

Quaternions, homotopie et revêtements

Daniel PERRIN

Introduction

Ce texte reprend le thème d'un TER (Travail d'Étude et de Recherche de maîtrise) plusieurs fois posé à Orsay. Je me suis notamment appuyé sur les rédactions de Lucie Beaudut et Maxime Sébille que je remercie vivement. Une excellente référence sur ces questions est le petit livre de Gramain [4]. Voir aussi [3] et [5].

1 Rappels sur le corps des quaternions

On rappelle très brièvement ici les résultats sur le corps des quaternions que l'on peut trouver dans [6].

1.1 De l'algèbre

On note \mathbf{H} le corps des quaternions. Il s'agit d'un corps non commutatif qui est un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension 4, muni d'une base $1, i, j, k$ où 1 est l'élément neutre pour la multiplication et où les autres vérifient les égalités $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ et $ki = -ik = j$. Un quaternion s'écrit donc $q = a + bi + cj + dk$ avec $a, b, c, d \in \mathbf{R}$. Le centre de \mathbf{H} est égal à \mathbf{R} .

Ce corps est muni d'un anti-automorphisme $q \mapsto \bar{q}$ donné par $\bar{q} = a - bi - cj - dk$. On dit que \bar{q} est le **conjugué** de q et on appelle **norme** de q la quantité $N(q) = q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, c'est un réel positif ou nul. L'inverse de q est $q^{-1} = \bar{q}/N(q)$. L'application $q \mapsto N(q)$ est une forme quadratique définie positive. Elle induit un homomorphisme $N : \mathbf{H}^* \rightarrow \mathbf{R}^{+*}$ surjectif, dont le noyau G est appelé groupe des quaternions de norme 1. Topologiquement, G est la sphère de dimension 3 de \mathbf{R}^4 . On note P l'espace des quaternions purs, espace vectoriel engendré par i, j, k .

On a le théorème suivant :

1.1 Théorème. *Le groupe G opère sur P par conjugaison : $g.q = gqg^{-1} = gq\bar{g}$. Cette opération induit un homomorphisme surjectif et continu $S : G \rightarrow O^+(P, N) \simeq O^+(3, \mathbf{R})$, de noyau $\{1, -1\}$.*

1.2 Remarque. La topologie de G est induite par celle de \mathbf{R}^4 , celle de $O^+(3, \mathbf{R})$ est induite par celle de $\mathbf{M}(3, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^9$. L'application S est polynomiale en les coordonnées des quaternions, donc continue.

L'étude topologique de cet isomorphisme constitue l'essentiel de ce TER.
On en déduit de 1.1 le théorème de structure de $O^+(4, \mathbf{R})$ (voir [6]) :

1.3 Théorème. *On a un isomorphisme $(G \times G) / \{(1, 1); (-1, -1)\} \rightarrow O^+(\mathbf{H}, N) \simeq O^+(4, \mathbf{R})$.*

Mais nous n'utiliserons pas ce résultat.

1.2 Un premier résultat topologique

Nous allons montrer que l'espace $O^+(3, \mathbf{R})$ est homéomorphe à l'espace projectif $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$.

1.2.1 Rappels sur la topologie quotient

1.4 Proposition-Définition. *Soient X un espace topologique, \mathcal{R} une relation d'équivalence sur X , $Y = X/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient et $p : X \rightarrow Y$ la projection canonique. On définit une topologie sur Y en imposant qu'un sous-ensemble $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $p^{-1}(U)$ est ouvert dans X . L'application p est alors continue et si $f : X \rightarrow Z$ est continue et compatible avec \mathcal{R} (i.e. si $x\mathcal{R}y$ alors $f(x) = f(y)$), f se factorise par Y , (i.e. il existe $\bar{f} : Y \rightarrow Z$ unique, continue et telle que $\bar{f} \circ p = f$).*

Démonstration. C'est une vérification triviale.

1.5 Définition. *Soit \mathbf{S}^n la sphère unité de \mathbf{R}^{n+1} et \mathcal{R} la relation d'antipodie ($x\mathcal{R}y \iff y = \pm x$). L'espace quotient (muni de la topologie quotient) est appelé **espace projectif de dimension n** et noté $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$.*

1.6 Proposition. *L'espace projectif, muni de la topologie quotient de celle de la sphère, est connexe et compact.*

Démonstration. Comme il est image continue de la sphère, il suffit de voir qu'il est séparé et pour cela il suffit de l'envoyer par une application continue injective¹ dans un espace séparé. C'est chose faite avec le lemme suivant :

1.7 Lemme. *L'application $u : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{R}^N$, avec $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, définie par $f(x_0, \dots, x_n) = (x_0^2, \dots, x_n^2, x_0x_1, \dots, x_{n-1}x_n)$ induit une application continue injective $\bar{u} : \mathbf{P}^n(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}^N$.*

1. Il n'y a pas besoin que l'espace soit homéomorphe à son image.

Démonstration. L'existence de \bar{u} et sa continuité sont claires. Pour l'injectivité, si $u(x) = u(y)$ on a, avec les x_i^2 , $x_i = \epsilon_i y_i$ avec $\epsilon_i = \pm 1$ et le fait que $\epsilon_i = \epsilon_j$ (pour x_i, x_j non nuls) se voit avec $x_i x_j = y_i y_j$.

1.8 Corollaire. *La projection canonique $p : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est ouverte et fermée.*

Démonstration. Qu'elle soit fermée résulte de la compacité des deux espaces. Si U est un ouvert de \mathbf{S}^n , on a $p^{-1}(p(U)) = U \cup (-U)$ et, comme $-U$ est ouvert, $p^{-1}(p(U))$ est ouvert, ce qui prouve que $p(U)$ l'est par définition de la topologie quotient.

1.2.2 Le cas des quaternions

1.9 Théorème. *L'application $S : G \rightarrow O^+(3, \mathbf{R})$ induit un homéomorphisme $\bar{S} : \mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \simeq O^+(3, \mathbf{R})$.*

Démonstration. On sait que G n'est autre que \mathbf{S}^3 . Comme le noyau de S est $\{\pm 1\}$ et que S est un homomorphisme, l'application S est compatible avec l'antipodie. On a donc une factorisation $\bar{S} : \mathbf{P}^3(\mathbf{R}) \rightarrow O^+(3, \mathbf{R})$. Comme S est surjective, \bar{S} l'est aussi. Comme le noyau est exactement $\{\pm 1\}$, \bar{S} est aussi injective, donc une bijection. Comme $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$ est compact, on en déduit que \bar{S} est un homéomorphisme.

2 Lacets, homotopies, espaces simplement connexes

2.1 Introduction

La problématique de ce qui suit, et qui relève de ce qu'on appelle la topologie algébrique, est la suivante (voir [3] ou [5]). Si X et Y sont deux espaces topologiques, un **homéomorphisme** est une bijection $f : X \rightarrow Y$ qui est continue ainsi que son application réciproque. Une question essentielle en topologie est de décider si deux espaces sont homéomorphes ou non. Une première condition pour que X, Y soient homéomorphes est qu'ils aient les mêmes propriétés topologiques, par exemple, si l'un est compact (resp. connexe), l'autre doit l'être aussi², ainsi \mathbf{R} et $[0, 1]$ ne sont certes pas

2. Attention à bien distinguer les propriétés topologiques, celles qui sont invariantes par homéomorphismes, de celles qui ne le sont pas. Ainsi, le fait d'être complet n'est pas une propriété de la topologie, mais de la structure uniforme, la meilleure preuve en étant que \mathbf{R} , qui est complet, est homéomorphe à $] - 1, 1[$, qui ne l'est pas.

homéomorphes. On peut quelquefois conclure juste avec de tels arguments, par exemple \mathbf{R} et \mathbf{R}^n pour $n \geq 2$ ne sont pas homéomorphes. En effet, s'ils l'étaient par une application f , par restriction $\mathbf{R} - \{a\}$ et $\mathbf{R}^n - \{f(a)\}$ le seraient aussi, or le second est connexe et pas le premier. Mais, dès qu'on se pose la question de l'homéomorphisme de \mathbf{R}^p et \mathbf{R}^q avec $2 \leq p < q$, les choses deviennent difficiles. L'argument analogue fonctionne, mais plus aussi bien. Supposons qu'on ait un homéomorphisme $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$. Soit Γ un cercle de \mathbf{R}^3 et $\Gamma' = f(\Gamma) \subset \mathbf{R}^2$. Intuitivement, on conclut en notant que $\mathbf{R}^3 - \Gamma$ est connexe, mais pas $\mathbf{R}^2 - \Gamma'$ (car Γ' est une courbe fermée et que donc (?) son complémentaire a deux composantes connexes). C'est vrai, mais il s'agit d'un très difficile théorème de Jordan! Il y a cependant une autre voie, qui consiste à utiliser seulement les espaces privés d'un point, voir 2.17, mais on a besoin d'une notion plus sophistiquée que la connexité, ce qu'on appelle la simple connexité, et qui consiste à étudier les déformations des chemins. C'est l'objet de ce qui suit.

2.2 Définitions

Dans ce paragraphe, on désigne par X un espace topologique et par a un point de X . On note I le segment $[0, 1]$. La première chose est de définir chemins et lacets :

2.1 Définition. 1) On appelle **chemin** une application continue $\gamma : I \rightarrow X$. On dit que γ va de $\gamma(0)$ à $\gamma(1)$, et que $\gamma(0)$ (resp. $\gamma(1)$) est l'origine (resp. l'extrémité) du chemin.

2) Un **lacet** de base a est un chemin fermé, c'est-à-dire d'origine et d'extrémité a (i.e. qui vérifie $\gamma(0) = \gamma(1) = a$).

3) Le lacet trivial (ou nul) est le lacet donné par $\gamma(t) = a$, pour tout $t \in I$.

4) L'inverse du chemin γ est le chemin γ^{-1} donné par $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t)$. Il va de $\gamma(1)$ à $\gamma(0)$.

5) Soient γ et δ deux chemins tel que $\gamma(1) = \delta(0)$. Le chemin composé³ $\alpha = \gamma \vee \delta$ est le chemin qui parcourt γ , puis δ . Il est défini par la formule suivante :

$$(\gamma \vee \delta)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

On note $\mathcal{L}(X, a)$ l'ensemble des lacets de base a de X .

Le point suivant est de définir les homotopies, ou déformations des chemins :

3. On appelle parfois *concaténation* l'opération $(\gamma, \delta) \mapsto \gamma \vee \delta$.

2.2 Définition. Deux chemins γ et δ tels que $\gamma(0) = \delta(0) := a$ et $\gamma(1) = \delta(1) := b$ sont dits **homotopes** à extrémités fixées s'il existe une application continue $H : I \times I \rightarrow X$ telle que :

- 1) On a $H(0, t) = \gamma(t)$ pour tout $t \in I$.
- 2) On a $H(1, t) = \delta(t)$ pour tout $t \in I$.
- 3) On a $H(s, 0) = a$ et $H(s, 1) = b$ pour tout $s \in I$.

On note alors $\gamma \sim \delta$. Le cas des lacets de base a correspond au cas $a = b$ et on parle alors d'homotopie de lacets.

2.3 Commentaire. Si l'on pose $\gamma_s(t) = H(s, t)$, la famille des γ_s est une famille de chemins joignant tous a à b qui constitue une déformation continue allant de $\gamma_0 = \gamma$ à $\gamma_1 = \delta$.

2.4 Exemple. L'application $H : I \times I \rightarrow \mathbf{R}^2$ définie par $H(s, t) = (\cos \pi t, s \sin \pi t)$ est une homotopie de chemins allant de $a = (1, 0)$ à $b = (-1, 0)$ où le chemin initial γ_0 est le segment $[ab]$ et où le chemin terminal γ_1 est le demi-cercle de diamètre $[ab]$.

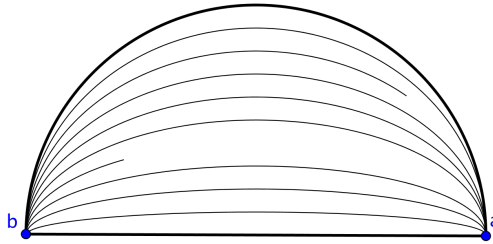


FIGURE 1 – Un exemple d'homotopie

2.3 Premiers résultats

Rappelons d'abord un lemme facile de topologie :

2.5 Lemme. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application et A et B deux fermés de X tel que $X = A \cup B$. Si $f|_A$ et $f|_B$ sont continues, alors f est continue sur X .

2.6 Proposition. La relation d'homotopie (à la fois dans le cas des extrémités fixée et dans le cas des lacets de base a) est une relation d'équivalence.

Démonstration. Si γ est un chemin, on voit qu'il est homotope à lui-même en posant $H(s, t) = \gamma(t)$ pour tout s . Si on a une homotopie H qui va de γ à δ , l'application $H'(s, t) = H(1 - s, t)$ est une homotopie de δ à γ .

Soient α, β, γ des chemins de mêmes extrémités, munis d'homotopies H de α à β et K de β à γ . Alors on a une homotopie L de α à γ en posant :

$$L(s, t) = \begin{cases} H(2s, t) & \text{si } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(2s - 1, t) & \text{si } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La continuité résulte de 2.5.

On peut maintenant définir le groupe fondamental :

2.7 Proposition-Définition. On note $\pi_1(X, a)$ l'ensemble quotient de $\mathcal{L}(X, a)$ par la relation d'homotopie. L'application de composition induit une loi de composition sur $\pi_1(X, a)$ qui en fait un groupe appelé **groupe fondamental** de X , de base a . L'élément neutre de ce groupe est la classe du lacet constant, l'inverse de (la classe de) γ est (la classe de) γ^{-1} .

Démonstration. La compatibilité de la relation d'équivalence avec la composition résulte du lemme suivant :

2.8 Lemme. Soient $\gamma, \gamma', \delta, \delta'$ des lacets de base a . On suppose qu'on a $\gamma \sim \gamma'$ et $\delta \sim \delta'$. Alors on a $\gamma \vee \delta \sim \gamma' \vee \delta'$.

Démonstration. Appelons H et K les homotopies qui joignent γ, γ' et δ, δ' . Alors, l'homotopie qui joint les composés est :

$$L(s, t) = \begin{cases} H(s, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ K(s, 2t - 1) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

2.9 Remarque. On montre de la même manière que si γ, γ' sont des chemins homotopes de a à b et δ, δ' des chemins homotopes de b à c , $\gamma \vee \delta$ et $\gamma' \vee \delta'$ sont homotopes de a à c .

Pour l'assertion concernant l'inverse on a un autre lemme :

2.10 Lemme. Soit γ un lacet de base a . Alors $\gamma \vee \gamma^{-1}$ est homotope au lacet constant de base a .

Démonstration. L'homotopie H qui fait le travail est la suivante :

$$H(s, t) = \begin{cases} \gamma((1-s)2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma((1-s)(2-2t)) & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

2.11 Remarque. Si X est connexe par arcs, les groupes fondamentaux relatifs à deux points de base a et b sont isomorphes. En effet, soit δ un chemin de a à b , si γ est un lacet de base a on lui associe le lacet $\delta \vee \gamma \vee \delta^{-1}$ qui est de base b (le lecteur écrira les détails). Cela justifie la définition suivante :

2.12 Définition. Soit X un espace topologique connexe par arcs. On dit que X est **simplement connexe** si tout lacet de X est homotope au lacet trivial ou encore si le groupe fondamental $\pi_1(X, a)$ est réduit à l'élément neutre.

2.13 Exemples. 1) Si X est simplement connexe et si γ, δ sont des chemins allant de a à b , ils sont homotopes. En effet, le lacet $\delta^{-1} \vee \gamma$ est homotope à 0, donc $\delta \vee (\delta^{-1} \vee \gamma) \sim (\delta \vee \delta^{-1}) \vee \gamma$ est homotope à la fois à γ et δ .

2) Toute partie X convexe de \mathbf{R}^n est simplement connexe. En effet, si γ est un lacet de base $a \in X$, l'application H définie par $H(s, t) = sa + (1 - s)\gamma(t)$ est une homotopie joignant γ au lacet trivial.

3) Le plan privé d'un point x_0 n'est pas simplement connexe. Ce résultat nécessite la notion d'indice d'un lacet par rapport à un point x_0 , noté $I(\gamma, x_0)$ (voir [2]) qui donne un sens précis au nombre de tours que fait γ autour de x_0 (dans le sens trigonométrique). En identifiant le plan \mathbf{R}^2 au plan complexe \mathbf{C} , l'indice est défini par la formule :

$$I(\gamma, x_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - x_0}.$$

On montre que cet indice est nul pour le lacet trivial, qu'il vaut 1 pour un cercle parcouru une seule fois dans le sens trigonométrique et qu'il est constant dans une homotopie, ce qui permet de conclure. On peut aussi préciser que l'application $\gamma \mapsto I(\gamma, x_0)$ définit un isomorphisme du groupe $\pi_1(\mathbf{R}^2 - \{x_0\}, a)$ sur le groupe $(\mathbf{Z}, +)$.

4) De la même manière, le cercle n'est pas simplement connexe et son groupe fondamental est isomorphe à \mathbf{Z} .

2.4 La simple connexité de la sphère

Le but de ce paragraphe est de prouver que \mathbf{S}^n , sphère unité de l'espace \mathbf{R}^{n+1} , est simplement connexe dès que n est ≥ 2 :

2.14 Théorème. On pose $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$. Pour $n \geq 2$ la sphère \mathbf{S}^n est simplement connexe.

Démonstration. Nous aurons besoin de deux lemmes :

2.15 Lemme. Pour tout $n \geq 0$ la sphère \mathbf{S}^n privée d'un point est homéomorphe à \mathbf{R}^n .

Démonstration. On utilise la projection stéréographique. On peut supposer que le point enlevé à la sphère est $s := (1, 0, \dots, 0, 0)$. On définit une application p de $\mathbf{S}^n - \{s\}$ dans \mathbf{R}^n en associant à un point x le point où

la droite (sx) coupe le plan $x_0 = 0$. Précisément, un calcul facile donne $p(x_0, x_1, \dots, x_n) = (\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_n}{1-x_0})$, qui est continue car $x_0 \neq 1$. Si l'on pose $y = p(x)$ on a $\|y\|^2 = \frac{1+x_0}{1-x_0}$ que l'on inverse en $x_0 = \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1}$ et qui donne l'application inverse de p en posant $x_i = \frac{2y_i}{1 + \|y\|^2}$ pour $i \geq 1$.

Rappelons qu'un cercle tracé sur \mathbf{S}_n est la trace d'un plan (i.e. un sous-espace affine de dimension 2) sur \mathbf{S}^n . On a alors le lemme suivant :

2.16 Lemme. *On suppose $n \geq 2$. La sphère \mathbf{S}^n n'est pas une réunion finie de cercles.*

Démonstration. Supposons que \mathbf{S}^n soit réunion des cercles C_1, \dots, C_r , de plans P_1, \dots, P_r . Si P est un plan passant par le centre de la sphère et distinct des P_i (il en existe car il y a une infinité de plans passant par l'origine), $P \cap P_i$ est une droite qui coupe la sphère en au plus deux points. Comme P coupe la sphère selon un grand cercle, il y a des points de $P \cap \mathbf{S}^2$ qui ne sont pas dans les C_i .

Venons-en au théorème. Soit γ un lacet de \mathbf{S}^n de base a . Si l'application $\gamma : I \rightarrow \mathbf{S}^n$ n'est pas surjective, il existe un point s qui n'est pas dans l'image. On effectue alors la projection stéréographique de pôle s et $p \circ \gamma$ est un lacet de \mathbf{R}^n , donc homotope à un point. En composant cette homotopie avec p^{-1} on voit que γ est homotope à un point.

Si γ est surjective⁴ on découpe γ en des chemins γ_i ($i = 1, \dots, r$) non surjectifs. Précisément, comme γ est uniformément continue, si l'on choisit r assez grand, l'image $\gamma([\frac{i}{r}, \frac{i+1}{r}])$, qui est un chemin γ_i d'extrémités x_i, x_{i+1} , est de diamètre < 1 donc est contenue dans la demi-sphère \mathbf{S}^+ définie par le plan perpendiculaire à x_i . Il existe alors un arc de (grand) cercle δ_i contenu dans \mathbf{S}^+ qui joint x_i à x_{i+1} et on considère $\delta = \delta_1 \vee \dots \vee \delta_r$. Comme γ_i et δ_i sont contenus dans \mathbf{S}^+ , donc ne recouvrent pas la sphère, ils sont homotopes à extrémités fixes et, par composition, γ et δ sont homotopes. Mais, par 2.16, δ n'est pas surjectif, donc est homotope à 0 et aussi γ .

2.17 Corollaire. *Soit n un entier ≥ 3 .*

- 1) *L'espace $\mathbf{R}^n - \{a\}$ est simplement connexe.*
- 2) *L'espace \mathbf{R}^2 n'est homéomorphe à aucun des \mathbf{R}^n pour $n \geq 3$.*

Démonstration. 1) On peut supposer que a est l'origine de \mathbf{R}^n . Soit b un point base quelconque de $\mathbf{R}^n - \{a\}$ et \mathbf{S}^{n-1} la sphère de centre a passant par b . Soit γ un lacet de $\mathbf{R}^n - \{a\}$ de base b . Il est homotope à un lacet δ de \mathbf{S}^{n-1}

4. Cela peut arriver, il y a des courbes de type Peano qui recouvrent toute la sphère.

de base b par l'homotopie⁵ $H(s, t) = (1 - s)\gamma(t) + s\frac{\gamma(t)}{\|\gamma(t)\|}$. Mais comme \mathbf{S}^{n-1} est simplement connexe, δ est homotope à un point dans \mathbf{S}^n donc aussi dans $\mathbf{R}^n - \{a\}$ et on a le résultat.

2) Si \mathbf{R}^2 et \mathbf{R}^n étaient homéomorphes par f , $\mathbf{R}^2 - \{a\}$ et $\mathbf{R}^n - \{f(a)\}$ le seraient aussi, or le second est simplement connexe et pas le premier.

2.18 Remarque. Que le lecteur angoissé se rassure, les espaces \mathbf{R}^p et \mathbf{R}^q ne sont jamais homéomorphes lorsque p est différent de q , mais pour $p, q \geq 3$ on a besoin d'autres invariants que le π_1 , soit les groupes π_n d'homotopie supérieurs, soit les groupes d'homologie H_n . Voir [3], [5] ou [7], par exemple.

2.5 Le théorème de Van Kampen

C'est un résultat plus général qui permet de retrouver le théorème 2.14 :

2.19 Théorème. *Soit X un espace topologique. On suppose que X est réunion de deux ouverts U, V simplement connexes dont l'intersection est connexe par arcs. Alors X est simplement connexe.*

Démonstration. On utilise le "nombre de Lebesgue" d'un recouvrement :

2.20 Lemme. *Soit X un espace métrique compact et $(U_j)_{j \in J}$ un recouvrement ouvert de X . Il existe un réel $r > 0$ tel que toute boule de rayon r de X est contenue dans au moins un ouvert du recouvrement.*

Démonstration. On note d la distance et $B(a, r)$ la boule de centre a et de rayon r . On raisonne par l'absurde. Si la propriété n'est pas vraie, pour tout $r_n = 1/n$ il existe $a_n \in X$ tel que $B(a_n, 1/n)$ ne soit contenue dans aucun ouvert du recouvrement. Comme X est compact, quitte à extraire une sous-suite de (a_n) on peut supposer qu'elle converge vers a . Mais alors, a est dans l'un des U_j qui contient aussi une boule $B(a, R)$ avec $R > 0$. On choisit k tel que $2/k < R$. Comme (a_n) converge vers a , il existe k tel que $d(a, a_k) < 1/k$. Mais alors $B(a_k, 1/k)$ est contenue dans $B(a, R)$ donc dans U_j et c'est absurde.

On peut maintenant prouver le théorème. Soit a un point de $U \cap V$ et γ un lacet de base a . On applique le lemme au recouvrement $U \cup V$. Il existe r tel que toute boule de rayon r de X soit contenue dans U ou dans V . Comme γ est uniformément continu, il existe n tel que, pour tout $k = 1, \dots, n$, l'image de l'intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$ soit contenue dans une boule de rayon r donc dans U ou dans V . Soit γ_k , pour $k = 1, \dots, n$, la restriction de γ à $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. On a donc

5. On dit que la sphère est un *retracte* de l'espace privé d'un point.

$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2 \vee \dots \vee \gamma_n$. Comme U et V sont connexes par arcs, on peut joindre a à $x_k := \gamma(\frac{k}{n})$ par un chemin δ_k ($k = 1, \dots, n$) contenu dans U ou V selon que x_k est dans U ou dans V . On considère alors les lacets suivants, tous de base a : $\alpha_1 = \gamma_1 \vee \delta_1^{-1}$, $\alpha_k = \delta_{k-1} \vee \gamma_k \vee \delta_k^{-1}$ pour $k = 2, \dots, n$ et $\alpha_n = \delta_{n-1} \vee \gamma_n$. Comme chaque lacet α_k est tracé dans U ou V , et que ces ouverts sont simplement connexes, il est homotope à 0, donc aussi $\alpha_1 \vee \dots \vee \alpha_n$. Mais ce lacet est homotope à $\gamma = \gamma_1 \vee \dots \vee \gamma_n$ (les composés $\delta_k^{-1} \delta_k$ qui apparaissent sont homotopes à zéro, donc se simplifient) et on a le résultat.

2.21 Remarque. On a un résultat plus précis qui permet de calculer le π de X lorsque X est réunion de deux ouverts U, V connexes par arcs ainsi que leur intersection. Dans ce cas, si a est un point de $U \cap V$, $\pi_1(X, a)$ est la “somme amalgamée” de $\pi_1(U, a)$ et de $\pi_1(V, a)$ le long de $\pi_1(U \cap V, a)$, voir [4]. Une conséquence de ce théorème est, par exemple, que le groupe fondamental du plan privé de deux points est le groupe libre (non commutatif) à deux générateurs.

3 Revêtements et homotopie

3.1 Revêtements

3.1.1 Définition

3.1 Définition. Soient E et X deux espaces topologiques et soit $p : E \rightarrow X$ une application continue. On dit que p est un **revêtement** si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert U de x tel que l'image réciproque $p^{-1}(U)$ soit réunion **disjointe** d'ouverts U_i ($i \in I$) de E et que la restriction $p|_{U_i} : U_i \rightarrow U$ soit un homéomorphisme. On dit qu'un ouvert tel que U **trivialise** le revêtement ou que U est un ouvert **trivialisant**.

On dit que X est la **base** du revêtement, que $p^{-1}(\{x\})$ (ou par abus d'écriture $p^{-1}(x)$) pour $x \in X$ est sa **fibres** au-dessus de x et que E est l'**espace total** du revêtement.

3.2 Remarques. 1) On note qu'un revêtement est toujours une application surjective.

2) On utilise souvent la métaphore d'une “pile d'assiettes” pour décrire l'aspect d'un revêtement au-dessus d'un ouvert trivialisant. Sur un tel ouvert, le cardinal des fibres est égal au cardinal de I .

3) Le cas intéressant est celui où l'espace X est connexe. L'exemple le plus simple en ce sens est celui du cercle \mathbf{S}^1 , revêtu par \mathbf{R} au moyen de l'application $p : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}^1$ donnée par $p(t) = (\cos t, \sin t)$.

4) Si pour tous les ouverts trivialisants l'ensemble I est fini on dit que le revêtement est fini et on a la proposition suivante.

3.3 Proposition. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement fini avec X connexe. Alors le cardinal de I est indépendant de l'ouvert trivialisant. On l'appelle le **degré** du revêtement. C'est aussi le cardinal de toutes les fibres $p^{-1}(x)$ pour $x \in X$.*

Démonstration. Soit n un entier. On considère l'ensemble X_n des x dont la fibre est de cardinal n , les X_n sont disjoints. L'existence en chaque point d'un ouvert trivialisant sur lequel le cardinal des fibres est constant montre que X_n est ouvert. On en déduit la réunion des X_k , pour $k \neq n$ est ouverte elle aussi, de sorte que X_n , qui est son complémentaire, est fermé. Comme X est connexe, X_n est vide ou égal à X , de sorte que X est égal à l'un des X_n .

3.1.2 Deux propriétés des revêtements

3.4 Proposition. *Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement. On a les deux propriétés suivantes :*

1) *L'application p est un homéomorphisme local : pour tout $z \in E$, il existe des voisinages ouverts $U \subset X$ de $p(z)$ et $\Omega \subset E$ de z tels que p induise un homéomorphisme de Ω sur U .*

2) *L'application p est ouverte.*

Démonstration. 1) Il suffit de prendre pour U un ouvert trivialisant et pour Ω l'un des U_i fournis par la définition.

2) C'est une conséquence facile de 1) : tout homéomorphisme local est une application ouverte.

3.1.3 L'exemple de la sphère et du projectif

Revenons à la sphère \mathbf{S}^n et à son quotient $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$. Rappelons que ce sont des espaces compacts et connexes et que \mathbf{P}^n est le quotient de \mathbf{S}^n par antipodie. On a alors le résultat suivant :

3.5 Proposition. *L'application canonique $p : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est un revêtement de degré 2.*

Démonstration. Soit $\bar{x} \in \mathbf{P}^n$. La fibre de x est formée de deux points x et $-x$. Comme la sphère est séparée, il existe des voisinages ouverts U et V de x et $-x$ qui ne se rencontrent pas. On sait que $p(U)$ et $p(V)$ sont des ouverts de \mathbf{P}^n (voir 1.8). Soit Ω leur intersection, alors, on a $p^{-1}(\Omega) = (U \cap p^{-1}(\Omega)) \cup (V \cap p^{-1}(\Omega)) := U' \cup V'$ et on vérifie que V' est égal à $-U'$. Ces ouverts sont disjoints et, comme p est ouverte, toujours par 1.8, la restriction de p à ces ouverts est un homéomorphisme sur Ω .

3.2 Relèvement d'applications

3.2.1 Définition

3.6 Définition. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement et soit $f : T \rightarrow X$ une application continue. On dit qu'une application continue $g : T \rightarrow E$ est un relèvement de f relativement à p si elle vérifie $p \circ g = f$.

3.2.2 Unicité

Il n'existe pas de relèvement dans le cas général⁶, mais, s'il en existe il est unique, du moins lorsque T est connexe :

3.7 Proposition. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement et soit $f : T \rightarrow X$ une application continue. On suppose E séparé et T connexe. Alors, si g et h sont deux relèvements de f qui coïncident en un point, ils sont égaux.

Démonstration. On considère l'ensemble $A = \{t \in T \mid g(t) = h(t)\}$. Il est non vide par hypothèse. Comme E est séparé et g, h continues, il est clair que A est fermé. Montrons qu'il est aussi ouvert ce qui conclura grâce à la connexité de T . Soit $t \in A$, $z = g(t) = h(t)$ et $x = f(t)$. On sait que p est un homéomorphisme local : il existe des ouverts U de X contenant x et Ω de E contenant z tel que $p : \Omega \rightarrow U$ soit un homéomorphisme. Si V est l'ouvert $g^{-1}(\Omega) \cap h^{-1}(\Omega)$, il contient t et si v est dans V , $g(v)$ et $h(v)$ sont dans Ω et on a $p(g(v)) = f(v) = p(h(v))$. Mais comme p est injective sur Ω , on a $g(v) = h(v)$, donc V est inclus dans A et on a gagné.

3.8 Remarque. Désormais, lorsqu'on a un revêtement $p : E \rightarrow X$, on supposera toujours E **séparé**.

3.3 Relèvement des chemins

3.9 Théorème. Soient $p : E \rightarrow X$ un revêtement et $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin continu d'origine $\gamma(0) = x_0 \in X$. Soit z_0 un point de E qui relève $x_0 : x_0 = p(z_0)$. Alors, il existe un (unique) chemin continu $\delta : [0, 1] \rightarrow E$ qui relève γ et qui vérifie $\delta(0) = z_0$.

Démonstration. Posons $I = [0, 1]$, soit $t \in I$ et $\gamma(t)$ son image. Soit U_t un ouvert de trivialisations contenant $\gamma(t)$ et J_t un intervalle ouvert (dans I) contenant t et contenu dans $\gamma^{-1}(U_t)$. Comme I est compact, un nombre fini des J_t , pour $t = t_1, t_2, \dots, t_n$, recouvrent I . Quitte à supprimer un certain nombre d'intervalles $J_i = J_{t_i}$ on peut supposer qu'il n'y a pas d'inclusion entre eux. On a alors le lemme combinatoire suivant :

6. Il en existe si l'espace des paramètres T est simplement connexe.

3.10 Lemme. Soient J_1, J_2, \dots, J_n des intervalles, ouverts dans $[0, 1]$, recouvrant $[0, 1]$ et sans inclusions mutuelles. Quitte à réordonner les J_i , on peut supposer que J_1 contient 0 et que, pour $i = 1, \dots, n-1$, $J_i \cap J_{i+1}$ contient un point τ_i , avec $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{n-1}$.

Démonstration. (du lemme) Soient a_1, a_2, \dots, a_n les bornes inférieures des J_i . On réordonne les J_i de sorte qu'on ait $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ (c'est possible car les a_i sont distincts, sinon il y aurait des inclusions). On a alors $a_1 = 0$ (et J_1 est un intervalle semi-ouvert de \mathbf{R} , mais c'est un ouvert de $[0, 1]$). Appelons b_1, b_2, \dots, b_n les bornes supérieures des J_i (dans le nouvel ordre). Alors, on a $b_i < b_{i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$ (sinon il y aurait une inclusion entre les J_i). On a aussi $a_{i+1} < b_i$ (sinon les points de $[b_i, a_{i+1}]$ ne seraient pas dans l'union des J_i). On choisit pour chaque i un τ_i compris entre a_{i+1} et b_i et le lemme est démontré.

Revenons au théorème. On appelle U_1, \dots, U_n les ouverts de trivialisations U_{t_i} de X qui correspondent aux intervalles $J_{t_i} : J_1, \dots, J_n$. Comme 0 est dans J_1 , le point x_0 est dans U_1 , donc z_0 dans l'un des ouverts qui constituent $p^{-1}(U_1)$, soit Ω_1 . On appelle q_1 la réciproque de $p|_{\Omega_1}$. C'est un homéomorphisme de U_1 sur Ω_1 . On définit alors δ_0 sur $[0, \tau_1]$ par la formule $\delta_0(t) = q_1(\gamma(t))$. C'est un chemin continu et on a bien $\delta_0(0) = z_0$ et $p\delta_0 = pq_1\gamma = \gamma$. On définit alors, par récurrence sur $i = 1, 2, \dots, n$, un chemin continu δ_i sur $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, tel que $p\delta_i = \gamma$ et qui vérifie $\delta_i(\tau_i) = \delta_{i-1}(\tau_i)$. Supposons la construction effectuée jusqu'à i et passons à $i + 1$. Soient $z_{i+1} = \delta_i(\tau_{i+1})$, Ω_{i+1} l'ouvert de $p^{-1}(U_{i+1})$ qui contient z_{i+1} et q_{i+1} l'inverse de $p|_{\Omega_{i+1}}$. On définit δ_{i+1} sur $[\tau_{i+1}, \tau_{i+2}]$ par $\delta_{i+1}(t) = q_{i+1}(\gamma(t))$.

On considère alors le chemin δ défini comme étant égal à δ_i sur $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Cette application est bien définie et continue car les δ_i coïncident sur les extrémités des intervalles. Elle répond aux exigences du théorème.

3.11 Remarque. **Attention**, si γ est un lacet, son relevé δ n'est pas nécessairement un lacet.

3.4 Relèvement des homotopies

On note toujours $I = [0, 1]$.

3.12 Théorème. Soient $p : E \rightarrow X$ un revêtement et $H : I^2 \rightarrow X$ une application continue. On pose $H(0, 0) = x_0$. Soit $z_0 \in E$ tel que $p(z_0) = x_0$. Alors, il existe $K : I^2 \rightarrow E$, continue (unique) telle que l'on ait $p \circ K = H$ et $K(0, 0) = z_0$.

Démonstration. Soit $x = (s, t) \in I^2$. Il existe un ouvert de trivialisatation U_x de X qui contient $H(x)$. L'ensemble $H^{-1}(U_x)$ est un ouvert de I^2 qui contient x et les ouverts $H^{-1}(U_x)$ recouvrent I^2 . Pour n assez grand, tout pavé P_{ij} de la forme $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}] \times [\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}]$, avec $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$ est contenu dans l'un au moins des ouverts du recouvrement (c'est le résultat de Lebesgue 2.20, les pavés étant des boules pour la norme *sup*).

On ordonne les couples (i, j) par ordre lexicographique et on définit par récurrence sur (α, β) l'application K sur la réunion des P_{ij} avec $(i, j) \leq (\alpha, \beta)$.

Pour $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, $H(P_{0,0})$ est contenu dans un ouvert trivialisant U_x , noté U_0 , qui contient x_0 . On note Ω_0 celui des ouverts composant $p^{-1}(U_0)$ qui contient z_0 et q_0 l'homéomorphisme de U_0 sur Ω_0 inverse local de p . On définit alors K comme $q_0 \circ H$ sur $P_{0,0}$.

Supposons la construction effectuée jusqu'au couple (α, β) et passons au suivant (α', β') . Le pavé $P_{\alpha'\beta'}$ rencontre la réunion des pavés qui le précèdent suivant un ensemble connexe⁷ non vide T (si α' ou β' est nul, il s'agit d'un segment et, sinon, de la réunion de deux segments se coupant à angle droit en un point). Par ailleurs, l'image par H de ce pavé est contenue dans un ouvert trivialisant $U_x := U_{\alpha', \beta'}$. On choisit un point (s, t) dans T , $K(s, t)$ est défini on note $\Omega_{\alpha', \beta'}$ celui des ouverts composant $p^{-1}(U_{\alpha', \beta'})$ qui le contient et $q_{\alpha', \beta'}$ l'homéomorphisme inverse local de p entre ces ouverts. On définit un relèvement K' de p sur $P_{\alpha'\beta'}$ en posant $K' = q_{\alpha', \beta'} \circ H$ et on a $K(s, t) = K'(s, t)$. Comme l'intersection T est connexe, le théorème d'unicité du relèvement (cf. 3.7), montre que K et K' coïncident sur T , de sorte qu'on a bien défini une application sur la réunion des P_{ij} pour $(i, j) \leq (\alpha', \beta')$.

La construction de K est achevée lorsque l'on a $(\alpha, \beta) = (n-1, n-1)$.

3.13 Corollaire. *Avec les notations précédentes, on suppose qu'on a, pour tout $t \in I$, $H(0, t) = H(1, t) = x_0 \in X$. Soit $z_0 \in E$ tel que $p(z_0) = x_0$. Alors, il existe $K : I^2 \rightarrow G$, continue, unique, telle que l'on ait $p \circ K = H$ et $K(0, t) = z_0$ pour tout t .*

Démonstration. L'application du résultat précédent fournit un K qui relève H . L'unicité de ce relèvement en restriction aux points $(0, t)$ montre que $K(0, t)$ est égal à z_0 pour tout t .

3.5 Revêtement et groupe fondamental

Le lien entre les notions de revêtement et de groupe fondamental est dans le théorème suivant :

7. C'est le point crucial de la preuve.

3.14 Proposition. Soit $p : E \rightarrow X$ un revêtement avec X connexe et soit a un point de X .

- 1) Le groupe fondamental $\pi_1(X, a)$ opère sur la fibre $p^{-1}(a)$.
- 2) Cette opération est transitive si et seulement si E est connexe par arcs.
- 3) Si E est simplement connexe, cette opération est fidèle.

Démonstration. 1) Soit γ un lacet de base a et soit $y \in p^{-1}(a)$. Le théorème de relèvement des chemins 3.9 assure qu'il se relève en un chemin δ de E , d'origine y . Si z est l'extrémité de δ , on définit l'opération par $\gamma.y = z$. Il faut vérifier que cette définition ne dépend que de la classe d'homotopie de γ , mais si γ' est homotope à γ , on relève l'homotopie par 3.13 et elle joint les relevés de γ et γ' . Il faut aussi vérifier qu'il s'agit bien d'une opération de groupe. Si l'on compose deux lacets de base a , γ et δ et si y est dans $p^{-1}(a)$, on relève d'abord γ en γ' d'origine y et d'extrémité z d'où $\gamma.y = z$, puis δ en δ' d'origine z et d'extrémité w , d'où $\delta.z = w$. Mais le chemin $\gamma' \vee \delta'$ relève $\gamma \vee \delta$ et, par unicité du relèvement, on a bien $(\gamma \vee \delta).y = w = \delta.(\gamma.y)$ et une opération.

2) Montrons que, si l'opération est transitive, E est connexe par arcs. La transitivité assure en tous cas que l'on peut joindre deux points y, z de $p^{-1}(a)$ par un chemin. Si u (resp. v) est un point de E qui se projette en b (resp. c), il existe un chemin de X qui va de b à a (resp. de c à a), on le relève en un chemin allant de u à un point y (resp. z) de $p^{-1}(a)$ et, comme on sait joindre y et z , on sait aussi joindre u et v .

Inversement, si E est connexe, on considère $y, z \in p^{-1}(a)$ et un chemin δ qui les joint. Son image par p est un lacet γ de X , de base a dont δ est un relevé et on a $\gamma.y = z$ en vertu de l'unicité du relèvement.

3) Supposons maintenant E simplement connexe. Dire que le lacet γ opère trivialement sur $p^{-1}(a)$ signifie que le chemin δ d'origine b qui relève γ est un lacet. Mais, comme E est simplement connexe, δ est homotope à un point dans E donc aussi γ en composant l'homotopie par p , de sorte que γ est trivial dans le groupe fondamental $\pi_1(X, a)$.

4 Le groupe fondamental de l'espace projectif

4.1 Théorème. Pour $n \geq 2$, le groupe fondamental de l'espace projectif $\mathbf{P}^n(\mathbf{R})$ est le groupe $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Démonstration. On considère le revêtement de degré 2 du projectif par la sphère $p : \mathbf{S}^n \rightarrow \mathbf{P}^n$. Les fibres de p sont de cardinal 2. Comme \mathbf{P}^n est

connexe, le groupe $\pi_1(\mathbf{P}^n, a)$ opère transitivement sur la fibre $p^{-1}(a) := F$, donc est de cardinal ≥ 2 . Comme la sphère est simplement connexe il opère fidèlement sur F donc il s'injecte dans $\mathfrak{S}(F)$ qui est de cardinal 2. Le groupe fondamental est donc de cardinal 2, donc isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

On peut préciser la relation d'homotopie sur \mathbf{P}^n :

4.2 Corollaire. *Soient a un point de \mathbf{P}^n , $y \in \mathbf{S}^n$ tel que $p(y) = a$ et $-y$ son antipode. Les deux classes d'homotopie de lacets de base a de \mathbf{P}^n sont caractérisées de la manière suivante :*

1) *Les lacets de la classe neutre sont ceux qui se relèvent en des lacets de base y .*

2) *Les lacets de l'autre classe sont ceux qui se relèvent en des chemins allant de y à $-y$.*

Si γ est un lacet non homotope à zéro, son double $\gamma \vee \gamma$ est un lacet homotope à zéro.

4.3 Exemple. Comme $O^+(3, \mathbf{R})$ est homéomorphe à $\mathbf{P}^3(\mathbf{R})$, son groupe d'homotopie est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Voici un exemple de lacet γ non trivial de $O^+(3, \mathbf{R})$: on considère les rotations de \mathbf{R}^3 d'axe Oz et d'angles $2\pi t$ pour $t \in [0, 1]$ et $\gamma(t) = \rho(Oz, 2\pi t)$. On peut calculer explicitement le lacet d'origine 1 relevé de γ dans $G \subset \mathbf{H}$. Pour cela on note que, si $g = a + p$ est un élément de G avec $a \in \mathbf{R}$ et $p \in P$, la rotation s_p associée est d'axe p . On cherche donc ici un élément $g = a + dk$ avec $a^2 + d^2 = 1$ et un calcul facile montre qu'on doit avoir $a^2 - d^2 = \cos 2\pi t$ et $2ad = -\sin 2\pi t$, ce qui donne le relèvement cherché : $\delta(t) = \cos \pi t - (\sin \pi t)k$. On constate qu'on a $\delta(0) = 1$ mais $\delta(1) = -1$: le relèvement n'est pas un lacet, donc γ n'est pas homotope à 0. Pour avoir le relèvement de $\gamma \vee \gamma$ il suffit par exemple de paramétrer δ par $[0, 2\pi]$ au lieu de $[0, \pi]$ et on voit qu'on retombe sur 1, de sorte que $\gamma \vee \gamma$ est homotope à zéro.

On peut illustrer le phénomène en évoquant le “truc de l'assiette à soupe” (voir [1] 8.10.3) ou même certaines danses balinaises.

Références

- [1] Berger M. *Géométrie, tome 1*, Cassini, 2016
- [2] Cartan H. *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Hermann, 1964.
- [3] Godbillon C., *Topologie algébrique*, Hermann, collection Méthodes, 1971.
- [4] Gramain A., *Topologie des surfaces*, PUF, collection Sup, 1971.

- [5] Greenberg M., *Lectures on algebraic topology*, Benjamin, 1967.
- [6] Perrin D., *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996.
- [7] Spanier E., *Algebraic topology*, Mc Graw-Hill, 1967.