

Le plus grand angle fait face au plus grand côté

Daniel PERRIN

L'objectif de ce texte est de donner quelques preuves d'un résultat important mais méconnu : dans un triangle, le plus grand angle fait face au plus grand côté. Ce résultat est dans Euclide, et on rappelle sa preuve, mais on en donnera aussi quelques autres. Il est essentiel quand on utilise les cas d'isométrie des triangles pour préciser quels sont les sommets et les côtés homologues.

1 Le théorème et quelques preuves

1.1 L'énoncé

Dans ce qui suit on appelle triangle la donnée de trois points du plan, non alignés. Il s'agit de montrer le théorème suivant :

1.1 Théorème. *Soit ABC un triangle. Les angles du triangle sont dans le même ordre que les côtés opposés : on a $\widehat{A} \leq \widehat{B} \leq \widehat{C} \iff BC \leq CA \leq AB$.*

Je donne ici les preuves brutes, sans préciser les justifications axiomatiques.

1.2 La preuve d'Euclide

Le théorème c'est la proposition 18 du Livre I, voir [E], qui repose sur le lemme suivant (proposition 16) :

1.2 Lemme. *Dans un triangle, un angle extérieur est plus grand que les angles intérieurs opposés.*

Démonstration.

Notons $[Cx)$ la demi-droite opposée à $[CB)$. Il s'agit de montrer $\widehat{A} = \widehat{BAC} < \widehat{ACx}$. Soit E le milieu de $[AC]$ et F le symétrique de B par rapport à E (Euclide ne dit pas ça, mais ça revient au même). Les triangles AEB et CEF sont égaux ($AE = CE$, $EB = EF$ et les angles en E opposés

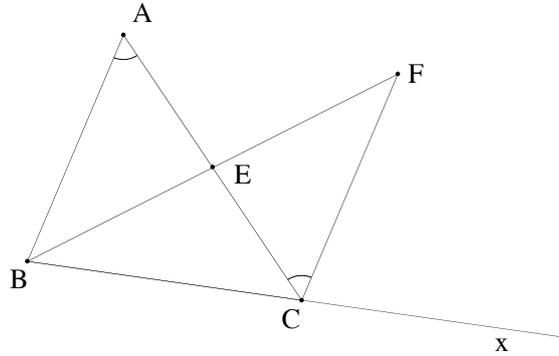


FIGURE 1 – La proposition 16 d’Euclide

par le sommet). On en déduit $\widehat{A} = \widehat{ECF}$ et cet angle est plus petit que $\widehat{ECx} = \widehat{ACx}$.

Euclide ne donne pas de justification de ce dernier point, mais c’est facile, pourvu qu’on dispose des axiomes des demi-plans (voir Hilbert ou Lion [L]). Il s’agit de montrer que F est dans l’angle saillant \widehat{ACx} . Cela signifie :

- 1) qu’il est dans le demi-plan limité par (AC) et qui ne contient pas B , c’est clair car $[BF]$ coupe (AC) en E ,
- 2) qu’il est dans le demi-plan limité par (BC) qui contient A , c’est clair car E est dans ce demi-plan (comme milieu de $[AC]$), donc aussi la demi-droite $[BE)$.

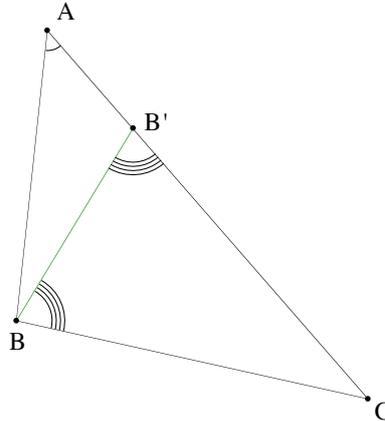


FIGURE 2 – La proposition 18 d’Euclide

Revenons à la preuve du théorème. Supposons d’abord $BC \leq CA$ et montrons $\widehat{A} \leq \widehat{B}$. On note d’abord que le cas d’égalité est la propriété du triangle isocèle (conséquence du premier cas d’égalité des triangles). Comme on a $BC \leq CA$, on porte un point B' dans $[AC]$, avec $BC = B'C$. Le triangle

BCB' est isocèle en C , de sorte qu'on a $\widehat{B'BC} = \widehat{BB'C}$. Mais, comme B' est entre A et C , on a $\widehat{B'BC} \leq \widehat{ABC} = \widehat{B}$ et, par le lemme appliqué à ABB' , on a $\widehat{A} \leq \widehat{BB'C}$, d'où le résultat.

Euclide ne montre pas l'autre sens, mais c'est évident. En effet, supposons $\widehat{A} \leq \widehat{B}$. On raisonne par l'absurde. Si on a $BC > CA$, le sens direct montre que \widehat{A} est plus grand que \widehat{B} : contradiction.

1.3 La preuve de Hilbert (ou de Lion)

Comme celle d'Euclide, elle repose sur 1.2, mais la preuve de ce lemme est différente et repose sur le résultat suivant :

1.3 Lemme. *La somme de deux angles d'un triangle est strictement plus petite que l'angle plat.*

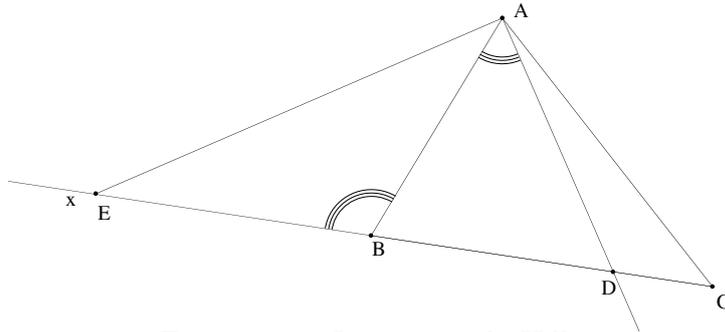


FIGURE 3 – La preuve de Hilbert

Démonstration. (du lemme) On note π l'angle plat. On raisonne par l'absurde en supposant $\widehat{ABC} + \widehat{BAC} \geq \pi$. Soit $[Bx)$ la demi-droite opposée à $[BC)$. On a $\widehat{ABC} + \widehat{ABx} = \pi$. On a donc $\widehat{ABx} \leq \widehat{BAC}$. On peut donc reporter l'angle \widehat{ABx} dans \widehat{BAC} : il existe une demi-droite $[Ay)$ contenue dans l'angle \widehat{BAC} telle que l'on ait $\widehat{BAy} = \widehat{ABx}$ (cette possibilité de report est sous-jacente dans Euclide, explicite chez Hilbert ou Lion). Cette demi-droite coupe $[BC]$ en D (c'est un lemme sur les angles, conséquence des axiomes de demi-plans) et on porte sur $[Bx)$ un point E tel que $BE = AD$. On considère alors les triangles ABE et BAD . Ils sont "égaux" car on a $AB = BA$, $\widehat{ABE} = \widehat{BAD}$ et $BE = AD$. On en déduit l'égalité d'angles $\widehat{EAB} = \widehat{DBA}$, d'où $\widehat{EAD} = \widehat{EAB} + \widehat{BAD} = \widehat{DBA} + \widehat{ABE} = \widehat{DBE} = \pi$. L'angle \widehat{EAD} serait plat, donc A serait aligné avec B et E donc avec B et C , ce qui est absurde.

1.4 Corollaire. *Dans un triangle, un angle extérieur est plus grand que les angles intérieurs opposés.*

1.4 La preuve de Cousin-Fauconnet

Voir [CF]. On suppose $BC < AC$. On considère la médiatrice Δ de $[AB]$. Comme on a $BC < AC$, B et C sont du même côté de la médiatrice et A de l'autre, de sorte que $[AC]$ coupe Δ en C' . On a donc $AC' = BC'$. Par symétrie (ou la propriété du triangle isocèle), on a $\widehat{A} = \widehat{C'AB} = \widehat{C'BA}$ et ce dernier angle est $< \widehat{B}$ car C' est entre A et C .

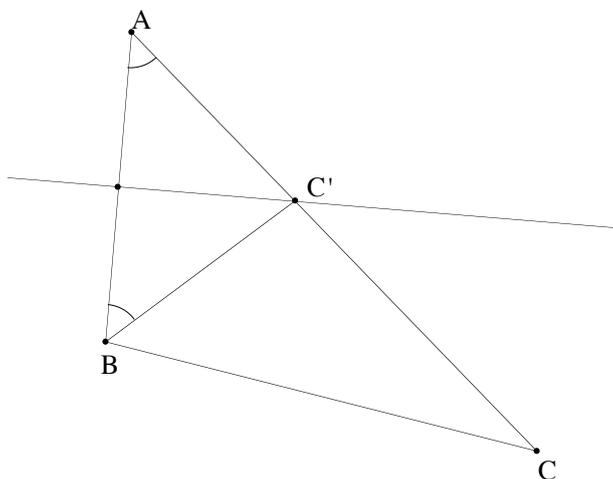


FIGURE 4 – La preuve de Cousin-Fauconnet

1.5 La preuve avec les sinus

Elle découle de la proposition suivante :

1.5 Proposition. *Soit ABC un triangle, $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ ses angles et a, b, c les longueurs de ses côtés. On a la formule*

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}.$$

Démonstration. Cela résulte de la formule donnant l'aire de ABC : $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}bc \sin \widehat{A}$ et de ses sœurs.

Si l'on ne veut pas utiliser les aires, on considère le projeté orthogonal H de C sur (AB) . On a alors $CH = CA \sin \widehat{A} = BC \sin \widehat{B}$, soit $b \sin \widehat{A} = a \sin \widehat{B}$.

Le théorème en résulte. En effet, si \widehat{A} et \widehat{B} sont aigus ou droits, et si on a $\widehat{A} \leq \widehat{B}$, on a $\sin \widehat{A} \leq \sin \widehat{B}$ (car le sinus est croissant entre 0 et $\pi/2$), donc $a \leq b$. En particulier, dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit sont plus petits que l'hypoténuse.

Il reste le cas où \widehat{B} , par exemple, est obtus. Il y a plusieurs voies pour montrer que b est le plus grand côté.

1) On applique Al-Kashi.

2) On considère la perpendiculaire à (BC) en B . Comme l'angle en B est obtus, elle est dans l'angle saillant, donc coupe le segment $[AC]$ en A' . Le triangle $A'BC$ est rectangle en B , de sorte qu'on a $BC < A'C < AC$, soit $a < b$.

En fait, le plus difficile dans cette histoire, c'est de montrer que \widehat{B} est alors le plus grand angle !

Si on utilise le fait que la somme de deux angles est plus petite que π (cf. 1.3) on fait coup double : on a $\widehat{A} < \widehat{B}$ (deux obtus, ce serait vraiment trop), de plus, on a $\widehat{A} < \pi - \widehat{B}$, donc $\sin \widehat{A} < \sin \widehat{B}$ et on a gagné.

1.6 La preuve par le produit scalaire

On suppose $BC < AC$. Il s'agit de montrer $\widehat{A} < \widehat{B}$, ou encore, par décroissance du cosinus, $\cos \widehat{A} > \cos \widehat{B}$. En écrivant le cosinus à partir des produits scalaires, cela revient à montrer : $BC(\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}) > AC(\overrightarrow{BA}|\overrightarrow{BC})$. En appliquant Chasles, on écrit les deux produits scalaires en faisant apparaître $(\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{BC})$ et il reste à montrer :

$$BC.AC^2 + BC(\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{BC}) > AC.BC^2 + AC(\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{BC})$$

soit encore $(AC - BC)(\overrightarrow{CA}|\overrightarrow{BC}) < (AC - BC)AC.BC$. Comme on a supposé $BC < AC$, c'est l'inégalité de Schwarz.

2 Références

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[E] EUCLIDE, *Les éléments*, Traduction Kayas, éditions du CNRS, 1978.

[L] LION Georges, *Géométrie du plan*, Vuibert, 2001.