

Ecole Normale Supérieure de Lyon
Rapport de stage - M1A Mathématiques

Lieu du stage : Université Paris-Sud - Faculté des sciences d'Orsay
Maître de stage : Daniel PERRIN

Ensembles finis de l'espace projectif.

Mathieu DUTOUR

Orsay, Juin-Juillet 2014

Table des matières

1	Cohomologie	5
1.1	Complexes	5
1.1.1	Rappels	5
1.1.2	Complexe de Koszul	6
1.2	Faisceaux	6
1.2.1	Définition	6
1.2.2	Faisceaux de modules	7
1.3	Théorie des foncteurs	8
1.4	Cohomologie des faisceaux	10
1.5	Cas de l'espace projectif	10
1.6	Foncteurs Hom et Ext	11
1.7	Dualité de Serre	12
2	Liaison algébrique	13
2.1	Intersections complètes et liaison d'ensembles finis	13
2.2	Théorème de Davis-Geramita-Orecchia	16
3	Généricité et spécialité	21
3.1	Définition	22
3.2	Théorèmes de liaison et de Cayley-Bacharach	22
3.3	Applications	24
3.3.1	Théorème de Pascal	24
3.3.2	Loi de groupe sur une cubique	25
3.3.3	Théorème des six cercles de Miquel	25
3.3.4	Codes correcteurs d'erreurs	26
4	Stratification des ensembles finis	30
4.1	Résolutions numériques et virtuelles	30
4.1.1	Résolutions numériques	30
4.1.2	Répétition	31
4.1.3	Résolutions virtuelles	32
4.2	Spécialité d'un ensemble fini	33
4.3	Lien entre irréductibilité et résolution	34

4.4	Ensembles génériques	34
4.5	Critère d'irréductibilité pour les ensembles de spécialité 1 . .	36
4.6	Dimension des composantes irréductibles	41
4.6.1	Formule d'Ellingsrud	42
4.6.2	Formule des pas	42
4.6.3	Liaison algébrique	44
4.6.3.1	Schéma d'incidence	44
4.6.3.2	Théorème de dimension	45

Introduction

En géométrie algébrique, les variétés projectives les plus simples sont les ensembles finis, dont nous étudierons la cohomologie. Comme pour beaucoup de problèmes, une idée naturelle consiste à regarder dans un premier temps les petits ensembles finis, puis de voir si on ne peut pas se ramener à ce cas pour les ensembles plus grands. C'est ici que la notion de liaison algébrique prend toute son importance : elle va nous permettre de relier la cohomologie de deux ensembles finis. Ceci constitue le théorème de Davis-Geramita-Orecchia, qui fera l'objet de la deuxième partie de ce document.

Afin de prouver ce résultat, nous commencerons notre étude par un premier chapitre général sur la cohomologie des faisceaux, qui culminera avec le théorème de dualité de Serre. Les conséquences multiples du théorème de Davis-Geramita-Orecchia seront présentées dans le troisième chapitre. Ceci donnera lieu à deux théorèmes, un de liaison, et l'autre de Cayley-Bacharach, puis à des exemples plus concrets, comme l'associativité de la loi de groupe sur une cubique, ou encore le théorème des six cercles de Miquel. Après avoir fait tout cela, nous essaierons d'étudier les ensembles finis de \mathbb{P}^2 en les stratifiant, ce qui conduira à la notion de spécialité d'un ensemble fini. Ceci se révélant compliqué, nous ne présenterons dans ce qui suit que les ensembles dont la spécialité vaut 0 ou 1, les résultats présentés portant sur l'irréductibilité et la dimension.

Chapitre 1

Cohomologie

Sauf mention explicite du contraire, et dans tout ce document, k désignera un corps (commutatif) algébriquement clos.

1.1 Complexes

Outre quelques brefs rappels sur la cohomologie et l'homologie des complexes, l'objectif principal de ce paragraphe est de présenter le complexe de Koszul, dont nous décrirons précisément l'homologie dans un cas particulier.

1.1.1 Rappels

Définition 1. Une catégorie \mathfrak{A} est appelée **catégorie abélienne** si, pour tous objets A et B , $\text{Hom}(A, B)$ a une structure de groupe abélien, telle que la loi de composition est un homomorphisme.

Définition 2. Un **complexe cohomologique** A^\bullet dans une catégorie abélienne \mathfrak{A} est une collection d'objets A^i , $i \in \mathbb{Z}$, et de morphismes $d^i : A^i \rightarrow A^{i+1}$ telle que, pour tout i , l'on ait $d^{i+1} \circ d^i = 0$. On définit alors le **i -ème objet de cohomologie** du complexe, que l'on note $H^i(A^\bullet)$ comme étant égal au quotient de $\text{Ker } d^{i+1}$ par $\text{Im } d^i$.

Définition 3. Un **complexe homologique** B_\bullet dans une catégorie abélienne \mathfrak{B} est une collection d'objets B_i , $i \in \mathbb{Z}$, et de morphismes $\delta_i : B_{i+1} \rightarrow B_i$ telle que, pour tout i , l'on ait $\delta_i \circ \delta_{i+1} = 0$. On définit alors le **i -ème objet d'homologie** du complexe, que l'on note $H_i(A_\bullet)$ comme étant égal au quotient de $\text{Ker } \delta_i$ par $\text{Im } \delta_{i+1}$.

Remarque 4. Ces deux définitions sont extrêmement proches l'une de l'autre, mais serviront à des endroits différents. Nous rencontrerons ainsi un complexe cohomologique dans la définition 23, et un complexe homologique dans le paragraphe 1.1.2. Pour alléger l'écriture, nous parlerons simplement de **complexe**, le sens des flèches indiquant le reste.

1.1.2 Complexe de Koszul

Définition 5. Soient A un anneau commutatif, et f_1, \dots, f_r des éléments de A . On définit le **complexe de Koszul**, que l'on note $K.(f_1, \dots, f_r)$ de la manière suivante : on commence par considérer un A -module libre de rang r , noté K_1 , dont on fixe une base e_1, \dots, e_r , puis on pose, pour tout $p \in 0, \dots, r$, $K_p = \bigwedge^p K_1$, qui est le p -ième terme de l'algèbre extérieure correspondante. On définit alors, pour tout $1 \leq p \leq r$:

$$d_p : \begin{array}{ccc} K_p & \longrightarrow & K_{p-1} \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} & \mapsto & \sum_j (-1)^{j-1} f_{i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \end{array} .$$

De plus, si M est un A -module, on pose :

$$K.(f_1, \dots, f_r; M) = K.(f_1, \dots, f_r) \otimes_A M.$$

Théorème 6. Gardons les notations introduites ci-dessus, et supposons que les f_i forment une suite régulière¹ pour M . On a alors :

$$H_i(K.(f_1, \dots, f_r; M)) = \begin{cases} M/(f_1, \dots, f_r)M & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } i > 0 \end{cases} .$$

Démonstration. Pour une preuve détaillée, le lecteur pourra se reporter à [Mat70], théorème 43, ou à [Ser65], partie IV.A, proposition 2. □

1.2 Faisceaux

1.2.1 Définition

Définition 7. Soit X un espace topologique. Un **préfaisceau** \mathcal{F} de groupes abéliens sur X consiste en la donnée, pour tout ouvert U de X , d'un groupe abélien $\mathcal{F}(U)$, et pour tous ouverts $V \subset U$ de X d'un morphisme de restriction $r_{UV} : \mathcal{F}(U) \mapsto \mathcal{F}(V)$, tels que :

1. $\mathcal{F}(\emptyset)$ est le groupe trivial,
2. r_{UU} est l'identité de $\mathcal{F}(U)$,
3. pour tous ouverts $W \subseteq V \subseteq U$ de X , on a $r_{UW} = r_{VW} \circ r_{UV}$.

Pour alléger la rédaction, on notera $f|_V \in \mathcal{F}(V)$ l'élément $r_{UV}(f)$.

On dit que \mathcal{F} est un **faisceau** s'il vérifie de plus :

1. Dans notre cas, cela signifie que, pour tout i entre 1 et r , la dimension de $V(f_1, \dots, f_i)$ est égale à $r - i$.

4. pour tout ouvert U de X recouvert par une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$, et tous $f_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tels que, pour tous $i, j \in I$, $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, il existe un unique $f \in \mathcal{F}(U)$ dont la restriction à chaque U_i vaut f_i .

Remarque 8. De manière analogue, on parle de faisceau d'anneaux, de faisceaux d'algèbres, etc.

1.2.2 Faisceaux de modules

Dans tout ce paragraphe, X désigne une variété projective plongée dans \mathbb{P}^m .

Définition 9. Un faisceau \mathcal{F} sur X est appelé \mathcal{O}_X -module si, pour tout ouvert U de X , $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{O}_X(U)$ -module, et si les flèches de restriction sont linéaires.

Définition 10. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux \mathcal{O}_X -modules. On définit le **faisceau produit tensoriel** de \mathcal{F} et \mathcal{G} au-dessus de \mathcal{O}_X , que l'on note $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$, comme le faisceau associé au préfaisceau :

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{G}(U).$$

Définition 11. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux \mathcal{O}_X -modules. Un **homomorphisme de \mathcal{O}_X -modules** $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ consiste en la donnée, pour tout ouvert U de X , d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_X(U)$ -modules $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ compatible avec les applications de restriction. On définit alors le **faisceau noyau** de φ par $(\text{Ker } \varphi)(U) = \text{Ker}(\varphi(U))$.

Remarque 12. On pourrait avoir envie de définir, de la même manière, un faisceau image. Cela ne définit, en général, qu'un préfaisceau, et il faut donc passer au faisceau associé. Pour plus de détails, on se reportera à [Per95], chapitre III, exemple 6.5 et définition 6.6.

Définition 13. Posons $\Gamma_h(X) = k[X_0, \dots, X_m]/I(X)$ et fixons un module gradué M sur cet anneau. On définit un \mathcal{O}_X -module \widetilde{M} sur les ouverts standard en posant, pour $f \in \Gamma_h(X)$ homogène de degré strictement positif, $\widetilde{M}(D^+(f)) = M_{(f)}$, ce dernier étant le sous-module du localisé M_f formé des éléments homogènes de degré 0.

Remarque 14. Ce qui précède suffit pour définir un faisceau sur X . Pour s'en convaincre, on pourra voir [Per95], chapitre III, lemme 2.1.

Proposition 15. *L'application qui à M associe \widetilde{M} définie ci-dessus est fonctorielle, exacte, commute aux sommes directes et aux produits tensoriels.*

Démonstration. La preuve de ce résultat est détaillée dans [Per95], chapitre III, proposition 9.3.

□

Définition 16. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On dit que \mathcal{F} est **quasi-cohérent** s'il existe un recouvrement de X par des ouverts affines U_i , et des $\mathcal{O}_X(U_i)$ -modules M_i tels que, pour tout i , on ait $\mathcal{F}|_{U_i} \simeq \widetilde{M_i}$. On dit alors que \mathcal{F} est **cohérent** si les modules M_i sont (tous) de type fini.

Nous allons à présent définir une dernière notion, qui sera cruciale dans toute la suite de ce document : les modules et faisceaux décalés.

Définition 17. Soient A un anneau commutatif, et M un A -module gradué, que l'on écrit sous la forme :

$$M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n.$$

Soit $d \in \mathbb{Z}$. On définit alors le A -module $M(d)$ comme étant égal à M , mais avec la graduation décalée, c'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $M(d)_n = M_{d+n}$.

Définition 18. Soit $S = \Gamma_h(X)$. Le faisceau $\mathcal{O}_X(d)$ est, par définition, égal à $\widetilde{S(d)}$. Soit alors \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On pose :

$$\mathcal{F}(d) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d).$$

Cette opération de décalage, que l'on appelle aussi **tensorisation par d** , respecte les suites exactes.

Définition 19. On définit le faisceau \mathcal{I}_X de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}$ -modules comme étant égal au faisceau $\widetilde{I(X)}$. On dispose alors de la **suite exacte fondamentale** du fermé X :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Considérons à présent un fermé de W , et notons $I_X(W)$ l'idéal des éléments de S nuls sur W . On définit alors le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{I}_{W/X}$ comme étant égal à $\widetilde{I_X(W)}$.

Remarque 20. Une définition alternative existe pour les faisceaux \mathcal{I} , que le lecteur pourra trouver dans [Per95], chapitre III, exemple 6.10. Les deux définitions sont bien entendu équivalentes (il s'agit d'une vérification d'égalité de faisceaux sur les ouverts standards), et nous serviront dans la démonstration du théorème 54.

1.3 Théorie des foncteurs

Définition 21. Un foncteur covariant F entre deux catégories abéliennes \mathfrak{A} et \mathfrak{B} est dit **additif** si, pour tous objets A et A' de \mathfrak{A} , l'application induite $\text{Hom}(A, A') \longrightarrow \text{Hom}(FA, FA')$ est un homomorphisme de groupes. On dit

alors que F est **exact à gauche** s'il est additif, et tel que, pour toute suite exacte (dans \mathfrak{A}) :

$$0 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow A'' \longrightarrow 0,$$

la suite obtenue en appliquant F :

$$0 \longrightarrow FA' \longrightarrow FA \longrightarrow FA''$$

est exacte (dans \mathfrak{B}).

Remarque 22. On dispose d'une définition tout à fait similaire pour les foncteurs contravariants, ainsi que d'une notion d'exactitude à droite et d'exactitude.

Définition 23. Un objet I de \mathfrak{A} est dit **injectif** si le foncteur contravariant $\text{Hom}(\cdot, I)$ est exact. Soit A un objet de \mathfrak{A} . Une **résolution injective** de A est un complexe I^\bullet tel que la suite :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\epsilon} I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow \dots$$

soit exacte.

Avant de passer à la définition des foncteurs dérivés à droite, nous allons voir quelques exemples de catégories abéliennes.

Exemple 24. 1. \mathfrak{Ab} , la catégorie des groupes abéliens

2. $\mathfrak{Ab}(X)$, la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur un espace topologique X .

Toutes les catégories que nous utiliserons dans la suite de ce document seront abéliennes, et leurs objets auront tous des résolutions injectives.

Définition 25. Soient \mathfrak{A} , \mathfrak{B} deux catégories abéliennes, et $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ un foncteur covariant exact à gauche. On définit alors les **foncteurs dérivés à droite**, que l'on note $R^i F$, pour $i \geq 0$, par :

$$R^i F(A) = H^i(F(I^\bullet)),$$

où A est un objet de \mathfrak{A} admettant I^\bullet comme résolution injective.

Remarque 26. Il est ici question de la cohomologie usuelle des complexes, présentée dans la définition 2. Pour la définition du *foncteur* de cohomologie, voir 1.4.

Remarque 27. Un objet d'une catégorie abélienne admet en général plusieurs résolutions injectives, mais la définition des foncteurs dérivés n'en dépend pas. Pour cela, on peut consulter [Har77], III.1, théorème 1.1A et proposition 1.2A.

Théorème 28. Soit \mathfrak{A} une catégorie abélienne. Pour toute suite exacte courte $0 \rightarrow A' \rightarrow A \rightarrow A'' \rightarrow 0$ et tout $i \geq 0$, il existe un morphisme $\delta^i : R^i F(A'') \rightarrow R^{i+1} F(A')$ tel qu'on ait la suite exacte longue :

$$\cdots \rightarrow R^i F(A) \rightarrow R^i F(A'') \xrightarrow{\delta^i} R^{i+1} F(A') \rightarrow R^{i+1} F(A) \rightarrow \cdots$$

Ces morphismes sont dits de *connexion* .

Démonstration. Il s'agit d'une chasse au diagramme. Pour plus de détails, on pourra adapter la preuve de la proposition 1.4 du chapitre VII de [Per95]. \square

1.4 Cohomologie des faisceaux

Dans ce paragraphe, nous verrons successivement deux types de foncteurs extrêmement importants : le foncteur des sections globales, puis les foncteurs de cohomologie.

Définition 29. Soit X un espace topologique. On appelle **foncteur des sections globales sur X** , que l'on note $\Gamma(X, \cdot)$, le foncteur défini par :

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{Ab}(X) & \longrightarrow & \mathfrak{Ab} \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \mathcal{F}(X) \end{array}$$

Les **foncteurs de cohomologie** , notés $H^i(X, \cdot)$, sont alors définis comme étant les foncteurs dérivés à droite du foncteur des sections globales.

Le théorème suivant sera constamment utilisé dans la suite de ce texte. Nous énonçons ici la version présente dans [Per95], chapitre VII, théorème 3.1, mais une version plus complète peut être trouvée dans [Har77], chapitre III, théorème 2.7.

Théorème 30. Soient X une variété projective de dimension n , et \mathcal{F} un faisceau quasi-cohérent. Pour tout $i > n$, $H^i(X, \mathcal{F})$ est nul.

1.5 Cas de l'espace projectif

Nous avons vu dans le paragraphe 1.4 la nullité de certains groupes de cohomologie. Dans le cas de l'espace projectif \mathbb{P}^m , cela nous donnerait la nullité de $H^i(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(d))$ pour tout $i > m$ et tout $d \in \mathbb{Z}$. Mais le cas de l'espace projectif est en réalité beaucoup plus simple que cela, comme nous le voyons dans le théorème suivant :

Théorème 31. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{Z}$. On note R l'anneau $k[X_0, \dots, X_m]$, et R_d le sous-espace de R formé des éléments homogènes de degré d (avec la convention $R_d = 0$ si $d < 0$). Pour tout $d \in \mathbb{Z}$, on a :

$$H^i(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(d)) = \begin{cases} R_d & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{si } 0 < i < m \end{cases} .$$

De plus, pour tout $d \in \mathbb{Z}$, $H^m(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(d))$ est isomorphe au dual de l'espace vectoriel $H^0(\mathbb{P}^m, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-d - m - 1))$.

Définition 32. On appelle **faisceau dissocié** tout faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}$ -modules \mathcal{L} de la forme $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-n)^{a(n)}$, où les $a(n)$ sont, comme d'habitude, des entiers positifs presque tous nuls. Le **rang** du faisceau \mathcal{L} est alors le nombre de $a(n)$ non nuls.

Remarque 33. Il est bon de noter que la cohomologie commute avec les sommes directes. La cohomologie des faisceaux dissociés, que nous utiliserons par la suite, est par conséquent tout aussi simple que celle des espaces projectifs.

1.6 Foncteurs Hom et Ext

Donnons-nous, jusqu'à la fin de ce chapitre, une variété projective X plongée dans \mathbb{P}^m .

Définition 34. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux \mathcal{O}_X -modules. On définit $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ comme étant le groupe des homomorphismes de \mathcal{O}_X -modules de \mathcal{F} vers \mathcal{G} , et $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ comme étant le faisceau qui à un ouvert U de X associe le groupe abélien $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U))$.

Remarque 35. La définition générale du faisceau $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, que l'on peut retrouver dans [Har77], chapitre II, début du paragraphe 5, est un peu plus compliquée, mais ce qui est présenté ci-dessus suffira pour ce texte.

Définition 36. Soit \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module. On définit les foncteurs $\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \cdot)$ comme étant les foncteurs dérivés à droite de $\text{Hom}(\mathcal{F}, \cdot)$.

Définition 37. Soit \mathcal{F} un faisceau. On définit le **faisceau dual** de \mathcal{F} , que l'on note \mathcal{F}^\vee , comme étant égal au faisceau $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$.

Proposition 38. Fixons \mathcal{L} un faisceau dissocié de rang fini. Pour tous faisceaux de \mathcal{O}_X -modules \mathcal{F} et \mathcal{G} , on a un isomorphisme :

$$\text{Ext}^i(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}, \mathcal{G}) \simeq \text{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{L}^\vee \otimes \mathcal{G}).$$

Démonstration. Pour une démonstration détaillée, on pourra consulter [Har77], chapitre III, proposition 6.7.

□

Prenons un instant pour remarquer que nous avons défini les foncteurs Ext comme étant les foncteurs dérivés à droite des foncteurs Hom , et les foncteurs de cohomologie comme étant les foncteurs dérivés à droite du foncteur des sections globales. La proposition suivante va lier ces deux notions.

Proposition 39. *Soit \mathcal{G} un \mathcal{O}_X -module. Pour tout $i \geq 0$, on a l'isomorphisme $\text{Ext}^i(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}) \simeq H^i(X, \mathcal{G})$.*

Démonstration. Une preuve de cette proposition est réalisée dans [Har77], chapitre III, proposition 6.3. □

1.7 Dualité de Serre

Posons $\omega = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-m-1)$.

Théorème 40. *Soit \mathcal{F} un faisceau cohérent sur X . Pour tout entier i positif, on a un isomorphisme :*

$$\text{Ext}^i(\mathcal{F}, \omega) \simeq [H^{m-i}(X, \mathcal{F})]^*,$$

où $*$ désigne le dual au sens des espaces vectoriels.

Démonstration. Voir [Har77], chapitre III, théorème 7.1. □

Notation. Les cas que nous étudierons dans la suite de ce document ne présentant pas la moindre ambiguïté, nous noterons désormais $H^i(\mathcal{F})$, ou même $H^i \mathcal{F}$, le groupe de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F})$.

Corollaire 41. *Soient \mathcal{F} un faisceau cohérent et \mathcal{L} un faisceau dissocié. Pour tout entier positif j , on a un isomorphisme :*

$$\text{Ext}^j(\mathcal{F}, \mathcal{L}) \simeq [H^{m-j}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^\vee(-m-1))]^*.$$

Démonstration. Soient \mathcal{F} un faisceau cohérent, \mathcal{L} un faisceau dissocié, et j un entier positif. La cohomologie commutant avec les sommes directes, il suffit de traiter le cas $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-q)$, ce que nous supposons pour cette preuve. Par définition de la graduation de faisceaux, nous disposons de l'égalité suivante :

$$\text{Ext}^j(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-q)) = \text{Ext}^j(\mathcal{F}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(m+1-q) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-m-1)),$$

ce qui est égal, par la proposition 38, à :

$$\text{Ext}^j(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(q-m-1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-m-1)).$$

Le théorème 40 nous dit alors que ce dernier terme est isomorphe au dual de $H^{m-j}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(q-m-1))$. Ceci est exactement le résultat souhaité, puisque nous avons $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(q-m-1) = \mathcal{L}^\vee(-m-1)$. □

Chapitre 2

Liaison algébrique

2.1 Intersections complètes et liaison d'ensembles finis

Nous allons commencer ce chapitre en définissant ce qu'est une intersection complète, notion qui sera absolument cruciale dans toute la suite de ce document.

Définition 42. On se place dans l'espace \mathbb{P}^m . Un ensemble fini X est dit **intersection complète** d'hypersurfaces définies par des polynômes homogènes f_1, \dots, f_m de degrés d_1, \dots, d_m si l'idéal qui lui est associé est engendré par (f_1, \dots, f_m) . On dira de plus que X est **lisse** si toutes les multiplicités d'intersection sont égales à 1.

Remarque 43. L'étude des ensembles non lisses, qui est moins simple, requiert la notion de schéma. Bien que ceci soit un langage qui facilite les discussions, il nous emmènerait trop loin pour les considérations de ce texte.

Remarque 44. Ce que nous venons de définir correspond en réalité à l'intersection complète **schématique**. Il existe une autre notion, plus faible, qui est l'intersection complète **ensembliste**. Dans le cas général, la première implique la seconde, alors que la réciproque est fautive, mais les deux sont équivalentes dans le cas des ensembles finis lisses.

Remarque 45. Nous pouvons remarquer que la notion d'intersection complète empêche, dans le cas $m = 2$, la présence de composante commune, ce qui permet l'utilisation du théorème de Bezout. De manière générale, et en gardant les notations de la définition ci-dessus, le cardinal de X est égal au produit des degrés des f_i (si X est lisse).

Proposition 46. Soit X un ensemble fini de \mathbb{P}^m , intersection complète de m hypersurfaces d'équations f_1, \dots, f_m , dont on note d_1, \dots, d_m les degrés res-

pectifs. On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-d) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i < j} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-d_i - d_j) \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(-d_i) \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0,$$

où d est la somme des d_i . Cette suite est appelée une **résolution projective** de \mathcal{I}_X .

Démonstration. Nous allons voir que cette proposition découle du théorème 6, dont nous reprenons les notations, sur l'homologie du complexe de Koszul. Posons en effet $M = A = k[X_0, \dots, X_m]$. Considérons à présent pour K_1 le A -module libre de rang m défini par :

$$K_1 = \bigoplus_{i=1}^m A(-d_i).$$

Pour tout $p \in \{1, \dots, m\}$, nous avons :

$$K_p = \bigwedge^p K_1 = \bigoplus_{i_1 < \dots < i_p} A(-d_{i_1} - \dots - d_{i_p}).$$

De plus, l'intersection considérée étant complète, les f_i forment une suite régulière pour A . Avant d'appliquer le théorème 6, il ne nous reste plus qu'à faire une simple constatation :

$$K.(f_1, \dots, f_m; A) = K.(f_1, \dots, f_m) \otimes_A A \simeq K.(f_1, \dots, f_m).$$

On écrit alors la suite (pour le moment « presque exacte ») :

$$0 \rightarrow A(-d) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i < j} A(-d_i - d_j) \rightarrow \bigoplus_i A(-d_i) \rightarrow A \rightarrow 0.$$

La partie qui résiste ici à l'exactitude concerne A , et vient de la non-nullité de H^0 dans le théorème 6. Nous corrigeons ce problème en écrivant :

$$0 \rightarrow A(-d) \rightarrow \cdots \rightarrow \bigoplus_{i < j} A(-d_i - d_j) \rightarrow \bigoplus_i A(-d_i) \rightarrow I(X) \rightarrow 0,$$

et on vérifie sans peine que cette suite est bien exacte. Le résultat vient alors d'un simple passage aux faisceaux associés à ces A -modules. □

Remarque 47. En décalant les indices d'une unité, nous écrirons désormais la suite exacte de la proposition 46 sous la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0,$$

où chaque \mathcal{L}_i est égal au terme correspondant dans l'énoncé de la proposition.

Remarque 48. On pourra se rappeler que la notion de résolution injective a été présentée à la définition 23. Les résolutions injectives n'ont qu'un intérêt théorique, et il est extrêmement difficile de faire des calculs avec. En revanche, les résolutions projectives, que nous utiliserons désormais, sont très bien adaptées au calcul, ce que nous verrons plus bas.

Nous allons à présent passer à l'un des concepts les plus importants de ce que nous aborderons : la liaison algébrique, qui fut introduite pour la première fois dans [PS74], de manière bien plus générale que ce que nous présenterons ici.

Définition 49. Soient X , V , et W trois ensembles finis lisses de \mathbb{P}^m . On dit que V et W sont **algébriquement liés** par X si ce dernier est intersection complète de m hypersurfaces, avec V et W disjoints de réunion égale à X .

Nous allons conclure ce paragraphe par le calcul de l'idéal $\mathcal{I}_{W/X}$, qui nous sera utile dans ce qui suit. Nous traiterons dans un premier temps le cas affine, puis le cas des ensembles finis projectifs dans un second temps.

Proposition 50. *Soit X une variété affine d'anneau A , et V , W , deux sous-variétés fermées d'idéaux respectifs I et J . Alors V et W sont disjointes si et seulement si $I+J = A$, et X est réunion de V et W si et seulement si $IJ = 0$. Si ces conditions sont vérifiées, on a de plus $\text{Ann } I = J$ et $\text{Ann } J = I$, où Ann désigne l'annulateur¹ d'un idéal.*

Démonstration. Par Nullstellensatz, dire que $I + J = A$ revient à dire que $V(I + J)$ est vide, c'est-à-dire que $V(I)$ et $V(J)$ sont disjoints, ce qui donne la première équivalence. Il est possible de traiter la seconde de la même façon, car alors, dire que IJ est nul revient à dire que $V(IJ)$, qui est égal à $V(I) \cup V(J)$, est égal à X .

Supposons à présent ces conditions vérifiées. Par symétrie des rôles de I et J , il suffit de prouver l'une des deux égalités, disons $\text{Ann } I = J$. Remarquons qu'on a l'inclusion $I \subset \text{Ann } J$. Réciproquement, soit $f \in \text{Ann } J$. Fixons $a \in I$ et $b \in J$ tels que $1 = a + b$. On a $f = fa + fb$, et fb est nul car f est dans $\text{Ann } J$, ce qui donne $f = fa \in I$.

□

La proposition suivante permet de faire le lien avec les Hom.

Proposition 51. *Soient A un anneau et I un idéal de A . On a un isomorphisme $\theta : \text{Hom}_A(A/I, A) \simeq \text{Ann } I$.*

Démonstration. On note $\pi : A \rightarrow A/I$ la projection canonique. Soient φ un homomorphisme de A , et $\widehat{\varphi} = \phi \circ \pi$. On pose $\theta(\varphi) = \widehat{\varphi}(1) =: f$, qui est dans

1. L'annulateur d'un idéal I de A est l'ensemble des $f \in A$ tels que $fg = 0$ pour tout $g \in I$.

Ann I . En effet, pour tout $a \in I$, on a $af = \widehat{\varphi}(a) = 0$. Réciproquement, si on se donne $f \in \text{Ann } I$, on définit un élément $\psi \in \text{Hom}_A(A/I, A)$ en posant $\psi(\bar{a}) = af$. □

Cette dernière proposition va nous donner le résultat dans le cas projectif grace au lemme suivant :

Lemme 52. *Tout ensemble fini X de \mathbb{P}^m est contenu dans un ouvert affine.*

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer le résultat tel qu'il sera utilisé dans la preuve du théorème 54.

Proposition 53. *Soient V et W deux ensembles finis de \mathbb{P}^m algébriquement liés par X . On a la formule $\mathcal{I}_{W/X} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X)$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 51 à un ouvert affine U contenant X , en remarquant que $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}$ et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}}$ coïncident dans notre cas, car les faisceaux sont portés par X . □

2.2 Théorème de Davis-Geramita-Orecchia

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour énoncer et démontrer le théorème de Davis-Geramita-Orecchia. Pour des références sur ce théorème, le lecteur pourra se reporter à [DGO85], où le résultat est présenté dans un langage très différent de celui que nous adoptons ici, et, pour des sources plus proches de ce que nous allons faire, [GLS05], théorème 1.2, et [Per], chapitre 6, paragraphe 6.4.

Nous adoptons, dans la suite de ce paragraphe, les notations de la définition 19, et, si \mathcal{F} est un faisceau de modules, nous noterons $h^i \mathcal{F}$ la dimension du k -espace vectoriel $H^i \mathcal{F}$.

Théorème 54. *Soient X, V , et W trois ensembles finis de \mathbb{P}^m . On suppose que V et W sont algébriquement liés par X , on fixe f_1, \dots, f_m , de degrés respectifs d_1, \dots, d_m , des équations des hypersurfaces dont X est l'intersection, et on note d la somme des d_i . La formule suivante lie alors la cohomologie de V et de W :*

$$h^0 \mathcal{I}_W(n) - h^0 \mathcal{I}_X(n) = h^1 \mathcal{I}_V(d - m - n - 1).$$

Démonstration. Nous traiterons ici le cas $m = 3$. Le cas $m = 2$ est en effet plus simple, et le cas général utilise les mêmes arguments que ceux que nous présenterons, mais avec une rédaction plus lourde. Nous noterons dans cette preuve \mathbb{P} l'espace projectif \mathbb{P}^3 .

Commençons par remarquer que $W \subset X$, ce qui nous donne $I(X) \subset I(W)$, puis l'isomorphisme $I_X(W) \simeq I(W)/I(X)$. Nous pouvons alors écrire la suite exacte :

$$0 \longrightarrow I(X) \longrightarrow I(W) \longrightarrow I_X(W) \longrightarrow 0,$$

de laquelle nous tirons, en passant aux faisceaux associés (cf proposition 15) :

$$0 \longrightarrow \widetilde{I(X)} \longrightarrow \widetilde{I(W)} \longrightarrow \widetilde{I_X(W)} \longrightarrow 0,$$

ce qui n'est rien d'autre que, par la définition 19 :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{I}_W \longrightarrow \mathcal{I}_{W/X} \longrightarrow 0.$$

Tensorisons cette suite exacte par n , puis passons en cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_X(n) \xrightarrow{i} H^0 \mathcal{I}_W(n) \xrightarrow{p} H^0 \mathcal{I}_{W/X}(n) \xrightarrow{q} H^1 \mathcal{I}_X(n) \longrightarrow \dots$$

Revenons un instant à l'énoncé de ce théorème. L'objectif est de calculer la quantité $h^0 \mathcal{I}_W(n) - h^0 \mathcal{I}_X(n)$, sur laquelle la suite exacte ci-dessus nous donne des informations. En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} h^0 \mathcal{I}_W(n) - h^0 \mathcal{I}_X(n) &= h^0 \mathcal{I}_W(n) - \operatorname{rg} i \\ &= h^0 \mathcal{I}_W(n) - \dim \operatorname{Ker} p \\ &= \dim \operatorname{Coker} p \\ &= \dim \operatorname{Ker} q. \end{aligned}$$

Ceci nous pousse à calculer les espaces $S = H^0 \mathcal{I}_{W/X}(n)$ et $B = H^1 \mathcal{I}_X(n)$.

L'isomorphisme donné par la proposition 53 :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{I}_{W/X}$$

va nous permettre de calculer précisément le faisceau $\mathcal{I}_{W/X}(n)$, qui, par définition, est égal à $\mathcal{I}_{W/X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$. Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{W/X}(n) &\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n) \\ &\simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X(n)). \end{aligned}$$

Pour le dernier isomorphisme, le lecteur se reportera à [Har77], chapitre III, exercice 5.1. Nous obtenons alors un premier renseignement sur l'espace S :

$$\begin{aligned} H^0 \mathcal{I}_{W/X}(n) &\simeq \Gamma(X, \mathcal{I}_{W/X}(n)) \\ &\simeq \Gamma(\mathbb{P}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X(n))) \\ &\simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X(n)). \end{aligned}$$

Nous allons à présent passer à l'espace B . La proposition 46 (cf remarque 47) nous donne la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0.$$

Nous définissons alors un faisceau \mathcal{E} tel que les deux suites :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{L}_2 & \longrightarrow & \mathcal{L}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & 0 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{L}_0 & \longrightarrow & \mathcal{I}_X & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

soient exactes. Remarquons par ailleurs que c'est ici que la rédaction se serait compliquée dans le cas m quelconque. Il aurait fallu définir plus de faisceaux de type \mathcal{E} et raisonner par récurrence.

Après avoir tensorisé par n et être passé en cohomologie, nous obtenons la suite exacte :

$$\dots \longrightarrow H^1 \mathcal{L}_0(n) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_X(n) \longrightarrow H^2 \mathcal{E}(n) \longrightarrow H^2 \mathcal{L}_0(n) \longrightarrow \dots$$

Les résultats sur la cohomologie de l'espace projectif (voir à cet effet le théorème 31 et la remarque 33) nous donnent la nullité de $H^1 \mathcal{L}_0(n)$ et de $H^2 \mathcal{L}_0(n)$, ce qui implique (voir proposition 39) :

$$B = H^1 \mathcal{I}_X(n) \simeq H^2 \mathcal{E}(n) \simeq \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}, \mathcal{E}(n)).$$

Par ailleurs, la suite exacte fondamentale :

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

nous donne, après tensorisation par n et application du foncteur $\text{Hom}(\mathcal{O}_V, \cdot)$ (cf théorème 28, ou, plus précisément, [Har77], chapitre III, proposition 6.4) :

$$\dots \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_X(n)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{I}_X(n)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)) \rightarrow \dots$$

Le corollaire 41 nous dit alors que $\text{Hom}(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n))$, qui est égal à $\text{Ext}^0(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n))$, est isomorphe au dual de $H^3(\mathcal{O}_V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)^\vee(-4))$, que nous allons calculer :

$$\begin{aligned} H^3(\mathcal{O}_V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)^\vee(-4)) &\simeq H^3(\mathcal{O}_V \otimes \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n), \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-4))) \\ &\simeq H^3(\mathcal{O}_V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n-4)) \\ &\simeq H^3(\mathcal{O}_V(-n-4)), \end{aligned}$$

et ce dernier espace est nul, par application du théorème 30, car $\dim V = 0$. Des arguments tout à fait similaires nous donnent la nullité de $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n))$, et nous en déduisons donc que S est isomorphe à $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{I}_X(n))$.

Par ailleurs, la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_X \longrightarrow 0$$

nous donne, après tensorisation par n et application du foncteur $\text{Hom}(\mathcal{O}_V, \cdot)$:

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}_0(n)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{I}_X(n)) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{O}_V, \mathcal{E}(n)) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}_0(n)) \rightarrow \dots$$

Cependant, le corollaire 41 nous donne la nullité de $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}_0(n))$ et de $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_V, \mathcal{L}_0(n))$ (l'argument est le même que celui utilisé plus haut), et nous en déduisons :

$$S \simeq \text{Ext}^1(\mathcal{O}_V, \mathcal{I}_X(n)) \simeq \text{Ext}^2(\mathcal{O}_V, \mathcal{E}(n)).$$

Rappelons que notre objectif était de calculer les espaces S et B , ce qui est chose faite, puisque nous avons montré dans ce qui précède que S est isomorphe à $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_V, \mathcal{E}(n))$ et que B est isomorphe à $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}, \mathcal{E}(n))$, ce qui nous dit que q est une flèche $\text{Ext}^2(\mathcal{O}_V, \mathcal{E}(n)) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}, \mathcal{E}(n))$. De plus, la suite exacte fondamentale :

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_V \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}} \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow 0$$

nous donne, après tensorisation par n et application du foncteur $\text{Hom}(\cdot, \mathcal{E}(n))$:

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}, \mathcal{E}(n)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_V, \mathcal{E}(n)) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{O}_V, \mathcal{E}(n)) \xrightarrow{q'} \text{Ext}^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}, \mathcal{E}(n)) \rightarrow \dots$$

Cependant, $\text{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}}, \mathcal{E}(n))$ est isomorphe à $H^1 \mathcal{E}(n)$, qui est nul, car coincé dans une suite exacte entre $H^1 \mathcal{L}_1(n)$ et $H^2 \mathcal{L}_2(n)$, qui sont tous deux nuls d'après les résultats sur la cohomologie de l'espace projectif. Au prix de manipulations de diagrammes assez pénibles, on peut montrer que le noyau de q est isomorphe à celui de q' , ce que nous admettons ici par souci de clarté. Nous avons ainsi $\text{Ker } q \simeq \text{Ext}^1(\mathcal{I}_V, \mathcal{E}(n))$.

Afin de calculer ce dernier espace, partons de la suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0,$$

qui nous donne, après tensorisation par n et application du foncteur $\text{Hom}(\mathcal{I}_V, \cdot)$:

$$\dots \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_V, \mathcal{L}_1(n)) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_V, \mathcal{E}(n)) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{I}_V, \mathcal{L}_2(n)) \rightarrow \text{Ext}^2(\mathcal{I}_V, \mathcal{L}_1(n)) \rightarrow \dots$$

En appliquant le corollaire 41 aux trois termes de cette suite contenant un faisceau dissocié, nous obtenons la suite exacte :

$$0 \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{I}_V, \mathcal{E}(n)) \rightarrow [H^1 \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{L}_2^\vee(-n-4)]^* \xrightarrow{u} [H^1 \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{L}_1^\vee(-n-4)]^*,$$

et nous allons montrer que la flèche u ainsi définie est nulle. Un simple calcul nous donne les isomorphismes suivant :

$$\begin{aligned} H^1 \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{L}_2^\vee(-n-4) &\simeq H^1 \mathcal{I}_V(d-n-4) \\ H^1 \mathcal{I}_V \otimes \mathcal{L}_1^\vee(-n-4) &\simeq \bigoplus_{i=1}^3 H^1 \mathcal{I}_V(d-d_i-n-4) \end{aligned}$$

en remarquant une fois encore que la cohomologie commute avec les sommes directes. L'application u induit donc une application transposée (qui n'est rien d'autre que la dernière flèche de Koszul) :

$${}^t u : \bigoplus_{i=1}^3 H^1 \mathcal{J}_V(e - e_i - n - 4) \longrightarrow H^1 \mathcal{J}_V(e - n - 4)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \longmapsto [f_1 \ f_2 \ f_3] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix},$$

qui provient d'une application :

$$v : \bigoplus_{i=1}^3 H^0 \mathcal{O}_V(e - e_i - n - 4) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_V(e - n - 4),$$

donnée par la même formule. Soient alors U un ouvert de V , et, pour tout entier i entre 1 et 3, $a_i \in \mathcal{O}_V(d - d_i - n - 4)$. Nous avons alors :

$$v(a_1, a_2, a_3)(U) = f_1 \cdot a_1(U) + f_2 \cdot a_2(U) + f_3 \cdot a_3(U).$$

Ceci est une application de U dans k , qui est nulle sur V , donc sur U . En effet, les f_i sont nuls sur V , car ce dernier est inclus dans $X = V(f_1, f_2, f_3)$, ce qui donne la nullité de ${}^t u$, puis celle de u . Nous tirons de tout cela la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{J}_V, \mathcal{E}(n)) \longrightarrow [H^1(\mathcal{J}_V \otimes \mathcal{L}_2^\vee(-n-4))^*] \longrightarrow 0,$$

ce qui donne $\text{Ext}^1(\mathcal{J}_V, \mathcal{E}(n)) \simeq [H^1(\mathcal{J}_V \otimes \mathcal{L}_2^\vee(-n-4))^*]$. Il en découle :

$$\dim \text{Ker } q = h^1 \mathcal{J}_V(d - n - 4),$$

ce qui est exactement le résultat attendu. □

Chapitre 3

Généricité et spécialité

Nous garderons dans ce chapitre les notations introduites pour le théorème 54. L'objectif de ce chapitre est d'introduire les notions de généricité et de spécialité, puis d'en voir des applications. Nous verrons dans le paragraphe 3.2 que ces notions donnent des résultats intéressants lorsqu'elles sont utilisées avec le théorème 54.

En géométrie algébrique, on dit qu'une propriété, dépendant d'un paramètre algébrique, est générique si elle est vérifiée sur un ouvert partout dense de l'espace des paramètres (au sens de la topologie de Zariski). Dans le cas où l'espace des paramètres est irréductible, il suffit qu'elle soit vraie sur un ouvert non vide. Dans le cas contraire, on dit que la propriété est spéciale.

Par exemple si l'on considère l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes, être de rang maximal est une propriété générique, car cela correspond à la non-nullité de certains mineurs. Voici un résultat, que nous utiliserons par ailleurs dans la preuve du théorème 95, de semi-continuité :

Théorème 55 (semi-continuité). *Soient Z une variété irréductible, $p : X \rightarrow Z$ un morphisme projectif, et \mathcal{F} un \mathcal{O}_X -module cohérent. On pose, pour $z \in Z$, $\mathcal{F}(z) = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_z} k(z)$. On suppose de plus que \mathcal{F} est plat sur Z^1 . Alors, pour tout $i \geq 0$, la fonction $z \mapsto h^i(\mathcal{F}(z))$ est semi-continue supérieurement sur Z .*

Démonstration. Ce théorème, qui est loin d'être évident, est démontré (dans un cas plus général) dans le paragraphe 12, chapitre III, de [Har77]. □

Remarque 56. Le théorème précédent nous dit que, pour tout entier positif n , l'ensemble des z vérifiant $h^i(\mathcal{F}(z)) \leq n$ est un ouvert, i.e. que la propriété $h^i(\mathcal{F}(z)) \leq n$ est générique.

1. Ici, cela revient à supposer que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi_{\mathcal{F}}(z)$ est constante sur Z .

3.1 Définition

Définition 57. On dit qu'un ensemble fini V de \mathbb{P}^m est **générique en degré n** si l'application r mentionnée ci-dessus est de rang maximal, i.e. au choix :

1. l'application r est injective ou surjective,
2. l'un des espaces $H^0 \mathcal{I}_V(n)$ ou $H^1 \mathcal{I}_V(n)$ est nul,
3. $h^0 \mathcal{I}_V(n) = h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) - h^0 \mathcal{O}_V(n)$ ou $h^1 \mathcal{I}_V(n) = h^0 \mathcal{O}_V(n) - h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$

Si ces conditions, qui sont, rappelons-le, toutes équivalentes, ne sont pas vérifiées, on dit que V est **spécial en degré n** .

Remarque 58. Notons, dans la définition précédente, que pour un ensemble fini V fixé, et pour chacune des conditions évoquées, une seule des deux occurrences est possible (ou bien les deux sont équivalentes). Cela dépend des valeurs de $h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ et de $h^0 \mathcal{O}_V(n)$.

Remarque 59. Considérons un ensemble V de v points de \mathbb{P}^m , et supposons qu'il est contenu dans une hypersurface de degré n , i.e. que $H^0 \mathcal{I}_V(n)$ est non nul. Nous avons alors la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{I}_V(n) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(n) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_V(n) \rightarrow H^1 \mathcal{I}_V(n) \rightarrow 0,$$

et $h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(n) = \binom{n+m}{n}$, $h^0 \mathcal{O}_V(n) = v$. Si $v \geq \binom{n+m}{n}$, l'espace $H^1 \mathcal{I}_V(n)$ est non nul, et V est spécial en degré n . Ceci n'est qu'une formalisation d'un résultat intuitif : si, *en général*, une hypersurface de degré n ne passe pas par v points (comme 6 points ne sont en général pas sur une conique), mais que c'est le cas pour un ensemble W , alors cet ensemble est spécial.

Afin de vérifier que nos considérations sont bien conformes à ce que nous avons évoqué au début de ce paragraphe, le lecteur pourra se reporter à [Per], partie VI, chapitre 6, proposition 6.4.4.

3.2 Théorèmes de liaison et de Cayley-Bacharach

Théorème 60 (de liaison). *Soient V et W deux ensembles finis de \mathbb{P}^m algébriquement liés par X , ce dernier étant intersection complète de m hypersurfaces de degrés respectifs d_1, \dots, d_m . Notons d la somme de ces degrés, et fixons un entier positif n tel que n et $d - m - n - 1$ soient inférieurs stricts à tous les e_i . Alors W est générique en degré n si et seulement si V l'est en degré $d - m - n - 1$.*

Démonstration. Nos hypothèses sur l'entier n nous donnent la nullité de $h^0 \mathcal{I}_X(n)$ et de $h^0 \mathcal{I}_X(d - m - n - 1)$, et le théorème 54 fournit alors les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} h^0 \mathcal{I}_W(n) &= h^1 \mathcal{I}_V(d - m - n - 1) \\ h^1 \mathcal{I}_W(n) &= h^0 \mathcal{I}_V(d - m - n - 1) \end{aligned} ,$$

ce qui prouve que V et W sont génériques en même temps (en leurs degrés respectifs). □

Une autre application du théorème 54 est le théorème de Cayley-Bacharach, que nous présentons ci-dessous.

Théorème 61 (Cayley-Bacharach). *Soient V et W deux ensembles finis de \mathbb{P}^m algébriquement liés par X , ce dernier étant intersection complète de m hypersurfaces de degrés respectifs d_1, \dots, d_m . Notons d la somme de ces degrés, N l'entier $d - m - n - 1$, et v le cardinal de l'ensemble V . Supposons que :*

$$\binom{m + N}{m} \geq v,$$

et que V est générique en degré N . Alors toutes les hypersurfaces de degré n qui contiennent W contiennent X tout entier.

Démonstration. Considérons la suite exacte fondamentale de V , qui, une fois tensorisée par N et passée en cohomologie, nous donne :

$$0 \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_V(N) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(N) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_V(N) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_V(N) \longrightarrow 0,$$

et l'inégalité $\binom{m+N}{m} \geq v$ empêche alors $H^0 \mathcal{I}_V(N)$ d'être nul, ou bien rend les nullités de $H^0 \mathcal{I}_V(N)$ et de $H^1 \mathcal{I}_V(N)$ équivalentes. Dire que V est générique en degré N revient donc à dire que $h^1 \mathcal{I}_V(N)$ est nul. Le théorème 54 nous donne de plus l'égalité :

$$h^0 \mathcal{I}_W(n) - h^0 \mathcal{I}_X(n) = h^1 \mathcal{I}_W(N) = 0,$$

de laquelle nous tirons :

$$H^0 \mathcal{I}_W(n) = H^0 \mathcal{I}_X(n),$$

car l'une des inclusions est évidente, et que ces deux espaces sont de même dimension finie. Pour conclure, il suffit alors de remarquer que les hypersurfaces de degré n contenant W sont exactement les éléments de $H^0 \mathcal{I}_W(n)$, i.e. les éléments de $H^0 \mathcal{I}_X(n)$, i.e. les hypersurfaces de degré n contenant X . □

3.3 Applications

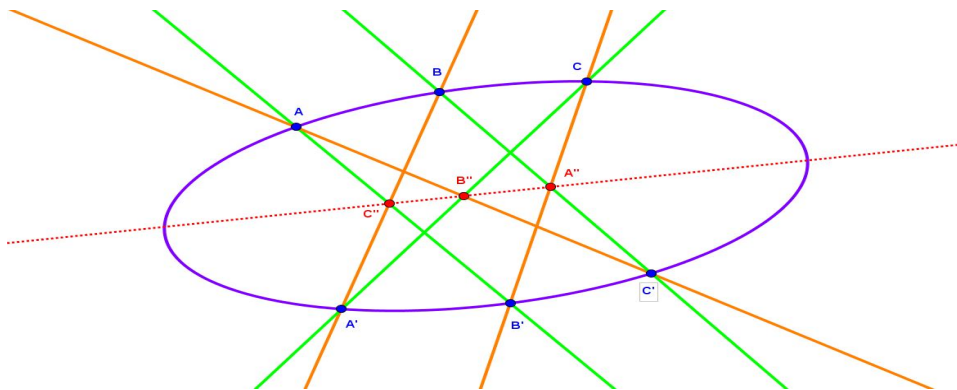
Les résultats qui suivent sont des applications des théorèmes présentés ci-dessus, et peuvent donc être démontrés en utilisant au choix le théorème 60 ou le théorème 61. La dernière de ces applications est un peu différente, puisqu'elle touche principalement à l'informatique, et suppose que les résultats établis précédemment pour k algébriquement clos soient encore vrais pour les corps finis (ce qui est vrai), et sera étudiée en appliquant directement le théorème 54.

3.3.1 Théorème de Pascal

La première des applications que nous étudierons est le théorème de Pascal, qui pourrait certes être prouvé de bien d'autres manières, mais constitue une manifestation de la liaison algébrique qui se voit bien.

Théorème 62 (Pascal). *Considérons une conique \mathcal{C} , sur laquelle nous prenons six points $A, B, C, A', B',$ et C' . Notons A'' le point d'intersection des droites (BC') et $(B'C)$, B'' le point d'intersection des droites (AC') et $(A'C)$, et C'' le point d'intersection des droites (AB') et $(A'B)$. Alors les points $A'', B'',$ et C'' sont alignés.*

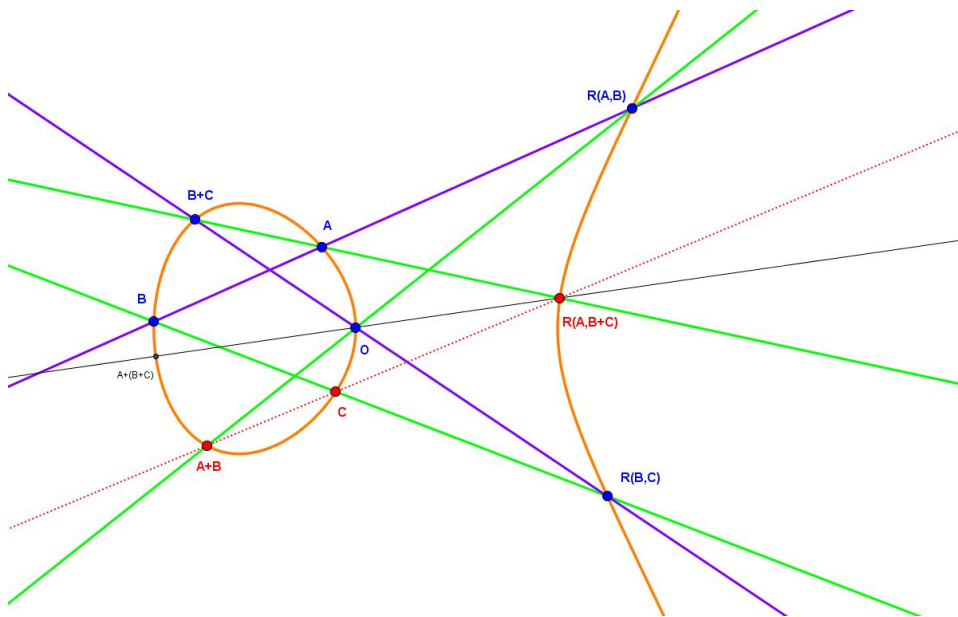
Démonstration. Voici un dessin résumant la situation :



Prenons pour X les neuf points mentionnés dans l'énoncé, pour V les six points pris sur \mathcal{C} , et pour W les trois points restant. Alors X est intersection de deux cubiques dégénérées formées respectivement par les droites $(A'C)$, (AB') , (BC') d'une part, et (AC') , $(A'B)$, $(B'C)$ d'autre part, et V est spécial en degré 2, car contenu dans la conique \mathcal{C} (nous sommes dans le cas favorable de la remarque 59). Nous avons donc, en reprenant les notations précédemment introduites, $d = 6$, $n = 2$, et, bien entendu, $m = 2$. Le théorème 60 nous dit alors que W est spécial en degré $d - m - n - 1 = 1$, i.e. qu'une droite contient W , ce qui achève la preuve. \square

3.3.2 Loi de groupe sur une cubique

Considérons une cubique \mathcal{C} , sur laquelle on fixe un point O . Fixons deux points A et B de \mathcal{C} , auxquels est associé un point $R(A, B)$, qui est le troisième point d'intersection de la droite (AB) avec \mathcal{C} . Nous construisons alors le point $A+B$ comme étant le troisième point d'intersection de la droite passant par $R(A, B)$ et O avec \mathcal{C} . L'opération que nous venons de définir est une loi de composition interne sur la cubique \mathcal{C} , et même une loi de groupe. Nous allons ici en montrer l'associativité. Pour cela, considérons trois points A , B , et C sur \mathcal{C} . La situation est résumée sur ce dessin :



Remarquons que l'on a $(A + B) + C = A + (B + C)$ si et seulement si les points C , $A + B$, et $R(A, B + C)$ sont alignés, ce que nous allons montrer avec le théorème de liaison. Prenons pour X les neuf points de la figure, pour V les points A , B , O , $R(A, B)$, $R(B, C)$, $B + C$ et pour W les points C , $A + B$, $R(A, B + C)$. Alors X est intersection complète de la cubique \mathcal{C} et de la cubique dégénérée formée par les droites (BC) , $(A, B + C)$, $(R(A, B)O)$. L'ensemble V est spécial en degré 2 car contenu dans la conique dégénérée constituée des droites (AB) et $(O, R(B, C))$. Le théorème 60 nous dit alors que W est spécial en degré $d - m - n - 1 = 6 - 2 - 2 - 1 = 1$, i.e. W est contenu dans une droite, ce qui achève la preuve.

3.3.3 Théorème des six cercles de Miquel

Le théorème suivant, qui est une autre application du théorème 60, nous demande de parler de cocyclicité, ce que nous allons faire avant d'aborder le théorème. Plus de considérations sur ce point pourront toutefois être trouvées

dans [Per], partie VI, chapitre 3. Nous nous plaçons ici sur le corps des complexes. Partons des équations de courbes du plan affine définies par :

$$a \cdot (x^2 + y^2) - 2b \cdot x - 2c \cdot y + d = 0,$$

qui décrivent un cercle si $a \neq 0$ et une droite sinon. Ces équations étant de plus homogènes en a, b, c, d , on identifie l'ensemble des courbes considérées à l'espace projectif \mathbb{P}^3 , que l'on munit de la forme quadratique dite « carré du rayon » définie par :

$$q(a, b, c, d) = b^2 + c^2 - ad,$$

dont on note \mathcal{P} le cône isotrope, qui correspond aux points de la droite projective complexe. Soient alors P et C respectivement un point et un cercle du plan affine, qui définissent des éléments de \mathbb{P}^3 notés P' et C' , avec $P' \in \mathcal{P}$. Dire que P appartient à C revient à dire que P' est orthogonal à C' au sens de q , donc dire que des points de \mathcal{P} sont cocycliques ou alignés revient à dire qu'ils sont tous dans l'orthogonal d'un même point de \mathbb{P}^3 , donc qu'ils sont coplanaires.

Théorème 63 (des six cercles de Miquel). *Soient $a, b, c, d, a', b', c', d'$ huit points distincts de \mathcal{P} . Les points (a, b, c, d) ; (a, b, a', b') ; (b, c, b', c') ; (c, d, c', d') ; (d, a, d', a') sont supposés cocycliques ou alignés. Alors les points (a', b', c', d') sont cocycliques ou alignés.*

Démonstration. Prenons pour V les points a, b, c, d , et pour W les points restants, i.e. a', b', c', d' . L'union de ces deux ensembles, que nous appelons X , est alors intersection complète de trois coniques : le cône \mathcal{P} , l'union des plans contenant respectivement (a, b, a', b') et (c, d, c', d') d'une part, et de ceux contenant respectivement (b, c, b', c') et (d, a, d', a') d'autre part. Nous disposons de la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{I}_V(1) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_V(1) \rightarrow H^1 \mathcal{I}_V(1) \rightarrow 0,$$

pour laquelle nous avons $h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) = 4$ et $h^0 \mathcal{O}_V(1) = 4$, ce qui nous donne $h^0 \mathcal{I}_V(1) = h^1 \mathcal{I}_V(1)$. L'ensemble V étant de plus contenu dans un plan, l'espace $H^0 \mathcal{I}_V(1)$ est non nul, et par suite, l'espace $H^1 \mathcal{I}_V(1)$ est également non nul, ce qui donne V spécial en degré 1. Le théorème 60 nous dit alors que W est spécial en degré $d - m - n - 1 = 6 - 3 - 1 - 1 = 1$, donc W est contenu dans un plan, ce qui revient à dire que les points (a', b', c', d') sont cocycliques ou alignés. □

3.3.4 Codes correcteurs d'erreurs

Cette application du théorème 54, contrairement aux précédentes, touche à l'informatique, et plus particulièrement aux codes correcteurs d'erreurs. Le

principe général est de prendre un message, de le coder, puis de l'envoyer à une personne. Cependant, les méthodes de transmission de données ne sont jamais parfaites, et le message reçu est à priori différent du message transmis, ce qui est très problématique. Le but des codes correcteurs d'erreurs, comme leur nom l'indique, est de retrouver le message d'origine à partir de celui comportant des erreurs, en supposant bien entendu que la déformation n'ait pas été trop importante, ce qui sera quantifié dans la suite.

Avant de commencer, voici quelques résultats généraux qui nous seront utiles dans la suite. Les deux premiers, qui sont très simples, servent uniquement à prouver le troisième.

Proposition 64. *Soient x et y deux points distincts de \mathbb{P}^m . Alors il existe une forme linéaire nulle en x et non nulle en y .*

Démonstration. Il s'agit d'un résultat évident d'algèbre linéaire une fois que l'on est passé dans l'espace affine de dimension $m + 1$. □

Proposition 65. *Soit $W = \{x_1, \dots, x_d\}$ un ensemble fini de \mathbb{P}^m . Pour tout entier i entre 1 et d et tout $n \geq d - 1$, il existe un polynôme de degré n valant 1 en x_i et nul sur le reste de W .*

Démonstration. Il suffit de prendre pour f le produit des $d - 1$ formes linéaires de la proposition précédente, en en mettant une à l'exposant $n - d + 2$. □

Proposition 66. *Soit $W = \{x_1, \dots, x_d\}$ un ensemble fini de \mathbb{P}^m . Pour tout $n \geq d - 1$, on a $h^1 \mathcal{I}_W(n) = 0$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $h^1 \mathcal{I}_W(n)$ est nul, ce qui revient à dire que l'application de restriction de $H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n)$ vers $H^0 \mathcal{O}_W(n)$ est surjective, en vertu de la suite exacte fondamentale de W passée en cohomologie, ce qui revient encore à dire que pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in k^d$, il existe un polynôme f homogène de degré n valant λ_i en x_i , pour tout i . Il suffit alors de prendre pour f une somme pondérée par les λ_i des polynômes de la proposition précédente. □

La suite de ce paragraphe sera composée de quelques rappels sur les codes, que le lecteur pourra retrouver dans la partie III, chapitre 9 de [Dem97], puis des théorèmes centraux, qui cette fois peuvent également être trouvés dans [GLS05] et [Han94]. Ce qui suit étant de nature informatique, nous travaillerons dans $k = \mathbb{F}_2$. Il est alors possible de vérifier que tous les résultats prouvés dans le cas algébriquement clos sont encore valables.

Définition 67. Un **code linéaire de longueur** d est un sous-espace vectoriel C de k^d . Pour chacun de ses éléments x , que l'on décompose dans la base canonique de k^d , on note $|x|$ le nombre de composantes non nulles. La **distance minimale** d'un code C est alors le minimum des $|x|$ pour x décrivant C privé de l'origine.

Définition 68. Soient $X = \{x_1, \dots, x_d\}$ un ensemble fini de \mathbb{P}^m , et a un entier positif. On définit alors un code linéaire que l'on note $C_a(X)$ en prenant le sous-espace de $H^0\mathcal{O}_X(a)$ (qui est bien un k -espace de dimension d) image de $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(a)$ par l'application de restriction, c'est-à-dire l'ensemble des $(f(x_1), \dots, f(x_d))$, où f décrit l'ensemble des polynômes homogènes de degré a .

Il s'agit, dans la pratique, de prendre $C_a(X)$ comme ensemble de mots, d'en prendre un élément, qui n'est rien d'autre qu'une certaine suite de 0 et de 1, puis de le transmettre. Comme nous l'avons mentionné plus haut, cette transmission est accompagnée d'erreurs, plus précisément certains 0 seront changés en 1 et vice-versa. Le mot ainsi obtenu sera a priori différent du mot d'origine. Supposer que le nombre d'erreurs n'ait pas été trop grand veut dire que le mot reçu est proche du mot transmis au sens de $|\cdot|$. Pour retrouver le mot d'origine, il suffira alors de prendre l'élément de $C_a(X)$ le plus proche du mot reçu. Plus la distance minimale de $C_a(X)$ est grande, plus le nombre d'erreurs toléré sera grand, ce qui se traduira par une grande fiabilité de la correction.

Les résultats qui vont suivre auront pour but de minorer la distance minimale d'un code, en utilisant des outils de géométrie algébrique, dont le théorème 54. On se donne donc un ensemble X et un entier a comme ci-dessus.

Proposition 69. *Soit δ un entier positif. La distance minimale du code $C_a(X)$ est supérieure à δ si et seulement si pour tout sous-ensemble V de X de cardinal strictement supérieur à $d - \delta$, on a $h^0\mathcal{I}_V(a) - h^0\mathcal{I}_X(a) = 0$.*

Démonstration. Dire que la distance minimale du code $C_a(X)$ est strictement inférieure à δ revient à dire qu'il existe un élément $(f(x_1), \dots, f(x_d))$, où f est un polynôme homogène de degré a , dont le nombre de composantes différentes de 0 est strictement compris entre $d - \delta$ et d , ce qui revient à dire qu'il existe un polynôme homogène f de degré a nul sur un nombre strictement supérieur à $d - \delta$ d'éléments de X , mais non nul sur X tout entier. En prenant pour V l'ensemble des points de X où un tel élément f est nul, on voit que la majoration sur la distance minimale de $C_a(X)$ revient à trouver un sous-ensemble V de X de cardinal strictement plus grand que $d - \delta$ pour lequel on ait $H^0\mathcal{I}_V(a) \subsetneq H^0\mathcal{I}_X(a)$, ce qui achève la preuve. □

Nous pouvons à présent voir le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 70. *Soit X un ensemble fini de \mathbb{P}^m , de cardinal d , intersection complète d'hypersurfaces de degrés e_1, \dots, e_m . On pose $e = e_1 + \dots + e_m$, et $s = e - m - 1$. Pour tout entier a compris 1 et s , la distance minimale du code $C_a(X)$ est supérieure ou égale à $s + 2 - a$.*

Démonstration. Fixons un entier a compris entre 1 et s . Il s'agit d'appliquer la proposition 69 avec $\delta = s + 2 - a$. Soit V un sous-ensemble de X de cardinal strictement supérieur à $d - s - 2 + a$. On note W le complémentaire de V dans X . Le théorème 54 donne alors l'égalité :

$$h^0 \mathcal{I}_V(a) - h^0 \mathcal{I}_X(a) = h^1 \mathcal{I}_W(s - a),$$

ce qui est nul, par la proposition 66, car $s - a$ est supérieur ou égal à $|W| - 1$, car W est de cardinal inférieur ou égal à $s + 1 - a$. On peut donc bien appliquer la proposition 66, ce qui achève la preuve. □

Chapitre 4

Stratification des ensembles finis

Nous avons défini dans le chapitre précédent deux notions importantes : la généricité et la spécialité. Il s'agit à présent de quantifier cette notion, et d'étudier les ensembles de spécialité 1, c'est-à-dire ceux qui sont encore « assez proches » des ensembles génériques. Dans tout ce chapitre, nous nous placerons dans $\mathbb{P} = \mathbb{P}^2$, et nous poserons $R = k[X, Y, T]$.

4.1 Résolutions numériques et virtuelles

Le mot résolution a déjà été abordé dans ce document, dans la proposition 46, mais pour le moment uniquement dans le cas des intersections complètes. Nous formaliserons ceci dans un premier temps, avant de voir deux autres types de résolutions. L'objet de ce paragraphe sera alors de voir les différents liens qui existent entre ces notions.

Définition 71. Soit Z un ensemble fini de \mathbb{P}^2 de cardinal d . Une **résolution graduée** de Z est une suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}$ -modules de la forme :

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-m_j) \longrightarrow \bigoplus_{i=0}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n_i) \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0,$$

où les m_j et les n_i sont des entiers positifs.

Remarque 72. Tout ensemble fini de \mathbb{P} admet une telle résolution. Pour cela, le lecteur pourra se rapporter à [Per95], chapitre X, exemple 1.2.2, théorème 1.6 et corollaire 1.9.

4.1.1 Résolutions numériques

Définition 73. On appelle **résolution numérique** la donnée d'un entier strictement positif r et d'entiers positifs $n_0 \leq \dots \leq n_r$, $m_1 \leq \dots \leq m_r$

vérifiant $\sum_{j=1}^r m_j = \sum_{i=0}^r n_i$. Le **degré** de cette résolution numérique est alors l'entier $d = \frac{1}{2}(\sum_{j=1}^r m_j^2 - \sum_{i=0}^r n_i^2)$.

Nous allons à présent voir le lien entre résolutions numériques et résolutions graduées.

Proposition 74. *Considérons une résolution graduée telle que définie ci-dessus. Alors les entiers m_j et n_i forment une résolution numérique de degré d .*

Démonstration. Pour ce résultat, le lecteur pourra encore se reporter à [Per95], chapitre X, proposition 2.4, et en adapter la preuve. □

Le théorème ci-dessous, que l'on appelle théorème de Bertini, nous donne une réciproque conditionnelle.

Théorème 75 (Bertini). *Considérons une résolution numérique, donnée par des entiers m_j et n_i comme dans la définition 73, et supposons que, pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on ait $m_i > n_i$. Il existe alors un homomorphisme injectif $u : E = \bigoplus_{j=1}^r R(-m_j) \rightarrow F = \bigoplus_{i=0}^r R(-n_i)$ dont les mineurs de taille r définissent un ensemble fini Z formé de d points distincts admettant une résolution graduée du type :*

$$0 \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I_Z \rightarrow 0$$

Démonstration. Le lecteur pourra adapter la preuve du lemme 2.7 du chapitre X de [Per95]. □

Remarque 76. Notons bien que, dans le théorème 75, l'entier n_0 n'est pas considéré dans la comparaison des entiers.

4.1.2 Répétition

L'intérêt principal des résolutions virtuelles va être de pouvoir simplifier les répétitions dans les résolutions graduées et numériques, comme nous le verrons dans la remarque 82. Nous allons donc commencer par parler de cette notion de répétition.

Définition 77. On considère une résolution graduée telle que dans la définition 71. On dit qu'elle admet une **répétition** s'il existe deux entiers i et j entre 1 et r tels que $m_j = n_i$.

Proposition 78. *Considérons une résolution graduée de la forme :*

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s) \xrightarrow{u} \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s) \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0,$$

où Z est un ensemble fini lisse. Notons λ le coefficient de la matrice de u entre les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-s)$. Deux cas se produisent :

1. Si $\lambda \neq 0$, la résolution se simplifie, i.e. Z admet une résolution graduée du type :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0,$$

où Z est le même qu'au départ.

2. Si $\lambda = 0$, on ne peut plus simplifier directement, mais il existe un ensemble fini lisse Z' de même cardinal admettant la résolution simplifiée. Les ensembles Z et Z' ont alors la même cohomologie.

Démonstration. Le cas $\lambda \neq 0$ est une adaptation de la preuve de la proposition 1.8, chapitre X de [Per95]. Nous allons à présent traiter le cas $\lambda = 0$. L'existence de l'ensemble Z' résulte directement du théorème 75. Pour ce qui est de la cohomologie, il s'agit uniquement de passer en cohomologie dans les suites exactes donnant les résolutions. □

Nous reparlerons brièvement de répétitions au début du paragraphe 4.5.

4.1.3 Résolutions virtuelles

Définition 79. Une fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ est appelée **caractère** si elle est à support fini, et telle que $\sum_n f(n) = 0$.

Définition 80. Une **résolution virtuelle** est un caractère $\rho : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ nul sur les entiers strictement négatifs, et valant -1 en 0. On appelle alors **rang** de ρ l'entier r défini par :

$$r = -1 + \sum_n [\rho(n)]^+$$

Notons n_1, \dots, n_l les entiers où ρ est strictement positif, avec $\beta_i = \rho(n_i)$, et m_1, \dots, m_s les entiers où ρ est strictement négatif, avec $\alpha_i = -\rho(m_i)$. La résolution virtuelle sera alors notée :

$$m_1^{\alpha_1}, \dots, m_s^{\alpha_s} \longrightarrow n_1^{\beta_1}, \dots, n_l^{\beta_l}.$$

Le **caractère** associé à une telle résolution, noté γ , est la primitive de ρ , c'est-à-dire qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma(n) = \sum_{k < n} \rho(k)$.

Nous allons à présent voir le lien entre résolution virtuelle et résolution numérique, ce qui conduira ensuite à la formulation d'un théorème de Bertini « version caractère ».

Proposition 81. 1. Partant d'une résolution numérique donnée par des entiers m_j et n_i comme dans la définition 73, on construit une résolution virtuelle en posant $\rho(0) = -1$, et, pour tout entier $n > 0$, $\rho(n) = |\{i, n_i = n\}| - |\{j, m_j = n\}|$. On appelle φ l'application qui associe, comme ci-dessus, une résolution virtuelle à une résolution numérique.

2. Réciproquement, à partir d'une résolution virtuelle, on construit une résolution numérique donné par les entiers m_j et n_i , mais en les faisant apparaître respectivement α_j et β_i fois chacun. L'application correspondante est notée ψ .

Remarque 82. On remarque dans la proposition précédente que $\varphi \circ \psi$ est l'identité, mais que $\psi \circ \varphi$ correspond à l'opération de simplification des résolutions.

Avant de passer à la suite, nous avons besoin d'une définition supplémentaire.

Définition 83. Un caractère γ est dit **positif** si, pour $n < 0$, on a $\gamma(n) = 0$, et qu'il existe $n_0 > 0$ tel que $\gamma(n) = -1$ pour $0 \leq n < n_0$, et $\gamma(n) \geq 0$ pour $n \geq n_0$.

Ceci nous conduit à formuler le théorème suivant, qui n'est qu'une autre version du théorème 75.

Théorème 84 (Bertini - version caractères). *Considérons une représentation virtuelle ρ de caractère γ , pour laquelle nous adoptons les notations de la définition 80. Il existe alors un ensemble Z fini et lisse admettant une résolution graduée de la forme :*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^s \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-m_j) \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-n_i) \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0$$

si et seulement si le caractère γ est positif. Le degré d de l'ensemble Z est alors donné par $d = \sum_{n \geq 0} n\gamma(n)$.

4.2 Spécialité d'un ensemble fini

Ce paragraphe a pour objet la quantification du défaut de généralité d'un ensemble, ce qui mènera dans la suite de ce chapitre à l'étude des ensembles finis de \mathbb{P} qui sont les plus proches des ensembles génériques, afin de voir quelles propriétés sont conservées par cette « petite » variation.

Définition 85. Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et Z un ensemble de d points de \mathbb{P} . On définit la **spécialité de Z en un entier $n \geq 0$** comme étant :

$$\text{spe}_n(Z) = h^1 \mathcal{I}_Z(n) - \left(\binom{n+2}{2} - d \right)^-,$$

et la **spécialité** de Z par :

$$\text{spe}(Z) = \sum_{n \geq 0} \text{spe}_n(Z).$$

Remarque 86. Cette définition peut paraître étrange, mais elle est en réalité naturelle. En effet, prenons un entier $n \geq 0$ et un ensemble fini Z de \mathbb{P} . Nous disposons de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_Z(n) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_Z(n) \longrightarrow H^1 \mathcal{I}_Z(n) \longrightarrow 0,$$

qui nous donne :

$$\begin{aligned} h^0 \mathcal{I}_Z(n) - h^1 \mathcal{I}_Z(n) &= h^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n) - h^0 \mathcal{O}_Z(n) \\ &= \binom{n+2}{2} - d, \end{aligned}$$

d'où nous tirons :

$$\text{spe}_n(Z) = h^1 \mathcal{I}_Z(n) = h^1 \mathcal{I}_Z(n) - [h^0 \mathcal{I}_Z(n) - h^1 \mathcal{I}_Z(n)]^-,$$

ce qui n'est rien d'autre que le minimum de $h^0 \mathcal{I}_Z(n)$ et de $h^1 \mathcal{I}_Z(n)$. En particulier, l'ensemble Z est générique si et seulement s'il est de spécialité 0, ce qui est rassurant.

4.3 Lien entre irréductibilité et résolution

Ce paragraphe, qui n'est constitué que d'une proposition, est néanmoins crucial dans la suite de ce texte.

Proposition 87. *Soient \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 deux faisceaux dissociés de rang respectifs $r+1$ et r , sans répétition. L'ensemble H des d -uplets de points de \mathbb{P} admettant une résolution de la forme :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0$$

est une partie vide ou irréductible de $(\mathbb{P}^2)^d$.

Démonstration. Notons Ω l'ouvert de $\text{Hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_0)$ formé des éléments φ dont les mineurs de la matrice associée sont tous non nuls et sans facteurs communs. Alors H est l'image de cet ouvert par une application continue. Comme $\text{Hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_0)$ est un espace vectoriel, il est irréductible, ce qui donne l'irréductibilité de Ω et donc celle de H . Pour plus de détails, se reporter à [Per95], chapitre X, lemme 2.7. □

4.4 Ensembles génériques

Au paragraphe précédent, nous avons défini la spécialité d'un ensemble fini. Avant d'étudier les ensembles de spécialité 1, il convient d'étudier ceux de spécialité 0, c'est-à-dire les ensembles génériques. Nous allons donc commencer par déterminer les résolutions virtuelles possibles des ensembles génériques.

Proposition 88. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, et a l'unique entier tel que $\binom{a+1}{2} \leq d < \binom{a+2}{2}$. Posons $s = d - \binom{a+1}{2}$, $r = \binom{a+2}{2} - d$. Alors la seule résolution virtuelle ρ pouvant correspondre à un ensemble générique de degré d est donnée par :

$$\begin{array}{c|cccccccccc} & 0 & 1 & \dots & a-2 & a-1 & a & a+1 & a+2 & a+3 \\ \text{gen} & \rho & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & r & 1+s-r & -s & 0 \\ & \gamma & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 & r-1 & s & 0 & 0 \end{array}$$

Démonstration. Soit Z un ensemble générique de d points. Considérons une résolution graduée de Z donnée par :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0,$$

que l'on suppose, dans un premier temps, sans répétitions, et où les faisceaux \mathcal{L}_0 et \mathcal{L}_1 sont dissociés. Fixons les entiers a , r , et s comme dans l'énoncé. Notons l le plus petit entier apparaissant dans un des faisceaux dissociés de la résolution. Le théorème 75 nous dit que cet entier l apparaît uniquement dans \mathcal{L}_0 , sans quoi les inégalités du type $m_i > n_i$ ne seraient pas vérifiées. Après avoir tensorisé la suite précédente par l et être passé en cohomologie, nous obtenons :

$$0 \longrightarrow H^0 \mathcal{L}_1(l) \longrightarrow H^0 \mathcal{L}_0(l) \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_Z(l) \longrightarrow 0.$$

Remarquons que $H^0 \mathcal{L}_1(l)$ est nécessairement nul. En effet, écrivons $\mathcal{L}_1 = \bigoplus_{j>l} \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-j)$, ce qui donne :

$$H^0 \mathcal{L}_1(l) = \bigoplus_{j>l} H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(l-j) = 0,$$

d'où nous tirons :

$$h^0 \mathcal{L}_0(l) = h^0 \mathcal{I}_Z(l) \geq 1.$$

Considérons à présent la suite exacte fondamentale de Z , qui, après avoir été tensorisée par l et passée en cohomologie, nous donne :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{I}_Z(l) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(l) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_Z(l) \rightarrow H^1 \mathcal{I}_Z(l) \rightarrow 0,$$

et remarquons que, Z étant générique (en tout degré), l'un des termes aux extrémités de cette suite est nul. Si $l < a$, nous avons, pour des raisons de dimension, la nullité de $H^0 \mathcal{I}_Z(l)$, ce qui nous donne la nullité de $H^0 \mathcal{L}_0(l)$, ce qui est impossible par définition de l . Prenons alors $l = a$. Nous avons cette fois la nullité de $H^1 \mathcal{I}_Z(a)$, ce qui donne $h^0 \mathcal{I}_Z(a) = r$, et la résolution graduée prend la forme suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a)^r \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

Pour obtenir les termes suivants, nous tensorisons alors par $a+1$, et nous utilisons des raisonnements similaires (en faisant une distinction selon le

signe de $r - s - 1$), et le dernier terme s'obtient par tensorisation par $a + 2$. Il ne peut y avoir de termes faisant intervenir des entiers plus grands sans qu'il n'y ait de répétition, ce que nous avons supposé impossible. Ceci achève la preuve, car les répétitions n'ont aucune influence sur la résolution virtuelle associée.

□

Pour terminer ce paragraphe, voici une proposition qui est une conséquence directe du théorème 75 et de la proposition 87.

Proposition 89. *Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et a, r, s comme dans la proposition 88.*

1. *On suppose $r \leq s + 1$. Alors pour tout ϵ entre 0 et $r - 1$, il existe un ensemble lisse Z formé de d points admettant la résolution :*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a-2)^s \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a-1)^\epsilon \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a)^r \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a-1)^{s+1-r+\epsilon} \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

De plus, l'ensemble des Z convenables est une partie irréductible de $(\mathbb{P}^2)^d$, ouverte si ϵ est nul.

2. *On suppose $r \geq s + 1$. Alors pour tout ϵ entre 0 et s , il existe un ensemble lisse Z formé de d points admettant la résolution :*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a-2)^s \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a-1)^{s+1-r+\epsilon} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a)^r \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a-1)^\epsilon \rightarrow \mathcal{I}_Z \rightarrow 0.$$

De plus, l'ensemble des Z convenables est une partie irréductible de $(\mathbb{P}^2)^d$, ouverte si ϵ est nul.

4.5 Critère d'irréductibilité pour les ensembles de spécialité 1

L'objet de ce paragraphe est d'obtenir un critère concernant l'irréductibilité de l'ensemble H_d défini ci-dessus.

Il s'agit à présent de savoir quelles sont les résolutions possibles pour un élément de H_d . Commençons par une proposition.

Proposition 90. *Soit Z un élément de H_d . Il existe alors un unique entier p tel que $\text{spe}_p(Z) = 1$, et cet entier est soit a soit $a - 1$, où a est l'entier associé à d de la même façon que dans la proposition 88.*

Démonstration. Comme Z est de spécialité 1, il est clair qu'il existe un unique entier p tel que $\text{spe}_p(Z) = 1$ et que la spécialité de Z en tous les autres n est nulle.

Supposons qu'on ait $p > a$. On sait que Z est générique en a , ce qui donne $h^1 \mathcal{I}_Z(a) = 0$, en utilisant la suite exacte fondamentale de Z que l'on

passé en cohomologie. Mais la fonction $n \mapsto h^1 \mathcal{I}_Z(n)$ est décroissante, ce qui donne $h^1 \mathcal{I}_Z(p) = 0$ donc $\text{spe}_p(Z) = 0$, ce qui est absurde.

Supposons à présent que l'on ait $p < a - 1$. On a $\text{spe}_p(Z) = 1$, ce qui donne en particulier $h^0 \mathcal{I}_Z(p) > 0$, et donc $h^0 \mathcal{I}_Z(a - 1) > 0$, par croissance de $n \mapsto h^0 \mathcal{I}_Z(n)$. Mais Z est générique en degré $a - 1$, car la spécialité est en $p < a - 1$, donc $h^1 \mathcal{I}_Z(a - 1) = 0$. Considérons alors la suite exacte fondamentale de Z , qui, une fois tensorisée par $a - 1$ et passée en cohomologie, nous donne :

$$0 \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_Z(a - 1) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a - 1) \longrightarrow H^0 \mathcal{O}_Z(a - 1) \longrightarrow 0,$$

d'où nous tirons :

$$0 < h^0 \mathcal{I}_Z(a - 1) = \binom{a + 1}{2} - d = -s < 0,$$

ce qui est absurde. □

Notation. La proposition précédente nous pousse à introduire une notation. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On note $H_{d,a-1}$ (resp. $H_{d,a}$) les éléments de H_d dont la spécialité se trouve en $a - 1$ (resp. en a).

Passons à présent à la prochaine étape, qui est de déterminer les résolutions possibles d'un ensemble de spécialité 1.

Proposition 91. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, et a l'unique entier tel que $\binom{a+1}{2} \leq d < \binom{a+2}{2}$. Posons $s = d - \binom{a+1}{2}$, $r = \binom{a+2}{2} - d$. Alors les seules résolutions virtuelles pouvant correspondre à un ensemble de spécialité 1 sont récapitulées dans le tableau suivant :

		0	1	...	$a - 2$	$a - 1$	a	$a + 1$	$a + 2$	$a + 3$
<i>gen</i>	ρ	-1	0	...	0	0	r	$1 + s - r$	$-s$	0
	γ	-1	-1	...	-1	-1	$r - 1$	s	0	0
$H_{d,a-1}$	ρ	-1	0	...	0	1	$r - 3$	$s - r + 4$	$-s - 1$	0
	γ	-1	-1	...	-1	0	$r - 3$	$s + 1$	0	0
$H_{d,a}$	ρ	-1	0	...	0	0	$r + 1$	$s - r - 2$	$3 - s$	-1
	γ	-1	-1	...	-1	-1	r	$s - 2$	1	0

En particulier, $H_{d,a-1}$ est non vide si et seulement si $r \geq 3$, et $H_{d,a}$ est non vide si et seulement si $s \geq 2$.

Démonstration. Fixons un élément Z de H_d , ainsi que les entiers a , r , et s comme dans l'énoncé. La proposition 90 nous dit que cet ensemble Z est générique en tous les degrés strictement inférieurs à $a - 1$, donc le début de la preuve de la proposition 88 peut encore être appliqué, ce qui nous dit qu'il ne peut pas y avoir d'entier strictement inférieur à $a - 1$ dans la résolution

graduée de Z , que l'on suppose par ailleurs sans répétition (du moins dans un premier temps), et que nous écrivons sous la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0.$$

Supposons que la spécialité se trouve en $a - 1$. Nous avons, comme dans la preuve de la proposition 88, $h^0 \mathcal{L}_0(a - 1) = h^0 \mathcal{I}_Z(a - 1)$. La suite exacte fondamentale, une fois tensorisée par $a - 1$ et passée en cohomologie, nous donne :

$$0 \rightarrow H^0 \mathcal{I}_Z(a - 1) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(a - 1) \rightarrow H^0 \mathcal{O}_Z(a - 1) \rightarrow H^1 \mathcal{I}_Z(a - 1) \rightarrow 0,$$

mais cette fois-ci, nous n'avons plus la nullité de $H^1 \mathcal{I}_Z(a - 1)$. En revanche, nous savons que $\text{spe}_{a-1}(Z) = 1$, ce qui nous donne $h^1 \mathcal{I}_Z(a - 1) = 1 + s$, puis $h^0 \mathcal{I}_Z(a - 1) = 1$. Nous écrivons alors la résolution de Z sous la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}'_0 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-a + 1) \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0,$$

puis nous tensorisons par a et passons en cohomologie :

$$0 \longrightarrow H^0 \mathcal{L}_1(a) \longrightarrow H^0 \mathcal{L}'_0(a) \oplus H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) \longrightarrow H^0 \mathcal{I}_Z(a) \longrightarrow 0,$$

et nous faisons une distinction de cas, selon que a apparaisse dans \mathcal{L}_1 ou dans \mathcal{L}_0 . Traitons le cas où a apparaît dans \mathcal{L}_1 . Nous avons alors $H^0 \mathcal{L}'_0(a) = 0$, ce qui nous donne $h^0 \mathcal{L}_1(a) = 3 - h^0 \mathcal{I}_Z(a)$, et la suite exacte fondamentale de Z nous donne $h^0 \mathcal{I}_Z(a) = r$: on retrouve bien ce qui est dans le tableau. Pour la suite, on procède exactement de la même façon.

Nous obtenons ainsi les représentations virtuelles énoncées. En appliquant le théorème 84, nous pouvons exactement savoir quelle résolution convient selon le degré d de notre ensemble. □

Remarque 92. Le théorème précédent dit que le premier $H_{d,a-1}$ apparaît pour $d = 3$, tandis que le premier $H_{d,a}$ apparaît pour $d = 5$. De plus, pour reconnaître si un ensemble Z de spécialité 1 est dans $H_{d,a}$ ou $H_{d,a-1}$, on peut en général se contenter de regarder la dimension de $H^0 \mathcal{I}_Z(s)$, où s est le minimum des degrés de courbes contenant Z .

Remarque 93. Nous avons parlé dans la proposition précédente de résolution virtuelle, afin de ne pas nous préoccuper des répétitions, chose que nous pouvons faire maintenant. Partant des résolutions mentionnées ci-dessus, et appliquant le théorème 75, nous trouvons que :

- Si la spécialité se trouve en $a - 1$, une répétition ne peut avoir lieu qu'en $a + 1$, avec un exposant au plus égal à $s + 1$ si $r - s - 4 \geq 0$ et à $r - 3$ sinon.

- Si la spécialité se trouve en a , les choses se compliquent un peu. Si $s - r - 2 \geq 0$, la répétition ne peut avoir lieu qu'en $a + 1$ avec un exposant au plus égal à r , ou en $a + 2$ avec un exposant au plus égal à 1, et si $s - r - 2 \leq 0$, la répétition ne peut avoir lieu qu'en $a + 1$ avec un exposant au plus égal à $s - 2$, ou en $a + 2$ avec un exposant au plus égal à 1.

Proposition 94. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Le sous-ensemble de H_d formé des d -uplets de points (distincts) admettant une résolution sans répétition est dense dans H_d .*

Démonstration. Considérons un ensemble Z n'admettant pas de résolution sans répétition, dont nous écrivons une résolution graduée :

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-i) \xrightarrow{\chi} \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-i) \longrightarrow \mathcal{I}_Z \longrightarrow 0,$$

et supposons que le coefficient dans la matrice de χ correspondant à la répétition, i.e. le coefficient à la ligne et à la colonne de l'ajout, est nul (sans quoi il est possible de supprimer la répétition, cf proposition 78). Il est alors possible d'approcher la matrice de χ par des matrices identiques mais possédant un coefficient λ non nul à l'endroit de la répétition. Chaque matrice de cette famille définit alors un ensemble Z appartenant à H_d et possédant une résolution sans répétition, ce qui achève la preuve. □

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 95. *Soient $d \in \mathbb{N}^*$, et a l'unique entier tel que $\binom{a+1}{2} \leq d < \binom{a+2}{2}$. Posons $s = d - \binom{a+1}{2}$, $r = \binom{a+2}{2} - d$. L'ensemble H_d est alors irréductible si et seulement si $s \in \{0, 1\}$ ou $r \in \{1, 2\}$.*

Démonstration. La proposition 94 nous permet dès à présent de simplifier le problème. En effet, il suffit de montrer le théorème en remplaçant H_d par l'ensemble des d -uplets de points de spécialité 1 admettant une résolution sans répétition, que nous notons F_d . La preuve de notre résultat se résume alors à une application du théorème 84 dans les différents cas, en s'aidant du tableau donné dans la proposition 91. Seul le premier cas, que nous traiterons, est différent.

Dans le cas $r \geq 3$ et $s \geq 2$, le théorème 84 nous dit qu'il existe des éléments de F_d , et donc dans H_d , dont la spécialité se trouve en a , mais qu'il en existe aussi dont la spécialité se trouve en $a - 1$. Nous obtenons alors une partition de H_d par $U = \{Z \in H_d, \text{spe}_{a-1}(Z) = 1\}$ et $V = \{Z \in H_d, \text{spe}_a(Z) = 1\}$, et ces deux ensembles sont des ouverts de H_d par le théorème 55.

Passons au cas $s = 0$. Soit Z un élément de F_d . Le théorème 84 nous dit que la seule résolution numérique possible pour Z est donnée par :

$$(a + 1)^{a-3}, a + 2 \rightarrow a^{a-2}, a - 1.$$

De manière équivalente, F_d est dans ce cas l'ensemble des d -uplets de points ayant une résolution graduée associée à celle ci-dessus. La proposition 87 nous donne alors l'irréductibilité de F_d . Mais F_d est dense dans H_d par la proposition 94, donc H_d est irréductible.

Les autres cas sont similaires au cas $s = 0$, seule l'unique résolution possible change. □

Avant de poursuivre, voici un théorème qui nous sera utile dans toute la suite de ce document : le théorème de Peskine-Szpiro, que nous admettrons, mais que le lecteur pourra retrouver dans [PS74], proposition 4.1, dans un cas très général. L'utilité de résultat est de nous assurer que certaines liaisons algébriques sont possibles.

Théorème 96 (Peskine-Szpiro). *On considère un ensemble fini lisse V de \mathbb{P}^m , admettant pour résolution numérique :*

$$m_1, \dots, m_r \longrightarrow n_0, \dots, n_r,$$

où les entiers m_j et n_i sont comme dans la définition 73, et r est au moins égal à 2. Pour tous entiers $s \geq n_0$ et $t \geq n_r$, on peut lier V par $s \times t$.

Remarque 97. En particulier, le premier entier d pour lequel H_d est réductible est $d = 12$. Cherchons une description géométrique des composantes irréductibles de H_{12} , qui sont au nombre de 2.

1. Cas de la composante $H_{12,3}$:

Les éléments de cette composante ont pour résolution numérique :

$$6^3 \longrightarrow 3, 5^3.$$

Fixons un tel ensemble V , qui a 12 éléments. Afin de le décrire géométriquement, nous allons effectuer une liaison 3×5 , ce qui est possible d'après le théorème 96. Notons W l'ensemble auquel V est ainsi lié. La résolution numérique de W est donnée par :

$$3^2 \longrightarrow 2^3,$$

ce qui correspond à trois points génériques. Un calcul de dimension tel que ceux menés dans le paragraphe suivant permet de montrer la réciproque, et ce qui donne finalement une caractérisation géométrique des éléments de $H_{12,3}$: ce sont les ensembles de 12 points pouvant être liés à trois points génériques.

2. Cas de la composante $H_{12,4}$:

Les éléments de cette composante ont pour résolution numérique :

$$5^3, 7 \longrightarrow 4^4, 6.$$

Fixons un tel ensemble V . La matrice de l'application linéaire entre $R(-5)^3 \oplus R(-7)$ et $R(-4)^4 \oplus R(-6)$ associée à cet ensemble est de la forme :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & 5^3 & & 7 \\ & & & b_1 \\ & & & b_2 \\ M & & & b_3 \\ & & & b_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & g \end{array} \right) \begin{array}{l} 4^4, \\ 6 \end{array}$$

dont les mineurs 4×4 fournissent des équations de V . Notons m_1, \dots, m_4 les mineurs de taille 3×3 de M , et posons $f = \sum_{i=1}^4 b_i m_i$. On a $V = V(m_1, \dots, m_4) \cup V(f, g)$, ce qui permet de décrire géométriquement l'ensemble V . En effet, les m_i sont tous non nuls et sans facteur commun, donc l'ensemble qu'ils engendrent est formé de 6 points génériques, et l'ensemble $V(f, g)$ est formé de 6 points alignés.

4.6 Dimension des composantes irréductibles

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié le nombre de composantes irréductibles de l'ensemble H_d . Il est alors naturel de se poser des questions sur ces composantes irréductibles, et nous chercherons donc à obtenir leur dimension, ou plutôt leur codimension dans $(\mathbb{P}^2)^d$.

Voici le théorème dont la démonstration fera l'objet de ce paragraphe :

Théorème 98. *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On définit les entiers a , r , et s de la manière usuelle. Plusieurs cas se présentent :*

1. *Si $r \geq 3$, la codimension de $H_{d,a-1}$ est égale à $s + 1$.*
2. *Si $s \geq 2$, la codimension de $H_{d,a}$ est égale à $r + 1$.*

Nous donnerons trois preuves de ce résultat. La première est basée sur une utilisation directe de la formule d'Ellingsrud. Cette méthode n'est cependant pas très commode, car le calcul à effectuer n'est pas des plus commodes, et doit être effectué pour chaque composante irréductible. La deuxième preuve constitue en réalité une amélioration de ce qui précède. En partant de la formule d'Ellingsrud, nous regarderons la théorie dite des pas élémentaires, qui ne demande qu'un unique calcul, et peut ensuite être utilisée simplement pour chaque composante. La troisième démonstration est différente, et est sans doute plus intéressante pour nous, puisqu'elle utilise la liaison algébrique.

4.6.1 Formule d'Ellingsrud

La proposition suivante, qui constitue le point de départ de cette méthode (et de la suivante) est admise, car la démonstration nous entraînerait trop loin.

Proposition 99 (Formule d'Ellingsrud). *La dimension δ_ρ de l'ensemble des parties finies de \mathbb{P} associées à une représentation virtuelle ρ est donnée par la formule :*

$$\delta_\rho = 1 - \sum_{q,l>0} \rho(q)\rho(l) \binom{q-l+2}{2},$$

pour peu que l'ensemble en question soit non vide.

Démonstration. Il s'agit du théorème 2 de l'article [Ell75], présenté toutefois dans un cas plus général (et donc de manière plus compliquée). On peut également adapter la preuve (et aussi l'énoncé) de la proposition 3.2 du chapitre IX de [MDP90]. □

Nous pouvons alors entamer la preuve du théorème 98.

Démonstration du théorème 98. Nous ne traiterons dans cette preuve que le cas de la codimension de $H_{d,a-1}$ avec $r \geq 3$, l'autre étant parfaitement similaire. Souvenons-nous un instant de la proposition 91. Dans le cas que nous considérons, l'ensemble $H_{d,a-1}$ est non-vide, et ses éléments ont tous pour résolution virtuelle :

		0	1	...	$a-2$	$a-1$	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$
$H_{d,a-1}$	ρ	-1	0	...	0	1	$r-3$	$s-r+4$	$-s-1$	0
	γ	-1	-1	...	-1	0	$r-3$	$s+1$	0	0

Appliquons la proposition 99 :

$$\begin{aligned} \delta_\rho &= 1 - \sum_{q,l>0} \rho(q)\rho(l) \binom{q-l+2}{2} \\ &= -r^2 - s^2 - 2rs + r + 2 \\ &= -(a+1)^2 + r + 2 \end{aligned}$$

et la codimension de $H_{d,a-1}$ vaut donc $2d + (a+1)^2 - r - 2 = s + 1$, ce qui achève la preuve. □

4.6.2 Formule des pas

Nous allons à présent passer à la théorie des pas élémentaires. Notons que ce qui suit, en plus d'être utile dans notre cas, pourrait servir aux mêmes types de calculs pour des spécialités strictement plus grandes que 1.

Définition 100. Soient γ un caractère vérifiant $\gamma(0) = -1$ et p un entier strictement supérieur à 1. On appelle **pas élémentaire** $p \times p$ l'opération qui à γ associe le caractère γ' défini par $\gamma'(p-1) = \gamma(p-1) + 1$, $\gamma'(p) = \gamma(p) - 2$, $\gamma'(p+1) = \gamma(p+1) + 1$, et $\gamma'(n) = \gamma(n)$ sinon.

Il est alors possible de calculer la dimension de l'ensemble obtenu après l'opération de pas élémentaire en fonction de la dimension avant, en utilisant la formule ci-dessous dite formule des pas :

Proposition 101. Si γ' est obtenu à partir de γ par un pas élémentaire $p \times p$, on a la formule :

$$\delta_\gamma - \delta_{\gamma'} = \gamma(p-1) - \gamma(p-2) + \gamma(p+1) - \gamma(p+2) + 1,$$

où δ_γ (resp. $\delta_{\gamma'}$) est la dimension associée à la représentation virtuelle dont le caractère est γ (resp. γ').

Démonstration. Il s'agit d'un calcul utilisant la formule d'Ellingsrud. □

En étudiant les résolutions virtuelles possibles pour les ensembles génériques et ceux de spécialité 1, que nous rappelons dans le tableau ci-dessous :

		0	1	...	$a-2$	$a-1$	a	$a+1$	$a+2$	$a+3$
gen	ρ	-1	0	...	0	0	r	$1+s-r$	$-s$	0
	γ	-1	-1	...	-1	-1	$r-1$	s	0	0
$H_{d,a-1}$	ρ	-1	0	...	0	1	$r-3$	$s-r+4$	$-s-1$	0
	γ	-1	-1	...	-1	0	$r-3$	$s+1$	0	0
$H_{d,a}$	ρ	-1	0	...	0	0	$r+1$	$s-r-2$	$3-s$	-1
	γ	-1	-1	...	-1	-1	r	$s-2$	1	0

nous remarquons que le passage du générique au spécialité 1 correspond à un pas élémentaire $a \times a$ pour mettre une irrégularité en $a-1$, et à un pas élémentaire $(a+1) \times (a+1)$ pour mettre une irrégularité en a .

Avant de passer à la preuve du théorème 98, nous remarquons que la dimension de l'ensemble des d -uplets de points génériques est égale à $2d$. En effet, le théorème 55 nous dit que les ensembles génériques forment un ouvert de l'ensemble des d -uplets.

Démonstration du théorème 98. Nous ne traiterons dans cette preuve que le cas de la codimension de $H_{d,a}$, où le caractère de la seule représentation virtuelle est noté γ' (γ pour les génériques), avec $s \geq 2$, l'autre étant parfaitement similaire. Les considérations précédentes nous donnent alors :

$$\begin{aligned} \delta_{\gamma'} &= 2d - \gamma(a) + \gamma(a-1) - \gamma(a+2) + \gamma(a+3) - 1 \\ &= 2d - 1 - r + 1 - 1 \\ &= 2d - r - 1 \end{aligned},$$

et nous obtenons donc bien une codimension égale à $r+1$. □

4.6.3 Liaison algébrique

La méthode qui suit est la plus intéressante dans notre cas, puisqu'elle fait appel à une notion que nous connaissons désormais bien : la liaison algébrique. L'avantage de cette méthode, outre son interprétation géométrique, est qu'elle nous donnera l'occasion de parler de la technique des schémas d'incidence. Le terme schéma sera ici à comprendre comme une simple appellation, ce qui ne nous obligera pas à parler de la théorie des schémas en géométrie algébrique.

L'idée générale de la preuve est de faire une récurrence sur l'entier d . La liaison algébrique nous servira pour passer d'un petit degré à un grand degré, en utilisant la technique détaillée ci-dessous.

4.6.3.1 Schéma d'incidence

On considère une variété projective H constituée de d -uplets de \mathbb{P} admettant une résolution virtuelle donnée. Le **schéma d'incidence** \mathcal{D} associé à H est alors défini comme étant l'ensemble des couples (V, X) où V est un élément de H et X une intersection complète $s \times t$ contenant V (s et t sont des entiers strictement positifs fixés). On dispose alors d'un morphisme naturel $p : \mathcal{D} \rightarrow H$ qui envoie un couple (V, X) sur V , que l'on supposera dominant, ce qui veut dire qu'il existe une partie dense de H dont tout élément est contenu dans une intersection complète $s \times t$. On pourrait penser, en partant d'un élément V de H , à définir les intersections complètes X correspondantes en prenant les courbes de degrés respectifs s et t passant par V , mais deux problèmes surgissent : un même ensemble X peut être donné par plusieurs couples de courbes, et un couple donné peut ne pas définir une intersection complète (dans le cas d'une composante commune). Pour surmonter ces obstacles, on définit l'ensemble $\widehat{\mathcal{D}}$ des triplets (V, f, g) , où V est dans H , et f, g sont respectivement des éléments de $H^0 \mathcal{I}_V(s)$ et $H^0 \mathcal{I}_V(t)$, sans facteur commun. On dispose alors d'un morphisme (clairement surjectif) $q : \widehat{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{D}$ qui envoie (V, f, g) sur (V, X) , où $X = V(f, g)$. On peut alors attaquer le calcul de la dimension des fibres de p .

Proposition 102. *Il existe une partie dense de H sur laquelle la dimension des fibres de p est constante égale à $h^0 \mathcal{I}_V(s) + h^0 \mathcal{I}_V(t) - h^0 \mathcal{I}_X(s) - h^0 \mathcal{I}_X(t)$, où X est une intersection complète $s \times t$.*

Démonstration. Le morphisme p étant dominant, son image est dense, et constituera la partie de H mentionnée ci-dessus. On fixe donc V un élément de l'image de p . L'ensemble $(p \circ q)^{-1}(V)$ est alors formé des triplets (V, f, g) , où f et g sont respectivement des éléments de $H^0 \mathcal{I}_V(s)$ et $H^0 \mathcal{I}_V(t)$, sans composante commune. Afin de calculer la dimension de cet ensemble, on commence par compter le nombre de f possibles, ce qui donne $h^0 \mathcal{I}_V(s)$ choix. Il s'agit ensuite de compter, pour un tel f , le nombre de $V(g)$ n'ayant pas de

composante commune avec $V(f)$. Cependant, l'ensemble des g convenables forme un ouvert de $H^0 \mathcal{I}_V(t)$, non vide car V est dans l'image de p . La dimension de l'ensemble des g sans composante commune avec f est donc égale à $h^0 \mathcal{I}_V(t)$. Par conséquent, la dimension de la fibre $(p \circ q)^{-1}(V)$ est égale à $h^0 \mathcal{I}_V(s) + h^0 \mathcal{I}_V(t)$. On remarque à présent que la dimension de $q^{-1}(X)$ est la même pour tout $X \in p^{-1}(V)$. Soit un tel ensemble X . Un raisonnement similaire à celui mené ci-dessus montre que la fibre $q^{-1}(X)$ est de dimension $h^0 \mathcal{I}_X(s) + h^0 \mathcal{I}_X(t)$. La dimension de $p^{-1}(V)$ est alors bien égale à $h^0 \mathcal{I}_V(s) + h^0 \mathcal{I}_V(t) - h^0 \mathcal{I}_X(s) - h^0 \mathcal{I}_X(t)$, ce qui achève la preuve. \square

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui servira à articuler les différents cas dans la récurrence qui sera effectuée pour prouver le théorème 98.

Proposition 103. *Soient H et K deux variétés projectives telles que plus haut. On suppose qu'il existe une partie dense de H (resp. de K) dont tout élément est lié par $s \times t$ à un élément de K (resp. de H). La formule suivante relie les dimensions de H et de K :*

$$\dim H - \dim K = (h^0 \mathcal{I}_W(s) - h^0 \mathcal{I}_V(s)) + (h^0 \mathcal{I}_W(t) - h^0 \mathcal{I}_V(t)),$$

où V et W sont des éléments quelconques de K et de H , respectivement.

Démonstration. Il s'agit de remarquer que les schémas d'incidence associés à H et K sont birationnels par l'application $(V, X) \mapsto (X \setminus V, X)$, ce qui donne l'égalité suivante :

$$\dim H + h^0 \mathcal{I}_V(s) + h^0 \mathcal{I}_V(t) = \dim K + h^0 \mathcal{I}_W(s) + h^0 \mathcal{I}_W(t),$$

et permet de conclure. \square

4.6.3.2 Théorème de dimension

Nous avons à présent tous les outils nécessaires pour prouver le théorème portant sur la dimension des composantes irréductibles des H_d .

Démonstration du théorème 98. Le principe de cette preuve, comme cela a été mentionné plus haut, est de faire une récurrence sur l'entier d . La particularité de la récurrence qui sera menée ci-dessous est de ne pas comporter un seul cas servant d'initialisation, mais plusieurs, qui ne sont à priori pas pour des entiers consécutifs. Il sera donc préférable de procéder à l'envers : on fixe dans un premier temps un entier d qui sera supposé « assez grand », de sorte que les exposants intervenant dans les résolutions numériques soient positifs. Les cas d'initialisation apparaîtront alors naturellement, et seront

traités en fin de preuve. On suppose par ailleurs, pour pouvoir parler de récurrence, que le théorème est vrai pour tous les entiers strictement inférieurs à d .

On note a , r , et s les entiers définis de la même manière que d'habitude. Plusieurs cas se présentent :

- Cas $s = 0$: On a dans ce cas $H_d = H_{d,a-1}$, et $d = \binom{a+1}{2}$. Le sous-ensemble de $H_{d,a-1}$ formé des éléments admettant une résolution graduée sans répétition est un ouvert non vide, dont on fixe un élément V . La seule résolution numérique possible pour V est alors :

$$(a+1)^{r-4}, a+2 \longrightarrow a-1, a^{r-3}.$$

L'hypothèse « d assez grand » mentionnée plus haut se traduit ici par $r \geq 4$. Le théorème 96 permet alors de lier V à un ensemble W par $a \times a$. L'ensemble ainsi obtenu est de degré $d' = a^2 - \binom{a+1}{2} = \binom{a}{2} < d$, pour lequel on a $a' = a-1$, $s' = 0$, ce qui donne $W \in H_{d',a-2}$, et admet comme résolution numérique :

$$a^{r-3}, a+1 \longrightarrow a-2, (a-1)^{r-4}, a^2.$$

On vient de montrer qu'il existe une partie dense de $H_{d,a-1}$ dont tout élément peut être algébriquement lié à par $a \times a$ à un élément de $H_{d',a-2}$. On montre de même la réciproque, à savoir qu'il existe une partie dense de $H_{d',a-2}$ dont tout élément peut être lié par $a \times a$ à un élément de $H_{d,a-1}$. Ceci permet d'utiliser la proposition 103, ainsi que l'hypothèse de récurrence, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dim H_{d,a-1} &= \dim H_{\binom{a}{2},a-2} + 2(h^0 \mathcal{H}_W(a) - h^0 \mathcal{H}_V(a)) \\ &= a(a-1) - 1 + 2(6 + 3r - 12 - r + 5 - 3 - r + 3) \\ &= a^2 - a - 1 + 2(r-1) \\ &= a^2 + a - 1 \\ &= 2\binom{a+1}{2} - 1 \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu. Le cas d'initialisation correspondant est $d = 10$.

- Cas $s = 1$: On a dans ce cas $H_d = H_{d,a-1}$, et $d = \binom{a+1}{2} + 1$. Le sous-ensemble de $H_{d,a-1}$ formé des éléments admettant une résolution graduée sans répétition est un ouvert non vide, dont on fixe un élément V . La seule résolution numérique possible pour V est alors :

$$(a+1)^{r-5}, (a+2)^2 \longrightarrow a-1, a^{r-3}.$$

L'hypothèse « d assez grand » mentionnée plus haut se traduit ici par $r \geq 5$. Le théorème 96 permet alors de lier V à un ensemble W par $a \times a$.

L'ensemble ainsi obtenu est de degré $d' = a^2 - \binom{a+1}{2} - 1 = \binom{a}{2} - 1 < d$, pour lequel on a $a' = a - 2$, $r' = 1$, ce qui donne $W \in H_{d',a-2}$, et admet comme résolution numérique :

$$a^{r-3}, a + 1 \longrightarrow a^2, (a - 1)^{r-5}, (a - 2)^2.$$

On vient de montrer qu'il existe une partie dense de $H_{d,a-1}$ dont tout élément peut être algébriquement lié à par $a \times a$ à un élément de $H_{d',a-2}$. On montre de même la réciproque, à savoir qu'il existe une partie dense de $H_{d',a-2}$ dont tout élément peut être lié par $a \times a$ à un élément de $H_{d,a-1}$. Ceci permet d'utiliser la proposition 103, ainsi que l'hypothèse de récurrence, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dim H_{d,a} &= \dim H_{\binom{a}{2}-1,a-2} + 2(h^0 \mathcal{I}_W(a) - h^0 \mathcal{I}_V(a)) \\ &= a(a - 1) - 2 - 2 + 2(12 + 3r - 15 - r + 5 - 3 - r + 3) \\ &= a^2 + a \\ &= 2\binom{a+1}{2} + 2 - 2 \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu. Pour ce qui est de l'initialisation correspondante, elle sera précisée dans le point suivant, les cas $s = 1$ et $r = 1$ étant envoyés l'un sur l'autre par liaison.

- Cas $r = 1$: On a dans ce cas $H_d = H_{d,a}$, et $d = \binom{a+2}{2} - 1$. Le sous-ensemble de $H_{d,a}$ formé des éléments admettant une résolution graduée sans répétition est un ouvert non vide, dont on fixe un élément V . La seule résolution numérique possible pour V est alors :

$$(a + 2)^{s-3}, a + 3 \longrightarrow a^2, (a + 1)^{s-3}.$$

L'hypothèse « d assez grand » mentionnée plus haut se traduit ici par $s \geq 3$. Le théorème 96 permet alors de lier V à un ensemble W par $(a + 1) \times (a + 1)$. L'ensemble ainsi obtenu est de degré $d' = (a + 1)^2 - \binom{a+2}{2} + 1 = \binom{a+1}{2} + 1 < d$, pour lequel on a $a' = a$, $s' = 1$, ce qui donne $W \in H_{d',a-1}$, et admet comme résolution numérique :

$$(a + 1)^{s-3}, (a + 2)^2 \longrightarrow a - 1, a^{s-3}, (a + 1)^2.$$

On vient de montrer qu'il existe une partie dense de $H_{d,a}$ dont tout élément peut être algébriquement lié à par $(a + 1) \times (a + 1)$ à un élément de $H_{d',a-1}$. On montre de même la réciproque, à savoir qu'il existe une partie dense de $H_{d',a-1}$ dont tout élément peut être lié par $(a + 1) \times (a + 1)$ à un élément de $H_{d,a}$. Ceci permet d'utiliser la proposition 103, ainsi que l'hypothèse de récurrence, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dim H_{d,a} &= \dim H_{\binom{a+1}{2}+1,a-1} + 2(h^0 \mathcal{I}_W(a + 1) - h^0 \mathcal{I}_V(a + 1)) \\ &= a(a + 1) + 2 - 2 + 2(2 + 3s - 9 + 6 - s + 3 - 6 - s + 3) \\ &= a^2 + 3a - 2 \\ &= 2\left(\binom{a+2}{2} - 1\right) - 2 \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu. Les cas d'initialisation correspondants sont $d = 9, 11, \text{ et } 14$.

- Cas $r = 2$: On a dans ce cas $H_d = H_{d,a}$, et $d = \binom{a+2}{2} - 2$. Le sous-ensemble de $H_{d,a}$ formé des éléments admettant une résolution graduée sans répétition est un ouvert non vide, dont on fixe un élément V . La seule résolution numérique possible pour V est alors :

$$(a+2)^{s-3}, a+3 \longrightarrow a^3, (a+1)^{s-4}.$$

L'hypothèse « d assez grand » mentionnée plus haut se traduit ici par $s \geq 4$. Le théorème 96 permet alors de lier V à un ensemble W par $a \times (a+1)$. L'ensemble ainsi obtenu est de degré $d' = a(a+1) - \binom{a+2}{2} + 2 = \binom{a}{2} + 1 < d$, pour lequel on a $a' = a - 1$, $s' = 1$, ce qui donne $W \in H_{d',a-2}$, et admet comme résolution numérique :

$$a^{s-4}, (a+1)^3 \longrightarrow a-2, (a-1)^{s-3}, a, a+1.$$

On vient de montrer qu'il existe une partie dense de $H_{d,a}$ dont tout élément peut être algébriquement lié à par $a \times (a+1)$ à un élément de $H_{d',a-2}$. On montre de même la réciproque, à savoir qu'il existe une partie dense de $H_{d',a-2}$ dont tout élément peut être lié par $a \times (a+1)$ à un élément de $H_{d,a}$. Ceci permet d'utiliser la proposition 103, ainsi que l'hypothèse de récurrence, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \dim H_{d,a} &= \dim H_{\binom{a}{2},a-2} + (h^0 \mathcal{I}_W(a) - h^0 \mathcal{I}_V(a)) + (h^0 \mathcal{I}_W(a+1) - h^0 \mathcal{I}_V(a+1)) \\ &= a^2 + 3a - 5 \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu. Aucun cas d'initialisation supplémentaire n'apparaît.

- Cas $s \geq 2$ et $r \geq 3$: Ce cas est un peu plus difficile, puisque les deux composantes irréductibles cohabitent. On va donc faire le calcul pour chacune d'entre elles.

1. Pour $H_{d,a-1}$: Le sous-ensemble de $H_{d,a-1}$ formé des éléments admettant une résolution graduée sans répétition est un ouvert non vide, dont on fixe un élément V . La seule résolution numérique possible pour V est alors :

- $(a+1)^{r-s-4}, (a+2)^{s+1} \longrightarrow a-1, a^{r-3}$, si $r-s-4 \geq 0$. Le théorème 96 permet alors de lier V à un ensemble W par $a \times a$. L'ensemble ainsi obtenu admet comme résolution numérique :

$$a^{r-3}, a+1 \longrightarrow (a-2)^{s+1}, (a-1)^{r-s-4}, a^2,$$

et appartient donc à $H_{d',a-2}$, où d' vérifie $\binom{a-1}{2} + 1 \leq d' \leq \binom{a}{2} - 2$, $a' = a - 2$, $s' = r - 2$, et $r' = s$. On vient de montrer

qu'il existe une partie dense de $H_{d,a-1}$ dont tout élément peut être algébriquement lié à par $a \times a$ à un élément de $H_{d',a-2}$. On montre de même la réciproque, à savoir qu'il existe une partie dense de $H_{d',a-2}$ dont tout élément peut être lié par $a \times a$ à un élément de $H_{d,a-1}$. Ceci permet d'utiliser la proposition 103, ainsi que l'hypothèse de récurrence, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\dim H_{d,a-1} &= \dim H_{d',a-2} + 2(h^0 \mathcal{I}_W(a) - h^0 \mathcal{I}_V(a)) \\
&= 2d' - r' - 1 + 2(2r + 3s - 1 - r) \\
&= 2(a^2 - d) - s - 1 + 2r + 6s - 2 \\
&= 2a^2 - 2d + 2r + 5s - 3 \\
&= 2d - s - 1
\end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

- $(a+2)^{s+1} \longrightarrow a-1, a^{r-3}, (a+1)^{s+4-r}$, si $r-s-4 < 0$. Le théorème 96 permet alors de lier V à un ensemble W par $a \times (a+1)$. L'ensemble ainsi obtenu admet comme résolution numérique :

$$a^{s+4-r}, (a+1)^{r-3}, a+2 \longrightarrow (a-1)^{s+1}, a, a+1,$$

et appartient donc à $H_{d',a-1}$, où d' vérifie $\binom{a}{2} + 2 \leq d' \leq \binom{a+1}{2} - 2$, $a' = a-1$, $s' = r-1$, et $r' = s$. On conclut alors de la même manière que pour les cas ci-dessus.

2. Pour $H_{d,a}$: Le sous-ensemble de $H_{d,a}$ formé des éléments admettant une résolution graduée sans répétition est un ouvert non vide, dont on fixe un élément V . La seule résolution numérique possible pour V est alors :

- $(a+2)^{s-3}, a+3 \longrightarrow a^{r+1}, (a+1)^{s-r-2}$, si $s-r-2 \geq 0$. Le théorème 96 permet alors de lier V à un ensemble W par $a \times (a+1)$. L'ensemble ainsi obtenu admet comme résolution numérique :

$$a^{s-r-2}, (a+1)^{r+1} \longrightarrow a-2, (a-1)^{s-3}, a, a+1,$$

et appartient donc à $H_{d',a-2}$, où d' vérifie $\binom{a}{2} + 2 \leq d' \leq \binom{a+1}{2} - 2$, $a' = a-1$, $s' = r-1$, et $r' = s$. On conclut de la même manière qu'avant.

- $(a+1)^{r+2-s}, (a+2)^{s-3}, a+3 \longrightarrow a^{r+1}$, si $s-r-2 < 0$ et $s \neq 2$. Le théorème 96 permet alors de lier V à un ensemble W par $a \times a$. L'ensemble ainsi obtenu admet comme résolution numérique :

$$a^{r+1} \longrightarrow a-3, (a-2)^{s-3}, (a-1)^{r+2-s}, a^2,$$

et appartient donc à $H_{d',a-3}$, où d' vérifie $\binom{a-1}{2} + 1 \leq d' \leq \binom{a}{2} - 2$, $a' = a - 2$, $s' = r - 2$, et $r' = s$. On conclut de la même manière qu'avant.

- $(a+1)^r, a+3 \longrightarrow a^{r+1}, a+2$, si $s = 2$. Le théorème 96 permet alors de lier V à un ensemble W par $a \times (a+2)$. L'ensemble ainsi obtenu admet comme résolution numérique :

$$a, (a+2)^{r+1} \longrightarrow a-1, a, (a+1)^r, a+2,$$

et appartient donc à $H_{d',a-1}$, avec $d' = d+a-4$, $a' = a$, et $r' = 3$. On ne peut pas conclure directement, car d' est strictement supérieur à d d'après l'hypothèse d « assez grand ». Il faut donc effectuer une autre liaison. On fixe alors un élément W de $H_{d',a-1}$ admettant une résolution graduée sans répétition. La seule résolution numérique possible pour W est :

$$(a+2)^r \longrightarrow a-1, (a+1)^r.$$

Le théorème 96 permet alors de lier W à un ensemble Z par $a \times (a+1)$. L'ensemble ainsi obtenu admet comme résolution numérique :

$$a^r, a+2 \longrightarrow (a-1)^r, a, a+1,$$

et appartient donc à $H_{d'',a-1}$, avec $d'' = d-a < d$, $a'' = a-1$, et $s'' = 2$. On conclut encore une fois de la même façon.

Il reste alors à traiter les cas d'initialisation, pour lesquels on verra qu'on peut se ramener au cas générique (en une ou plusieurs liaisons).

- Cas $d = 3$: La résolution numérique correspondante est :

$$4 \longrightarrow 1, 3,$$

et une liaison 1×5 permet de se ramener au cas de 2 points (qui sont forcément génériques).

- Cas $d = 5$: La résolution numérique correspondante est :

$$3, 5 \longrightarrow 2^2, 4,$$

et une liaison 2×4 permet de se ramener à 3 points de spécialité 1.

- Cas $d = 6$: La résolution numérique correspondante est :

$$5 \longrightarrow 2, 3,$$

et une liaison 3×3 permet de se ramener à 3 points de spécialité 1.

- Cas $d = 7$: La résolution numérique correspondante est :

$$5^2 \longrightarrow 2, 4^2,$$

et une liaison 4×4 permet de se ramener à 9 points de spécialité 1 (voir ci-dessous).

- Cas $d = 8$: La résolution numérique correspondante est :

$$4^2, 6 \longrightarrow 3^3, 5,$$

et une liaison 3×5 permet de se ramener à 7 points de spécialité 1, cas qui a déjà été traité.

- Cas $d = 9$: La résolution numérique correspondante est :

$$6 \longrightarrow 3^2,$$

et une liaison 3×4 permet de se ramener à 3 points de spécialité 1, qui a été étudié plus haut.

- Cas $d = 10$: La résolution numérique correspondante est :

$$5, 6 \longrightarrow 3, 4^2,$$

et une liaison 3×4 permet de se ramener à 2 points génériques.

- Cas $d = 11$: La résolution numérique correspondante est :

$$6^2 \longrightarrow 3, 4, 5,$$

et une liaison 4×5 permet de se ramener à 9 points de spécialité 1, pour lequel on verra plus haut.

- Cas $d = 13$: La résolution numérique correspondante est :

$$5, 7 \longrightarrow 4^3,$$

et une liaison 4×4 permet de se ramener à 3 points de spécialité 1, déjà traité.

- Cas $d = 14$: La résolution numérique correspondante est :

$$6, 7 \longrightarrow 4^2, 5,$$

et une liaison 4×5 permet de se ramener à 6 points de spécialité 1.

Ceci achève la preuve du théorème.

□

Remarque 104. En adaptant la technique de schéma d'incidence utilisée dans cette preuve, et toujours par récurrence, on peut obtenir une autre preuve du théorème 95.

Bibliographie

- [Dem97] M. DEMAZURE : *Cours d'algèbre*. Cassini, 1997.
- [DGO85] E. DAVIS, A. GERAMITA et F. ORECCHIA : Gorenstein algebras and the Cayley-Bacharach Theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 93: 593 – 597, 1985.
- [Ell75] G. ELLINGSRUD : Sur le schéma de Hilbert des variétés de codimension 2 dans \mathbb{P}^e à cône de Cohen-Macaulay. *Annales scientifiques de l'É.N.S.*, 8(4): 423 – 431, 1975.
- [GLS05] L. GOLD, J. LITTLE et H. SCHANCK : Cayley-Bacharach and evaluation codes on complete intersections. *J. Pure Appl. Algebra*, 196: 91–99, 2005.
- [Gro57] A. GROTHENDIECK : Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math.*, 9: 119 – 221, 1957.
- [Han94] J.P. HANSEN : Points in Uniform Position and Maximum Distance Separable Codes. *Zero-Dimensional Schemes, Proceedings of the International Conference held in Ravello - June 8-13*, pages 205 – 211, 1994.
- [Har77] R. HARTSHORNE : *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1977.
- [Mat70] H. MATSUMURA : *Commutative algebra*. Benjamin Co., 1970.
- [MDP90] M. MARTIN-DESCHAMPS et D. PERRIN : *Sur la classification des courbes gauches*. Astérisque, 1990.
- [Per] D. PERRIN : Projet de livre de géométrie projective. Disponible sur http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Livre_de_geometrie_projective.html.
- [Per95] D. PERRIN : *Géométrie algébrique : une introduction*. CNRS Editions, 1995.
- [Per96] D. PERRIN : Sections planes des courbes gauches, 1996. Disponible sur http://www.math.u-psud.fr/~perrin/Divers_recherche.html.

- [PS74] C. PESKINE et L. SZPIRO : Liaison des variétés algébriques. *Inventiones Mathematicae*, 26: 271 – 302, 1974.
- [Ser65] J.-P. SERRE : *Algèbre Locale - Multiplicités*. Springer-Verlag, 1965.

Index

- Catégorie abélienne, 5
- Complexe
 - cohomologique, 5
 - homologique, 5
 - de Koszul, 6
- Dualité de Serre, 12
- Faisceau, 6
 - cohérent, 8
 - de modules, 7
 - décalé, 8
 - dual, 11
 - noyau, 7
 - quasi-cohérent, 8
- Foncteur des sections globales, 10
- Foncteurs
 - de cohomologie, 10
 - dérivés à droite, 9
 - Ext, 11
- Généricité, 22
- Intersection complète, 13
- Liaison algébrique, 15
- Morphismes de connexion, 10
- Pas élémentaire, 43
- Préfaisceau, 6
- Répétition, 31
- Résolution
 - graduée, 30
 - numérique, 30
 - virtuelle, 32
- Schéma d'incidence, 44
- Spécialité, 33