Le problème de Nicolas Bouleau

Daniel PERRIN

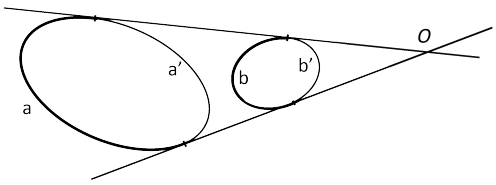
Dans ce texte j'utiliserai librement le contenu et les notations de mon (projet) de livre de géométrie, [2], qui se trouve sur ma page web à l'adresse suivante :

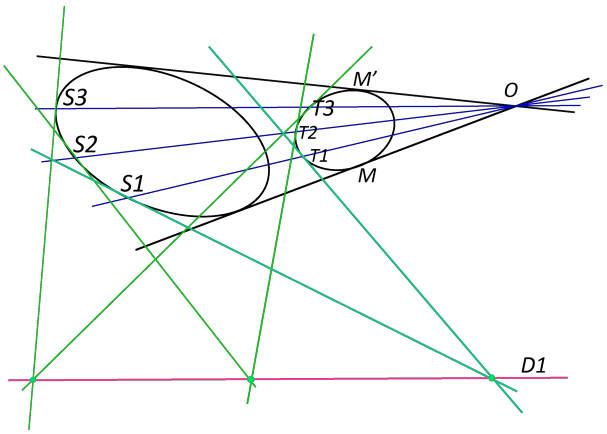
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livre_de_geometrie_projective.html` notamment les parties I (Géométrie linéaire, [3]) et III (Coniques, [4]).

1 Le problème initial

Le problème traité ici m'a été posé par Nicolas Bouleau, que je remercie vivement, voir son papier *Desargues et le trait à preuve* sur Hal. Voici le début de la question :

> Dans la configuration initiale il s'agit de deux ellipses du plan E_1 et E_2 quelconques mais pas incluses l'une dans l'autre. De sorte qu'elles possèdent deux tangentes communes qui laissent les deux ellipses du même côté. Elles se coupent en O. Ces tangentes communes déterminent sur les ellipses des arcs soit a et a' pour la première et b et b' pour la seconde.





Si on considère plusieurs sécantes issues de O qui coupent a aux points S_n et b aux points T_n alors les points d'intersection des tangentes en S_n et T_n sont alignés, notons cette droite D_1. Si les mêmes sécantes coupent a' en S'_n et b' en T'_n, les tangentes en S'_n et en T'_n se coupent en des points alignés sur la même droite D_1.

Enfin si on apparie a avec b' et a' avec b les tangentes construites de façon similaire se coupent sur une droite D_2.

La question est de comprendre comment ce résultat peut s'étendre à des coniques quelconques.

2 Le théorème

2.1 La situation

Dans tout ce qui suit on se place dans la situation suivante et on en utilise les notations :

2.1 Notations. On travaille sur un corps k de caractéristique différente de 2 (par exemple $\mathbf{R}$, voire $\mathbf{C}$). Soit $\overline{k}$ une clôture algébrique de k (donc $\mathbf{C}$ dans le cas $k = \mathbf{R}$). Soient Γ, Γ' deux coniques propres de $\mathbf{P}^2_k$, en position générale [1]. On suppose que ces coniques se coupent en quatre points a, b, c, d en position générale [2] dans $\mathbf{P}^2_{\overline{k}}$. Ces quatre points déterminent six droites qui se répartissent en trois paires qui forment les trois coniques dégénérées du pinceau [3] (Γ, Γ') : $(ab) \cup (cd)$, $(ac) \cup (bd)$ et $(ad) \cup (bc)$. On pose $p = (ab) \cap (cd)$, $q = (ac) \cap (bd)$ et $r = (ad) \cap (bc)$ (le "triangle autopolaire"). On suppose aussi que les coniques admettent quatre tangentes communes A, B, C, D, toujours sur $\overline{k}$. Ces quatre droites se coupent en six points qui se regroupent en trois paires correspondant aux coniques dégénérées du pinceau dual (Γ^*, Γ'^*).

2.2 Le résultat

Le résultat suivant généralise et précise celui de Nicolas Bouleau :

2.2 Théorème. *On se place dans les conditions de 2.1 Les six points d'intersection des tangentes communes se répartissent en trois paires, chacune étant sur l'un des côtés* [4] *du triangle pqr. Soit o l'un des points d'intersection des tangentes communes et supposons (par exemple) qu'il soit sur (qr). Soit Δ une droite passant par o qui coupe Γ en m, n et Γ' en m', n'. Soient M, N, M', N' les tangentes à Γ et Γ' en ces points. Alors, les points d'intersection de M, M' et N, N' (resp. de M, N' et N, M') décrivent une droite L (resp. L') et la réunion $L \cup L'$ est la conique dégénérée $(ab) \cup (cd)$ du pinceau (Γ, Γ') (celle dont le point double est le sommet p opposé à (qr)).*

1. En géométrie algébrique, cette expression signifie que les propriétés qui vont suivre seront valables pour (Γ, Γ') variant dans un ouvert de Zariski dense du produit de l'espace des coniques. Ici on supposera notamment que les coniques ne sont pas tangentes.
2. Ici cela signifie que trois quelconques d'entre eux sont non alignés.
3. On disait autrefois faisceau.
4. On est toujours sur $\overline{k}$.

3 Le premier cas non trivial : deux cercles

3.1 Une preuve euclidienne

On reprend les notations de 2.1 mais avec deux cercles Γ, Γ'. Dans le cas de la figure 1, ces cercles sont extérieurs. Les quatre points a, b, c, d sont imaginaires (il y a en particulier les points cycliques), mais il y a une conique dégénérée du pinceau (Γ, Γ') qui est réelle, formée de la droite de l'infini L (qui contient les points cycliques) et de l'axe radical L' des cercles (en bleu sur la figure). On considère deux tangentes communes A, B (en noir) qui se coupent en o et la sécante rouge Δ passant par o qui coupe Γ en m, n et Γ' en m', n'. On trace les tangentes M, N, M', N' aux cercles en ces points. Avec les positions de la figure, on a alors le résultat suivant :

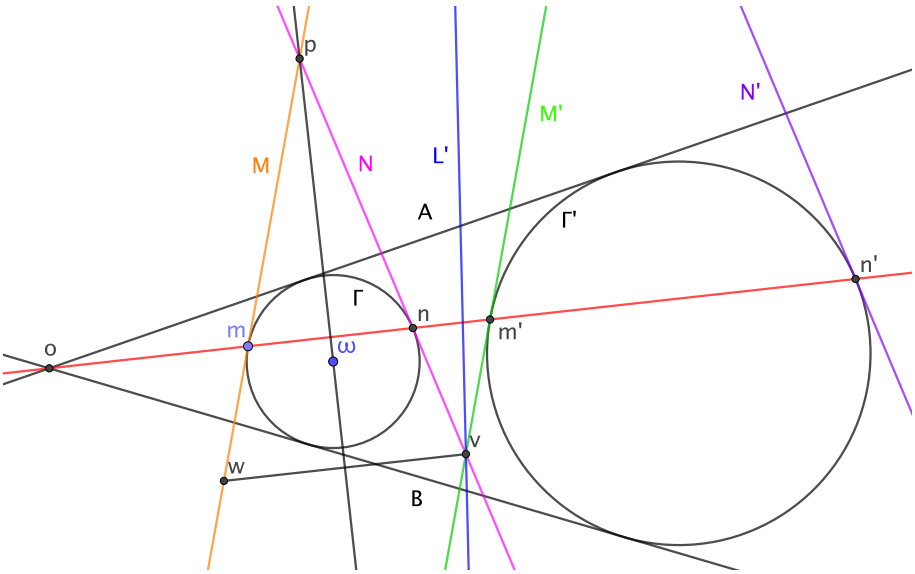


FIGURE 1 –

3.1 Proposition. *1) Le point d'intersection u des droites M, M' (resp. N, N') décrit la droite de l'infini L (autrement dit, M, M' (resp. N, N') sont parallèles).*

2) Le point d'intersection v des droites N, M' (resp. celui des droites M, N') décrit l'axe radical L'.

Démonstration. 1) Le point o d'intersection des tangentes communes est un des deux centres d'homothétie qui échangent Γ et Γ'. Il existe donc une homothétie h de centre o qui envoie Γ sur Γ' et qui vérifie $h(m) = m'$ et

$h(n) = n'$, donc aussi $h(M) = M'$ et $h(N) = N'$ et cela montre que ces droites sont parallèles.

2) Montrons l'assertion pour le point v intersection de N et M', l'autre est analogue. Dire que v est sur l'axe radical des cercles signifie que les puissances de v par rapport à Γ et Γ' sont égales donc qu'on a $vn^2 = vm'^2$ ou encore $vn = vm'$. Notons ω le centre de Γ et p l'intersection de M et N. La droite (ωp) est axe de symétrie de Γ et de ses deux tangentes M, N, en particulier les points m et n sont symétriques par rapport à (ωp). Soit w le symétrique de v par rapport à (ωp). Il est donc sur M. Les droites (mn) et (vw) étant perpendiculaires à l'axe de symétrie sont parallèles, ainsi que $(mw) = M$ et $(vm') = M'$ par homothétie. Il s'ensuit que $vwmm'$ est un parallélogramme et on a donc $vm' = wm$. Mais comme on a $wm = vn$ par symétrie, on a le résultat.

3.2 *Remarques.* 1) C'est cette figure très simple qui m'a convaincu du fait que les droites lieux des intersections étaient les droites qui formaient les coniques dégénérées du pinceau (Γ, Γ').

2) Il y a deux autres tangentes communes à Γ et Γ' qui se coupent en le deuxième centre d'homothétie des cercles. Les résultats sont les mêmes, comme on le voit sur la figure 2.

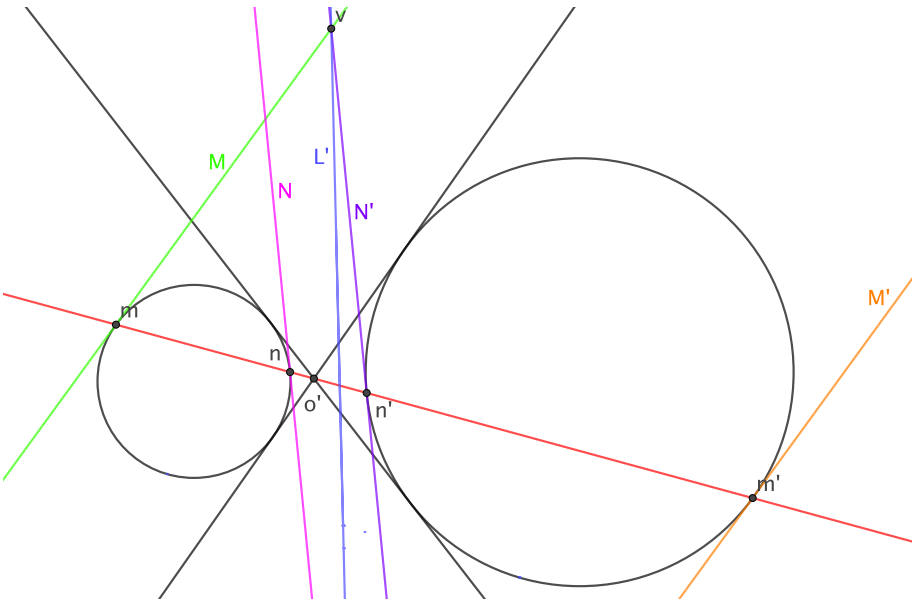


FIGURE 2 –

3.2 Retour au problème initial

Comme la propriété en vue est projective, la solution du problème dans le cas de deux cercles disjoints donne celle du problème initial dans le cas de deux ellipses (et même de deux coniques) disjointes en vertu du lemme suivant :

3.3 Lemme. *Soient Γ, Γ' deux coniques réelles disjointes. Il existe une homographie réelle h telle que $h(\Gamma)$ et $h(\Gamma')$ soient des cercles disjoints.*

Démonstration. Les cercles sont caractérisés, parmi les coniques propres réelles, comme celles qui passent par les points cycliques I et J, qui sont complexes conjugués. Soient m et $\overline{m}$ deux intersections complexes conjuguées de Γ et Γ' (non réelles). Il suffit de montrer qu'il existe une homographie h^{-1} réelle qui envoie m sur I (ou une homographie h qui envoie I sur m). On le vérifie en cherchant la matrice de h sous forme indéterminée. Voici le calcul : on cherche la matrice H de h sous la forme $H = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ avec des a_{ij} réels. On a $I = (1, i, 0)$ et $m = (x, y, t)$ (avec $x, y, t \in \mathbf{C}$). On doit donc résoudre $HI = m$, ce qui donne $a_{11} + a_{12}i = x$, $a_{21} + a_{22}i = y$ et $a_{31} + a_{32}i = t$. En identifiant parties réelles et imaginaires on obtient les coefficients a_{ij} avec $j = 1, 2$. Pour pouvoir compléter les deux premières colonnes de H en une matrice inversible il faut et il suffit qu'elles ne soient pas proportionnelles, mais si l'on a $a_{12} = \lambda a_{11}$, $a_{22} = \lambda a_{21}$ et $a_{32} = \lambda a_{31}$ on $x = a_{11}(1 + \lambda i)$, $y = a_{21}(1 + \lambda i)$ et $t = a_{31}(1 + \lambda i)$ et, comme les coordonnées sont homogènes, m est égal à (a_{11}, a_{21}, a_{31}) donc est réel, ce qui est absurde.

Autrement dit, le cas des cercles donne déjà un résultat appréciable :

3.4 Théorème. *Le théorème 2.2 est vrai pour deux coniques réelles disjointes.*

De même, le cas de deux coniques réelles se coupant en deux points réels se ramène au cas des cercles sécants et le lecteur vérifiera que la propriété est la même, voir figure ci-dessous. Le seul cas qui reste rétif à cette méthode [5] est celui de deux coniques qui se coupent en quatre points réels.

5. On a fait l'hypothèse que les coniques sont en position générale, donc qu'il n'y a pas de contacts.

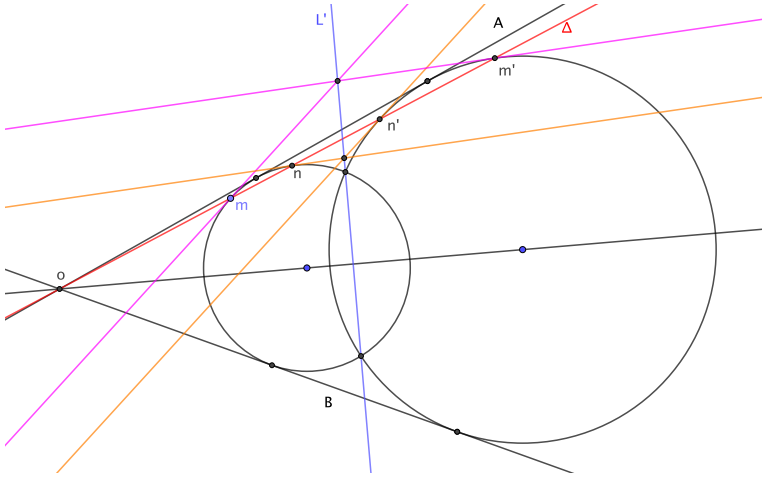


FIGURE 3 –

4 Un cas plus général : deux ellipses sécantes

Dans la figure 4 on a deux ellipses, l'une Γ est le cercle d'équation $X^2 + Y^2 = 1$, l'autre Γ' l'ellipse d'équation $\dfrac{X^2}{4} + \dfrac{Y^2}{0.64} = 1$. Ce choix présente l'avantage d'avoir une figure symétrique par rapport aux axes ce qui facilite les constructions. Ces ellipses sont dans la situation vue en 2.1 avec quatre points communs a, b, c, d et quatre tangentes communes A, B, C, D. On a fait la figure à partir de $o = A \cap B$ et on vérifie sur la figure que les tangentes M, M' se coupent en u sur l'une des coniques dégénérées (en bleu sur la figure) du pinceau (Γ, Γ') (ici la droite (ab), morceau de $(ab) \cup (cd)$).

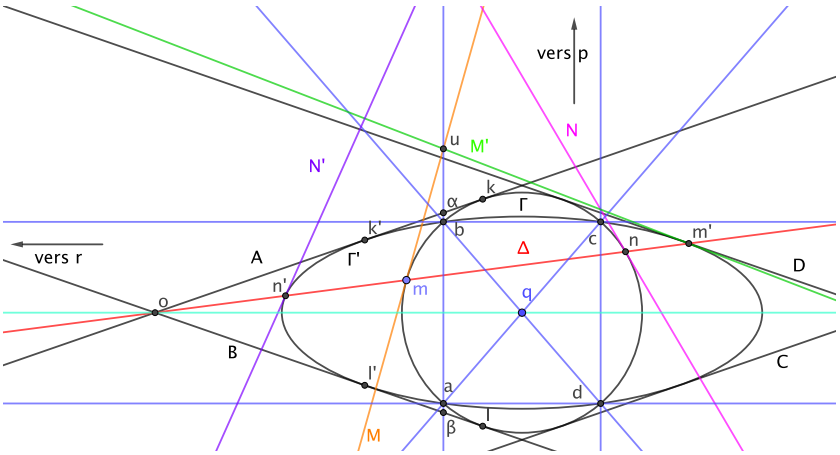


FIGURE 4 –

5 La démonstration du théorème 2.2

5.1 Rappels

1) Si D est une droite projective et si a, b, c (resp. a', b', c') en sont des points distincts il existe une unique homographie $f : D \to D$ telle que $f(a) = a'$, $f(b) = b'$, $f(c) = c'$. En particulier, si f fixe trois points distincts, c'est l'identité. Si d, d' sont deux autres points on a $f(d) = d'$ si et seulement si les birapports $[\![a, b, c, d]\!]$ et $[\![a', b', c', d']\!]$ sont égaux.

2) Une homographie du plan $\mathbf{P}(E)$ est définie par la donnée de quatre points en position générale et de leurs images.

3) On a le lemme suivant :

5.1 Lemme. *Soit h une homographie de $\mathbf{P}(E)$. On suppose que h fixe un point o et que toutes les droites issues de o sont stables par h. Soit h^* l'homographie de $\mathbf{P}(E^*)$ duale*[6] *de h. Alors, si M ne passe pas par o et si $M' = h^*(M)$, le point d'intersection de M et M' décrit une droite.*

Démonstration. On peut supposer qu'on a $o = (1, 0, 0)$ Un petit calcul montre alors que la matrice H de h est de la forme $H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. On en déduit que la matrice de h^* (qui est la transposée de h) est ${}^tH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \lambda & 0 \\ \beta & 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Si M est la droite $uX + vY + wT = 0$, donc l'élément $M = (u, v, w)$ de $\mathbf{P}(E^*)$, on a $M' = (u, \alpha u + \lambda v, \beta u + \lambda w)$ et on vérifie que le point d'intersection (x, y, t) de M et M' décrit la droite d'équation $(1 - \lambda)X + \alpha Y + \beta T = 0$.

5.2 La démonstration du théorème 2.2

On reprend la situation et les notations de 2.1. La construction de la polaire d'un point par rapport à une conique (voir [4] Ch. 2 prop. 2.3.12) montre que le triangle pqr est autopolaire à la fois par rapport à Γ et à Γ' (c'est-à-dire que la polaire de chaque sommet est le côté opposé). En termes algébriques, cela signifie que les vecteurs qui relèvent p, q, r forment une base orthogonale pour les formes quadratiques qui définissent les coniques, donc que leurs matrices sont diagonales dans cette base.

6. Voir [3] pour des précisions sur la dualité. Si D est une droite de $\mathbf{P}(E)$, considérée comme un point de $\mathbf{P}(E^*)$, on a $h^*(D) = h(D)$ (au sens ensembliste).

5.2.1 L'assertion d'alignement

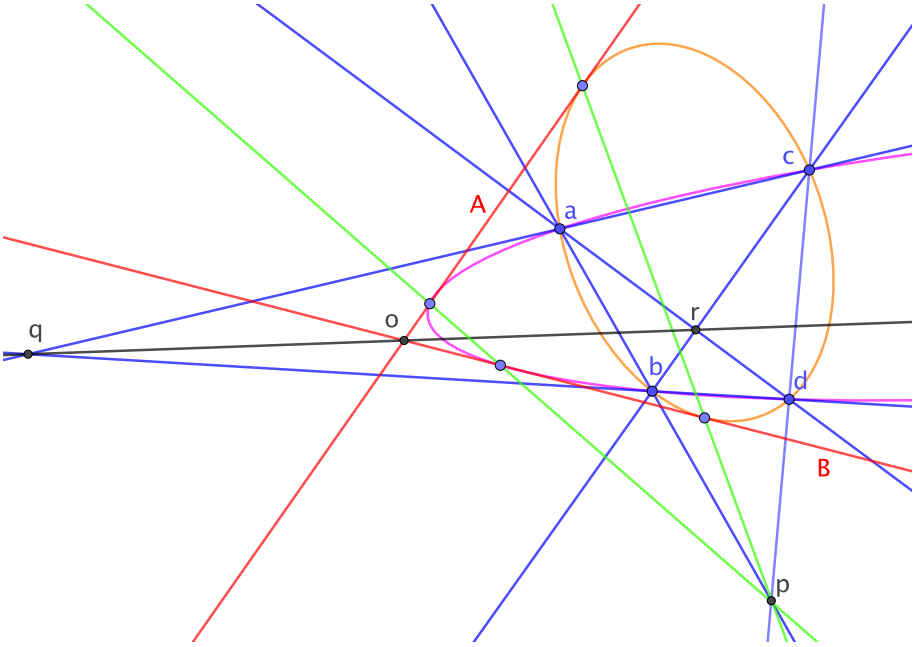


FIGURE 5 –

Il s'agit de montrer que l'intersection o de deux tangentes communes aux coniques est sur l'un des côtés du triangle autopolaire pqr. On prend ce triangle comme repère et on a donc $p = (1, 0, 0)$, $q = (0, 1, 0)$ et $r = (0, 0, 1)$. On peut supposer qu'une équation de Γ (resp. Γ') est $X^2+Y^2-T^2 = 0$ (resp. $\alpha X^2 + \beta Y^2 - \gamma T^2 = 0$). Les équations des coniques duales (qui décrivent les droites $uX + vY + wT = 0$ tangentes aux coniques) correspondent aux matrices transposées, sont donc les mêmes, mais avec les variables u, v, w. Les tangentes communes sont les quatre points[7] d'intersection des coniques duales, soit $(u, v, w) = (\sqrt{\gamma - \beta}, \epsilon\sqrt{\alpha - \gamma}, \eta\sqrt{\alpha - \beta})$ où ϵ et η valent ± 1. Quand on calcule, par exemple, l'intersection des droites :

$$\sqrt{\gamma - \beta}\, X + \sqrt{\alpha - \gamma}\, Y + \sqrt{\alpha - \beta}\, T = \sqrt{\gamma - \beta}\, X - \sqrt{\alpha - \gamma}\, Y - \sqrt{\alpha - \beta}\, T = 0$$

on voit que leur point d'intersection est sur la droite $X = 0$, i.e. sur (qr).

5.2 *Remarque.* Si, disons, les tangentes communes A, B se coupent sur (qr) c'est aussi le cas des deux autres C, D.

7. Calculés dans $\overline{k}$, bien entendu.

5.2.2 Le lemme de l'homographie

Le point crucial de la preuve de 2.2 consiste à montrer l'existence d'une homographie du plan qui envoie Γ sur Γ' en fixant le point o. Dans le cas des deux cercles, c'est l'homothétie de centre o qui jouait ce rôle. On pourra se reporter à la figure 4 pour suivre les démonstrations.

5.3 Lemme. *On reprend les notations de 2.1. Soient A et B deux tangentes communes à Γ, Γ' se coupant en o. On appelle k, k' et l, l' leurs points de contacts respectifs avec Γ et Γ' et on suppose (voir §5.2.1) que o est sur (qr). Alors il existe une homographie h de $\mathbf{P}(E)$ qui fixe o et a et envoie k, l sur k', l'. L'homographie h envoie Γ sur Γ'. Soit Δ une droite passant par o. On a $h(\Delta) = \Delta$. Si Δ coupe Γ en m, n et Γ' en m', n', h envoie*[8] *$\{m, n\}$ sur $\{m', n'\}$. L'homographie h fixe le point b.*

Démonstration. L'existence de l'homographie est la traduction de la quadruple transitivité. Le fait qu'elle envoie Γ sur Γ' tient à ce que l'image de Γ contient k', l', a et qu'elle est tangente à (ok) et (ol).

Montrons que h laisse stable Δ. On considère le pinceau o^* des droites passant par o. Comme o est fixe par h, o^* est stable par h^*. De plus trois droites de o^* sont stables par h : (oa) et les deux tangentes A, B. On en déduit que h^*, vue comme homographie de o^*, est l'identité et on a donc $h(\Delta) = \Delta$. Comme $h(\Gamma) = \Gamma'$ et $h(\Delta) = \Delta$, il s'ensuit que $h(\{m, n\}) = \{m', n'\}$.

Il reste à montrer que b est fixe. On sait que o est sur la droite (qr). Cette droite est invariante par h et son pôle p par rapport à Γ est transformé en son pôle par rapport à Γ' qui est encore p. Le point p est donc fixe, donc la droite (pa) est stable. Mais comme toutes les droites issues de o sont stables, les points d'intersection de ces droites avec (pa) sont fixes, de sorte que h est l'identité sur (pa) et, en particulier, on a $h(b) = b$.

5.2.3 Un corollaire

5.4 Corollaire. *Dans la situation de 5.3, si M (resp. M') est la tangente à Γ (resp. Γ') en m (resp. m'), le point d'intersection de M et M' décrit une droite L.*

Démonstration. Comme on a $M' = h(M)$, c'est exactement le lemme 5.1.

5.2.4 La fin du théorème

Avec le corollaire 5.4, le théorème 2.2 est presque démontré. Il reste à montrer que la droite L n'est autre que (ab). Pour cela on considère la tan-

8. Quitte à renuméroter les points on peut supposer qu'on a $h(m) = m'$ et $h(n) = n'$.

gente en a à Γ, son image par h est la tangente en $h(a) = a$ à Γ' de sorte que l'intersection de ces tangentes (qui est a) est sur L. On raisonne de même avec b ce qui donne $L = (ab)$.

6 Le théorème dual, ou corrélatif

6.1 Le résultat

Voici le résultat dual du théorème 2.2. J'utilise à dessein les mêmes notations avec juste un échange des majuscules et des minuscules.

6.1 Théorème. *On se place dans les conditions et avec les notations de 2.1 Soit O une droite joignant deux des points communs à Γ, Γ', disons a, b. Soit δ un point de O et M, N, M', N' les tangentes à Γ, Γ' passant par δ, qui touchent Γ, Γ' en m, n, m', n'. Alors la droite (mm') passe par un point fixe l qui est l'un des points d'intersection des tangentes communes à Γ et Γ'.*

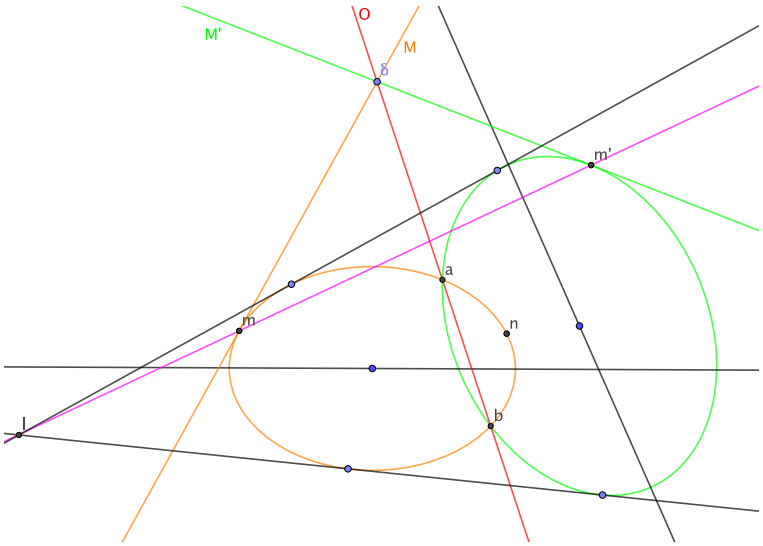


FIGURE 6 –

Démonstration. Il n'y a pas de démonstration nouvelle à faire, c'est exactement le théorème 2.2 lu dans le dual !!

Face à cette preuve magique, on ne peut s'empêcher d'évoquer la remarque un peu amère de Chasles :

Aujourd'hui, chacun peut se présenter, prendre une vérité quelconque, et la soumettre aux divers principes généraux de transformation ; il en retirera

d'autres vérités, différentes ou plus générales ; et celles-ci seront susceptibles de pareilles opérations ; de sorte qu'on pourra multiplier, presque à l'infini, le nombre des vérités nouvelles déduites de la première ...

Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en géométrie ; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice.

6.2 *Remarque.* Comme Nicolas Bouleau me l'a signalé, le résultat était déjà dans Chasles, voir [1] p. 194.

Références

[1] Chasles Michel, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, réédition Jacques Gabay, 1989.

[2] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes*, 2014.
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livre_de_geometrie_projective.html`

[3] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, Géométrie projective linéaire*, 2014.
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livregeometrie/DPPartie1.pdf`

[4] Perrin Daniel, *Géométrie projective et application aux géométries non euclidiennes, La géométrie d'une forme quadratique, premier épisode : la conique*, 2014.
`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~daniel.perrin/Livregeometrie/DPPartie3.pdf`