

L'ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

AU COLLÈGE ET AU LYCÉE

Daniel PERRIN

1. Introduction.

a) Présentation.

Ce qui m'a valu d'être invité à ce colloque c'est sans doute mon rôle de rédacteur du rapport d'étape sur la géométrie [**Rapport d'étape**] de la commission Kahane. Depuis la sortie de ce rapport en janvier 2000 il a été complété par plusieurs textes, cf. [**Aires**], [**DPR**], [**Repères**]. Je prie ceux qui ont lu ces textes de m'excuser pour les nombreuses redites qui vont suivre.

La conclusion essentielle du rapport d'étape c'est la nécessité de conserver un enseignement de géométrie au lycée et plus encore au collège. On y développe plusieurs arguments en faveur de cet enseignement. Il y est notamment question de son utilité et de son importance culturelle.

Dans cet exposé, je mettrai plutôt en avant deux autres aspects qui sont à mes yeux des objectifs essentiels de l'enseignement de la géométrie :

- la vision géométrique comme outil de pensée (en mathématiques et ailleurs),
- la géométrie comme lieu privilégié de l'apprentissage du **raisonnement**.

b) Raisonement ou démonstration.

Je viens de prononcer le mot de "raisonnement" et je souhaite faire ici la distinction entre raisonnement et démonstration. Souvent la géométrie est présentée comme le lieu de l'apprentissage de la **démonstration**. Je voudrais dire que cette vision des choses me semble très réductrice.

Ce qui fonde mon opinion c'est d'abord ma propre pratique des mathématiques, et notamment ma pratique de chercheur. Dans l'activité d'un mathématicien, la démonstration est loin d'être la chose première. Elle est en effet précédée d'une phase d'exploration, quasiment expérimentale où l'on examine des exemples, où l'on **calcule** avec ces exemples (y compris avec des moyens informatiques), où l'on **formule** des conjectures, souvent fausses, mais qui font progresser notre compréhension de la situation. Voilà ce que dit là-dessus A. Grothendieck l'un des plus grands mathématiciens du XXème siècle :

Quand je suis curieux d'une chose, mathématique ou autre, je l'interroge. Je l'interroge, sans me soucier si ma question est peut-être stupide ou si elle va paraître telle ... Souvent la question prend la forme d'une affirmation – une affirmation qui, en vérité est un coup de sonde. ... Souvent, surtout au début d'une recherche, l'affirmation est carrément fausse – encore fallait-il l'écrire pour que ça saute aux yeux que c'est faux, alors qu'avant de l'écrire il y avait un flou, comme un malaise, au lieu de cette évidence. Ça permet maintenant de revenir à la charge avec cette

ignorance en moins, avec une question-affirmation peut-être un peu moins "à côté de la plaque".

Ce n'est qu'une fois qu'on a mis au jour une conjecture suffisamment résistante qu'on peut commencer à essayer de la prouver, mais là encore les allers et retours sont nombreux entre tentative de preuve et recherche de contre-exemples.

La phase d'écriture d'une démonstration, si elle demeure importante comme garantie de la véracité des affirmations, n'est que la phase ultime du travail d'un mathématicien, celle qui va permettre d'emporter la conviction (la sienne et celle des autres). Bref, chercher à écrire une preuve avant d'avoir compris les choses serait mettre la charrue devant les bœufs.

Je pense fondamentalement que **faire** des mathématiques c'est cela et que cela peut être fait à tous les niveaux, de l'école à l'université en passant par le collège et le lycée. C'est d'ailleurs ce qui est dit dans les commentaires des programmes de collège :

... identifier un problème, conjecturer un résultat, expérimenter sur des exemples, bâtir une argumentation, mettre en forme une solution, contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié.

Nous avons essayé dans [DPR] de donner d'exemples de situations pouvant mener à une telle recherche. Pour un autre exemple significatif, à l'école primaire, et dans un quartier défavorisé, voir la situation du plus grand produit dans [ERMEL]. On y verra la différence entre raisonnement (ou argumentation) et démonstration. Voir aussi le colloque *Argumentation et disciplines scolaires* de l'ENS lettres de Lyon les 7,8,9 octobre 2004.

Sans doute ce type de recherches se pratique parfois dans les classes¹ et je ne voudrais surtout pas mettre en cause qui que ce soit ici, mais c'est loin d'être le cas général et trop souvent la démonstration se limite à une sorte d'algorithme préfabriqué, qui mène à des preuves sans enjeu, preuves de choses quasi-évidentes, qui transforment les élèves en OS de la géométrie. J'ai constaté cette tendance à la fois chez les professeurs débutants (par exemple dans les mémoires PLC2), mais aussi dans les manuels. D'ailleurs, si l'on compare les manuels actuels (disons de seconde) et les manuels anciens (disons de quatrième des années 50-60) on constate que les énoncés de géométrie sont beaucoup plus ouverts dans les anciens.

Je pense que cette pratique (la démonstration atomisée) est très dangereuse, pour beaucoup de raisons.

- D'abord, je maintiens que ce n'est pas ça faire des mathématiques. En revanche, c'est cela qu'on accrédite auprès de l'opinion y compris chez certains scientifiques (souvenons-nous de ce qu'en pensait Claude Allègre) et l'image de notre discipline qui est ainsi produite est désastreuse.

- Ensuite, je pense que ce type de pratiques stérilise l'imagination, voire l'intelligence. Voici un exemple, isolé certes, mais qui doit nous poser question. Il s'agit de celui de Salim, l'un des enfants de l'école où était étudiée la situation du plus grand produit évoquée ci-dessus. En lisant la chronique de la classe j'avais le sentiment de reconnaître dans ce garçon un futur mathématicien, tant les questions qu'ils posait et les arguments qu'il avançait étaient pertinents. Pourtant, en quatrième, il s'est retrouvé en échec en maths !

¹ et les ateliers du colloque en montrent nombre d'exemples convaincants !

Si on essaie d'analyser d'où provient cette dérive qui consiste à limiter le raisonnement à la démonstration tronçonnée, on aperçoit de multiples raisons dont l'une (et sans doute la principale ?) est le facteur temps : avec les réductions d'horaire les professeurs ont de plus en plus de mal de gérer des situations où une véritable recherche peut s'enclencher.

Mais j'en vois au moins deux autres.

- La responsabilité de l'université dans la formation des maîtres². En effet, je pense qu'à l'université, à force de mettre l'accent sur la rigueur, on finit par paralyser nos étudiants. Une anecdote avec mes étudiants de CAPES : les nouveaux programmes de TS incitent à introduire l'exponentielle comme solution de l'équation différentielle $y' = y$ et à utiliser la méthode d'Euler. Cela conduit à construire $\exp(x)$ comme limite de $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Reste à voir que l'on a bien $\exp'(x) = \exp(x)$. Or, on a $u'_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1}$ et, comme $1 + x/n$ tend vers 1, $u'_n(x)$ tend vers $\exp(x)$, d'où le résultat. Hauts cris de mes étudiants : *mais m'sieur, on n'a pas le droit, etc.* Nos étudiants n'osent plus dire ce que dirait Euler sans la moindre hésitation. C'est vrai qu'il y a des cas où ça ne marche pas. Mais sans cette idée un peu osée, il n'y a pas de démonstration.

Attention, je sais bien qu'en mathématiques il faut faire attention, sinon on peut écrire des bêtises. On verra d'ailleurs ci-dessous un exemple où la rigueur est essentielle. Mais l'erreur est un point de passage crucial. Je cite encore A. Grothendieck :

Mais il arrive aussi que cette image [de la situation] est entachée d'une erreur de taille, de nature à la fausser profondément. ... Le travail, parfois laborieux, qui conduit au dépistage d'une telle idée fautive est souvent marqué par une tension croissante au fur et à mesure qu'on approche du nœud de la contradiction, d'abord vague, puis de plus en plus criante jusqu'au moment où elle éclate avec la découverte de l'erreur et l'écroulement d'une certaine vision des choses, survenant comme un soulagement immense.

Et il ajoute plus loin :

*La découverte de l'erreur est un des moments cruciaux, un moment créateur entre tous, dans tout travail de découverte.*³

Or cette idée qu'il est légitime de pouvoir se tromper ne fait pas partie de notre culture. Un indice en ce sens est fourni par l'enquête PISA : les élèves français, quand ils ne savent pas, ne répondent pas (contrairement à la plupart des autres).

- La deuxième raison fondamentale tient à la nature des outils dont disposent les collégiens d'aujourd'hui pour faire ces fameuses démonstrations et c'est le thème essentiel de ma conférence. Je pense, et j'en donnerai des exemples plus loin, que ce sont les outils actuels qui conduisent aux dérives dénoncées plus haut. En effet, avec ces outils, les preuves sont plus difficiles, moins naturelles, moins visuelles, et nécessitent une rédaction plus sophistiquée.

² Je m'inclus dans cette critique puisque je m'occupe de formation des maîtres depuis bientôt 30 ans. À notre décharge, il faut dire que notre marge de manœuvre est limitée par la nature des épreuves des concours.

³ Toujours dans l'évangile selon Grothendieck : Celui qui craint de se tromper est impuissant à découvrir.

c) Les outils.

Dans le cas de la géométrie du collège⁴ les outils utilisés “pour prouver” peuvent être les suivants :

- les invariants (longueurs, angles, aires),
- les cas “d’égalité” et de similitude,
- le calcul,
- les transformations.

Depuis la réforme des mathématiques modernes, les cas “d’égalité” ont disparu de notre enseignement et le rôle de certains invariants comme angle et aire a été largement minoré. Je considère qu’il s’agit d’une double erreur et je vais essayer de vous en convaincre.

Avant d’entrer dans le vif du sujet, un mot sur ma position par rapport à l’enseignement du second degré. Comme je n’y ai jamais enseigné moi-même et que je ne suis pas didacticien (sauf par alliance, ce qui n’est d’ailleurs pas négligeable), ma position est, avant tout, celle d’un mathématicien dont la spécificité, depuis bientôt 30 ans, est la formation des maîtres. C’est en enseignant la géométrie aux sévriennes, jadis, que j’ai été amené à réfléchir sur ses fondements mathématiques et épistémologiques. Ma position didactique, en faveur de l’usage des invariants et des cas d’isométrie au collège est donc sous-tendue essentiellement par cette réflexion mathématique. Cette réflexion peut sembler théorique, mais je pense qu’elle est importante et j’essaierai de l’illustrer par des exemples concrets.

2. Les outils pour prouver : les invariants.

a) Programme d’Erlangen et invariants.

Le discours dominant à l’époque des mathématiques modernes mettait en avant le programme d’Erlangen de Felix Klein (1872). La thèse de Klein est qu’une géométrie consiste essentiellement en la donnée d’un groupe (de transformations) opérant sur un ensemble. Ce point de vue, reste, à mon avis, tout à fait valable, mais, tel quel, il est insuffisant car, s’il permet de comprendre de quelle géométrie relève tel ou tel théorème (par exemple Pythagore de la géométrie euclidienne, Thalès de la géométrie affine et Pappus de la géométrie projective), il n’explique pas par quels procédés on obtient ces théorèmes. Or, cette question est résolue aussi, à peu près à l’époque de Klein, par la théorie des invariants. Le principe c’est que tout théorème d’une géométrie donnée, relative à un groupe donné, correspond à une relation entre les invariants (polynomiaux) de ce groupe. Mon opinion est donc que la théorie des invariants est inséparable du programme d’Erlangen. Or, dans le cas de la géométrie du collège, les invariants en question correspondent aux notions de longueur, d’angle et d’aire et un contresens majeur de la réforme des mathématiques modernes a

⁴ Pour la géométrie, les années collège me paraissent essentielles. J’étendrai d’ailleurs le collège à la classe de seconde, dernière classe de la formation mathématique (presque) universelle du citoyen. Parmi ces citoyens, je pense en particulier aux futurs professeurs des écoles (pas nécessairement scientifiques, bien entendu) dont le rôle est essentiel dans la formation, notamment mathématique, de nos (petits) enfants.

été d'occulter au moins partiellement ces invariants qui restent encore mal aimés aujourd'hui, au profit des transformations.

J'ai développé ces idées dans l'annexe 1 du rapport d'étape et surtout dans l'article [Aires] et j'y renvoie le lecteur qui souhaiterait plus de détails. Je donne juste ici quelques exemples de cette théorie.

D'abord que sont les invariants ? On peut les voir de deux façons. La première est géométrique : il s'agit de notions familières, longueur, angle, aire. La seconde est plus algébrique et on y voit effectivement apparaître des polynômes. En effet, si \vec{OA} a pour coordonnées (a_1, a_2) etc., les invariants précédents correspondent respectivement au carré scalaire $(\vec{OA}|\vec{OA}) = a_1^2 + a_2^2$ (c'est le carré de la longueur OA) ou au produit scalaire $(\vec{OA}|\vec{OB}) = a_1b_1 + a_2b_2$, (qui correspond au cosinus de l'angle \widehat{AOB}) ou encore au "produit vectoriel" $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = a_1b_2 - a_2b_1$ (le double de l'aire orientée du triangle AOB , ou encore $OA \times OB \sin \widehat{AOB}$). Ces invariants apparaissent ainsi comme des polynômes en les coordonnées des points, et ces polynômes sont invariants sous l'action du groupe des rotations (l'aire orientée étant, de plus, invariante par le groupe de toutes les transformations affines de déterminant 1).

Bien entendu, quiconque a fait de la géométrie sait qu'il est utile d'employer les invariants géométriques pour prouver les théorèmes. Ce que je vais expliquer maintenant c'est que ces démonstrations, comme Janus, ont deux faces : celle de la géométrie et celle de l'algèbre. Voici un exemple très simple : le concours des médianes dans un triangle.

b) Exemple : les médianes.

Pour utiliser un outil il faut souvent le compléter par des accessoires. Dans le cas des aires, l'un d'eux qui devrait être, à mon avis, un des résultats clés de la géométrie du collège est ce que je propose d'appeler le "lemme des proportions" :

Si deux triangles ont un sommet commun et des bases portées par la même droite, le rapport de leurs aires est égal au rapport des bases, cf. figure 1.

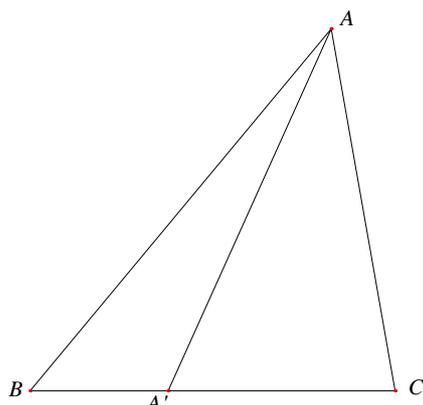


Figure 1

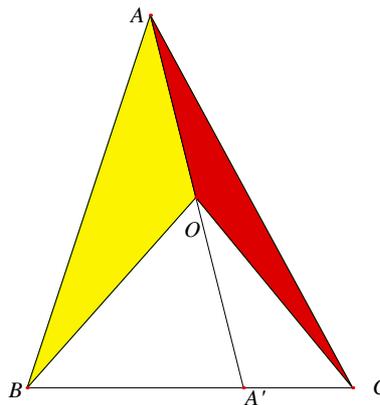


Figure 2

Un cas particulier de ce lemme est le lemme "de la médiane" qui affirme qu'une médiane partage un triangle en deux triangles d'aires égales. Il y a aussi un autre lemme (dit "du trapèze") qui affirme que deux triangles ABC et $A'BC$, de même base et dont les sommets sont sur une parallèle à la base, ont même aire.

De manière un peu pédante, on peut dire que ces lemmes traduisent la semi-invariance de l'aire par affinité ou son invariance par symétrie oblique, ou encore par transvection. Mais ces lemmes résultent de manière élémentaire de la formule $base \times hauteur / 2$.

Une conséquence du lemme des proportions est le "lemme du chevron"⁵ :

Soit ABC un triangle et O un point du plan. Si (OA) coupe (BC) en A' , on a la formule

$$\frac{\mathcal{A}(OBA)}{\mathcal{A}(OCA)} = \frac{A'B}{A'C}.$$

Ce lemme implique aussitôt le résultat suivant :

Si ABC est un triangle, un point O est sur la médiane AA' si et seulement si on a l'égalité des aires $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OAC)$ ⁶ (1).

La formule (1), qui porte sur l'aire ordinaire : $\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}\|$, a une traduction algébrique en termes de produit vectoriel i.e. d'aire orientée. On montre précisément que le point O est sur la médiane si et seulement si :

$$(2) \quad \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \vec{0},$$

c'est-à-dire si les aires orientées $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OC}$ sont opposées. (En effet, si on pose $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, la relation signifie que O, A, M sont alignés. Or, $OBMC$ est un parallélogramme, de sorte que (OM) passe par le milieu A' de $[BC]$ et on a bien le résultat.)

On peut alors montrer le concours des médianes, d'abord par la voie géométrique. Si on note AA', BB', CC' les médianes et O le point d'intersection de (BB') et (CC') on a alors, par (1), $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OBC)$ et $\mathcal{A}(OBC) = \mathcal{A}(OAC)$, d'où $\mathcal{A}(OAB) = \mathcal{A}(OAC)$ et le résultat.

Mais cette preuve se lit aussi de manière algébrique. En effet, on a la relation

$$(*) \quad \overrightarrow{OA} \wedge (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OB} \wedge (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OC} \wedge (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \vec{0}$$

qui traduit la bilinéarité et l'antisymétrie du produit vectoriel. Si on prend l'origine O à l'intersection de deux des médianes, la formule (2) montre que deux des produits vectoriels sont nuls, donc aussi le troisième.

Ce qu'il faut retenir de cette façon algébrique de voir les choses c'est que le théorème correspond à la **relation** (*), d'ailleurs essentiellement triviale ici (comme on le voit en l'écrivant en coordonnées), entre les invariants.

c) *Bilan.*

⁵ L'appellation de lemme du chevron se comprend bien en regardant la figure 2, au moins si on prend O à l'intérieur du triangle.

⁶ Voilà, je viens de me prendre en flagrant délit d'entorse à la rigueur ! L'égalité est vraie aussi si les droites (OA) et (BC) sont parallèles ! On ajoutera donc que O est intérieur au triangle.

L'intérêt théorique (et seulement théorique, il ne s'agit nullement de traiter toute la géométrie par le calcul !) de cette vision algébrique des invariants réside alors dans les trois points suivants :

1) On peut montrer (cf. par exemple [Aires]) que tout théorème d'une géométrie s'interprète comme une relation entre des invariants relatifs à cette géométrie, comme il est apparu dans l'exemple ci-dessus ou dans d'autres, voir par exemple le concours des hauteurs qui provient de la relation

$$(\overrightarrow{OA}|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB}|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OC}|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) = 0.$$

2) On a une sorte de théorème de complétude pour les invariants : on montre que pour la géométrie euclidienne du triangle (resp. pour la géométrie affine), il n'y a pas d'autres invariants que ceux vus ci-dessus (les produits scalaires et vectoriels) (resp. le produit vectoriel seulement).

3) On a aussi un théorème de complétude pour les relations : là encore on les connaît toutes, il n'y en a pas (de non triviale) en géométrie affine, et en géométrie euclidienne elles se déduisent toutes de la relation

$$(**) \quad (\overrightarrow{OB}|\overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC})^2 = (\overrightarrow{OB}|\overrightarrow{OB}) (\overrightarrow{OC}|\overrightarrow{OC}),$$

(dite identité de Lagrange) qui n'est autre que la relation $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Ce qu'affirme la théorie c'est qu'on peut, en principe, obtenir mécaniquement tous les théorèmes de géométrie à partir de ces invariants et de leurs relations.

Par exemple, la relation fondamentale (**) ci-dessus est exactement la traduction analytique de la célèbre propriété de la droite d'Euler : le centre de gravité, le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre d'un triangle sont alignés et de bien d'autres résultats (par exemple, celui sur le symétrique de l'orthocentre, cf. [DPR]).

d) Invariants et relations, encore un exemple.

À tous ceux qui ne croiraient pas encore à la puissance des invariants, je propose un petit détour en montrant un exemple, plus convaincant peut-être que ceux qui portent sur la géométrie euclidienne. Cet exemple est issu de la géométrie de l'inversion qui n'est plus enseignée actuellement au lycée (encore que ce qui suit pourrait être expliqué à un élève de terminale S). Le groupe correspondant est le groupe $PGL(2, \mathbf{C})$ des homographies à coefficients complexes.

L'invariant fondamental de cette géométrie est le birapport :

$$[a, b, c, d] = \frac{c-a}{c-b} : \frac{d-a}{d-b} = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}.$$

Lorsque a, b, c, d sont 4 points distincts de $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, il est facile de calculer l'argument de $[a, b, c, d]$ en termes d'angles orientés et on en déduit que les points a, b, c, d sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel.

Mais, si on a 8 points a, b, c, d, p, q, r, s , on a une relation, évidente mais splendide, entre les birapports ("le théorème des six birapports") :

$$[abrs] [bcps] [caqs] [pqcd] [grad] [rpbd] = 1.$$

La traduction géométrique de cette condition est immédiate : si on a 8 points et si 5 des quadruplets ci-dessus sont cocycliques ou alignés, les birapports correspondants sont réels. Mais alors, le sixième birapport est aussi réel et donc les 4 derniers points sont aussi cocycliques ou alignés.

Cette relation entre les invariants est source de nombreux théorèmes géométriques : le théorème de la droite de Simson, celui des 6 cercles de Miquel, le lemme du pivot.

Soient a, b, c trois points non alignés et p, q, r trois points distincts de a, b, c , situés sur les droites (bc) , (ca) , (ab) . Alors les cercles circonscrits aux triangles cpq , brp , aqr ont un point commun appelé le “pivot”.

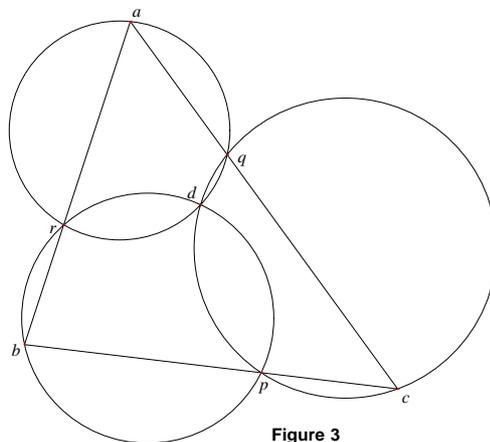


Figure 3

e) *Conclusion.*

On a vu que ce que dit la théorie c’est que les théorèmes d’une géométrie proviennent toujours de relations entre invariants relatifs à cette géométrie. La conséquence pratique de ce fait c’est que la constatation empirique que les invariants sont efficaces pour faire de la géométrie est pleinement justifiée par la théorie : tout problème de géométrie affine (resp. euclidienne) doit pouvoir se résoudre par usage des aires (resp. des longueurs et des angles). C’est cette réflexion mathématique qui motive ma position didactique en faveur d’un usage plus systématique des invariants au collège.

Dans la pratique, pour que l’utilisation des invariants aire et angle soit efficace il est nécessaire de disposer d’un petit nombre d’accessoires pour compléter ces outils. Pour les aires il s’agit essentiellement des “lemmes du collègue”, cf. [Aires] ; pour les angles, on peut citer en vrac la somme des angles d’un triangle, l’usage du complémentaire et du supplémentaire, les angles alternes-internes et correspondants, et enfin, le théorème de l’angle inscrit.

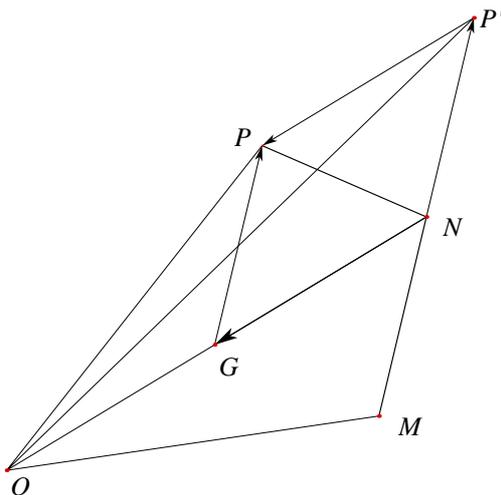
f) *Encore un exemple : la loi de Kepler.*

Il y a des tas d’exemples géométriques à l’appui de cette théorie, Thalès, Ménélaus, Céva, Gergonne, Newton, cf. [Aires] ou [Repères]. J’ai choisi (pour changer) un exemple en physique : la loi des aires de Kepler.

Nous nous plaçons dans le cas très simple d’une seule planète (disons Vénus, pour coller à l’actualité) tournant autour du soleil, négligeant ainsi les interactions avec les autres corps célestes. On peut alors considérer les deux astres comme des masses ponctuelles.

Cette preuve se situe dans le cadre d’un modèle physique discret. Nous considérons donc ici le temps comme formé de la juxtaposition d’instantanés très brefs, dont la

durée est notre unité de temps. On considère un point matériel mobile et on note M sa position au temps 0. Entre les temps 0 et 1 le mobile se déplace de M à N avec la vitesse $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$ que l'on peut supposer constante si l'intervalle de temps est supposé suffisamment petit. Si le mobile n'est soumis à aucune force, il est animé d'un mouvement rectiligne uniforme et au temps 2 il se retrouve en P' avec $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP'}$. En revanche, s'il est soumis à une force \vec{F} , on sait que l'accélération $\vec{\gamma}$ est proportionnelle à \vec{F} et le mobile, au temps 2, vient en P , avec $\vec{\gamma} = \overrightarrow{NG} = \overrightarrow{NP} - \overrightarrow{MN}$ (l'accroissement de la vitesse), d'où la construction de P comme sommet du parallélogramme $NGPP'$.



Loi des aires

Dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme, la distance parcourue est proportionnelle au temps et on a ainsi $MN = NP'$. Bien entendu, les planètes ne suivent pas un mouvement rectiligne (leurs trajectoires sont des ellipses, c'est la première loi de Kepler) et l'une des premières remarques de Kepler c'est que leur mouvement n'est pas non plus uniforme (MN n'est pas égal à NP). Il a donc cherché une loi de substitution. La seule hypothèse supplémentaire que nous ferons ici est que la planète est soumise à une force "centrale", c'est-à-dire une force \vec{F} dirigée vers le soleil, représenté par un point fixe O . On a donc $\vec{\gamma} = \overrightarrow{NG}$ colinéaire à \overrightarrow{NO} . On remarquera que nous ne faisons aucune autre hypothèse sur cette force (notamment nous n'avons pas besoin de la loi plus précise de Newton qui affirme qu'elle est inversement proportionnelle au carré de la distance ON).

La loi de Kepler s'énonce alors ainsi :

Deuxième loi de Kepler.

L'aire balayée par le "rayon vecteur" $[OM]$ est proportionnelle au temps parcouru, ou encore, les aires balayées par $[OM]$ pendant des temps égaux sont égales. Précisément, cela signifie qu'on a $\mathcal{A}(OMN) = \mathcal{A}(ONP)$.

Démonstration. On a $\mathcal{A}(OMN) = \mathcal{A}(ONP')$ car $MN = NP'$ (lemme de la médiane) et, comme (PP') est parallèle à (ON) , $\mathcal{A}(ONP') = \mathcal{A}(ONP)$ par le lemme du trapèze.

3. Les outils pour prouver : les cas "d'égalité".

a) *La réforme des mathématiques modernes.*

Parmi les cibles préférées des promoteurs de la réforme des mathématiques modernes on trouve les cas d'égalité et de similitude des triangles. Voilà, par exemple, ce que dit Dieudonné à ce sujet, cf. [D] :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en quelques lignes de calculs triviaux, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions de triangles auxiliaires, afin de se ramener vaille que vaille aux sacro-saints "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles ...

C'est un des points que je conteste le plus dans le discours de l'époque et dont les conséquences demeurent importantes à l'heure actuelle puisque les cas d'égalité et de similitude ne font plus partie des outils des collégiens.⁷

b) Fondements théoriques de l'usage des cas d'isométrie comme outil.

Un problème crucial qu'on rencontre lorsqu'on travaille avec un groupe de transformations G d'un ensemble X est de dire si G est transitif, c'est-à-dire si on peut transformer n'importe quel élément de X en n'importe quel autre par l'action du groupe. Par exemple, dans le plan, le groupe des isométries opère transitivement sur l'ensemble des points ou sur celui des demi-droites. En revanche, il n'est pas transitif sur l'ensemble des segments, ou sur l'ensemble des couples de demi-droites de même sommet.

Lorsque le groupe n'est pas transitif, l'objectif est de décrire ses orbites, c'est-à-dire de donner un critère commode pour savoir si deux éléments peuvent ou non être transportés l'un sur l'autre. Beaucoup d'invariants géométriques peuvent s'interpréter en ces termes de description d'orbites, en visant un théorème du genre :

Deux éléments de X peuvent être échangés par l'action de G (i.e. sont dans la même orbite) si et seulement si certains de leurs invariants sont les mêmes.

Par exemple, deux segments peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même longueur. Deux couples de demi-droites peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même angle.

Or, que font les cas d'isométrie des triangles ? Ils décrivent exactement les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des autres éléments que ceux utilisés) **sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci.** Parodiant le célèbre sketch de Pierre Dac et Francis Blanche on pourrait avoir ce dialogue :

— *Votre sérénité, pouvez-vous envoyer ce triangle ABC sur cet autre triangle $A'B'C'$?*

— *Oui*

— *Vous pouvez le faire ?*

— *Oui*

— *Il peut le faire !*

⁷ Ils ont fait leur réapparition en seconde dans les derniers programmes. Je m'en réjouis dans la mesure où cela suscite une réflexion sur le sujet, mais je pense que cette introduction est trop tardive et les arguments que je vais donner en leur faveur, tant du point de vue de l'efficacité de l'outil que de l'axiomatique, en témoignent.

Nous allons donner ci-dessous des exemples de cette situation en espérant convaincre le lecteur de l'efficacité des cas d'isométrie des triangles, par rapport à l'usage direct des transformations. En vérité, dans le plan, comme on connaît toutes les isométries, il est souvent assez facile de repérer laquelle employer. En revanche, ce qui est plus délicat c'est de prouver qu'elle fait bien ce qu'on suppose. On y arrive, mais c'est souvent lourd et, presque toujours, inutile.

Le même argument vaut évidemment pour les similitudes, avec, dans ce cas, deux avantages supplémentaires :

- il y a un critère (avec deux angles égaux) d'une simplicité enfantine,
- on connaît encore toutes les similitudes planes mais il est nettement plus compliqué que dans le cas des isométries de repérer celle qui va faire le travail.

c) *Des exemples.*

Il y a dans [DPR] et [Repères] de nombreux exemples de cette utilisation des cas d'isométrie ou de similitude dans lesquels cette voie est plus simple que le recours aux transformations. À la lumière de ces exemples, je reprendrais volontiers la citation de Dieudonné, en la renversant :

... tout s'obtient de la façon la plus directe en utilisant les "cas d'égalité" ou "cas de similitude" des triangles, là où auparavant il fallait ériger au préalable tout un échafaudage complexe et artificiel de constructions, afin de se ramener vaille que vaille à la transformation pertinente ...

Exemple 1.

Soit ABC un triangle isocèle avec $AB = AC > BC$. On porte des points D et E sur (AB) et (BC) (cf. figure 6) tels que $BD = CE = AB - BC$. Que peut-on dire du triangle ADE ?

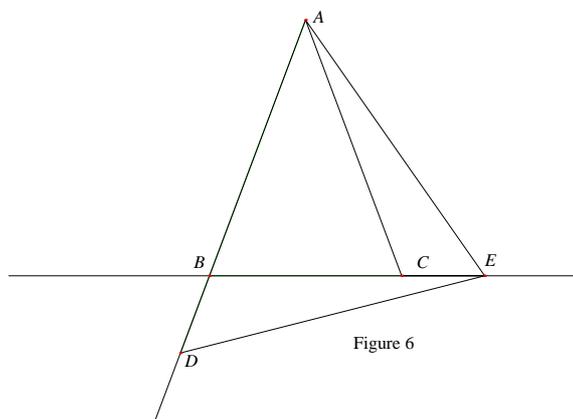


Figure 6

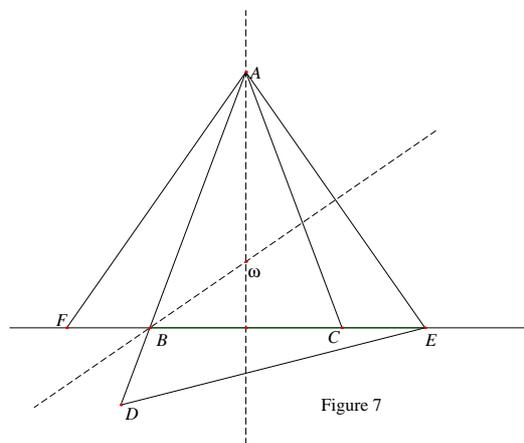


Figure 7

On constate (en mesurant !) que ADE semble isocèle en E . C'est très facile à prouver avec les cas d'isométrie. En effet, on considère ACE et EBD . Ils sont isométriques (deux côtés et un angle). On a donc $AE = DE$.

Bien entendu, on peut aussi traiter le problème par les transformations (on peut toujours !). Il suffit de trouver la transformation qui passe de ACE à EBD . L'examen du sens des angles montre que c'est une rotation. On peut donc la trouver comme composée de deux symétries en introduisant le point F symétrique de E dans la symétrie σ_1 par rapport à la médiane-hauteur de ABC . On compose ensuite par la symétrie σ_2 par rapport à la bissectrice de \widehat{ABC} et F vient en D (la droite (BC)

vient sur (AB) et précisément la demi-droite $[BC)$ sur $[BA)$ et on conclut en utilisant $BF = BD$). On en conclut que, si $\rho = \sigma_2\sigma_1$, on a $\rho(E) = D$. Par ailleurs, on a $\sigma_1(A) = A$ et $\sigma_2(A) = E$ (car le triangle ABE est isocèle en B donc la bissectrice est axe de symétrie). On a donc aussi $\rho(A) = E$ et, en définitive, $EA = DE$.

Trois critiques sur cette démonstration.

1) Il faut déjà repérer quelle est la transformation pertinente (en tous cas, moi, je ne l'ai fait qu'à partir des triangles !)

2) Elle nécessite une construction supplémentaire (le point F).

3) Elle est nettement plus compliquée (cf. la discussion sur les demi-droites) et nécessiterait de donner des indications aux élèves.

Exemple 2.

Le second exemple est une situation très simple :

Soit ABC un triangle. On suppose que les hauteurs BB' et CC' sont "égales". Montrer que ABC est isocèle.

On montre que les triangles ABB' et ACC' sont isométriques (ils ont deux angles et un côté égaux). On en déduit l'égalité $AB = AC$.

Une variante consiste à utiliser le cas d'isométrie des triangles rectangles qui permet de montrer que les triangles rectangles $BC'C$ et $CB'B$ sont isométriques et on conclut par l'égalité des angles à la base du triangle ABC .

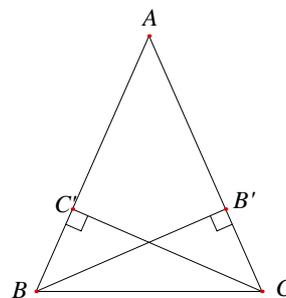


Figure 6.2

Ces preuves sont simples visuelles, faciles à expliquer⁸.

On peut aussi arriver au résultat en utilisant directement les transformations, mais c'est plus ardu. Pourtant, ici la transformation pertinente est évidente : il est clair que la figure est symétrique par rapport à la médiatrice de $[BC]$, mais ce n'est pas tout à fait évident à montrer. Voilà une façon de le faire. On appelle σ cette symétrie. On a $\sigma(B) = C$. Il s'agit de montrer qu'on a $\sigma(B') = C'$. En effet, à partir de là on peut conclure de multiples manières, dont aucune n'est totalement évidente :

- Les droites (BB') et CC' s'échangent par σ , donc leur intersection A est sur l'axe, donc sur la médiatrice et on a $AB = AC$.
- Les angles $\widehat{BCB'}$ et $\widehat{CBC'}$ sont échangés donc égaux.
- L'orthocentre du triangle est l'intersection de (BB') et (CC') . Comme ces droites s'échangent par σ , il est sur l'axe de σ , donc sur la médiatrice et celle-ci est aussi hauteur.

Montrons donc $\sigma(B') = C'$. On considère le cercle Γ de diamètre $[BC]$. Il est invariant par σ et contient B' et C' par la propriété usuelle des triangles rectangles. D'autre part, par σ , le cercle \mathcal{C} de centre B et de rayon BB' s'envoie sur le cercle \mathcal{C}' de centre C et de rayon CC' . Comme B' est dans $\Gamma \cap \mathcal{C}$, $\sigma(B')$ est dans $\Gamma \cap \mathcal{C}'$. On

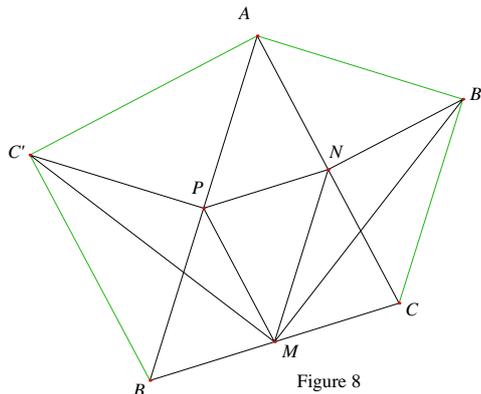
⁸ Une solution alternative encore plus simple est de calculer l'aire du triangle de deux manières en utilisant les bases AB et AC , les invariants vous dis-je !

a presque gagné car C' est dans cette intersection, mais le problème c'est qu'il y a aussi son symétrique C'_1 par rapport à (BC) . En vérité, on conclut facilement. En effet, on peut noter que σ conserve les demi-plans limités par (BC) donc envoie B' sur C' ou utiliser, au lieu de Γ , le demi-cercle contenant B' et C' .

Cet exemple est révélateur. Avec l'outil "triangles isométriques", le raisonnement peut être entièrement à la charge de l'élève. Avec l'outil "transformations", il est nécessaire de le découper en rondelles, toutes plus insipides les unes que les autres. Par ailleurs des travaux récents de psychologues (Duval) ont montré qu'il y a dans ce type de preuve une difficulté liée à la dimension. Le plus naturel, pour les jeunes élèves, c'est la vision d'un objet géométrique (par exemple un triangle) comme une surface, car il s'agit d'un objet que l'on peut imaginer manipuler et déplacer, alors que c'est plus difficile pour les droites et les points. C'est ce qui rend plus faciles les preuves par les triangles isométriques : on les voit. De plus, dans les démonstrations à base de transformations, il est nécessaire de penser les points comme intersections de deux lignes (droites ou cercles) et cela semble être une véritable difficulté pour les débutants. D'ailleurs, à cet égard, le sens direct du résultat : si ABC est isocèle les hauteurs sont égales, est révélateur.

Exemple 3.

Soit ABC un triangle. On construit deux triangles rectangles isocèles ABC' et ACB' à l'extérieur de ABC . Soit M le milieu de $[BC]$. Que peut-on dire de $B'M$ et $C'M$?



La conjecture (double) qui se dégage c'est que $B'M = C'M$ et que $\widehat{B'MC'} = \pi/2$. Pour la prouver, on introduit les milieux N et P de $[AC]$ et $[AB]$ (c'est d'ailleurs nécessaire pour construire B' et C') et on montre que les triangles $B'NM$ et MPC' sont isométriques (la droite des milieux et les angles correspondants font merveille !). On en déduit $MB' = MC'$. L'isométrie des triangles donne les angles égaux et on en déduit l'angle en M en regardant les angles de MPC' .

Bien entendu, on peut aussi raisonner avec les isométries (ou les similitudes). On considère les rotations ρ_1 de centre B' et d'angle $-\pi/2$ et ρ_2 de centre C' et d'angle $-\pi/2$. On montre que la composée est une symétrie centrale en décomposant les rotations en symétries axiales : $\rho_1 = \sigma_{D_1}\sigma_{(B'C')}$ et $\rho_2 = \sigma_{(B'C')}\sigma_{D_2}$ avec des angles de $-\pi/4$ entre D_1 et $(B'C')$ et entre $(B'C')$ et D_2 . Si P est l'intersection de D_1 et D_2 , on a alors $\rho_2\rho_1 = \sigma_{D_2}\sigma_{D_1} = \sigma_P$ (et le triangle $B'PC'$ est rectangle isocèle en P). Mais, comme on a $\rho_2\rho_1(C) = A$, le centre de symétrie est M et on a gagné.

Ici, indiscutablement, la preuve avec les triangles est beaucoup plus simple et du niveau du collège. L'autre preuve nécessite non seulement la connaissance des

rotations, mais aussi une compétence sur les composées et décomposées qui n'est plus explicite dans les actuels programmes (elle était jusqu'en 2002 au programme de la spécialité de TS).

Un complément à cet exercice est le suivant :

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe quelconque. On construit à l'extérieur de $ABCD$ quatre carrés bâtis sur les côtés de $ABCD$. Soient A', B', C', D' les centres de ces carrés (dans l'ordre). Montrer que $A'C' = B'D'$ et que ces droites sont perpendiculaires.

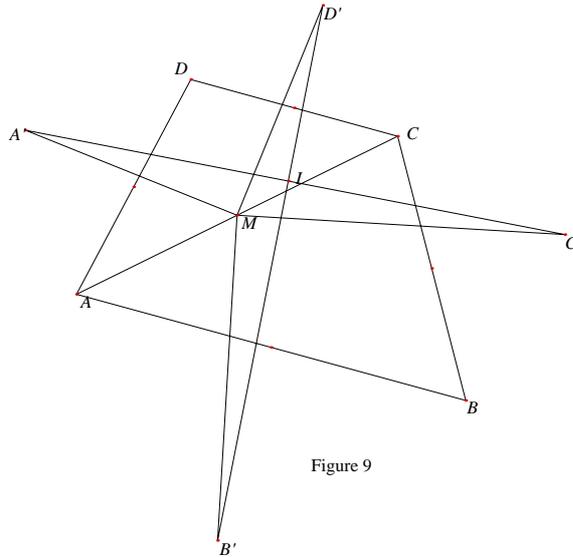


Figure 9

Cette fois, l'exercice est plus facile en utilisant les rotations. Soit M le milieu de $[AC]$. L'exercice précédent montre que la rotation ρ de centre M et d'angle $\pi/2$ transforme D' en A' et B' en C' , donc $[C'A']$ en $[B'D']$, d'où le résultat. On peut aussi utiliser les triangles : $A'MC'$ et $D'MB'$ sont isométriques (exercice précédent, plus l'angle en M). cela donne $A'C' = B'D'$. Pour l'angle, si I est l'intersection de $(A'C')$ et $(B'D')$, le quadrilatère inscriptible $MIC'B'$ permet de conclure.

Dans ce cas, c'est l'aspect global de la transformation qui rend les choses plus simples. C'est d'ailleurs, à mon avis, là qu'est la limite entre les deux techniques : les triangles permettent une analyse locale plus facile, les transformations une maîtrise plus globale.

4. Conclusion.

Tout ce qui précède me conduit à critiquer un usage trop exclusif de l'outil "transformations" au collège. En effet, ce choix présente au moins deux défauts essentiels : il appauvrit et il complique.

- *Il appauvrit*

Les transformations ne constituent un outil réellement efficace que lorsqu'on dispose de toute la panoplie des isométries, voire des similitudes planes et qu'on connaît leurs composées. Cela conduit, en attendant, à n'utiliser que la transformation qui relève du programme de la classe considérée (et, dans le meilleur des cas, de celui des classes précédentes), ce qui appauvrit beaucoup les problèmes que l'on peut poser.

Les invariants et les cas d'isométrie, en revanche, sont des outils qui, dès qu'on en dispose, permettent de faire presque toute la géométrie du collège, de poser dès le début des problèmes où une vraie réflexion, appuyée sur la figure, est nécessaire.

- *Il complique*

Comme on l'a vu ci-dessus, il y a de nombreux cas où l'usage des transformations, en lieu et place des cas d'isométrie, conduit à des contorsions pénibles, notamment lorsqu'il faut calculer explicitement des composées de transformations, au lieu d'utiliser la transitivité. Une conséquence inéluctable de cette complication est la dérive dénoncée dans l'introduction : pour que les élèves puissent résoudre les problèmes on est obligé de leur donner beaucoup d'indications, de sorte que les tâches qui leur restent sont trop parcellaires et ne donnent pas lieu à une véritable recherche. Comme les élèves n'ont plus vraiment à trouver quoi que ce soit, ce qu'on leur demande est donc de l'ordre de la mise en forme et la démonstration s'en trouve réduite à un exercice de style.

Attention, même si j'ai essayé de convaincre le lecteur que les transformations ne sont pas toujours le meilleur outil pour faire de la géométrie, notamment au collège, je ne voudrais pas que cela l'incite à les jeter aux orties sans autre forme de procès. Je renvoie à [DPR] §7, pour des exemples où les transformations sont l'outil le mieux adapté. On a vu ci-dessus que l'aspect "information globale" des transformations est souvent précieux.

En définitive, je propose de retenir le **principe** suivant : il est naturel d'utiliser les transformations quand elles sont évidentes (c'est-à-dire quand on les voit, ou quand on sait d'avance qu'elles existent !). Sinon, si on ne les perçoit pas, ou si on ne sait pas montrer que leur effet est bien celui qu'on pense (et cela peut dépendre des aptitudes et des connaissances de chacun), plutôt que d'essayer à toute force de les faire apparaître, il est toujours possible et souvent plus simple d'utiliser les invariants et les cas d'isométrie.

Pour conclure en ce qui concerne la géométrie du collège, les deux orientations que je propose (et qui sont sous-jacentes dans le rapport d'étape) sont donc les suivantes :

- une plus grande utilisation des invariants,
- la réintroduction des cas d'isométrie au collège.

Le premier point ne représente pas un changement considérable. C'est plus un changement d'état d'esprit qu'autre chose. Le second point est plus important et, avant de passer à sa réalisation, il y a tout un travail préalable à faire :

- Il faut mener une réflexion (collective) sur la cohérence générale des programmes et l'ordre dans lequel les notions sont introduites, sur l'axiomatique (en un sens assez large) qui est sous-jacente à ces propositions⁹ et sur les conséquences didactiques de tels choix. Il y a beaucoup de questions dont la réponse n'est pas évidente : quel équilibre transformations-cas d'isométrie ? quand introduire ces notions ? Cependant (et on le verra avec les nouveaux programmes de collège) la réflexion progresse.

- Un grand effort est nécessaire pour convaincre les maîtres de l'intérêt de cette évolution et de ce qu'elle peut leur apporter, en tenant compte de l'expérience qu'ils

⁹ Le livre d'Annie Cousin-Fauconnet fournit à peu de choses près le cadre adéquat pour une telle axiomatique.

ont accumulée au cours des années sur les transformations. C'est ce que j'essaie de faire ici. Mais je sais que ce n'est pas facile. Il y a un proverbe russe qui dit : *le plus court chemin est celui que tu connais*.

- Un effort important de formation initiale et continue des professeurs est indispensable car, à l'exception des anciens qui ont été formés aux cas d'égalité (mais qui d'abord ont oublié ces techniques qu'ils n'ont pas ou peu enseignées et qui ensuite vont bientôt partir à la retraite !) et des tout nouveaux pour qui ces techniques sont apparues en préparation au CAPES, les autres n'en ont pratiquement jamais entendu parler.

5. Références.

[CF] COUSIN-FAUCONNET Annie, *Enseigner la géométrie au collège*, Armand Colin, 1995.

[D] Dieudonné J., *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*, Hermann, 1968.

[**Rapport d'étape**] L'enseignement des sciences mathématiques, *Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Odile Jacob, 2002.

[**Aires**] Perrin Daniel, Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège, Bull. APMEP 431, 2000.

[**DPR**] Duperret Jean-Claude, Perrin Daniel, Richeton Jean-Pierre, Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie, Bull. APMEP 435, 2001.

[**Repères**] Perrin Daniel, Quels outils pour la géométrie à l'âge du collège ? Repères IREM, numéro 53, p. 91-110, 2003.