dfrac{AC'}{AC} + \dfrac{C'C}{AC} = 1$. Le lecteur se chargera de la troisième égalité.

3.5.2 Pythagore

Ici, la figure se suffit à elle seule pour montrer $a^2 = b^2 + c^2$:

3.6 Aire du disque et périmètre du cercle

On renvoie à [18] Ch. 7 §4 pour un traitement relativement élémentaire de ce sujet. Mais il ne faut pas se faire d'illusion, un traitement rigoureux n'est pas facile.

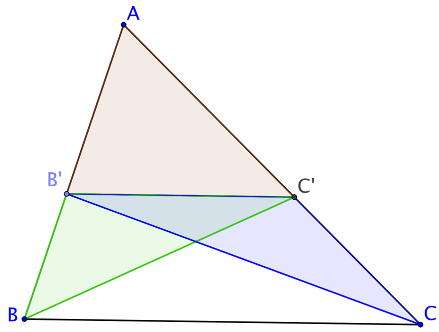


FIGURE 1 –

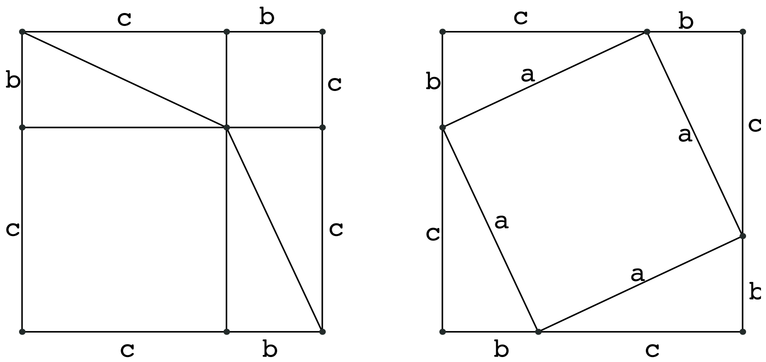


FIGURE 2 –

4 Isométries, similitudes, trigonométrie, etc.

4.1 Translation

Une définition raisonnable de la translation oblige à définir les vecteurs et cela n'est pas si facile. Il y a deux voies classiques : la voie "des physiciens" à partir des notions de direction, sens et longueur et la voie de l'équipollence. Voir par exemple [14] §2.6 pour une discussion.

4.1 *Remarque.* En termes de mouvement, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ ($A \neq B$) est l'unique mouvement qui envoie A sur B, la demi-droite $[AB)$ sur celle portée par (AB), issue de B et de même sens et qui conserve l'un des demi-plans limités par (AB).

4.2 Rotation

Là encore, ce n'est pas si facile de définir une rotation car cela nécessite la notion d'angle orienté.

4.2 *Remarque.* En termes de mouvement, la rotation de centre O et d'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est l'unique mouvement qui fixe O, qui envoie la demi-droite $[OA)$ sur $[OB)$ et le demi-plan limité par (OA) qui contient B sur celui limité par (OB) qui ne contient pas A.

4.3 Similitude

Mathématiquement, une similitude est la composée d'une isométrie et d'une homothétie. On peut parler de triangles semblables dès qu'on a évoqué les triangles isométriques en notant que c'est le cas où trois invariants (les trois angles) ne définissent pas des triangles isométriques, mais seulement "de même forme". Il n'empêche qu'on n'en fera pas grand-chose tant qu'on ne disposera pas du résultat suivant, conséquence de Thalès :

4.3 Proposition. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. On suppose qu'on a les trois*[26] *égalités d'angles $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$. Alors, on a les relations* $\dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CA}{C'A'} = \dfrac{AB}{A'B'}$.

4.4 Trigonométrie

Au collège, on se contentera de définir cosinus, sinus et tangente dans le triangle rectangle, mais il semble nécessaire de montrer que ces nombres ne dépendent que de l'angle et pas du triangle dans lequel on opère. C'est une conséquence de la proposition précédente.

4.5 Coordonnées

Une fois choisie une unité de longueur, on a la notion de repère orthonormé : une origine O et deux points I, J tels que (OI) et (OJ) soient perpendiculaires et les longueurs OI et OJ égales à l'unité. Si M est un point du plan, on définit alors ses coordonnées dans ce repère en prenant les abscisses de ses projetés orthogonaux sur (OI) et (OJ).

26. Deux suffisent, bien entendu.

5 Une progression inspirée de ce qui précède

Je donne maintenant un exemple de progression, sinon conforme à ce système d'axiomes, du moins pas trop éloignée. Bien d'autres sont possibles. Les choses écrites en italiques sont des remarques personnelles. Du point de vue des démonstrations, j'en vois trois absolument incontournables (la somme des angles du triangle, Pythagore et Thalès), mais il doit y avoir d'autres ou au moins des justifications. Attention, je ne parle pas du tout de géométrie dans l'espace, mais elle doit être présente elle aussi.

5.1 En sixième

Je propose pour cette classe une position un peu bâtarde, où l'on ne se préoccupe pas trop de la justification des propriétés : on est encore dans le cycle 3 et on doit veiller à la continuité avec le primaire, voir [8] sur ce point. De plus, on se doit aussi de respecter les programmes et il ne faut pas changer trop brutalement les habitudes.

5.1.1 Les notions indispensables par rapport à l'axiomatique

On introduit les droites, avec la propriété qu'elles sont définies par deux points, on parle d'appartenance, d'intersection et d'alignement. On parle de parallèles. *Il ne semble pas essentiel de formaliser l'axiome d'Euclide.*

On peut prononcer les mots relatifs à la position, par exemple : de part et d'autre.

On commence à parler *(sans aucune formalisation)* de déplacement (ou de glissement) et de retournement des figures et cela justifie la notion de longueur d'un segment et d'angle[27] (égalité et ordre, voir ci-dessus). On note que longueurs et angles sont invariantes par déplacement et retournement *(indispensable pour le traitement de la symétrie).* On peut parler de périmètre *(pour une courbe c'est plus difficile, on l'explique avec une ficelle).* On a les notions d'angles plat, droit (comme moitié du plat), aigu, obtus.

Même si ces mots ne sont pas dans les programmes, on peut parler de complémentaire et supplémentaire.

La notion d'angle droit donne celle de perpendiculaire. La notion de hauteur s'ensuit (et elle est utile pour les calculs d'aires.)

On travaille sur la grandeur aire avec les procédures de découpage et recollement. *On ne donne pas les axiomes, mais on fait comprendre que l'aire est invariante par découpage et recollement.*

27. Vu comme grandeur.

Ensuite, on passe aux mesures en choisissant une unité et en utilisant le report (dans le cas des longueurs et des angles). On a la notion de distance de deux points et la notion de cercle, donc de compas.

On peut donc définir les triangles particuliers (isocèle, rectangle, équilatéral) et les quadrilatères (carré, losange, rectangle, parallélogramme si on le souhaite).

5.1.2 Les notions introduites sans justification complète

Les questions de plus court chemin (entre deux points, un point et une droite, deux parallèles). *(On n'introduit pas l'inégalité triangulaire de manière formelle.)*

Le périmètre du cercle.

Les aires usuelles : carré, rectangle, triangle, disque.

Le périmètre du cercle et l'aire du disque ne sont pas vraiment justifiables à ce niveau. On se contentera d'une justification empirique du lien entre les deux avec le dessin des parts de tarte disposées tête-bêche, voir [18].

Symétrie axiale (construction, symétrique d'une droite, d'un segment, d'un point), axe de symétrie, conservation des invariants, médiatrice.

À ce moment, on ne peut qu'admettre les propriétés de la symétrie (conservation des longueurs et des angles) à partir des manipulations, notamment du pliage. Ces propriétés pourront être revues en cinquième avec les cas d'égalité des triangles.

Agrandissement et réduction et leur effet sur les aires.

Là encore, il s'agit d'un premier contact. Bien entendu, ce qui est essentiel ici, c'est la notion de dimension.

5.2 En cinquième

Le point principal est l'introduction des cas d'égalité des triangles et une première approche de leur utilisation.

On étudie les triangles en commençant par énoncer l'inégalité triangulaire. *(C'est la formalisation de la propriété de plus court chemin vue en sixième et il semble raisonnable de l'admettre.)*

On définit des triangles égaux *(ou une autre appellation ...)* comme obtenus par déplacement et retournement et on note que tous leurs éléments (longueurs et angles) sont égaux. On travaille sur les constructions de triangles à partir de leurs éléments pour se rendre compte que trois d'entre eux suffisent (sauf les angles). On énonce alors les cas d'égalité et on les justifie par la méthode de superposition. On peut définir, comme une sorte de repoussoir les triangles semblables. *On peut faire remarquer qu'ils ont même forme,* *mais la proportionnalité des longueurs des côtés me semble plus difficile à justifier.*

Comme application de ces outils on peut revenir sur la médiatrice, *(voire sur la bissectrice si elle existe dans les programmes ...)* et les propriétés des triangles isocèles (hauteur-médiane, etc.). On propose quelques exercices montrant comment utiliser ces outils pour prouver des propriétés géométriques. *Vu la pauvreté des manuels sur ce thème, c'est un point essentiel.*

On donne les propriétés des angles et des parallèles (angles alternes-internes, etc.). *La justification n'est pas évidente.* Cela permet de montrer la somme des angles du triangle *(on* **démontre** *ce résultat)* et, avec les cas d'égalité, les propriétés des parallélogrammes.

Parmi les autres résultats géométriques dignes d'intérêt on peut citer le concours des médiatrices et le cercle circonscrit.

On introduit la symétrie centrale et on énonce ses propriétés. On les justifie éventuellement à l'aide des cas d'isométries.

Sur ce point, j'adopterais volontiers une position plus tranchée en renvoyant la symétrie centrale en quatrième, comme les autres transformations. Je considère en effet que l'usage de la symétrie centrale est un peu bâtard dans cette progression plutôt fondée sur les cas d'égalité. Il est clair que tout le monde ne sera pas de cet avis. En tous cas je suis vraiment hostile à définir le parallélogramme à partie de la symétrie.

5.3 En quatrième

On utilise les cas d'isométrie pour prouver des propriétés géométriques. *J'insiste ! Il y a beaucoup d'exercices sur ce thème et ils sont très formateurs.*

On énonce le théorème de la droite des milieux et sa réciproque. *(La démonstration peut se faire par les aires ou avec les parallélogrammes, voir [14]).*

On énonce le théorème de Pythagore et sa réciproque. *(On le démontre. Je propose la démonstration par les aires.)*

Première approche de la translation et de la rotation (en lien avec l'usage de *Geogebra*). *Il semble difficile d'aller bien loin de ce côté, vu le manque des notions essentielles, vecteurs, orientation, composition, etc.*

La question se pose d'une première approche de la trigonométrie dans le triangle (le cosinus, comme autrefois ?). Mais, sans Thalès on ne peut pas justifier le fait que le cosinus ne dépend pas du triangle.

5.4 En troisième

On énonce le théorème de Thalès et sa réciproque, dans le cas du triangle et du papillon[28]. On le démontre. *(Là encore, je propose la démonstration par les aires.)*

On introduit la notion d'homothétie (en lien avec Thalès). On revient sur le comportement des grandeurs par agrandissement-réduction.

Grâce à Thalès et aux triangles égaux on peut montrer (ou justifier) le premier cas de similitude (les angles égaux donnent les côtés proportionnels).

On introduit les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente). *On peut maintenant justifier le fait que les rapports ne dépendent que de l'angle et pas du triangle dans lequel on opère en utilisant la similitude.*

Une belle application de la similitude ou de la trigonométrie est de prouver les relations métriques dans le triangle rectangle : si ABC est rectangle en A et si H est le pied de la hauteur issue de A on a $AH^2 = BH \times CH$ et $AB^2 = BH \times BC$, avec application à la construction d'une moyenne géométrique.

Utilisation des cas d'isométrie et de similitude pour prouver des propriétés géométriques. *Toujours essentiel.*

Repère orthonormé, abscisse, ordonnée, équation d'une droite en lien avec la proportionnalité. *C'est le début de la géométrie analytique. Il me semble important de noter que le lien entre droite et proportionnalité vient de Thalès.*

6 Exercices

6.1 Exercices sur les axiomes de position

Le lecteur scrupuleux résoudra les exercices suivants qui répondent à une bonne part des questions de position que l'on peut rencontrer au collège. Donnons d'abord une définition :

6.1 Définition. *On appelle* **triangle** *la donnée de trois points A, B, C non alignés. Les côtés du triangle sont les segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ et ses sommets sont A, B, C. Le triangle plein est l'intersection des demi-plans limités par (BC), (CA), (AB) et contenant respectivement A, B, C. C'est un convexe. L'intérieur du triangle est la partie de cet ensemble non située sur les côtés*[29].

28. C'était bien mieux avec les mesures algébriques, mais le retour en arrière semble difficile ...

29. Comme les segments sont infinis, l'intérieur d'un triangle est infini aussi.

6.2 *Exercice.* 1) (Axiome de Pasch) Soit ABC un triangle et d une droite passant par $M \in]BC[$. Alors d coupe $[AB]$ ou $[AC]$.

2) Soit ABC un triangle et O un point intérieur au triangle. La demi-droite $[AO)$ coupe le segment ouvert $]BC[$.

3) Soit ABC un triangle et soient B' et C' des points de $]AC[$ et $]AB[$ respectivement. Alors, les segments $[BB']$ et $[CC']$ se coupent en un point G et la droite (AG) coupe le segment $[BC]$. *Ce résultat permettra de montrer que deux médianes d'un triangle se coupent en un point G.*

Franchissons un cap et considérons les quadrilatères :

6.3 Définition. *Soit (A, B, C, D) un quadruplet de points du plan,* **distincts et tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés***. Le* **quadrilatère** *Q associé à ce quadruplet est la réunion des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Les points A, B, C, D sont les* **sommets** *de Q, les segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ ses* **côtés** *et les segments $[AC]$ et $[BD]$ ses* **diagonales***. Deux sommets (resp. deux côtés) sont dits* **adjacents** *s'ils sont les extrémités d'un côté (resp. s'ils ont un sommet en commun). Deux sommets (resp. deux côtés) non adjacents seront dits* **opposés***. On notera $Q = ABCD$.*

6.4 *Exercice.* Soit $Q = ABCD$ un quadrilatère. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Si $[MN]$ est un côté de Q, les deux autres sommets sont dans le même demi-plan limité par (MN).

ii) Les diagonales de Q se coupent.

Si ces conditions sont vérifiées, on définit le quadrilatère plein $K(Q)$ associé à $ABCD$ comme l'intersection des quatre demi-plans limités par les côtés de Q et contenant les autres sommets. C'est une partie convexe et on dit que Q est **convexe**.

Une application de ce résultat est ce que j'appelle le théorème "mal aimé" sur les parallélogrammes. Rappelons qu'on appelle parallélogramme un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (il est alors convexe). On montre que ses côtés opposés sont de même longueur et que ses diagonales se coupent en leur milieu. Inversement :

6.5 *Exercice.* Soit $ABCD$ un quadrilatère **convexe**. On suppose que les côtés $[AB]$ et $[CD]$ sont parallèles et de même longueur. Alors $ABCD$ est un parallélogramme. Pour vérifier la condition de convexité, il suffit de montrer que le segment $[AC]$ rencontre la droite (BD) ou que $[BD]$ rencontre (AC).

6.6 *Exercice.* Cet exercice précise le raisonnement utilisé dans la preuve de 2.23. On rappelle qu'on a deux triangles ABC et ABD avec C, D du même côté de (AB). On suppose B dans le secteur $[\widehat{ACD}]$ et on veut montrer que A est dans le secteur $[\widehat{BDC}]$.

1) Montrer que B et A sont du même côté de (CD) (utiliser la définition des secteurs).

2) a) Montrer que A et D sont de part et d'autre de (BC) (utiliser 1.11). Le segment $[AD]$ coupe donc (BC) en E.

b) Montrer que E est dans la demi-droite $[BC)$ (utiliser le fait que C, D sont dans le même demi-plan limité par (AB) et 1.8).

c) Montrer que C et E, puis E et A, puis A et C sont du même côté de (BD).

d) Conclure.

6.2 Résultats d'existence

6.7 *Exercice.* Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux cercles de centres O, O' et de rayons R, R' respectivement. On suppose qu'on a $|R' - R| < OO' < R + R'$. Montrer que ces deux cercles ont deux points communs M, M'. (Pour analyser la situation, on introduira le point d'intersection H de (OO') et (MM') et on calculera OH, $O'H$, HM grâce à Pythagore. On en déduira l'existence de H, puis celle de M, M' grâce à 2.9. On précisera les axiomes utilisés sur les grandeurs.)

Références

[1] Cousin-Fauconnet Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[2] Dieudonné Jean, *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, Paris, 1964.

[3] Duperret Jean-Claude, Perrin Daniel, Richeton Jean-Pierre, *Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie*, Bull. APMEP 435, 472-497, 2001.

[4] Euclide, *Les éléments* (traduction Kayas), Éditions du CNRS, 1978.

[5] Hilbert David, *Les fondements de la géométrie*, Dunod, Paris, 1971.

[6] Kahane Jean-Pierre (dirigé par), *L'enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, Paris, 2002.

[7] Lion Georges, *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.

[8] Perrin-Glorian Marie-Jeanne, Godin Marc, *Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège*, à paraître dans les actes de la CORFEM, 2017. (Dans la Dropbox.)

[9] Perrin Daniel, *L'exemple de la géométrie affine du collège, vu au travers du programme d'Erlangen et de la théorie des invariants*, Bull. APMEP 431, 758-784, 2000.

[10] Perrin Daniel, *Des outils pour la géométrie à l'âge du collège : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations*, Repères IREM, 53 : 91–110, 2003.

[11] Perrin Daniel, *La géométrie : un domaine hors programme*, Bull. APMEP, 496, 587–600, 2011.

[12] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Introduction*, 2014.
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPintro.pdf`

[13] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Postface*, 2014.
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livregeometrie/DPPostface.pdf`

[14] Perrin Daniel, *Autour du théorème de Thalès*, 2006.
`https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/ThalesDP.pdf`

[15] Perrin Daniel, *Problèmes ouverts : pourquoi et comment*, 2015
`http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Conferences/IREM2015/IREM2015redaction.pdf`

[16] Perrin Daniel, *Angles géométriques, angles orientés, théorème de l'angle inscrit*, 2013.
`https://www.math.u-psud.fr/~perrin/Projet-geometrie/Coursangles.pdf`

[17] Perrin Daniel, *L'enseignement de la géométrie au collège et au lycée*, à paraître dans les actes de la CORFEM, 2017. (Dans la Dropbox.)

[18] Perrin Daniel, *Mathématiques d'école*, Cassini, 2011.

[19] Perrin Daniel, *Une axiomatique pour la géométrie du collège*, Saint-Tricotin-sur-Pelote (Marne-et-Garonne), 2050.