Vol. 75, No. 1 DUKE MATHEMATICAL JOURNAL © July 1994

MÉTHODE DES FIBRATIONS ET OBSTRUCTION DE MANIN

DAVID HARARI

La méthode des fibrations pour établir que certaines classes de variétés définies sur un corps de nombres k vérifient le principe de Hasse ou l'approximation faible a déjà été employée avec succès dans de nombreux cas: ses premiers exemples subtils d'application ont été introduits en 1987 par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer qui ont obtenu des résultats sur les intersections de deux quadriques et les surfaces de Châtelet [12]. On peut également citer les résultats de Colliot-Thélène et Salberger sur certains types d'hypersurfaces cubiques [9] et les divers énoncés obtenus par Skorobogatov dans [48]. Des résultats généraux sur ce sujet, ainsi que d'autres exemples d'application, sont exposés dans [3]. Le principe de ces méthodes consiste à essayer de montrer qu'une variété fibrée vérifie le principe de Hasse ou l'approximation faible dès lors que la base et les fibres ont ces mêmes propriétés.

Cependant, pour beaucoup de classes de variétés (les hypersurfaces cubiques par exemple), la conjecture raisonnable n'est pas qu'elles vérifient le principe de Hasse ou l'approximation faible mais seulement que l'obstruction de Manin à ces deux propriétés est la seule. Cette obstruction a été introduite pour le principe de Hasse par Manin en 1970 [34] et l'obstruction analogue pour l'approximation faible fut formulée vers 1976 par Colliot-Thélène et Sansuc dans trois notes aux Comptes Rendus [10]. L'obstruction de Manin a permis d'expliquer tous les contre-exemples explicites au principe de Hasse et à l'approximation faible connus à ce jour et elle apparaît de manière essentielle dans les méthodes de descente; ces dernières furent introduites en 1977 par Colliot-Thélène et Sansuc [10]. Elles sont par exemple utilisées avec succès dans [12], [9], [47].

Le but de cet article est de relier la méthode des fibrations à l'obstruction de Manin: plus précisément, il s'agit d'établir sous certaines conditions que l'obstruction de Manin au principe de Hasse ou à l'approximation faible est la seule pour une variété fibrée en supposant que les fibres ont cette même propriété (et non plus forcément vérifient le principe de Hasse ou l'approximation faible). Ceci fait l'objet des théorèmes 4.2.1 et 4.3.1 qui sont les résultats principaux de ce travail.

L'intérêt est, par exemple, que l'obstruction de Manin peut très bien s'évanouir sur la variété fibrée alors que ce n'est pas le cas sur les fibres; ainsi, cela permet d'établir le principe de Hasse et l'approximation faible pour certaines variétés là ou la méthode des fibrations classiques échouait (on verra dans ce texte des

Reçu le 8 octobre 1993.

exemples de cette situation). Notre méthode semble en particulier souvent bien fonctionner pour ramener le problème du principe de Hasse et de l'approximation faible pour des variétés de dimension au moins 3 au même problème pour des surfaces (qui ont parfois pu être traitées par des méthodes de descente). Il serait évidemment intéressant de pouvoir ramener le cas des surfaces à celui des courbes mais cela semble pour l'instant hors de portée car les hypothèses nécessaires à l'application de nos résultats généraux ne sont pratiquement jamais vérifiées dans ce cas.

Le plan de l'article est le suivant: la première partie est consacrée à divers préliminaires, notamment sur le groupe de Brauer et l'obstruction de Manin. Dans la deuxième partie, on établit une propriété arithmétique des éléments ramifiés du groupe de Brauer d'un corps de fonctions (théorème 2.1.1), propriété dont on a besoin pour prouver le "lemme formel" 2.6.1 qui est un ingrédient essentiel pour la suite. Dans la troisième partie, on compare des groupes de Brauer "génériques" à des groupes de Brauer "spéciaux" (théorème 3.5.1). La quatrième partie est consacrée à la preuve des résultats principaux: on combine une méthode similaire à celle dégagée par Skorobogatov dans [48] avec le théorème 3.5.1 et le lemme formel 2.6.1 pour établir les théorèmes 4.2.1 et 4.3.1. La cinquième partie est consacrée aux exemples d'application: on y établit (parfois modulo certaines conjectures) ou on y retrouve les propriétés arithmétiques de certaines classes de variétés. Enfin, dans la sixième partie, on voit comment notre méthode permet aussi de montrer l'existence de familles infinies de contre-exemples à l'approximation faible.

Je tiens à remercier Jean-Louis Colliot-Thélène pour son aide tout au long de l'élaboration de cet article. Je voudrais également exprimer ma gratitude au département de mathématiques et informatique de l'Ecole Normale Supérieure pour les conditions de travail exceptionnelles qu'il m'a offertes pendant la réalisation de ce travail.

1. Préliminaires. Dans cet article, tous les anneaux seront supposés noethériens et tous les schémas localement noethériens. Quand K est un corps, nous appelerons K-variété un K-schéma séparé et de type fini. Quand X est une K-variété et K' une extension de corps de K, on notera $X(K')$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\,K}(\mathrm{Spec}\,K', X)$ de ses K'-points. Le groupe des diviseurs (au sens de Cartier) de X sera noté $\mathrm{Div}\,X$ et son groupe de Picard $\mathrm{Pic}\,X$. Enfin, si k est un corps de nombres et v une place de k, on notera k_v le complété de k pour la place v.

Soit k un corps de nombres. On dit qu'une classe de k-variétés intègres lisses satisfait *le principe de Hasse* (resp. *l'approximation faible*) si, pour toute variété X dans cette classe, la condition $X(k_v) \neq \emptyset$ pour toute place v de k implique $X(k) \neq \emptyset$ (resp. implique que pour tout ensemble fini S de places de k, l'ensemble $X(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} X(k_v)$ muni de la topologie produit).

1.1. Invariance birationnelle du principe de Hasse et de l'approximation faible.

PROPOSITION 1.1.1. *Soit X une k-variété intègre. Si un modèle propre lisse de X vérifie le principe de Hasse (resp. l'approximation faible), il en est de même de* *tout modèle propre lisse de X. Ainsi, ces propriétés ne dépendent que du corps des fonctions $k(X)$ de la variété X. Il suffit de les vérifier pour le lieu lisse X_{lisse} de X.*

Cette proposition résulte immédiatement du théorème des fonctions implicites sur k_v (qui permet en particulier de montrer que si U est un ouvert de Zariski non vide d'une k_v-variété intègre lisse Z, l'ensemble $U(k_v)$ est dense dans $Z(k_v)$ pour la topologie v-adique; voir [4], lemme 3.1.2), combiné au lemme classique suivant, remarqué originellement par Nishimura dans [39].

LEMME 1.1.2 (Nishimura, Lang). *Soient X une k-variété intègre lisse et Y une k-variété propre. Soit $\varphi\colon X \to Y$ une k-application rationnelle. Alors, si $X(k) \neq \emptyset$, on a $Y(k) \neq \emptyset$.*

1.2. Groupe de Brauer d'une variété. Soient K un corps de caractéristique zéro, de clôture algébrique $\overline{K}$, et X une K-variété géométriquement intègre, propre et lisse. On notera $\operatorname{Br} X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer cohomologique de la variété X et $\operatorname{Br}(K(X))$ le groupe de Brauer de son corps des fonctions $K(X)$. Par exemple, si K est algébriquement clos, le groupe de Brauer de l'espace projectif $\mathbf{P}^n$ sur K est nul (ceci résultant de ce que dans ce cas, on a bien la condition "$B_2 - \rho = 0$", laquelle est équivalente à la condition $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$; cf [24], corollaire 3.4 et [7], preuve de la proposition 2.11).

Plus généralement, on notera $\operatorname{Br} \mathscr{X} = H^2_{\text{ét}}(\mathscr{X}, \mathbf{G}_m)$ le groupe de Brauer d'un schéma $\mathscr{X}$.

Soit A un anneau de valuation discrète de caractéristique zéro de corps des fractions K' et soit κ_A le corps résiduel de A, que l'on suppose parfait. La suite spectrale de Leray associée au morphisme $g\colon \operatorname{Spec} K' \to \operatorname{Spec} A$ et au faisceau étale $\mathbf{G}_m$ s'écrit

$$H^p_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} A, R^q g_* \mathbf{G}_{m,K'}) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} K', \mathbf{G}_m).$$

On en déduit ([37], exemple III.2.22) la suite exacte suivante:

$$0 \to H^2_{\text{ét}}(\operatorname{Spec} A, \mathbf{G}_m) \to \operatorname{Br} K' \xrightarrow{\partial_A} H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

La flèche ∂_A est l'application *résidu* de $\operatorname{Br} K'$ dans $H^1(\kappa_A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ (il y a d'autres façons de définir cette flèche, qui peuvent différer d'un signe de celle-ci).

En particulier, quand X est une variété projective et lisse géométriquement intègre sur le corps K, on dispose pour tout point m de codimension 1 de X, d'anneau local A, de la flèche ∂_A de résidu en m. Et d'après le théorème de pureté de Grothendieck ([25], corollaire 6.2), le groupe $\operatorname{Br} X$ n'est autre que le groupe de Brauer non ramifié $\operatorname{Br}_{\text{nr}}(K(X)/K)$ du corps des fonctions $K(X)$ de la variété X, c'est-à-dire le sous-groupe de $\operatorname{Br}(K(X))$ constitué des éléments dont les résidus en tous les anneaux de valuation discrète A de corps des fractions $K(X)$ et contenant K (ou encore en tous les points de codimension 1 de X) sont triviaux.

Le groupe Br X est un groupe de torsion qui est un invariant K-birationnel ([25], 7.3).

D'autre part, en notant $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et $\overline{K}(X)$ le corps des fonctions de $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$, puis $\mathrm{Br}_1\, X = \ker(\mathrm{Br}\, X \to \mathrm{Br}\, \overline{X})$, le groupe $\mathrm{Br}_1\, X$ est le noyau de la flèche $H^2(G, \overline{K}(X)^*) \to H^2(G, \mathrm{Div}\, \overline{X})$ et on a la suite exacte (cf. [11], 1.5):

$$\mathrm{Br}\, K \to \mathrm{Br}_1\, X \to H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(G, \overline{K}^*).$$

Cette suite est la suite des termes de bas degré de la suite spectrale de Leray pour $X \to \mathrm{Spec}\, K$ et le faisceau étale $\mathbf{G}_m$, soit $H^p_{\text{ét}}(G, H^q(\overline{X}, \mathbf{G}_m)) \Rightarrow H^{p+q}_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$. Quand $\mathrm{Br}\, \overline{X} = 0$, cette suite se prolonge en la suite exacte:

$$\mathrm{Br}\, K \to \mathrm{Br}_1\, X \to H^1(G, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(G, \overline{K}^*) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m).$$

Par abus de langage, on notera souvent encore Br K l'image de Br K dans $\mathrm{Br}_1\, X$. Ainsi, si X une variété rationnelle (c'est-à-dire que $\overline{K}(X)$ est transcendant pur sur $\overline{K}$), on aura $\mathrm{Br}\, \overline{X} = 0$ (puisque le groupe de Brauer est un invariant birationnel et que celui de l'espace projectif est nul sur un corps algébriquement clos). Si l'on suppose en outre $H^3(G, \overline{K}^*) = 0$ (ce qui est le cas si K est un corps de nombres, voir [1], VII.11.4, page 199), alors $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, K \simeq H^1(G, \mathrm{Pic}\, \overline{X})$. En particulier, si X devient rationnelle sur une extension cyclique F de K, le groupe Br X est le noyau de la flèche $H^2(G', F(X)^*) \to H^2(G', \mathrm{Div}\, X_F)$ (où $G' = \mathrm{Gal}(F/K)$ et $X_F = X \times_K F$). En utilisant les groupes de cohomologie modifiés à la Tate (cf. [44], chapitre 8), on voit que Br X s'identifie au noyau de l'application $K(X)^*/NF(X)^* \to \mathrm{Div}\, X/N(\mathrm{Div}\, X_F)$, le symbole N désignant la norme de l'extension F/K.

Notons enfin que si V est une K-variété géométriquement intègre (pas forcément projective ni lisse) et P un K-point lisse de V, alors pour tout élément A de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V)/K) \subset \mathrm{Br}(K(V))$, on dispose de $A(P) \in \mathrm{Br}\, K$: en effet, on peut, grâce au théorème de résolution des singularités d'Hironaka [29], plonger un ouvert de Zariski lisse U de V contenant P dans un modèle projectif lisse X de V et comme A est alors dans Br X, il était en fait dans Br U ce qui permet de l'évaluer en P.

1.3. Obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible. Soient k un corps de nombres dont on note Ω_k l'ensemble des places et X une k-variété géométriquement intègre, propre et lisse, qui a des points dans tous les complétés de k. Si v est une place non archimédienne de k, on note $k(v)$ le corps résiduel de k_v. D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, on dispose d'une flèche de résidu en v, soit $\delta_v\colon \mathrm{Br}\, k_v \to H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, qui dans ce cas est un isomorphisme (ceci résultant de ce que k_v est complet et $k(v)$ fini, voir [37], III.2.22C). On a également un isomorphisme de $H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sur $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, obtenu grâce à l'identification (au moyen du Frobenius) de $\mathrm{Gal}(\overline{k(v)}/k(v))$ et de $\hat{\mathbf{Z}}$. En composant, on retrouve (quand v est non archimédienne) l'invariant $j_v\colon \mathrm{Br}\, k_v \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ de la théorie du corps de classe local. Rappelons que pour v archimédienne, cet invariant est nul quand v est complexe et est obtenu à partir de l'isomorphisme de $\mathrm{Br}\,\mathbf{R}$ sur $\mathbf{Z}/2$ quand v est réelle. On obtient ainsi un invariant $j = (j_v)_{v \in \Omega_k}$, défini sur $\prod_{v \in \Omega_k} k_v$.[1]

Soit $X(A_k)$ l'ensemble des points adéliques de X (comme X est complète, on a $X(A_k) = \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$). On dit qu'il y a *obstruction de Manin* (ou de Brauer-Manin) au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour X si pour tout point adélique $(P_v)_{v \in \Omega_k}$ de X, il existe un élément A de $\mathrm{Br}\,X$ (resp. s'il existe un point adélique $(P_v)_{v \in \Omega_k}$ de X et un élément A de $\mathrm{Br}\,X$) vérifiant

$$\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \neq 0 \qquad \text{dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Le fait que ces deux propriétés soient respectivement des obstructions au principe de Hasse et à l'approximation faible vient de la suite exacte du corps de classes global:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}\,k \longrightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_k} \mathrm{Br}\,k_v \xrightarrow{\sum j_v} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \longrightarrow 0$$

et de ce que pour toute place v de bonne réduction de X et de $A \in \mathrm{Br}\,X$, la flèche $X(k_v) \to \mathrm{Br}\,k_v$ induite par A est nulle. Pour plus de détails on pourra consulter la section 3 de [11].

Pour plusieurs classes de variétés, on a pu établir que l'obstruction de Manin est la seule possible pour le principe de Hasse et l'approximation faible. Colliot-Thélène et Sansuc l'ont notamment conjecturé pour les surfaces rationnelles et de fait, tous les contre-exemples connus à ce jour au principe de Hasse et à l'approximation faible ont pu être explicités par le biais de cette obstruction.

D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent, on a, si X est une k-variété rationnelle, l'isomorphisme $\mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}\,k \simeq H^1(G, \mathrm{Pic}\,\overline{X})$.

Soient $A_1, \ldots, A_r$ des éléments de $\mathrm{Br}(k(X)) \supset \mathrm{Br}\,X$ et Γ l'intersection de $\mathrm{Br}\,X$ et du sous-groupe de $\mathrm{Br}(k(X))$ engendré par $A_1, \ldots, A_r$. On dira qu'il y a *obstruction de Manin associée a* $A_1, \ldots, A_r$ au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) si pour tout point adélique $(P_v)_{v \in \Omega_k}$ de X, il existe un élément A de Γ (resp. s'il existe un point adélique $(P_v)_{v \in \Omega_k}$ de X et un élément A de Γ) vérifiant

$$\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \neq 0 \qquad \text{dans } \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Bien entendu, quand $\mathrm{Br}\,X$ est engendré par $\Gamma \cup \mathrm{Br}\,k$, ces obstructions coïncident avec les obstructions de Manin définies plus haut.

2. Éléments ramifiés du groupe de Brauer d'un corps de fonctions.

2.1. Énoncé du résultat principal de la section. Le but de cette section est d'établir dans le cas d'une variété quelconque un énoncé qui était déjà apparu

[1] En fait, l'invariant j que nous venons de définir ne coïncide avec l'invariant usuel, tel qu'il est par exemple défini dans [44], qu'*au signe près*; nous prenons cette convention de signe pour qu'il y ait bien compatibilité avec la définition générale que nous avons prise des flèches de résidu.

dans le cas de l'espace projectif (sous une forme quantitative plus précise) chez Serre [46].

THÉORÈME 2.1.1. *Soient k un corps de nombres et X une k-variété géométriquement intègre, projective et lisse, dont on note $k(X)$ le corps des fonctions. Soient α un élément de* $\mathrm{Br}(k(X))$ *qui n'est pas dans* $\mathrm{Br}\, X$ *et U un ouvert de Zariski non vide de X tel que $\alpha \in \mathrm{Br}\, U$. Alors, il existe une infinité de places v de k telles que la flèche $U(k_v) \to \mathrm{Br}\, k_v$ induite par α prenne une valeur non nulle.*

Remarques.

- En fait, la preuve donnera non seulement un ensemble infini de places v qui conviennent mais un ensemble de densité de Dirichlet non nulle.
- Le théorème 2.1.1 est la réciproque du résultat classique qui dit que si α est un élément de $\mathrm{Br}\, X$, la flèche $X(k_v) \to \mathrm{Br}\, k_v$ induite par α est nulle sauf pour un nombre fini de places v (les places de mauvaise réduction de X ou de α).

Cas particulier. Quand X devient rationnelle sur une extension cyclique F de k, ce résultat peut se formuler en termes de fonctions dont les diviseurs sont des normes. En effet, on a vu que $\mathrm{Br}\, X$ s'identifie dans ce cas au noyau de l'application $k(X)^*/NF(X)^* \to \mathrm{Div}\, X/N(\mathrm{Div}\, X_F)$ (où l'on note N la norme de l'extension F/k et $X_F = X \times_k F$). Le théorème 2.1.1 nous dit donc que si f est une fonction inversible sur un ouvert non vide U de X dont le diviseur n'est pas une norme pour l'extension F/k, on peut trouver, pour une infinité de places v de k, un point P_v de $U(k_v)$ tel que $f(P_v)$ ne soit pas une norme de l'extension locale $(F \otimes_k k_v)/k_v$.

La preuve du théorème 2.1.1 se fait en plusieurs étapes, qui font l'objet des paragraphes suivants. Essentiellement, elle repose sur la proposition 2.3.2, la proposition 2.4.1, et le corollaire 2.4.3, qui nous permettront d'achever la preuve au paragraphe 2.5.

2.2. Un résultat de densité. Pour tout corps de nombres k et toute place v non archimédienne de k, on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de k_v et $k(v)$ son corps résiduel. On note également $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k. L'expression "pour presque toute place de A" (où A est un sous-ensemble de Ω_k) signifiera toujours "pour toute place de A à l'exception d'un nombre fini". Quand S est un ensemble fini de places de k, on note $\mathcal{O}_{k,S}$ l'ensemble des éléments de k qui sont entiers en dehors de S.

La proposition suivante est une variante du théorème de Tchebotarev.

PROPOSITION 2.2.1. *Soient L/k une extension finie (pas nécessairement galoisienne) de corps de nombres et L' une extension galoisienne cyclique de L. Alors, il existe une infinité de places v de k telles qu'il existe une place w_L de L au-dessus de v vérifiant: $k(v) = L(w_L)$ et w_L est inerte pour l'extension L'/L.*

Preuve de la proposition 2.2.1. Soient L'' la clôture galoisienne de L' et $G'' = \mathrm{Gal}(L''/k)$. Notons $N = [L'' : k]$. Choisissons un élément g de $\mathrm{Gal}(L''/L) \subset G''$ dont l'image dans $\mathrm{Gal}(L'/L)$ en est un générateur. Soit v une place de k, non ramifiée pour L''/k, et de degré absolu 1; soit w une place de L'' au-dessus de

v et $D_w = \{\tau \in G'', \tau w = w\}$ le groupe de décomposition associé. On note F_w l'élément de D_w qui induit le Frobenius de $\mathrm{Gal}(L''(w)/k(v)) \simeq D_w$ (rappel: sa classe de conjugaison F_v ne dépend que de v, voir [1], proposition 2.2, page 164). Pour toute classe de conjugaison σ de G'', la densité de Dirichlet des v telles que $F_v = \sigma$ est $\mathrm{Card}(\sigma)/N$: c'est le théorème de Tchebotarev ([31], théorème 10, page 169). Il existe donc une infinité de places v, non ramifiées pour L''/k et de degré absolu 1, telles que la classe de g soit F_v.

Pour une telle place v, il existe une place w de L'' au-dessus de v telle que D_w soit le sous-groupe de G'' engendré par g. Si w_L et $w_{L'}$ désignent respectivement les places de L et L' induites par w, le groupe de décomposition $D_{w_{L'}}$ associé à l'extension L'/L est égal au sous-groupe de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ engendré par l'image de g dans $\mathrm{Gal}(L'/L)$, donc est égal à $\mathrm{Gal}(L'/L)$ tout entier ce qui prouve déjà que w_L est inerte pour l'extension L'/L. D'autre part, si $L_1 \subset L''$ est la plus petite extension galoisienne de k contenant L, l'image h de g dans $\mathrm{Gal}(L_1/k)$ induit l'identité sur L. Si w_{L_1} est la place de L_1 induite par w, il en résulte, puisque D_w est engendré par g, que le groupe de décomposition $D_{w_{L_1}}$ associé à l'extension L_1/k est engendré par h (en effet, la flèche $D_w \to D_{w_{L_1}}$ est surjective, cf. [1], proposition 1.2, page 163), donc est inclus dans $\mathrm{Gal}(L_1/L)$. Ainsi, on a $\mathrm{Gal}(L_1(w_{L_1})/k(v)) = \mathrm{Gal}(L_1(w_{L_1})/L(w_L))$ donc $L(w_L) = k(v)$ ce qui achève la preuve.

Remarque. On a en fait montré que l'ensemble des places v qui conviennent est de densité de Dirichlet non nulle.

2.3. Un premier résultat sur les $k(v)$-points. Nous démontrons ici une proposition qui ne fait intervenir que des $k(v)$-points (et pas encore des k_v-points). Nous utiliserons le lemme suivant, dégagé par Ekedahl dans [17], et qui est une des formes du théorème de Tchebotarev "géométrique".

LEMME 2.3.1. *Soient $\mathscr{W} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ et $\pi\colon \mathscr{B} \to \mathscr{W}$ un morphisme dominant dont la fibre générique B est une k-variété géométriquement intègre. Soit $\rho\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{B}$ un revêtement étale galoisien de groupe G. On suppose que la fibre générique Y de $\pi \circ \rho$ est une k-variété géométriquement intègre. Soit C une classe de conjugaison de G, on pose $c = \mathrm{Card}(C)/\mathrm{Card}(G)$. Pour tout point fermé $\wp$ de $\mathscr{W}$, de corps résiduel (fini) $k(\wp)$, on note $t(\wp)$ le nombre de points x de $\mathscr{B}(k(\wp))$ pour lesquels le Frobenius F_x est dans C. Alors, on a*

$$t(\wp)/\mathrm{Card}(\mathscr{B}(k(\wp))) - c = \mathrm{O}(\mathrm{Card}(k(\wp))^{-1/2}.$$

Nous en déduisons, en combinant le lemme 2.3.1 avec la proposition 2.2.1, le résultat suivant.

PROPOSITION 2.3.2. *Soient k un corps de nombres et $\mathscr{W}$ un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$. Soient $\mathscr{B} \to \mathscr{W}$ un morphisme dominant et B la fibre générique de ce morphisme. On suppose que B est une k-variété intègre. Soit $\rho\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{B}$ un revêtement étale, connexe, cyclique, de degré $m \geqslant 2$ de $\mathscr{B}$. Pour presque toute place v de k, on dispose de $\tilde{\mathscr{B}}^v = \mathscr{B} \times_{\mathscr{W}} k(v)$ et $\tilde{\mathscr{Y}}^v = \mathscr{Y} \times_{\mathscr{W}} k(v)$, réductions respectives de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{Y}$ au-dessus de $k(v)$.*

Alors, il existe un ouvert $\mathcal{U}_1$ *de* $\mathcal{B}$ *et un ensemble infini* I *de places* v *de* k *tels qu 'on ait, en notant* $\mathcal{U}_2 = \rho^{-1}(\mathcal{U}_1)$:

1. *Pour toute place* v *de* I, *le revêtement étale* $\rho(v)$: $\tilde{\mathcal{U}}_2^v \to \tilde{\mathcal{U}}_1^v$ *reste connexe.*
2. *Si* Ω *est un ouvert non vide de* $\mathcal{U}_1$, *sa réduction* $\tilde{\Omega}^v$ *au-dessus de* $k(v)$ *admet, pour presque toute place* v *de* I, *un* $k(v)$*-point* $P(v)$ *vérifiant: la fibre de* $\rho(v)$ *en* $P(v)$ *est connexe.*

Preuve. Soit Y la fibre générique de $\mathcal{Y} \to \mathcal{W}$. Soient K le corps des fonctions de B et K' le corps des fonctions de Y, qui est une extension cyclique de degré m de K. Soient L la fermeture intégrale de k dans K et L' la fermeture intégrale de k dans K'. L'extension L'/L est une extension cyclique de corps de degré s, avec s divisant m (s est le degré de l'extension KL'/K). Quand B et Y sont géométriquement intègres (c'est-à-dire quand $k = L = L'$), le résultat découle immédiatement du lemme 2.3.1 (et on peut même imposer que I contienne presque toutes les places de k). L'idée va être, en choisissant judicieusement I, de se ramener (quand on considère v dans I) à une situation où le lemme 2.3.1 s'applique.

Nous choisissons I comme dans la proposition 2.2.1, c'est-à-dire que si $v \in I$, alors v est non ramifiée dans L'' (où L'' est la clôture galoisienne de L') et il existe une place w de L au-dessus de v, inerte pour l'extension L'/L et vérifiant $L(w) = k(v)$.

Il existe un ouvert de Zariski non vide U_1 de B tel que la flèche $U_1 \to \operatorname{Spec} k$ se factorise par une flèche $U_1 \to \operatorname{Spec} L$ et U_1 est alors un L-schéma géométriquement intègre. De ce fait, il existe un ouvert $\mathcal{U}_1$ de $\mathcal{B}$ tel que la flèche $\mathcal{U}_1 \to \mathcal{W}$ se factorise par une flèche $\mathcal{U}_1 \to \mathcal{W}_L$ (où $\mathcal{W}_L$ est un ouvert non vide de $\operatorname{Spec}(O_L)$) dont la fibre générique est $U_1 \to \operatorname{Spec} L$. Posons $\mathcal{U}_2 = \rho^{-1}(\mathcal{U}_1)$; quand $v \in I$, il existe w (place de L au-dessus de v) telle que $L(w) = k(v)$. Ainsi, une fois que nous avons remplacé $\mathcal{B}$ ey $\mathcal{Y}$ respectivement par $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, nous pouvons supposer (quitte à raisonner au niveau L) que $L = k$, c'est-à-dire que B est géométriquement intègre.

Notons alors $\mathcal{W}'$ l'image réciproque de $\mathcal{W}$ par la flèche $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{L'}) \to \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_k)$ et $\mathcal{U}' = \mathcal{U}_1 \times_{\mathcal{W}} \mathcal{W}'$. Comme L' est la fermeture intégrale de k dans K', on peut encore supposer que le revêtement $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_1$ se factorise par le revêtement étale connexe ρ': $\mathcal{U}' \to \mathcal{U}_1$. Or, si la place v est dans I, elle est inerte pour l'extension L'/k. Comme la fibre générique de $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}'$ est géométriquement intègre (vu que L' est intégralement clos dans K'), on a bien que le revêtement $\rho(v)$ reste connexe pour presque toute place de I (et nous supposerons, quitte à restreindre I, que c'est le cas pour toute place de I). Notons que toutes les fibres du revêtement $\rho'(v)$: $\tilde{\mathcal{U}}'^v \to \tilde{\mathcal{U}}_1^v$ sont connexes si v est dans I.

Maintenant, écrivons $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_l^{\alpha_l}$ avec les p_i premiers et $\alpha_i \geqslant 1$ et supposons par exemple que $p_1, \dots, p_t$ $(t \leqslant l)$ sont les p_i qui ne divisent pas $r = [L' : k]$. On dispose ainsi d'un unique corps K'' vérifiant $K \subset K'' \subset K'$ et K'' de degré $r' = p_1^{\alpha_1} \dots p_t^{\alpha_t}$ sur K. Comme r' est premier à r, on a $K'' \cap KL' = K$ et comme la fermeture intégrale de k dans K' est L', le corps k est intégralement clos dans K''. Nous pouvons encore supposer que le revêtement $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_1$ se factorise par un revêtement étale connexe $\mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}''$, où la fibre générique de $\mathcal{U}''$ a pour corps des fonctions K'', ce qui implique qu'elle est géométriquement intègre sur k.

Appliquons alors le lemme 2.3.1 au revêtement $\rho'': \mathcal{U}'' \to \mathcal{U}_1$ (ou plus exactement au revêtement $\Omega'' \to \Omega$ qu'il induit, où Ω est un ouvert de Zariski non vide de $\mathcal{U}_1$ et Ω'' son image réciproque par ρ''). On obtient pour presque toute place v de I un point $P(v)$ de $\Omega(k(v))$ en lequel la fibre de $\rho''(v)$: $\widetilde{\mathcal{U}}''^v \to \widetilde{\mathcal{U}}_1^v$ est connexe. Comme on l'a vu, la fibre de $\rho'(v)$ en $P(v)$ est automatiquement connexe. Mais ceci implique alors que la fibre de $\rho(v)$ en $P(v)$ est également connexe: en effet, si $F_{P(v)} \in \mathrm{Gal}(K'/K)$ est le Frobenius en $P(v)$, son image dans $\mathrm{Gal}(K''/K)$ (resp. dans $\mathrm{Gal}(KL'/K)$) est un générateur de $\mathrm{Gal}(K''/K)$ (resp. de $\mathrm{Gal}(KL'/K)$) puisque la fibre de $\rho''(v)$ (resp. de $\rho'(v)$) en $P(v)$ est connexe. Identifiant $\mathrm{Gal}(K'/K)$ avec $\mathbf{Z}/m$, l'image de $F_{P(v)}$ dans $\mathbf{Z}/p_i$ est a fortiori non nulle pour $1 \leqslant i \leqslant l$ (pour $1 \leqslant i \leqslant t$ parce que p_i divise $[K'' : K]$ et pour $t < i \leqslant l$ parce que p_i divise $[KL' : K]$). De ce fait, le groupe $\mathrm{Gal}(K'/K)$ est engendré par $F_{P(v)}$ d'où le résultat.

Remarque. Rappelons le théorème classique suivant [33].

THÉORÈME (Lang-Weil). *Il existe une constante $C(n, r, d)$ telle que pour tout corps fini $\mathbf{F}_q$ de cardinal q et toute sous-variété fermée X géométriquement intègre, de degré d et de dimension r, de $\mathbf{P}^n_{\mathbf{F}_q}$, on ait:*

$$|\mathrm{Card}(X(\mathbf{F}_q)) - q^r| < C(n, r, d)q^{r-1/2}.$$

En n'utilisant que le théorème de Lang-Weil (et pas le lemme 2.3.1 dont la preuve fait intervenir des outils plus sophistiqués), on peut retrouver une forme atténuée (qui nous suffirait en fait pour la suite) de la proposition 2.3.2 consistant à remplacer la conclusion: "la fibre de $\rho(v)$ en $P(v)$ est connexe" par "l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{k(v)}/k(v))$ sur les $\overline{k(v)}$-points de $\mathcal{Y}$ au-dessus de $P(v)$ n'est pas triviale". En effet, on se ramène comme on l'a vu en choisissant judicieusement I au cas où B et Y sont géométriquement intègres et un argument de dénombrement des $k(v)$-points de $\widetilde{\mathcal{B}}^v$ et $\widetilde{\mathcal{Y}}^v$ donne alors aisément le résultat.

2.4. Calcul de $\alpha(P_v)$.

2.4.1. Passage à des modèles entiers. Le théorème 2.1.1 est "local", en ce sens que seul ce qui se passe au voisinage du point P_v compte; en particulier, on peut toujours restreindre l'ouvert U de l'énoncé du théorème 2.1.1. La proposition suivante va dans ce sens, afin de permettre l'application d'un résultat que nous prouverons plus bas (corollaire 2.4.3).

PROPOSITION 2.4.1. *Soient X une k-variété géométriquement intègre, projective et lisse et α un élément de n-torsion de $\mathrm{Br}(k(X))$ qui n'est pas dans $\mathrm{Br}\, X$. Alors, il existe un modèle projectif et lisse $\mathcal{X}$ de X au-dessus d'un ouvert non vide $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$, un ouvert affine non vide $\mathcal{V}$ de $\mathcal{X}$ et un fermé $\mathcal{B}$ intègre de codimension 1 de $\mathcal{V}$, lisse au-dessus de $\mathcal{W}$, tels que:*

- *Si $\mathscr{U}$ désigne le complémentaire de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{V}$, on a $\alpha \in \operatorname{Br} \mathscr{U}$.*
- *Le résidu de α au point générique de $\mathscr{B}$ est un élément non nul de $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{B}, \mathbf{Z}/n)$.*
- *L'entier n est premier aux caractéristiques résiduelles de $\mathscr{W}$.*

Preuve. Il existe déjà un ouvert non vide $\mathscr{W} = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_k)$ tel que X admette un modèle projectif et lisse $\mathscr{X}$ au-dessus de $\mathscr{W}$, dont les fibres sont géométriquement intègres, et α s'étende en un élément (noté encore abusivement α) de $\operatorname{Br} \mathscr{U}$, où $\mathscr{U}$ est un ouvert non vide de $\mathscr{X}$. Quitte à élargir S nous supposerons que n est inversible dans $\mathcal{O}_v$ quand $v \notin S$.

Soient $\mathscr{Z}_1, \ldots, \mathscr{Z}_l$ les sous-schémas fermés intègres de $\mathscr{X}$ qui ne rencontrent pas $\mathscr{U}$, on peut supposer qu'ils sont tous de codimension 1 (quitte à réduire $\mathscr{U}$). On peut aussi supposer (quitte à élargir encore S) que les $\mathscr{Z}_i$ ne sont pas des diviseurs verticaux sur $\mathscr{X}$. On dispose des résidus $\mathscr{I}_i = \delta_{\mathscr{Z}_i}(\alpha) \in H^1(\kappa_i, \mathbf{Z}/n)$, où κ_i est le corps résiduel de $\mathscr{X}$ au point générique de $\mathscr{Z}_i$. Comme α n'est pas dans $\operatorname{Br} X$, l'un de ces résidus est non nul (d'après le théorème de pureté de Grothendieck rappelé en 1.2.).

Il existe pour tout i un ouvert non vide et lisse $\mathscr{B}_i$ de $\mathscr{Z}_i$, ne rencontrant pas les $\mathscr{Z}_j$ pour $j \neq i$, tel que $\mathscr{I}_i \in H^1_{\text{ét}}(\mathscr{B}_i, \mathbf{Z}/n)$. Prenons pour $\mathscr{B}$ l'un des $\mathscr{B}_i$ tel que $\mathscr{I}_i$ soit non nul et prenons pour $\mathscr{V}$ l'ouvert $\mathscr{U} \cup \mathscr{B}$ de $\mathscr{X}$. Nous pouvons enfin supposer $\mathscr{V}$ affine (quitte à le restreindre autour du point générique de $\mathscr{B}$) pour obtenir toutes les conditions de la proposition 2.4.1.

2.4.2. Le calcul. Nous allons maintenant utiliser les propriétés des flèches de résidu pour prouver un lemme qui permettra ensuite de calculer $\alpha(P_v)$ en vue d'établir le théorème 2.1.1.

Fixons d'abord quelques notations. Quand $\mathscr{V} = \operatorname{Spec} R$ est un schéma intègre et $\mathscr{B} = \operatorname{Spec}(R/t)$ un sous-schéma fermé intègre de codimension 1 de $\mathscr{V}$, on notera R_t le localisé de R par rapport à la partie multiplicative $\{t^j\}_{j \in \mathbf{N}}$ et $R_{(t)}$ le localisé de R par rapport à l'idéal premier engendré par t. On a ainsi $(\mathscr{V} \backslash \mathscr{B}) \simeq \operatorname{Spec}(R_t)$. Si $\mathscr{V}$ et $\mathscr{B}$ sont réguliers et de corps de fonctions respectifs K et κ, on dispose quand K et κ sont de caractéristique zéro d'une flèche de résidu $\operatorname{Br} K \to H^1(\kappa, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ que l'on notera ∂_t: en effet, l'anneau $R_{(t)}$ est dans ce cas de valuation discrète (t en étant une uniformisante), de corps des fractions K et de corps résiduel κ et les rappels de 1.2 s'appliquent. Rappelons que pour toute place v non archimédienne de k, on note $k(v)$ le corps résiduel de l'anneau des entiers $\mathcal{O}_v$ de k_v et δ_v: $\operatorname{Br} k_v \to H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ l'application résidu associée.

Supposons en outre que $\mathscr{V}$ et $\mathscr{B}$ soient des $\mathscr{W}$-schémas, où $\mathscr{W} = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ est un ouvert non vide de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_k)$. Si v est une place de k non dans S, on dira alors abusivement qu'une flèche s: $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v) \to \mathscr{V}$ est une "section" si, composée avec le morphisme structural $\mathscr{V} \to \mathscr{W}$, elle redonne la flèche naturelle $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_v) \to \mathscr{W}$. L'homomorphisme Φ: $R \to \mathcal{O}_v$ déduit de s envoyant t sur un élément t' de $\mathcal{O}_v$, on dira que la valuation e de t' est la *$\mathscr{B}$-multiplicité* (ou simplement la multiplicité si le contexte fait que cela ne prête pas à confusion) de la section s.

Avec ces notations, on a le lemme suivant.

LEMME 2.4.2. *Soit* $\mathscr{W} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ *un ouvert non vide de* $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$. *Soient* $\mathscr{V} = \mathrm{Spec}\, R$ *un* $\mathscr{W}$*-schéma intègre régulier et* $\mathscr{B} = \mathrm{Spec}(R/t)$ *un sous-schéma fermé intègre régulier de codimension* 1 *de* $\mathscr{V}$. *Soient* K *et* κ *les corps de fonctions respectifs de* $\mathscr{V}$ *et* $\mathscr{B}$, *on suppose* K *et* κ *de caractéristique zéro.*

Soit α *un élément de* n*-torsion de* $\mathrm{Br}(R_t) \subset \mathrm{Br}\, K$ *dont le résidu* $\chi_t = \partial_t(\alpha)$ *au point générique de* $\mathscr{B}$ *est dans* $H^1_{\text{ét}}(R/t, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. *Supposons en plus que les caractéristiques résiduelles des schémas* $\mathscr{V}$ *et* $\mathscr{W}$ *sont premières à* n. *Alors, il existe un ouvert* ω *de* $\mathscr{V}$, *d'intersection non vide avec* $\mathscr{B}$, *tel que pour toute section* $s\colon \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v) \to \omega \subset \mathscr{V}$, *de* B*-multiplicité* e *finie et* > 0, *induisant des morphismes* $s_1\colon \mathrm{Spec}\, k_v \to \mathrm{Spec}(R_t)$ *et* $s_2\colon \mathrm{Spec}\, k(v) \to \mathrm{Spec}(R/t)$, *on ait:*

$$\delta_v(s_1^*(\alpha)) = e s_2^*(\chi_t)$$

où $s_1^*\colon \mathrm{Br}(R_t) \to \mathrm{Br}\, k_v$ *et* $s_2^*\colon H^1_{\text{ét}}(R/t, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ *sont les flèches déduites de* s_1 *et* s_2.

Remarques.
- C'est l'hypothèse $0 < e < \infty$ qui permet d'écrire que les morphismes s_1 et s_2 déduits de s sont respectivement à valeurs dans $\mathrm{Spec}(R_t) = \mathscr{V} \setminus \mathscr{B}$ et $\mathrm{Spec}(R/t) = \mathscr{B}$.
- On emploie ici abusivement des notations comme $H^1_{\text{ét}}(R/t, \ldots)$ et $\mathrm{Br}(R_t)$ à la place de $H^1_{\text{ét}}(\mathrm{Spec}(R/t), \ldots)$ et $\mathrm{Br}(\mathrm{Spec}(R_t))$.

Preuve. Soit $\hat{R}$ le complété de R par rapport à l'idéal (t). La section s se factorise (vu que $\mathcal{O}_v$ est complet) par une section $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v) \to \mathrm{Spec}\, \hat{R}$ et les flèches de résidu commutent avec le passage au complété ([6], corollaire à la proposition 1.1.). D'autre part, si $\hat{\omega}$ est un ouvert de $\mathrm{Spec}\, \hat{R}$ d'intersection non vide avec $\hat{\mathscr{B}} = \mathrm{Spec}(\hat{R}/t)$, on peut trouver un ouvert ω de $\mathrm{Spec}\, R$ (d'intersection non vide avec $\mathscr{B}$) dont l'image réciproque par le morphisme $p\colon \mathrm{Spec}\, \hat{R} \to \mathrm{Spec}\, R$ est incluse dans $\hat{\omega}$ (car l'image par p du fermé complémentaire de $\hat{\omega}$ est, d'après la proposition 6.F de [36], une intersection de constructibles ne contenant pas le point générique de $\mathrm{Spec}\, R$, donc incluse dans un fermé strict de $\mathrm{Spec}\, R$). Nous pouvons ainsi supposer que R est complet pour la topologie définie par l'idéal (t).

Avec ces nouvelles hypothèses, le résidu χ_t est un élément de $H^1_{\text{ét}}(R/t, \mathbf{Z}/n)$ qui se relève (vu que R est complet pour la topologie t-adique) en un élément χ de $H^1_{\text{ét}}(R, \mathbf{Z}/n)$. Formons le cup-produit $\beta = \chi \cup t$, où χ est vu dans $H^1_{\text{ét}}(R_t, \mathbf{Z}/n)$ et t dans $H^1_{\text{ét}}(R_t, \mu_n) = R_t^*/R_t^{*n}$. On a $\beta \in H^2_{\text{ét}}(R_t, \mu_n) \subset \mathrm{Br}(R_t)$. D'après la proposition 1.3 de [6], on a $\partial_t(\beta) = \chi_t$ (car t est une uniformisante de $R_{(t)}$ et n est inversible dans le corps résiduel κ de $R_{(t)}$). Maintenant, l'élément $(\beta - \alpha)$ de $\mathrm{Br}(R_t)$ est tel que $\partial_t(\beta - \alpha) = 0$. On en déduit ([37], exemple III.2.22) que $(\beta - \alpha)$ est en fait dans $\mathrm{Br}\, R_{(t)}$ donc il existe un ouvert ω de $\mathscr{V}$, contenant le point générique de $\mathscr{B}$ (donc d'intersection non vide avec $\mathscr{B}$) tel que $(\beta - \alpha)$ soit dans $\mathrm{Br}\, \omega$. De ce fait, quand s est une section à valeurs dans ω, on aura $s_1^*(\beta - \alpha) \in \mathrm{Br}(\mathcal{O}_v)$ donc en particulier $\delta_v(s_1^*(\beta - \alpha)) = 0$ (d'après les rappels de 1.2.). Ainsi pouvons-nous nous limiter à prouver l'égalité voulue avec β au lieu de α.

Or, on a $s_1^*(\beta) = \chi_1 \cup t'$ (ici $t' = \Phi(t)$ est vu dans $H^1(k_v, \mu_n)$) où χ_1 est l'image de χ par la flèche $H^1_{\text{ét}}(R_t, \mathbf{Z}/n) \to H^1(k_v, \mathbf{Z}/n)$ déduite de s_1. C'est-à-dire que χ_1 est en fait dans $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{O}_v, \mathbf{Z}/n)$ et est égal à l'image χ_3 de $\chi \in H^1_{\text{ét}}(R, \mathbf{Z}/n)$ par la flèche déduite de l'homomorphisme Φ. Alors, on a $\delta_v(\chi_1 \cup t') = e\chi_2$, où χ_2 est l'image de χ_3 dans $H^1(k(v), \mathbf{Z}/n)$ (toujours d'après la proposition 1.3 de [6], vu que n est inversible dans $\mathcal{O}_v$ et que la valuation de t' est e). Comme l'image de $\chi \in H^1_{\text{ét}}(R, \mathbf{Z}/n)$ dans $H^1_{\text{ét}}(R/t, \mathbf{Z}/n)$ est χ_t, l'élément χ_2 de $H^1(k(v), \mathbf{Z}/n)$ n'est autre que $s_2^*(\chi_t)$ donc on trouve finalement que $\delta_v(\chi_1 \cup t') = es_2^*(\chi_t)$ ce qui achève la preuve du lemme 2.4.2.

On peut maintenant calculer $\alpha(P_v)$ quand on s'est ramené à la situation fournie par la proposition 2.4.1.

COROLLAIRE 2.4.3. *Soient X une k-variété géométriquement intègre et α un élément de n-torsion de* $\mathrm{Br}(k(X))$. *Soit $\mathcal{X}$ un modèle de X au-dessus d'un ouvert non vide $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$, avec n premier aux caractéristiques résiduelles de $\mathcal{W}$. Soient $\mathcal{V}$ un ouvert affine non vide et lisse de $\mathcal{X}$ et $\mathcal{B}$ un fermé intègre lisse de codimension 1 de $\mathcal{V}$. On suppose que le résidu $\mathcal{I}$ de α au point générique de $\mathcal{B}$ est dans $H^1_{\text{ét}}(\mathcal{B}, \mathbf{Z}/n)$ et qu'on a $\alpha \in \mathrm{Br}\,\mathcal{U}$, où $\mathcal{U} = \mathcal{V} \backslash \mathcal{B}$.*

Alors, il existe un ouvert ω de $\mathcal{V}$, d'intersection non vide avec $\mathcal{B}$, tel que pour tout point P_v de $\mathcal{U}(k_v)$, correspondant à une section $s\colon \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v) \to \omega \subset \mathcal{V}$ de $\mathcal{B}$-multiplicité e, on ait, en notant $P(v)$ le $k(v)$-point de $\mathcal{V}$ associé à s:

1. *Si $P(v) \notin \mathcal{B}(k(v))$, alors $\delta_v(\alpha(P_v)) = 0$.*
2. *Si $P(v) \in \mathcal{B}(k(v))$, alors*

$$\delta_v(\alpha(P_v)) = e\partial$$

où ∂ est l'élément de $H^1(k(v), \mathbf{Z}/n)$ obtenu en prenant la fibre en $P(v)$ de $\mathcal{I} \in H^1_{\text{ét}}(\mathcal{B}, \mathbf{Z}/n)$.

Preuve. Notons déjà que si $P(v)$ n'est pas dans $\mathcal{B}$, la section s est en fait à valeurs dans $\mathcal{U}$ donc $\delta_v(\alpha(P_v))$ est nul puisque $\alpha(P_v)$ est dans $\mathrm{Br}(\mathcal{O}_v)$.

Si maintenant $P(v)$ est dans $\mathcal{B}$, l'ouvert ω est donné par le lemme 2.4.2 qui s'applique bien ici: en effet, les corps de fonctions de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{V}$ sont bien de caractéristique zéro, la multiplicité e est bien finie et > 0, les caractéristiques résiduelles de $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont bien premières à n, et on a bien $\alpha \in \mathrm{Br}\,\mathcal{U}$. Le résultat en découle, les flèches s_1 et s_2 du lemme 2.4.2 correspondant ici aux sections $\mathrm{Spec}\, k_v \to \mathcal{U}$ et $\mathrm{Spec}\, k(v) \to \mathcal{B}$, lesquelles sont associées respectivement au k_v-point P_v et au $k(v)$-point $P(v)$.

2.5. Fin de la preuve du théorème 2.1.1. Nous terminons la preuve du théorème 2.1.1 en appliquant dans l'ordre la proposition 2.4.1, le corollaire 2.4.3, et la proposition 2.3.2. Soit X une k-variété géométriquement intègre, projective et lisse et α un élément de n-torsion de $\mathrm{Br}(k(X))$ qui n'est pas dans $\mathrm{Br}\, X$. Appliquant la proposition 2.4.1, on obtient un ouvert non vide $\mathcal{W} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$, un $\mathcal{W}$-schéma affine lisse $\mathcal{V}$ (qui est un ouvert non vide d'un modèle projectif lisse de X au-dessus de $\mathscr{W}$) et un sous-schéma fermé $\mathscr{B}$ de codimension 1 de $\mathscr{V}$, intègre et lisse, vérifiant $\alpha \in \operatorname{Br} \mathscr{U}$ (où $\mathscr{U} = \mathscr{V} \backslash \mathscr{B}$). Si $\mathscr{I}$ est le résidu de α au point générique de $\mathscr{B}$, la proposition 2.4.1 nous permet aussi d'imposer que $\mathscr{I}$ est un élément non nul de $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{B}, \mathbf{Z}/n)$, et que n est premier aux caractéristiques résiduelles de $\mathscr{W}$. Nous sommes donc dans les conditions d'application du corollaire 2.4.3 (et quitte à réduire encore $\mathscr{V}$ autour du point générique de $\mathscr{B}$, nous pouvons supposer que l'ouvert ω donné par ce corollaire est égal à $\mathscr{V}$ tout entier). Ainsi, il nous suffit maintenant pour prouver le théorème 2.1.1 de trouver (pour une infinité de places v) un point $P(v)$ de $\mathscr{B}(k(v))$ tel que la fibre ∂ de $\mathscr{I}$ en $P(v)$ soit un élément non nul de $H^1(k(v), \mathbf{Z}/n)$, et de relever $P(v)$ en un k_v-point de $\mathscr{U}$ tel que la $\mathscr{B}$-multiplicité e de la section s: $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_v) \to \mathscr{V}$ associée soit 1 (puisque le corollaire 2.4.3 nous dit que $\delta_v(\alpha(P_v)) = e\partial$). La première condition va découler de la proposition 2.3.2 et la deuxieme du lemme de Hensel.

Soit κ le corps des fonctions de $\mathscr{B}$. En prenant l'image J de $\mathscr{I}$ dans $H^1(\kappa, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \operatorname{Hom}_{\text{cont}}(\operatorname{Gal}(\bar{\kappa}/\kappa), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, on peut trouver une extension cyclique non triviale de corps κ'/κ tel que J soit un générateur de $\operatorname{Hom}(\operatorname{Gal}(\kappa'/\kappa), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Ensuite, on peut trouver un revêtement étale cyclique connexe $\mathscr{Y}$ d'un ouvert de Zariski non vide Ω de $\mathscr{B}$ dont la fibre générique est $\operatorname{Spec} \kappa' \to \operatorname{Spec} \kappa$. Ainsi, le revêtement $\mathscr{Y}$ de Ω est étale cyclique connexe d'ordre $m \geqslant 2$. La fibre générique Y de $\mathscr{Y}$ est une k-variété intègre. Nous pouvons alors trouver un ensemble infini I de places de k (avec I disjoint de S) comme dans la proposition 2.3.2. D'après cette proposition, pour toute place v de I, on pourra trouver un $k(v)$-point lisse $P(v)$ dans Ω, tel que la fibre en $P(v)$ du revêtement $\mathscr{Y} \to \Omega$ reste connexe. De ce fait, l'élément ∂ de $H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ obtenu en prenant la fibre en $P(v)$ de $\mathscr{I} \in H^1_{\text{ét}}(\mathscr{B}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est d'ordre $m \geqslant 2$ dans $H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, donc $\partial \neq 0$.

Maintenant, rappelons qu'on a $\mathscr{V} = \operatorname{Spec} R$ et $\mathscr{B} = \operatorname{Spec}(R/t)$. Fixons une uniformisante π_v de $\mathscr{O}_v$ et posons $\mathscr{B}'^v = \operatorname{Spec}(R'/(t - \pi_v))$, où $R' = R \otimes_{\mathscr{O}_{k,S}} \mathscr{O}_v$. Alors, les $k(v)$-fibres du $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_v)$-schéma $\mathscr{B}'^v$ et de $\mathscr{B}$ sont isomorphes. Ainsi, par le lemme de Hensel, on peut relever $P(v)$ en un k_v-point de $\mathscr{B}'^v$, c'est-à-dire que $P(v)$ se relève en un k_v-point P_v de $\mathscr{V}$ tel que la multiplicité e de la section s: $\operatorname{Spec}(\mathscr{O}_v) \to \mathscr{V}$ associée à P_v est 1 (rappelons en effet que c'est la valuation de l'image de t par l'homomorphisme $R \to \mathscr{O}_v$ induit par s). Ceci achève la preuve.

2.6. Lien avec l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible. Nous démontrons ici un corollaire du théorème 2.1.1, qui sera très utile en vue d'applications arithmétiques.

COROLLAIRE 2.6.1 ("Lemme formel"). *Soient k un corps de nombres et X une k-variété géometriquement intègre, projective et lisse, qui a des points dans tous les complétés de k. Soient $A_1, \ldots, A_r$ des éléments de* $\operatorname{Br}(k(X))$, *et U un ouvert de Zariski non vide de X tel que tous les A_i soient dans* $\operatorname{Br} U$. *Soit S un ensemble fini de places de k. On note j_v l'invariant local de* $\operatorname{Br} k_v$ *dans* $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. *Alors:*

- *S'il n'y a pas obstruction de Manin au principe de Hasse associée a $(A_1, \ldots, A_r)$ pour X, il existe $T \supset S$ et une famille de points locaux $(P_v)_{v \in T}$ avec $P_v \in U(k_v)$*

tels que:

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\} \qquad \sum_{v \in T} j_v(A_i(P_v)) = 0.$$

- *S'il n'y a pas obstruction de Manin à l'approximation faible associée à $(A_1, \ldots, A_r)$ pour X, alors pour toute famille $(P_v)_{v \in S}$ telle que $P_v \in U(k_v)$, il existe $T \supset S$ et une famille de points locaux $(P_v)_{v \in T \setminus S}$ (avec $P_v \in U(k_v)$ pour toute place v dans T) tels que:*

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\} \qquad \sum_{v \in T} j_v(A_i(P_v)) = 0.$$

Preuve. Nous noterons multiplicativement la loi du groupe $\mathrm{Br}(k(X))$ (car on a vu que ses éléments s'interprêtent comme des fonctions dans le cas où X devient rationnelle sur une extension cyclique de k).

Soit (pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$) n_i l'ordre de A_i dans $\mathrm{Br}(k(X))$. Si v est une place de k, on note E_v le sous-ensemble de $\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ constitué des $(j_v(A_i(P'_v)))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ pour $P'_v \in U(k_v)$. Soit Γ le sous-groupe de $\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ engendré par les éléments de $\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ qui appartiennent à une infinité de E_v. D'après la definition de Γ, il existe un ensemble fini S' de places de k tel que pour toute v non dans S' et tout P'_v dans $U(k_v)$, on ait $(j_v(A_i(P'_v)))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ élément de Γ. Soit $(P_v)_{v \in \Omega_k}$ un élément de $\prod_{v \in \Omega_k} U(k_v)$. Soit S un ensemble fini de places de k contenant S' et soit W_S l'élément de $\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ dont la i-ème composante est $\sum_{v \in S} j_v(A_i(P_v))$. Deux cas sont possibles:

- Si W_S est dans Γ, on a $-W_S = W_1 + \cdots + W_r$ où les W_l $(1 \leqslant l \leqslant r)$ sont des éléments de $\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ qui appartiennent à une infinité de E_v. Ainsi, il existe des places deux à deux distinctes $v_1, \ldots, v_j$ de k, qui ne sont pas dans S, et telles que W_l soit dans E_{v_l} pour $1 \leqslant l \leqslant r$. En notant alors S'' l'ensemble des v_l $(1 \leqslant l \leqslant r)$ et $T = S \cup S''$, on voit, en prenant pour P_{v_l} un point de $U(k_{v_l})$ tel que $(j_{v_l}(A_i(P_{v_l})))_{1 \leqslant i \leqslant r} = W_l$, qu'on a bien $\sum_{v \in T} j_v(A_i(P_v)) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$.
- Si W_S n'est pas dans Γ, il existe un caractère (c'est-à-dire ici un morphisme vers $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$) du groupe $\prod_{1 \leqslant i \leqslant r}(\mathbf{Z}/n_i\mathbf{Z})$ qui est nul sur Γ mais ne s'annule pas en W_S (c'est immédiat à partir des propositions 1 et 2 de [45], VI). Ainsi, il existe des entiers α_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ tels que $\sum_{v \in S} j_v(\prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}(P_v))$ soit non nul dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, tandis que pour tout élément $(h_1, \ldots, h_r)$ de Γ, on a $\sum_{i=1}^r \alpha_i h_i = 0$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Or, pour toute v non dans S' et tout P'_v dans $U(k_v)$, on a $(j_v(A_i(P'_v)))_{1 \leqslant i \leqslant r}$ élément de Γ ce qui implique que $j_v(\prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}(P'_v))$ est nul dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. D'après le théorème 2.1.1, l'élément $A = \prod_{i=1}^r A_i^{\alpha_i}$ de $\mathrm{Br}(k(X))$ est dans $\mathrm{Br}\, X$ et on a $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v))$ non nul dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Maintenant, s'il n'y a pas obstruction de Manin au principe de Hasse associée à $(A_1, \ldots, A_r)$ pour X, on peut trouver $(P_v)_{v \in \Omega_k}$ dans $\prod_{v \in \Omega_k} U(k_v)$ tel que pour tout élément B de $\mathrm{Br}\, X$, on ait $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(B(P_v))$ nul. Ainsi, on est forcément dans le premier des deux cas envisagés ci-dessus. De même, s'il n'y a pas obstruction de Manin à l'approximation faible, on sait que pour tout élément $(P_v)_{v \in \Omega_k}$ de $\prod_{v \in \Omega_k} U(k_v)$, on est encore dans le premier cas. Ceci achève la preuve.

3. Un théorème de comparaison entre groupes de Brauer.

3.1. Rappels géométriques. Soient F un corps algébriquement clos de caractéristique zéro. Soit p un entier naturel non nul. Le p-ième nombre de Betti $h^p(Z, \mathcal{O}_Z)$ est un invariant birationnel des F-variétés Z qui sont intègres projectives et lisses (pour le voir, on se ramène au cas $F = \mathbf{C}$ par le principe de Lefschetz et la théorie de Hodge donne alors l'isomorphisme $H^p(Z, \mathcal{O}_Z) \simeq H^0(Z, \Omega^p)$ d'où on déduit le résultat). En particulier, quand Z est unirationnelle, ces nombres sont nuls. Le groupe $\operatorname{Br} Z$ est également un invariant birationnel (voir les rappels de 1.2.). Rappelons enfin que la condition $\operatorname{Br} Z = 0$ implique $H^2(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$ (cf. [7], preuve de la proposition 2.11).

Rappelons également ([20], pages 313 et 461) que le sous-groupe $\operatorname{Pic}^0(Z)$ de $\operatorname{Pic} Z$ constitué des diviseurs algébriquement équivalents à zéro s'identifie au groupe des F-points d'une F-variété abélienne, la variété de Picard de Z, dont la dimension de l'espace tangent à l'origine est $h^1(Z, \mathcal{O}_Z)$. Le quotient $\operatorname{Pic} Z/\operatorname{Pic}^0(Z)$ est un groupe abélien de type fini, le groupe de Néron-Séveri $\operatorname{NS}(Z)$ de la variété Z. Or, le groupe des F-points d'une F-variété abélienne a toujours de la torsion ([40], application 3, page 62). Il en résulte que la condition $\operatorname{Pic} Z$ sans torsion implique $H^1(Z, \mathcal{O}_Z) = 0$.

Rappelons aussi le lemme suivant, classique quand l'anneau R est de valuation discrète ([8], paragraphe 3, page 229).

LEMME 3.1.1. *Soient R un anneau local régulier (intègre et noethérien) et S son spectre. Soit $\mathcal{X}$ un S-schéma projectif et lisse, à fibres géométriques intègres. Notons K le corps des fractions de R et X la fibre générique au-dessus de K du morphisme $p: \mathcal{X} \to S$. Alors, la flèche* $\operatorname{Pic}(\mathcal{X}) \to \operatorname{Pic} X$ *est un isomorphisme.*

Preuve. Comme $\mathcal{X}$ est lisse, la flèche $\operatorname{Pic}(\mathcal{X}) \to \operatorname{Pic} X$ est déjà surjective. D'autre part, considérons un diviseur intègre D de $\mathcal{X}$ qui ne rencontre pas la fibre générique. Alors, son image par p est un fermé strict de S. Comme les fibres géométriques de p sont intègres, le diviseur D est exactement l'image réciproque de ce fermé, lequel doit être de codimension 1 car D est de codimension 1 dans $\mathcal{X}$ et le morphisme p est plat. Ainsi, il suffit de prouver que pour tout point m de codimension 1 de S, la fibre $\mathcal{X}_m$ en m est un diviseur principal. Mais ceci résulte de ce que comme R est local régulier, il est factoriel ([36], théorème 48, page 142), donc $\operatorname{Pic} S = 0$ et le diviseur $\mathcal{X}_m$ est alors clairement défini sur $\mathcal{X}$ par une seule équation.

3.2. Ensembles hilbertiens. Soit B une variété géométriquement intègre sur le corps de nombres k; on dira qu'un sous-ensemble H de $B(k)$ est *hilbertien* s'il existe un ouvert de Zariski non vide U de B et un revêtement étale $\rho: Y \to U$ avec Y intègre sur k tel que H soit l'ensemble des k-points M de U pour lesquels $\rho^{-1}(M)$ est connexe. En particulier, l'ensemble des k-points d'un ouvert de Zariski non vide de B est hilbertien, et l'intersection de deux sous-ensembles hilbertiens de B contient encore un sous-ensemble hilbertien de B (cf. [32], propositions 5.1 et 5.2). Le théorème d'irréductibilité de Hilbert dit qu'un sous-ensemble hilbertien de $\mathbf{A}_k^n(k)$ est Zariski-dense. Plus précisément, Ekedahl a prouvé dans [17] une version effective dont voici une variante (la seule différence étant qu'on y suppose seulement la k-variété Y intègre et pas forcément géométriquement intègre).

PROPOSITION 3.2.1. *Soient $\mathscr{W} = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ un ouvert non vide de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ et $\mathscr{B}$ un schéma intègre. Soit $\pi\colon \mathscr{B} \to \mathscr{W}$ un morphisme dominant dont la fibre générique B est une k-variété géométriquement intègre. Soit $\rho\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{B}$ un revêtement étale tel que la fibre générique Y/k de $\pi \circ \rho$ soit intègre. Soit H l'ensemble des θ de $B(k)$ tels que la fibre de ρ en θ soit connexe. Alors, si B/k a la propriété d'approximation faible (resp. forte), il en va de même de H.*

On dit que B a la propriété d'approximation forte si l'image de $B(k)$ est dense dans le produit restreint des $B(k_v)$, où v parcourt toutes les places de k à l'exception d'une seule; par abus de langage, on dit que H a la propriété d'approximation forte si l'image de H est dense dans ce même produit restreint, et que H a la propriété d'approximation faible si l'image de H est dense dans $\prod_{v \in S} B(k_v)$ pour tout ensemble fini S de places de k.

Preuve (esquisse). Il s'agit juste de modifier légèrement la preuve du théorème 1.3 de [17], laquelle repose sur un lemme du même article que nous avons déjà rencontré (lemme 2.3.1). On utilise pour cela un argument similaire à celui de la preuve de la proposition 2.3.2. On pourra aussi consulter [38] pour le cas où B est la droite affine.

Soient K le corps des fonctions de B et K' le corps des fonctions de Y, on note L la fermeture intégrale de k dans K'. Le théorème de Tchebotarev permet de trouver un ensemble infini I de places w de L vérifiant $L(w) = k(v)$ (où l'on note encore v la place de k induite par w). Comme la variété Y contient un ouvert de Zariski non vide qui est une L-variété géométriquement intègre, on n'a plus qu'à reprendre exactement la méthode d'Ekedahl, c'est-à-dire à trouver des $L(w_i)$-points locaux de B (pour des places $(w_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ que nous prenons dans I et non plus seulement dans $\Omega_k \setminus S$) tels que la fibre de ρ en tout L-point de B assez proche de ces points locaux soit connexe. Alors, comme ces $L(w_i)$-points sont en fait des $k(v_i)$-points (où v_i est la place de k induite par w_i), on peut bien trouver un k-point (et pas seulement un L-point) de B arbitrairement proche de ces points locaux (et satisfaisant en plus les conditions d'approximation faible ou forte imposées au départ), donc tel que la fibre de ρ en ce point soit connexe.

3.3. Rappel: flèches de spécialisation entre groupes de Brauer. Les quelques lignes qui suivent sont des conséquences faciles des résultats de Grothendieck rappelés en 1.2.

Notons que quand B est une k-variété intègre, l'expression “pour presque tout point de B” signifiera toujours “pour tout point d'un ouvert de Zariski non vide de B”.

Soient X une k-variété et U un ouvert de Zariski non vide et lisse de X. Soient A un élément de $\mathrm{Br}\, U$ et m un point de U dont on note $k(m)$ le corps résiduel; on dispose de la spécialisation A_m de A en m qui est un élément de $\mathrm{Br}(k(m))$ (cf. [46], paragraphe 1).

Soient maintenant V et B deux k-variétés intègres (dont on note $k(V)$ et K les corps de fonctions respectifs) et $p: V \to B$ un morphisme dominant à fibre générique V_η géométriquement intègre. Si A est un élément de $\mathrm{Br}(k(V))$, on dispose, pour presque tout θ de B, de sa spécialisation au point générique de la fibre V_θ, soit $A_\theta \in \mathrm{Br}(k(V_\theta))$ (en effet, choisissant un ouvert de Zariski non vide et lisse U de V tel que $A \in \mathrm{Br}\, U$, presque toutes les fibres de p sont géométriquement intègres et telles que leur point générique soit dans U). Si l'on suppose de plus que A est dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$, alors A_θ est dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ pour presque tout θ de B: en effet, on se ramène, quitte à restreindre B et à utiliser la résolution des singularités d'Hironaka, au cas où p est projectif et lisse et dans ce cas on peut trouver un ouvert U contenant V_η et tel que $A \in \mathrm{Br}\, U$; ainsi, pour presque tout θ de B, on aura $A_\theta \in \mathrm{Br}\, V_\theta = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$.

Notons que si A est dans $\mathrm{Br}\, K$, alors A_θ est dans $\mathrm{Br}\, k$. Ainsi, si l'on suppose en plus que le groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\, K$ est fini, on dispose d'une flèche de spécialisation de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\, K$ dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)/\mathrm{Br}\, k$, définie pour presque tout point rationnel θ de B.

3.4. Flèches de spécialisation entre groupes de Picard. Soit R un anneau local régulier (intègre et noethérien) de corps des fractions K et dont le corps résiduel κ est de caractéristique zéro. Soit $\mathscr{X}$ un schéma projectif et lisse au-dessus de $\mathrm{Spec}\, R$, à fibres (géométriques) géométriquement intègres, dont on note X la fibre générique au-dessus de K et X_m la fibre au-dessus du point fermé de $\mathrm{Spec}\, R$. Soit R' un anneau local régulier dont le corps des fractions L est une extension finie de K et l'idéal maximal est au-dessus de celui de R (on dira alors que R' *domine* R). Le corps résiduel κ' de R' est ainsi une extension finie du corps résiduel κ de R. Notons $\mathscr{X}_{R'} = \mathscr{X} \times_R R'$ et $X_{m,\kappa'}$ la fibre de $\mathscr{X}_{R'}$ au-dessus du point fermé de $\mathrm{Spec}\, R'$. On a $\mathrm{Pic}(\mathscr{X}_{R'}) = \mathrm{Pic}(X_L)$ (lemme 3.1.1) et on dispose d'une flèche de spécialisation $\mathrm{Pic}(X_L) = \mathrm{Pic}(\mathscr{X}_{R'}) \to \mathrm{Pic}(X_{m,\kappa'})$ qui est obtenue par image réciproque (cf. [18], 20.3).

Le lemme suivant est classique quand R est de valuation discrète ([18], 20.3).

LEMME 3.4.1. *Soient R un anneau local régulier et $\mathscr{X}$ un R-schéma projectif lisse à fibres géométriquement intègres, de fibre générique X et de fibre spéciale X_m. Notons respectivement K et κ le corps des fractions et le corps résiduel de R, puis $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$ et $\overline{X_m} = X_m \times_\kappa \bar{\kappa}$. On suppose κ de caractéristique nulle. Considérons les diagrammes commutatifs:*

$$\begin{array}{ccccc} L & \longleftarrow & R' & \longrightarrow & \kappa' \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ K & \longleftarrow & R & \longrightarrow & \kappa \end{array}$$

où l'anneau local régulier R' domine R, a pour corps des fractions L et pour corps résiduel κ'.

Alors, les flèches de spécialisation $\mathrm{Pic}(X_L) = \mathrm{Pic}(\mathscr{X}_{R'}) \to \mathrm{Pic}(X_{m,\kappa'})$ *induisent par passage à la limite inductive sur ces diagrammes une flèche de spécialisation:* $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$.

Preuve. Si R'_1 et R'_2 sont deux anneaux locaux réguliers dominant R, de corps des fractions L_1 et L_2, de corps résiduels κ_1 et κ_2, il existe d'abord un anneau local R'_0 dominant R'_1 et R'_2, de corps des fractions $L_1 L_2$ (considérer un localisé de $R'_1 \otimes_R R'_2$). Maintenant, par le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, on peut trouver un anneau local régulier R_0 dominant R'_0 et de corps des fractions $L_1 L_2$. Ainsi, on dispose bien d'une limite inductive (filtrante). D'autre part, toujours à cause du théorème d'Hironaka, il existe pour toute extension finie L de K un anneau local régulier R' de corps des fractions L et dominant R. (La fermeture intégrale R_I de R dans L est un anneau semi-local et on prend pour R' un modèle régulier du localisé de R_I par rapport à l'un de ses idéaux maximaux.) Ainsi, on obtient bien une flèche définie sur $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ tout entier. D'où le résultat.

Les résultats de Grothendieck sur le relèvement des faisceaux inversibles ([21], paragraphe 5) permettent maintenant d'établir la proposition suivante, en utilisant le même genre d'arguments que dans la preuve du lemme 3.1 de [8].

PROPOSITION 3.4.2. *Soit R un anneau local régulier (intègre et noethérien) de corps des fractions K et dont le corps résiduel κ est de caractéristique zéro. Soit $\mathscr{X}$ un schéma projectif et lisse au-dessus de* Spec R, *à fibres (géométriques) géométriquement intègres, dont on note X la fibre générique au-dessus de K et X_m la fibre au-dessus du point fermé de* Spec R. *On fait l'hypothèse supplémentaire que les groupes $H^1(\overline{X_m}, \mathcal{O}_{\overline{X_m}})$ et $H^2(\overline{X_m}, \mathcal{O}_{\overline{X_m}})$ sont nuls. Alors, la flèche de spécialisation (bien définie grâce au lemme 3.4.1)* $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$ *est un isomorphisme de groupes abéliens.*

Preuve. Soient $\hat{R}$ le complété de R et $\hat{K}$ son corps des fractions. Soit $\overline{\hat{K}}$ une clôture algébrique de $\hat{K}$ contenant $\overline{K}$. En appliquant le lemme 3.4.1 à l'anneau $\hat{R}$ (qui est régulier d'après [36], 24.D, page 175) et au schéma $\mathscr{X}_{\hat{R}} = \mathscr{X} \times_R \hat{R}$, on obtient une flèche de spécialisation: $\mathrm{Pic}(\overline{X}_{\overline{\hat{K}}}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$. Or, si R' est local, régulier, et domine $\hat{R}$, il existe encore (par désingularisation de son complété) un anneau local régulier complet R'' qui domine R' et a même corps des fractions (soit L) que R'. Soit κ' le corps résiduel de R''. Les groupes $H^1(X_{m,\kappa'}, \mathcal{O}_{X_{m,\kappa'}})$ et $H^2(X_{m,\kappa'}, \mathcal{O}_{X_{m,\kappa'}})$ sont nuls. De ce fait, le corollaire 1 à la proposition 3 de [21] nous dit que la flèche de spécialisation $\mathrm{Pic}(X_L) = \mathrm{Pic}(X_{R''}) \to \mathrm{Pic}(X_{m,\kappa'})$ est un isomorphisme (vu que R'' est bien complet). Ainsi, en passant à la limite inductive, on obtient déjà que la flèche de spécialisation $\mathrm{Pic}(\overline{X}_{\overline{\hat{K}}}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$ est un isomorphisme.

Par le théorème de semi-continuité ([28], III.12.8), les groupes $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ et $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ sont encore nuls. Ainsi, d'après les rappels de 3.1., le groupe $\mathrm{Pic}(\overline{X}_{\overline{\hat{K}}})$

est isomorphe à $\mathrm{NS}(\overline{X}_{\overline{K}})$ qui est lui-même isomorphe à $\mathrm{NS}(\overline{X}) = \mathrm{Pic}\,\overline{X})$ (le groupe de Néron-Séveri ne change pas par extension de corps de base algébriquement clos). Finalement, la flèche de spécialisation $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$ est aussi un isomorphisme de groupes, ce qui achève la preuve.

3.5. Une propriété des flèches de spécialisation. Nous en venons au résultat principal de cette section 3.

THÉORÈME 3.5.1. *Soient k un corps de nombres et V une k-variété intègre. Soient B une k-variété géométriquement intègre et $p\colon V \to B$ un k-morphisme dominant. Notant K le corps des fonctions de B, on suppose que la fibre générique V_η est une K-variété géométriquement intègre et on note $\overline{V}_\eta$ la $\overline{K}$-variété $V_\eta \times_K \overline{K}$.*

Si X est un modèle projectif lisse de V_η au-dessus de K et $\overline{X} = X \times_K \overline{K}$, on suppose aussi que $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ *est nul et que* $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ *est sans torsion. Enfin, on fait en plus l'une des deux hypothèses suivantes:*

1. *Le corps K est le corps $k(T)$.*
2. *La fibre générique V_η possède un K-point lisse.*

Alors, il existe un sous-ensemble hilbertien H de $B(k)$ tel que pour tout point m de H, la flèche de spécialisation $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\,K \to \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_m)/k)/\mathrm{Br}\,k$ *est un isomorphisme de groupes abéliens finis (V_m désigne la fibre en m).*

Preuve du théorème 3.5.1. Comme la caractéristique de K est nulle, on peut, par le théorème de résolution des singularités d'Hironaka, trouver d'abord un modèle projectif lisse Z_η de V_η au-dessus de K. Ensuite, on peut trouver un modèle projectif $Z \to B$ de $Z_\eta \to \mathrm{Spec}\,K$. Si V_η possède un K-point lisse, alors Z_η possède un K-point (à cause du lemme de Nishimura). Ainsi, comme le groupe de Brauer non ramifié est un invariant birationnel, nous nous ramenons au cas où le morphisme p est projectif avec V_η lisse. Nous noterons désormais X la K-variété projective lisse V_η; on a $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = 0$ (d'après les rappels de 3.1.) et $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathrm{NS}(\overline{X})$ est sans torsion, donc libre de type fini. Ainsi, le groupe $H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ est fini donc on a déjà que $\mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}\,K$ (qui en est un sous-groupe, voir les rappels de 1.2.) est fini. On peut trouver un ouvert de Zariski lisse U_1 de B tel que la fibre de p au-dessus de tout point (fermé ou non) de U_1 soit lisse et géométriquement intègre, et tel qu'on dispose, pour tout point rationnel m de U_1 de la flèche de spécialisation $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\,K \to \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_m)/k)/\mathrm{Br}\,k$ (voir les rappels de 3.3.). On peut également supposer que le morphisme induit $p^{-1}(U_1) \to U_1$ est lisse.

Le théorème de semi-continuité ([28], III.12.8) assure qu'il existe un ouvert de Zariski non vide U de B (avec $U \subset U_1$) tel que pour tout point m de U, dont on note la fibre X_m, les groupes $H^1(\overline{X_m}, \mathcal{O}_{\overline{X_m}})$ et $H^2(\overline{X_m}, \mathcal{O}_{\overline{X_m}})$ soient encore nuls.

Considérons alors un point rationnel m de U dont on note R l'anneau local (c'est un anneau local régulier puisque U est un ouvert lisse de B). Le corps résiduel de R est k. Soit $\mathscr{X} \to \mathrm{Spec}\,R$ un modèle projectif, lisse de V au-dessus de $\mathrm{Spec}\,R$. La fibre générique est X, la fibre au-dessus du point fermé de $\mathrm{Spec}\,R$ est X_m. D'après la proposition 3.4.2, la flèche de spécialisation $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$ est un isomorphisme de groupes abéliens.

Maintenant, pour tout entier $n \geqslant 1$, la suite exacte de Kummer en cohomologie étale donne les suites exactes

$$0 \to \mathrm{Pic}(\overline{X})/n \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_n) \to {}_n\mathrm{Br}\,\overline{X} \to 0$$

$$0 \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})/n \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X_m}, \mu_n) \to {}_n\mathrm{Br}\,\overline{X_m} \to 0$$

et d'autre part, le théorème de spécialisation lisse en cohomologie étale ([37], corollaire 4.2.) nous dit que les groupes $H^2_{\text{ét}}(\overline{X}, \mu_n)$ et $H^2_{\text{ét}}(\overline{X_m}, \mu_n)$ sont isomorphes. Comme d'autre part le groupe $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ est nul et les groupes $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ et $\mathrm{Pic}(\overline{X_m})$ sont isomorphes, on obtient finalement que les groupes $\mathrm{Pic}(\overline{X_m})/n$ et $H^2_{\text{ét}}(\overline{X_m}, \mu_n)$ sont isomorphes. Or, il s'agit de groupes finis donc dans la deuxième des suites exactes ci-dessus, l'injection $\mathrm{Pic}(\overline{X_m})/n \to H^2_{\text{ét}}(\overline{X_m}, \mu_n)$ est aussi surjective, c'est-à-dire que ${}_n\mathrm{Br}\,\overline{X_m}$ est nul. Finalement, on obtient que le groupe $\mathrm{Br}\,\overline{X_m}$ est nul (puisque c'est toujours un groupe de torsion).

Alors, on peut trouver une extension finie galoisienne L de K telle que X_L possède un L-point avec en plus $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathrm{Pic}(X_L)$. Au corps L correspond un revêtement séparable $\rho\colon Y \to U$ (avec Y intègre sur k) de groupe $\mathrm{Gal}(L/K)$, que nous pouvons supposer étale avec Y lisse (quitte à restreindre encore U et Y). Par définition, il existe un sous-ensemble hilbertien H de $U(k)$ tel que pour tout point m de H, la fibre de ρ en m soit connexe. Soit m un tel point, appliquons ce qui précède à m. Il y a un unique point fermé m' de Y au-dessus de m et l'anneau local R' de Y en m' est régulier, de corps des fractions L. Soit k' son corps résiduel. La fermeture intégrale de R dans L est R' et on a un isomorphisme $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(k'/k)$. La flèche de spécialisation $\mathrm{Pic}(\mathscr{X}_{R'}) \to \mathrm{Pic}(X_{m,k'})$ est compatible avec les actions respectives de $\mathrm{Gal}(L/K)$ et $\mathrm{Gal}(k'/k)$. D'autre part, on a vu que la flèche $\mathrm{Pic}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$ est un isomorphisme de groupes donc comme $\mathrm{Pic}(\overline{X}) = \mathrm{Pic}(X_L)$, cette flèche est en fait à valeurs dans $\mathrm{Pic}(X_{m,k'})$ donc $\mathrm{Pic}(X_{m,k'}) = \mathrm{Pic}(\overline{X_m})$ et on obtient donc un isomorphisme de spécialisation de $H^1(\mathrm{Gal}(L/K), \mathrm{Pic}(X_L))$ sur $H^1(\mathrm{Gal}(k'/k), \mathrm{Pic}(X_{m,k'}))$ qui est en fait un isomorphisme de $H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ sur $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X_m}))$: en effet, comme X_L possède un L-point, on a, en notant $G_L = \mathrm{Gal}(\overline{K}/L)$, l'égalité $\mathrm{Pic}(\overline{X})^{G_L} = \mathrm{Pic}(X_L)$.

Or, pour toute variété géométriquement intègre projective et lisse Z sur un corps F de caractéristique 0, et telle que $\mathrm{Br}\,\overline{Z} = 0$, on a (cf. rappels de 1.2.) la suite exacte:

$$\mathrm{Br}\,F \to \mathrm{Br}\,Z \xrightarrow{\chi} H^1(F, \mathrm{Pic}(\overline{Z})) \to H^3(F, \mathbf{G}_m) \to H^3_{\text{ét}}(Z, \mathbf{G}_m).$$

En particulier, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{X})) & \xrightarrow{\sigma_1} & H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X_m})) \\ \uparrow{\scriptstyle \chi} & & \uparrow{\scriptstyle \chi} \\ \mathrm{Br}\,X/\mathrm{Br}\,K & \xrightarrow{\sigma_2} & \mathrm{Br}\,X_m/\mathrm{Br}\,k \end{array}$$

où σ_1 est l'isomorphisme de spécialisation défini plus haut et σ_2 la flèche de spécialisation (dont on a rappelé la définition au paragraphe 3.3.). Ce diagramme commute au signe près (d'après la description explicite de χ, que l'on peut trouver au paragraphe 3.1 de [11], et des flèches de spécialisation entre groupes de Picard, qui sont obtenues par image réciproque).

Comme k est un corps de nombres, le groupe $H^3(k, \mathbf{G}_m)$ est nul. Pour conclure que σ_2 est un isomorphisme de $\mathrm{Br}\, X/\mathrm{Br}\, K$ sur $\mathrm{Br}\, X_m/\mathrm{Br}\, k$ (ce qui donnera le résultat voulu, vu que $\mathrm{Br}\, X$ n'est autre que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$ et $\mathrm{Br}\, X_m$ est égal à $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_m)/k)$), il ne reste donc plus maintenant qu'à prouver que la flèche $H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(K, \mathbf{G}_m)$ est nulle. Or, si X possède un K-point, le morphisme structural de X vers $\mathrm{Spec}\, K$ admet une section ce qui fait que la flèche $H^3(K, \mathbf{G}_m) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ est injective donc on a le résultat dans ce cas.

Enfin, quand $K = k(T)$, alors $H^3(K, \mathbf{G}_m)$ est nul (ce qui permet de conclure). Ceci résulte de la suite exacte de Faddeev

$$H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(k(T), \mathbf{G}_m) \to \bigoplus_{P \in \mathbf{A}_k^{1(1)}} H^2(k(P), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

et de ce que pour tout corps de nombres k', le groupe $H^2(k', \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est nul ([43], 4.1). Rappelons qu'on obtient cette suite exacte de Faddeev en écrivant la suite exacte de $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$-modules

$$0 \to \bar{k}^* \to \bar{k}(T)^* \to \mathrm{Div}(\mathbf{A}^1_{\bar{k}}) = \bigoplus_{P \in \mathbf{A}_{\bar{k}}^{1(1)}} \mathbf{Z}.P \to 0$$

(quand V est une variété pure, la notation $V^{(1)}$ désigne l'ensemble de ses points de codimension 1).

En effet, le corps $\bar{k}(T)$ est C_1 d'après le théorème de Tsen, donc de dimension cohomologique 1. De ce fait, on a $H^3(k(T), \mathbf{G}_m) = H^3(k, \bar{k}(T)^*)$ ce qui permet d'obtenir la suite exacte de Faddeev en prenant la cohomologie galoisienne de la suite exacte précédente et en utilisant les identifications habituelles $H^3(k(P), \mathbf{Z}) \simeq H^2(k(P), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Remarques.

- La conclusion du théorème précédent peut se reformuler sous la forme: il existe un ensemble fini $\{A_1, \ldots, A_r\}$ d'éléments de $\mathrm{Br}(k(V))$ qui engendrent (modulo $\mathrm{Br}\, K$) $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$, et un sous-ensemble hilbertien H de $B(k)$, tels que pour tout point m de H, les A_i induisent des éléments $A_{i,m}$ de $\mathrm{Br}(k(V_m))$ qui engendrent $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_m)/k)$ (modulo $\mathrm{Br}\, k$).
- L'hypothèse $K = k(T)$ n'intervient en fait que parce que l'on a besoin d'avoir $H^3(K, \mathbf{G}_m) = 0$. Si l'on n'a pas l'une des hypothèses 1 ou 2 du théorème 3.5.1, on peut quand meme conclure que pour tout point m de l'ensemble hilbertien H, on a un isomorphisme de $H^1(K, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ sur $H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X_m}))$.
- Rappelons que $\mathrm{Pic}\, \overline{X}$ est, à addition près d'un $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-module de permutation, un invariant K-birationnel (cf. [11], appendice 2A).

- Quand V_η est une variété rationnelle, on a bien $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ nul (d'après les rappels de 1.2.) et $\mathrm{Pic}\,\overline{X}$ est sans torsion. Quand V_η est une intersection complète lisse de dimension au moins 3 dans $\mathbf{P}^r_K$, on a encore $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ nul et le $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$-module $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ est même de permutation ([7], exemple 3.11). Ainsi, dans ce cas, on a $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\,K = 0$. C'est dans ces deux cas que nous utiliserons le théorème 3.5.1 en vue d'applications arithmétiques.

4. Applications arithmétiques. Dans cette section, nous établissons, sous certaines conditions, que l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour une variété V dont les fibres (pour certains morphismes) ont cette même propriété. Il s'agit donc d'une généralisation de la méthode des fibrations telle qu'elle est utilisée par exemple dans [12], [9], ou [48].

4.1. Un lemme. On établit ici un résultat qui garantira l'existence de points locaux (vérifiant certaines conditions) dans les fibres. Ce lemme est donc un raffinement de celui que prouve Skorobogatov dans [48] (théorème 1, troisième étape). On note toujours Ω_k l'ensemble des places du corps de nombres k et pour toute place v non archimédienne de k, on note $\mathcal{O}_v$ l'anneau des entiers de k_v et $k(v)$ son corps résiduel. On note de même $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers de k.

LEMME 4.1.1. *Soient V une k-variété géométriquement intègre et $p\colon V \to \mathbf{A}^1_k$ un morphisme projectif, surjectif, à fibres géométriquement intègres. Soient U un ouvert de Zariski non vide de V et Λ un ensemble fini d'éléments de* $\mathrm{Br}\,U$.

Alors, il existe un ensemble fini S de places de k et un ensemble fini E d'éléments de $\mathrm{Br}(k(T)) \cap \mathrm{Br}\,U$ tels que si S' est un ensemble fini de places de k contenant S, il existe un ensemble fini de places $v_1, \ldots, v_l$ qui ne sont pas dans S' et un élément θ_i de $\mathcal{O}_{v_i}$ (pour tout i de $\{1, \ldots, l\}$) ayant la propriété suivante:

Si $\theta \in k$ est un S'-entier tel que $v_i(\theta - \theta_i) \geqslant 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$ et si la fibre $V_\theta \cap U$ possède des points locaux lisses M_v pour $v \in S'$ vérifiant $\sum_{v \in S'} j_v(A(M_v)) = 0$ pour $A \in (\Lambda \cup E)$, alors $V_\theta \cap U$ possède des points locaux lisses P_v pour $v \in \Omega_k$ vérifiant

$$\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) = 0 \qquad \textit{pour } A \in (\Lambda \cup E).$$

Remarque. Le morphisme p induit une flèche $\mathrm{Br}(k(T)) \to \mathrm{Br}(k(V))$; par abus de notation, on désigne encore par $\mathrm{Br}(k(T))$ l'image de $\mathrm{Br}(k(T))$ par cette flèche, ce qui permet par exemple de parler du sous-groupe $\mathrm{Br}(k(T)) \cap \mathrm{Br}\,U$ de $\mathrm{Br}(k(V))$.

Preuve. On peut supposer l'ouvert U lisse. Soit Z son complémentaire, on peut écrire $Z = Z_1 \cup Z_2$, où les composantes irréductibles du fermé Z_1 dominent $\mathbf{A}^1_k$ tandis que Z_2 est contenu dans la réunion d'un ensemble fini de fibres $V_{m_1}, \ldots, V_{m_l}$ (et nous pouvons supposer que Z_2 est exactement la réunion des V_{m_i}). Notons $k_i \simeq k[T]/P_i(T)$ le corps résiduel de $\mathbf{A}^1_k$ en m_i (où P_i est un polynôme irréductible unitaire de $k[T]$). Pour tout i de $\{1, \ldots, l\}$ et tout A de Λ, on dispose du résidu $\partial_{A,i}$ de A au point générique de V_{m_i}. Soit K_i le corps des fonctions de V_{m_i} (qui est géométriquement intègre). Pour i fixé, les $\partial_{A,i}$ (avec $A \in \Lambda$) engendrent un sous-groupe fini G_i de $H^1(K_i, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, qui est donc de la forme $H^1(\mathrm{Gal}(K_i'/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, où K_i' est une extension abélienne finie de K_i. Soit L_i la fermeture intégrale de k_i dans K_i'. On dispose du sous-groupe $G_i' = H^1(\mathrm{Gal}(K_iL_i/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq H^1(\mathrm{Gal}(L_i/k_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de G_i. Rappelons la suite exacte de Faddeev (que l'on obtient comme à la fin de la preuve du théorème 3.5.1, mais en utilisant la cohomologie galoisienne de degré 2 et non plus 3)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Br}\, k \longrightarrow \mathrm{Br}(k(T)) \xrightarrow{\{\partial_P\}} \bigoplus_{P \in \mathbf{A}_k^{(1)}} H^1(k(P), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \longrightarrow 0.$$

D'après cette suite, on peut trouver un ensemble fini E_i d'éléments de $\mathrm{Br}(k(T))$ qui ne sont ramifiés qu'au point m_i de $\mathbf{A}_k^1$ et dont les résidus respectifs en m_i sont précisément les éléments de $H^1(\mathrm{Gal}(L_i/k_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. On pose alors $E = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant l} E_i$. Les éléments de E peuvent ainsi également se voir comme des éléments de $\mathrm{Br}\, U$.

On peut trouver un ensemble fini S_1 de places de k (contenant toutes les places archimédiennes et toutes les places ramifiées dans les extensions L_i/k) tel que si $\mathscr{W}_1 = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S_1})$, la variété V admette un modèle projectif $\mathscr{V}$ au-dessus de $\mathbf{A}^1_{\mathscr{W}_1}$ et U s'étende en un ouvert lisse $\mathscr{U}$ au-dessus de $\mathbf{A}^1_{\mathscr{W}_1}$. Les fibres V_{m_i} s'étendent de même en $\mathscr{V}_{m_i}$ et le fermé Z_1 en $\mathscr{Z}_1$. On peut également supposer, quitte à augmenter S_1 que toutes les fibres de $\mathscr{V} \to \mathbf{A}^1_{\mathscr{W}_1}$ sont géométriquement intègres, et que les réductions modulo v des fibres $\mathscr{V}_{m_i}$ sont deux à deux disjointes pour $v \notin S$, avec $\mathscr{V}_{m_i} \cap \mathscr{U} = \varnothing$. On supposera enfin que les éléments de $(\Lambda \cup E) \subset \mathrm{Br}\, U$ s'étendent en des éléments de $\mathrm{Br}\, \mathscr{U}$, que le polynôme $P_i(T)$ (pour $1 \leqslant i \leqslant l$) est dans $\mathcal{O}_{k,S_1}$ et que sa réduction modulo v est un polynôme séparable pour v non dans S_1.

On peut trouver pour tout i de $\{1, \ldots, l\}$ un ouvert lisse $\mathscr{U}_i$ de $\mathscr{V}_{m_i}$ (avec $\mathscr{U}_i$ ne rencontrant pas $\mathscr{Z}_1$) tel que les éléments de $H^1(\mathrm{Gal}(K_i'/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ soient en fait dans $H^1_{\text{ét}}(\mathscr{U}_i, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Quitte à élargir encore S_1, nous supposerons aussi que toutes les composantes irréductibles de $\mathscr{F}_i = \mathscr{V}_{m_i} \backslash \mathscr{U}_i$ dominent $\mathscr{W}_1$.

Notons que comme p est dominant et V intègre, le schéma V est plat sur $\mathbf{A}_k^1$ ([28], III.9.7). De même, le schéma Z_1 est plat sur $\mathbf{A}_k^1$ et par le caractère ouvert de la platitude ([22], 11.1.1), on peut supposer quitte à agrandir encore S_1 que les schémas $\mathscr{V}$ et $\mathscr{Z}_1$ sont plats sur $\mathbf{A}^1_{\mathscr{W}_1}$. De même, on peut supposer que les schémas $\mathscr{V}_{m_i}$ et $\mathscr{F}_i$ sont plats sur $\mathscr{W}_1$.

Or, le degré et la dimension sont constants dans une famille plate et projective car dans une telle famille, le polynôme de Hilbert est constant ([28], III.9.9). On en déduit, par le théorème de Lang-Weil, qu'il existe un ensemble fini S de places de k contenant S_1 tel que:

- si $v \notin S$ et $i \in \{1, \ldots, l\}$, le schéma $\widetilde{\mathscr{U}}_i^v$ (réduction modulo v de $\mathscr{U}_i$) possède un $k(v)$-point.
- si $\theta \in k = \mathbf{A}_k^1(k)$ est un S-entier, alors $\widetilde{\mathscr{V}}_\theta^v$ possède un $k(v)$-point hors de $\mathscr{Z}_1$ pour toute place v de k non dans S.

Ainsi, si $\theta \in k$ est un S-entier et si v est une place de k qui n'est pas dans S, la fibre $\tilde{\mathscr{V}}_\theta^v$ possède toujours un $k(v)$-point lisse $M(v)$ (soit dans l'un des $\tilde{\mathscr{U}}_i^v$ soit dans $\tilde{\mathscr{U}}^v$, selon qu'il existe i tel que $v(P_i(\theta)) > 0$ ou que $v(P_i(\theta)) = 0$ pour tout i de $\{1, \ldots, l\}$); on peut alors relever $M(v)$ (par le lemme de Hensel) en un k_v-point lisse M_v de $U \cap V_\theta$ dès que θ n'est pas l'un des m_i. On posera $\mathscr{W} = \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$.

Notons que nous pouvons aussi supposer qu'il existe (pour tout i de $\{1, \ldots, l\}$) un revêtement étale $\mathscr{Y}_i$ de $\mathscr{U}_i$ de groupe $\operatorname{Gal}(K_i'/K_i)$, se factorisant par un revêtement étale $\mathscr{Y}_i \to \mathscr{Y}_i'$ de groupe $\operatorname{Gal}(K_i'/K_i L_i)$ (avec $\mathscr{Y}_i' = \mathscr{Y}_i \times_{\mathscr{W}} \mathscr{W}_i'$, où $\mathscr{W}_i'$ est l'image réciproque de $\mathscr{W}$ par la flèche $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{L_i} \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_k$).

Maintenant, si nous considérons le revêtement $\mathscr{Y}_i \to \mathscr{Y}_i'$, sa fibre générique est géométriquement intègre sur L_i car L_i est intégralement clos dans K_i'. Le lemme 2.3.1 (que l'on a déjà utilisé plusieurs fois dans cet article) nous dit que $\mathscr{Y}_i'$ possède pour tout élément σ de $\operatorname{Gal}(K_i'/K_i L_i)$, et pour presque toute place w de L_i, des $k(w)$-points $Q(w)$ tels que le Frobenius en $Q(w)$ (associé au revêtement $\mathscr{Y}_i \to \mathscr{Y}_i'$) soit σ. Nous supposerons donc que ceci est réalisé pour toute place w de L_i qui n'est pas au-dessus d'une place de S.

Il suffit maintenant de prouver le résultat voulu avec $S' = S$. Nous pouvons déjà (par le théorème de Tchebotarev) choisir des places v_i deux à deux distinctes de k (pour $1 \leqslant i \leqslant l$) avec $v_i \notin S$ et v_i totalement décomposée dans l'extension L_i/k.

Comme v_i est totalement décomposée dans k_i/k, l'equation $P_i(X) = 0$ a une racine (simple à cause du choix de S) dans $k(v_i)$, que l'on peut relever en un élément θ_i de k_{v_i} vérifiant $v_i(P_i(\theta_i)) = 1$. Ainsi, la condition $v_i(\theta - \theta_i) \geqslant 2$ impose $v_i(P_i(\theta)) = 1$. Nous fixerons pour la fin de la preuve un tel θ et nous supposerons qu'il vérifie les hypothèses du lemme, c'est-à-dire que la fibre $V_\theta \cap U$ possède des points locaux lisses M_v pour $v \in S$ vérifiant $\sum_{v \in S} j_v(A(M_v)) = 0$ pour $A \in (\Lambda \cup E)$. Ainsi, on a maintenant défini des points locaux lisses M_v sur $V_\theta \cap U$ pour toute place v de k.

Il s'agit alors d'évaluer $A(M_v)$ quand $A \in (\Lambda \cup E)$ et $v \notin S$. Le point M_v est bien dans U mais sa réduction $M(v)$ peut être dans l'un des $\mathscr{U}_i$ (pas dans plusieurs car les $\mathscr{U}_i$ sont disjoints deux à deux). Soit Ω_0 l'ensemble des places v de k non dans S telles que $M(v)$ soit dans $\mathscr{U}$ et Ω_i l'ensemble des places v de k non dans S telles que $M(v)$ soit dans $\mathscr{U}_i$. Alors $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_l$ réalisent une partition de $\Omega_k \backslash S$. On a en particulier $v_i \in \Omega_i$.

Nous sommes dans la situation du corollaire 2.4.3[2]: si $v \in \Omega_0$, alors $A(M_v) = 0$ et si $v \in \Omega_i$, on a

$$\delta_v(A(M_v)) = n_i(v) \partial_{A,i,M(v)}$$

où $\partial_{A,i,M(v)} \in H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est la fibre de $\partial_{A,i} \in H^1_{\text{ét}}(\mathscr{U}_i, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ en $M(v)$ et $n_i(v)$ est la "multiplicité", qui est ici égale à $v(P_i(\theta))$ (on a donc en particulier $n_i(v_i) = 1$). Le

[2] Le corollaire 2.4.3 faisant intervenir un ouvert ω sur lequel le calcul fonctionne, on peut avoir besoin de restreindre encore les $\mathscr{U}_i$ pour l'utiliser ici; nous supposerons implicitement que cela a déjà été fait à chaque fois que nous en avons besoin.

symbole δ_v désigne toujours l'isomorphisme résidu de Br k_v dans $H^1(k(v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. En d'autres termes, si l'on note $F_{i,M(v)} \in \mathrm{Gal}(K_i'/K_i)$ le Frobenius en $M(v)$ (associé au revêtement $\mathscr{Y}_i \to \mathscr{U}_i$), on a

$$j_v(A(M_v)) = n_i(v)\partial_{A,i}(F_{i,M(v)})$$

(on notera ici additivement les groupes $\mathrm{Gal}(K_i'/K_i)$).

Soient maintenant i dans $\{1, \ldots, l\}$ et A dans Λ. Montrons qu'on a déjà forcément $\sum_{v \in \Omega_i} n_i(v)F_{i,M(v)} \in \mathrm{Gal}(K_i'/K_iL_i)$; Soit ρ_i dans $G_i' = H^1(\mathrm{Gal}(K_iL_i/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, il existe (par construction) un élément A_i de $E_i \subset \mathrm{Br}(k(T)) \cap \mathrm{Br}\, U$ dont le seul point de ramification sur $\mathbf{A}_k^1$ est m_i et dont le résidu en m_i est précisément ρ_i. Comme la spécialisation de $A_i \in \mathrm{Br}(k(T)) \cap \mathrm{Br}\, U$ à la fibre $V_\theta \cap U$ est dans Br k, on a $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A_i(M_v)) = 0$ donc comme on a imposé $\sum_{v \in S} j_v(A_i(M_v)) = 0$ (vu que A_i est dans E), on a aussi $\sum_{v \notin S} j_v(A_i(M_v)) = 0$ soit $\sum_{v \in \Omega_i} j_v(A_i(M_v)) = 0$ soit $\rho_i(\sum_{v \in \Omega_i} n_i(v)F_{i,M(v)}) = 0$ (et ce pour tout ρ_i de G_i'), ce qui implique bien $\sum_{v \in \Omega_i} n_i(v)F_{i,M(v)} \in \mathrm{Gal}(K_i'/K_iL_i)$.

Comme $L_i(w) = k(v_i)$ pour toute place w de L_i au-dessus de v_i, le choix de S fait plus haut (grâce au lemme 2.3.1) nous dit qu'on peut trouver (pour tout i de $\{1, \ldots, l\}$) un $k(v_i)$-point $P(v_i)$ dans $\mathscr{U}_i$ tel qu'on ait

$$F_{i,P(v_i)} = F_{i,M(v_i)} - \sum_{v \in \Omega_i} n_i(v)F_{i,M(v)}.$$

Relevons $P(v_i)$ en un k_{v_i}-point lisse P_{v_i} de $V_\theta \cap U$, remplaçons M_{v_i} par P_{v_i} et posons $P_v = M_v$ quand v n'est pas l'une des v_i. Alors, comme la multiplicité $n_i(v_i)$ était 1, on a bien

$$\forall i \in \{1, \ldots, l\}\ \forall A \in (\Lambda \cup E) \qquad \sum_{v \in \Omega_i} j_v(A(P_v)) = 0$$

car

$$\sum_{v \in \Omega_i} j_v(A(P_v)) = \partial_{A,i}\left(\sum_{v \in \Omega_i} n_i(v)F_{i,P(v)}\right) = \partial_{A,i}(0) = 0$$

puis

$$\forall A \in (\Lambda \cup E) \qquad \sum_{v \notin S} j_v(A(P_v)) = 0.$$

Et enfin, comme pour A dans $(\Lambda \cup E)$, on a la condition $\sum_{v \in S} j_v(A(P_v)) = 0$, on conclut que

$$\forall A \in (\Lambda \cup E) \qquad \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) = 0$$

ce qui termine la preuve du lemme 4.1.1.

Remarque. Supposons Λ réduit à un seul élément B, dont le résidu au point générique d'une des fibres V_{m_i} est un générateur de $H^1(\mathrm{Gal}(K_i'/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, où K_i' est une extension non triviale de K_iL_i. Alors, comme à la fin de la preuve du lemme 4.1.1, on pouvait imposer que $F_{i,P(v_i)}$ soit n'importe quel élément de $\mathrm{Gal}(K_i'/K_iL_i)$, on déduit dans ce cas particulier le fait suivant (qui est le pendant du lemme 4.1.1):

Il existe un ensemble fini S de places de k et un ensemble fini E d'éléments de $\mathrm{Br}(k(T)) \cap \mathrm{Br}\, U$ tels que si $S' \supset S$ est un ensemble fini de places de k, il existe un ensemble fini de places $v_1, \ldots, v_l$ qui ne sont pas dans S' et un élément θ_i de $\mathcal{O}_{v_i}$ (pour tout i de $\{1, \ldots, l\}$) ayant la propriété:

Si $\theta \in k$ est un S'-entier tel que $v_i(\theta - \theta_i) \geqslant 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$ et si la fibre $V_\theta \cap U$ possède des points locaux lisses M_v pour $v \in S'$ vérifiant $\sum_{v \in S'} j_v(A(M_v)) = 0$ pour $A \in (\Lambda \cup E)$, alors $V_\theta \cap U$ possède des points locaux lisses P_v pour $v \in \Omega_k$ vérifiant

$$\sum_{v \in \Omega_k} j_v(B(P_v)) \neq 0.$$

4.2. Principe de Hasse pour les fibrés au-dessus de la droite affine. Notre principal but ici est de démontrer un résultat dans l'esprit du théorème 1 de [48]. Nous allons établir le théorème suivant.

THÉORÈME 4.2.1. *Soient V une k-variété géométriquement intègre et $p: V \to \mathbf{A}_k^1$ un morphisme projectif, surjectif, à fibres géométriquement intègres. Soit $K = k(T)$ le corps des fonctions de $\mathbf{A}_k^1$ et X un modèle projectif lisse de la fibre générique V_η de p, dont on suppose qu'elle admet un $\bar{k}(T)$-point lisse.*

On fait l'hypothèse que $\mathrm{Br}\, \bar{X}$ *est nul et que* $\mathrm{Pic}(\bar{X})$ *est sans torsion (c'est le cas par exemple si la variété V_η est rationnelle ou bien est une intersection complète lisse de dimension au moins 3 dans $\mathbf{P}_K^r$).*

On suppose enfin qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $k = \mathbf{A}_k^1(k)$ tel que pour tout point θ de H, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Remarque. Rappelons (cf. [48], remarques, page 209) que la condition que la fibre générique possède un $\bar{k}(T)$-point lisse est automatiquement réalisée si cette fibre générique est une surface rationnelle lisse, une quadrique lisse, une hypersurface cubique lisse de dimension au moins 2, ou encore une intersection lisse de m quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$ avec $n \geqslant 2m$: ceci résulte de ce que le corps $\bar{k}(T)$ est C_1 (théorème de Tsen). En particulier, cette condition sera réalisée dans les exemples que nous traiterons dans la cinquième partie de cet article.

Preuve du théorème 4.2.1. Nous allons adapter la méthode qu'utilise Skorobogatov dans [48].

Soit $\Lambda = \{A_1, \ldots, A_r\}$ un ensemble fini d'éléments de $\mathrm{Br}(k(V))$ qui engendrent (modulo $\mathrm{Br}\, K$) $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$. Soit U un ouvert de Zariski de V inclus dans l'ouvert de lissité de V et tel que pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$, on ait $A_i \in \mathrm{Br}\, U$. Soit M'_v un point de $U(k_v)$ pour $v \in \Omega_k$ et S_1 un ensemble fini de places de k. Nous pouvons alors trouver un ensemble fini $S \supset S_1$ de places de k et un ensemble fini E d'éléments de $\mathrm{Br}\, K \cap \mathrm{Br}\, U$ comme dans le lemme 4.1.1. S'il n'y a pas obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) pour les modèles projectifs lisses de V, on peut supposer, quitte à modifier certains M'_v avec $v \in \Omega_k$ (resp. avec $v \notin S$) qu'il existe un ensemble fini $S_2 \supset S$ de places de k tel que pour tout A de $\Gamma = \Lambda \cup E$, on ait $\sum_{v \in S_2} j_v(A(M'_v)) = 0$: cela découle du "lemme formel" (corollaire 2.6.1.).

Soit $H' \subset H$ un sous-ensemble hilbertien de k, tel que pour tout point θ de H', les $A_{i,\theta}$ engendrent $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ modulo $\mathrm{Br}\, k$ (les hypothèses permettent bien d'appliquer le théorème 3.5.1). Comme V_η possède un $\bar{k}(T)$-point lisse, il existe une extension finie galoisienne F de k vérifiant: V_η possède un $F(T)$-point lisse $P(T)$. Comme $\Gamma \subset \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$, on dispose, pour A dans Γ, de $A(P(T)) \in \mathrm{Br}\, F(T)$ (voir rappel à la fin du paragraphe 1.2). Mais d'après le théorème de Tsen, le corps $\bar{k}(T)$ est C_1 (donc de groupe de Brauer nul) et il existe une extension finie galoisienne L de K telle que l'image de $A(P(T))$ dans $\mathrm{Br}(L(T))$ soit nulle pour tout A de Γ. D'après le théorème de Tchebotarev, il existe une infinité de places de k totalement décomposées dans l'extension L/k. Choisissons une telle place w non dans S_2, alors toutes les k-fibres au-dessus d'un ouvert non vide W de $\mathbf{A}^1_k$ ont un k_w-point lisse P_w tel que $j_w(A(P_w)) = 0$ pour tout A de Γ. On choisit alors un ensemble fini $v_1, \ldots, v_l$ de places de E non dans $S' = S_2 \cup \{w\}$ et un élément θ_i de $\mathcal{O}_{v_i}$ (pour tout i de $\{1, \ldots, l\}$) comme dans le lemme 4.1.1.

Alors, comme on a le théorème d'approximation forte pour les ensembles hilbertiens (proposition 3.2.1), on peut approcher $p(M'_v)$ pour v dans S_2 par un θ de $W \cap H'$ qui est un S'-entier, et tel que $v(\theta - \theta_i) \geqslant 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant l$; l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de V_θ, et les $A_{i,\theta}$ engendrent $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ modulo $\mathrm{Br}\, k$. Par le théorème des fonctions implicites, on obtient alors (cf., par exemple, [12], preuve de la proposition 3.9), pour $v \in S_2$, des k_v-points lisses M_v sur V_θ arbitrairement proches de M'_v (donc en particulier dans $U(k_v)$). Comme $\sum_{v \in S_2} j_v(A(M'_v)) = 0$ pour A dans Γ, on peut supposer (quitte à rapprocher encore θ des $p(M'_v)$ et les M_v des M'_v) que $\sum_{v \in S_2} j_v(A(M_v)) = 0$ pour A dans Γ. On a aussi vu que V_θ a un k_w-point lisse M_w tel que $j_w(A(M_w)) = 0$ pour tout A de Γ, donc on a finalement $\sum_{v \in S'} j_v(A(M_v)) = 0$ pour A dans Γ. Ainsi, d'après le lemme 4.1.1, on dispose pour toute place v de k d'un k_v-point lisse P_v de $(V_\theta \cap U)$ vérifiant $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A_{i,\theta}(P_v)) = 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$ et comme les $A_{i,\theta}$ engendrent $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ modulo $\mathrm{Br}\, k$, il en résulte que l'on peut trouver un k-point lisse (resp. un k-point lisse arbitrairement proche des M'_v pour v dans S_2) sur V_θ puisque l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les modèles projectifs lisses de V_θ. Ceci achève la preuve.

Remarque. Il serait intéressant (à l'instar de Skorobogatov dans [48]) d'établir le même type de résultat en remplaçant la droite affine par l'espace affine $\mathbf{A}^n_k$ mais on se heurte au problème que le théorème 3.5.1 ne s'applique a priori pas. Il est cependant facile de voir que le théorème 4.2.1 est encore valable dans ce cas si l'on fait l'hypothèse plus forte que le groupe de Brauer non ramifié de la fibre générique de p est tué par passage à une extension du type $L(T_1, \ldots, T_n)$ de $k(T_1, \ldots, T_n)$, où L est une extension cyclique de k (le théorème 3.5.1 fonctionnant encore parce qu'en prenant L cyclique, on a $H^3(\mathrm{Gal}(L/k), L^*) = 0$).

4.3. Cas d'une fibration admettant une section. Quand la fibre générique admet un K-point lisse, on n'a plus besoin d'avoir l'hypothèse que toutes les fibres sont géométriquement intègres et on peut également prouver le résultat avec une base quelconque vérifiant l'approximation faible. Ceci fait l'objet du théorème suivant.

THÉORÈME 4.3.1. *Soient V et B deux k-variétés géometriquement intègres, avec B_{lisse} satisfaisant l'approximation faible et p: $V \to B$ un morphisme dominant. Soit K le corps des fonctions de B, on suppose que la fibre générique V_η de p est géométriquement intègre, possède un K-point lisse, et que pour un modèle projectif lisse X/K de V_η, on a* $\mathrm{Br}\,\overline{X}$ *nul et* $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ *sans torsion.*

On suppose enfin qu'il existe un sous-ensemble hilbertien H de $B(k)$ tel que pour tout point θ de H, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ. Alors, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Remarque. Bien entendu, la variété V a ici automatiquement des k-points lisses; seul le problème de l'approximation faible se pose.

Preuve. Soit encore $\{A_1, \ldots, A_r\}$ un ensemble fini d'éléments de $\mathrm{Br}(k(V))$ qui engendrent (modulo $\mathrm{Br}\,K$) $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$ et $H' \subset H$ un sous-ensemble hilbertien de $B_{\text{lisse}}(k)$, tel que pour tout point rationnel θ de H', les $A_{i,\theta}$ engendrent le groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)/\mathrm{Br}\,k$ (là encore le théorème 3.5.1 s'applique bien). Par hypothèse, V_η a un K-point lisse $P(\eta)$. Pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$ on dispose de $A_i(P(\eta))$ qui est un élément A'_i de $\mathrm{Br}(k(\eta))$ et quitte à remplacer A_i par $A_i - A'_i$, nous pouvons supposer que $A_i(P(\eta)) = 0$. Il existe un ouvert de Zariski W de B tel que $P(\eta)$ induise une k-section s de p sur W telle que pour $t \in W$, on ait $s(t)$ dans le lieu lisse de V_t.

Soit U un ouvert de Zariski de $V_{\text{lisse}} \cap p^{-1}(B_{\text{lisse}})$ tel que pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$, on ait A_i dans $\mathrm{Br}\,U$. Soit P_v un point de $U(k_v)$ pour $v \in \Omega_k$ et S un ensemble fini de places de k. S'il n'y a pas obstruction de Manin à l'approximation faible associée à $(A_1, \ldots, A_r)$ pour les modèles projectifs lisses de V, on peut encore supposer, quitte à élargir S, que pour tout i de $\{1, \ldots, r\}$, on a $\sum_{v \in S} j_v(A_i(P_v)) = 0$ (grâce au corollaire 2.6.1). On trouve alors un point θ de $H' \cap W(k)$ arbitrairement proche de $M_v = p(P_v)$ pour $v \in S$. La fibre en θ admet alors des k_v-points lisses P'_v (pour $v \in S$) arbitrairement proches des P_v, donc tels que $\sum_{v \in S} j_v(A_i(P'_v)) = 0$. La section s induit un k-point lisse P sur V_θ tel que pour tout i on ait $A_i(P) = 0$. Posons $P'_v = P$ pour $v \notin S$, il vient: $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A_i(P'_v)) = 0$. Comme l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V_θ, le résultat est prouvé.

Remarque. Dans les exemples qui suivent, quand nous appliquerons les théorèmes 4.2.1 et 4.3.1, nous pourrons toujours prendre comme ensemble hilbertien de fibres pour lesquelles l'obstruction de Manin est la seule l'ensemble des k-points d'un ouvert de Zariski non vide de la base.

5. Exemples d'application. Nous présentons divers exemples d'application des théorèmes 4.2.1 et 4.3.1.

5.1. Approximation faible pour les hypersurfaces cubiques possédant deux points singuliers conjugués. Soit X une k-hypersurface cubique de $\mathbf{P}_k^n$, géométriquement intègre, non conique, possédant un ensemble globalement rationnel de deux points singuliers conjugués. Notons que X possède une droite k-rationnelle, et donc satisfait automatiquement le principe de Hasse. Nous allons en fait appliquer nos résultats pour répondre complètement à la question posée dans la remarque 9.8.3 de [12], en montrant que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour X. Notons que X est (d'après la proposition 9.8 de [12]) k-birationnelle soit à $\mathbf{P}_k^{n-1}$, soit à une hypersurface affine de $\mathbf{A}_k^n$ dont l'équation est du type

$$y^2 - az^2 = P(x_1, \ldots, x_{n-2}) \tag{1}$$

où $a \in k^* \backslash k^{*^2}$ et P est un polynôme non nul de degré au plus quatre. C'est plus généralement pour ce type d'hypersurfaces que nous avons le résultat suivant.

PROPOSITION 5.1.1. *Soient k un corps de nombres et a un élément de $k^* \backslash k^{*^2}$. Soit V la k-hypersurface de $\mathbf{A}_k^n$ ($n \geqslant 3$) d'équation*

$$y^2 - az^2 = P(x_1, \ldots, x_{n-2}) \tag{2}$$

où P est un polynôme non nul de degré au plus quatre. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de V.

Remarque. Quand P est irréductible, ou contient un facteur irréductible de degré 3, le principe de Hasse et l'approximation faible valent automatiquement ([12], théorème 9.3).

Preuve de la proposition 5.1.1. Soit $m = (n - 2)$. Pour $m = 1$ (cas des surfaces de Châtelet), le résultat est connu: c'est un théorème prouvé par Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer ([12], théorème 8.11); nous supposerons donc $m \geqslant 2$. Quitte à faire un changement de variables k-linéaire, on peut supposer que P est de la forme

$$P(x_1, \ldots, x_m) = cx_1^D + \sum_{i=1}^{D} Q_i(x_2, \ldots, x_m)x_1^{D-i}$$

où $c \in k^*$ et D est le degré total de P. Nous procédons par récurrence en supposant le résultat connu pour $m-1$.

La variété V est fibrée (via x_m) au-dessus de $\mathbf{A}_k^1$. Notons p le morphisme associé, toutes les fibres de p sont des variétés géométriquement intègres, et par hypothèse de récurrence, l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule pour leurs modèles projectifs lisses. Soit V' la k-variété définie dans $\mathbf{P}_k^{m+1} \times_k \mathbf{A}_k^1$ par l'equation

$$t^2(y^2 - az^2) = t^4 P(x_1/t, \ldots, x_{m-1}/t, x_m).$$

La variété V' est k-birationnelle à V. Elle est encore fibrée via x_m au-dessus de $\mathbf{A}_k^1$, le morphisme p' associé étant cette fois projectif. Les fibres de p' sont bien géométriquement intègres, ce sont des modèles projectifs de celles de p. En particulier, la fibre générique V'_η de p', qui est $k(\sqrt{a})(\eta)$-rationnelle, a des $k(\sqrt{a})(\eta)$-points lisses. Nous pouvons alors conclure en appliquant le théorème 4.2.1 au morphisme p'.

On peut dans cet exemple calculer explicitement le groupe de Brauer d'un modèle projectif lisse X de V. Il est facile de voir qu'il est trivial quand le polynôme P est irréductible, ou contient un facteur irréductible de degré 3, ce qui n'est pas surprenant vu que le principe de Hasse et l'approximation faible valent automatiquement dans ce cas. Le cas le plus compliqué est celui où le polynôme P est produit de deux facteurs f, g, irréductibles de degré 2. Soient $\varphi(x_1, \ldots, x_m, t)$ et $\psi(x_1, \ldots, x_m, t)$ les formes quadratiques obtenues en homogénéisant ces deux facteurs, supposons que l'intersection de leurs noyaux est réduite à zéro (condition qui traduit qu'"il ne manque pas une variable"). Appelons forme quadratique de type (T) une k-forme de rang 2 isomorphe à $\langle \alpha, -a\alpha \rangle$ avec α dans k^*. Dans ces conditions, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 5.1.2. *Soit V la k-hypersurface de $\mathbf{A}_k^{m+2}$ d'équation*

$$y^2 - az^2 = f(x_1, \ldots, x_m) g(x_1, \ldots, x_m)$$

avec $a \in k^* \backslash k^{*2}$, les polynômes f et g étant irréductibles de degré 2 et premiers entre eux. Supposons que leurs homogénéisés respectifs $\varphi(x_1, \ldots, x_m, t)$ et $\psi(x_1, \ldots, x_m, t)$ aient l'intersection de leurs noyaux réduite à $\{0\}$. Soit X un modèle projectif lisse de V. Alors:

- *Si $m \geqslant 4$, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X.*
- *Si $m = 3$, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X dès qu'il n'existe pas λ, μ dans k^* tels que la forme $Q = \lambda\varphi + \mu\psi$, ainsi que les restrictions de φ et ψ au noyau de Q, soient de type (T).*
- *Si $m = 2$, supposons de plus que les coniques définies par φ et ψ sont lisses et se coupent transversalement. Alors, le principe de Hasse et l'approximation faible valent pour X dès que l'intersection des coniques définies par φ et ψ ne consiste ni en deux paires de points conjugués dans $k(\sqrt{a})$, ni en quatre points conjugués tels que l'extension de degré quatre associée contienne $k(\sqrt{a})$.*

Preuve (esquisse). Ces résultats découlent du calcul de Br X. Ce calcul, ainsi que le traitement de tous les cas résiduels non couverts par la proposition précédente, est fait dans [27], où l'on trouvera aussi des contre-exemples explicites au principe de Hasse et à l'approximation faible dans les cas exceptionnels de la proposition 5.1.2. Une autre approche du problème du principe de Hasse et de l'approximation faible (n'utilisant pas le théorème 4.2.1) est développée dans [26]; la méthode de calcul de Br X y est également décrite.

5.2. Intersections complètes dans $\mathbf{P}_k^n$ *de dimension au moins* 3. Il s'agit ici de se ramener, au moyen de sections hyperplanes, à des résultats connus (ou conjecturés) pour les surfaces. On dispose tout d'abord du résultat suivant (dû à Zak) qui va permettre d'appliquer le théorème 4.2.1.

PROPOSITION 5.2.1. *Soit $X \subset \mathbf{P}_k^m$ une intersection complète, géométriquement intègre et lisse, de dimension n. Soit Y une section hyperplane de X. Alors, les singularités de Y sont en nombre fini. En particulier, si X est de dimension au moins* 3, *la variété Y est géométriquement intègre.*

Preuve. [19], remarque 7.5.

Nous en déduisons deux propositions.

PROPOSITION 5.2.2. *Soit X une hypersurface cubique lisse dans* $\mathbf{P}_k^{n+1}$ ($n \geqslant 3$). *Si la conjecture que l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les surfaces cubiques lisses est vraie, X satisfait le principe de Hasse (resp. l'approximation faible).*

Preuve. Supposons d'abord $n = 3$. Soit H_0 un hyperplan de $\mathbf{P}_k^4$ tel que $X \cap H_0$ soit lisse (H_0 existe à cause du théorème de Bertini). Considérons une sous-variété linéaire $\mathscr{V}$ de dimension 1 de la variété des hyperplans de $\mathbf{P}_k^4$ telle que $H_0 \in \mathscr{V}$; la variété $\mathscr{V}$ est isomorphe à $\mathbf{P}_k^1$. Notons X' l'ouvert de X constitué de X privée des points base du systéme linéaire $\mathscr{V}$. Soit V la sous-variété de $X \times_k \mathscr{V}$ constituée des (x, λ) tels que l'hyperplan λ passe par x. Alors, la variété V est k-birationnelle à X (considérer le morphisme $V \to X$ induit par la projection $X \times_k \mathscr{V} \to X$, il induit un isomorphisme de V' sur X', où V' est l'ouvert de V constitué des (x', λ) avec $x' \in X'$), il suffit donc de prouver le résultat pour V. Or, la projection $V \to \mathscr{V}$ est un morphisme projectif, surjectif. La fibre en un point λ de $\mathbf{P}_k^1$ est isomorphe à la section hyperplane $X \cap \lambda$, elle est donc géométriquement intègre d'après la proposition 5.2.1. La fibre générique est une surface cubique lisse (car $X \cap H_0$ était lisse), donc c'est une variété rationnelle ([35, théorème 24.1). Ainsi, il existe un ouvert de Zariski non vide U de $\mathbf{P}_k^1$ tel que la fibre au-dessus de tout k-point de U soit une surface cubique lisse, pour laquelle l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est conjecturalement la seule. Le résultat découle alors du théorème 4.2.1 et du fait que comme X est une intersection complète lisse, de dimension au moins 3, le groupe Br X est trivial (c'est-à-dire réduit à Br k).

Pour traiter le cas $n > 3$, on procède par récurrence sur n en utilisant exactement la même méthode, vu qu'une section hyperplane générique est une intersection complète lisse de dimension au moins 3, ce qui permet bien d'appliquer le théorème 4.2.1.

PROPOSITION 5.2.3. *Soit X une intersection complète, lisse, de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$ ($n \geqslant 5$). Si la conjecture que l'obstruction de Manin au principe de Hasse est la seule pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$ est vraie, alors X satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.*

Remarque. Cet énoncé a déjà été établi (en utilisant des calculs explicites de groupe de Brauer) dans un texte de 1986 (non publié) de Colliot-Thélène et Sansuc.

Preuve. Notons d'abord que Salberger et Skorobogatov ont démontré dans [41] que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$ possédant un point rationnel, ce qui fait que la conjecture de la proposition implique la conjecture analogue pour l'approximation faible. D'autre part, la proposition 5.2.1 assure encore que les sections hyperplanes de X sont géométriquement intègres. Le cas $n = 5$ se traite alors exactement par la même methode que l'exemple précédent, vu que les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^r$ ($r \geqslant 4$) sont des variétés rationnelles. On en déduit par récurrence le cas $n > 5$.

Quelques cas particuliers de ces propositions sont intéressants à étudier et font l'objet des paragraphes suivants.

5.2.1. Cas des hypersurfaces cubiques diagonales. Dans le particulier des surfaces cubiques diagonales, il semble raisonnable de conjecturer que l'obstruction de Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible est la seule. Ce problème a déjà été discuté dans [30] et [5], avec notamment des résultats de tests numériques qui corroborent cette conjecture. Nous allons ici retrouver la proposition 7 de [5] (qui ramène le cas des hypersurfaces cubiques diagonales à celui des surfaces cubiques diagonales) comme un corollaire immédiat du théorème 4.2.1 (en particulier sans avoir besoin de faire des calculs explicites de groupes de Brauer).

PROPOSITION 5.2.4. *Si la conjecture que l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour les surfaces cubiques diagonales est vraie, alors les hypersurfaces cubiques diagonales de dimension au moins 3 satisfont le principe de Hasse (resp. l'approximation faible).*

Preuve. Soit X une hypersurface cubique diagonale de $\mathbf{P}_k^n$ ($n \geqslant 4$) d'équation

$$a_0x_0^3 + \cdots + a_nx_n^3 = 0.$$

Soit V l'ouvert de X défini par ($x_0 \neq 0$), on applique le théorème 4.2.1 au morphisme $V \to \mathbf{A}_k^1$ qui envoie $(x_0, \ldots, x_n)$ sur (x_n/x_0). Les fibres sont des hypersurfaces cubiques diagonales géométriquement intègres de $\mathbf{P}_k^{n-1}$ et la fibre générique V_η est $K(\eta)$-rationnelle (où K est une extension finie de k dans laquelle tous les a_i sont des cubes), donc les hypothèses du théorème 4.2.1 sont bien vérifiées. On conclut alors par récurrence sur n (en utilisant encore que le groupe de Brauer d'une hypersurface lisse de dimension au moins 3 est trivial).

5.2.2. Cas des hypersurfaces cubiques contenant une droite rationnelle. Salberger et Skorobogatov ont traité dans [41] le cas difficile des surfaces cubiques lisses contenant une droite rationnelle (en combinant la méthode de la descente de Colliot-Thélène et Sansuc et des méthodes de K-théorie): ils ont prouvé que pour ces surfaces, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule. En utilisant leur résultat, nous pouvons maintenant démontrer l'analogue pour les hypersurfaces.

PROPOSITION 5.2.5. *Soit X une hypersurface cubique lisse dans $\mathbf{P}_k^{n+1}$ $(n \geqslant 3)$ contenant une droite rationnelle D. Alors X satisfait l'approximation faible.*

Preuve. L'hypothèse $n \geqslant 3$ nous permet d'affirmer qu'il existe un hyperplan H_1 de $\mathbf{P}_k^{n+1}$ *contenant* D et tel que $H_1 \cap X$ soit lisse: en effet, il existe un ouvert non vide $\mathscr{U}$ de la variété $\mathscr{H}$ des hyperplans de $\mathbf{P}_k^{n+1}$ qui contiennent D (la variété $\mathscr{H}$ est isomorphe à $\mathbf{P}_k^{n-1}$) tel que pour H dans $\mathscr{U}$, la variété $H \cap X$ soit lisse en-dehors de D (c'est encore un théorème de Bertini, cf. [28], remarque 10.9.2) et d'autre part, l'ensemble des hyperplans de $\mathscr{H}$ tangents à X en un point de D est de dimension $\leqslant 1 < n - 1$.

Maintenant, on peut appliquer la même méthode que précédemment: on choisit un système linéaire $\mathscr{V}$ de dimension 1 constitué d'hyperplans de $\mathscr{H}$ et contenant un hyperplan H_1 tel que $H_1 \cap X$ soit lisse et on considère la sous-variété V de $X \times_k \mathscr{V}$ constituée des (x, λ) de $X \times_k \mathscr{V}$ tel que l'hyperplan λ passe par x. La variété V est k-birationnelle à X et on applique le théorème 4.3.1 à la projection p: $V \to \mathscr{V}$. Les fibres sont les sections de X par les hyperplans de $\mathscr{V}$. Ainsi, d'après ce qu'on a vu plus haut, la fibre générique de p est une hypersurface cubique lisse géométriquement intègre. Cette fibre générique possède évidemment des $k(T)$-points puisqu'elle contient D. Alors, presque toutes les k-fibres sont des hypersurfaces cubiques lisses de dimension $n - 1$ contenant la droite rationnelle D, et le théorème 4.3.1 joint au résultat de Salberger et Skorobogatov permet de conclure par récurrence sur n que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour X. Le résultat découle de ce que comme n est au moins égal à 3, le groupe Br X est trivial.

5.2.3. Intersections lisses de deux quadriques contenant une conique. Soit X une intersection lisse de deux quadriques dans P_k^4 contenant une conique définie sur k. Alors, l'obstruction de Manin au principe de Hasse (resp. à l'approximation faible) est la seule pour X: en effet, c'est une conséquence, comme l'a remarqué Salberger, du résultat analogue pour les surfaces fibrées en coniques de degré 4 ([2], théorème 2). Debbache a établi dans [16] le principe de Hasse et l'approximation faible pour les intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$ contenant une conique définie sur k dans le cas $n = 7$, et Salberger (dans une note non publiée de 1991), a étendu ce résultat à $n \geqslant 5$. C'est ce que nous allons retrouver ici, l'avantage d'utiliser le théorème 4.2.1 étant qu'aucun calcul explicite de groupe de Brauer n'est nécessaire pour faire fonctionner la méthode.

PROPOSITION 5.2.6. *Soit X une intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$ (où n est au moins égal à 5) contenant une conique C définie sur k. Alors X satisfait le principe de Hasse et l'approximation faible.*

Preuve. On utilise le fait que toutes les sections hyperplanes de X sont géométriquement intègres (à cause de la proposition 5.2.1) et qu'il existe une section hyperplane lisse de X contenant la conique C (toujours par un théorème de Bertini: la variété des hyperplans de $\mathbf{P}_k^n$ contenant le plan de la conique C est de dimension $(n-3) \geqslant 2$ alors que la variété des hyperplans tangents à X en un point de C est de dimension 1). On peut alors faire fonctionner exactement la même méthode que précédemment, en utilisant le théorème 4.2.1 au lieu du théorème 4.3.1.

5.2.4. Approximation faible pour les intersections de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^5$. Le résultat de Salberger et Skorobogatov mentionné plus haut permet de voir que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour tout modèle projectif lisse d'une intersection V de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$ (complète, géométriquement intègre et non conique) qui a un point rationnel lisse (le cas où V est singulière étant connu d'après les résultats de [14] et de [12]).

Ceci permet alors, en utilisant notre méthode, de fournir une nouvelle démonstration du résultat analogue pour les intersections de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^5$ qui avait été prouvé par Colliot-Thélène et Skorobogatov dans [13] (ce qui achevait l'étude de l'approximation faible pour les intersections de deux quadriques possédant un point rationnel lisse).

PROPOSITION 5.2.7. *Soit V une intersection complète, géométriquement intègre et non conique de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^5$ possédant un point rationnel lisse P. Alors, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour un modèle projectif lisse X de V.*

Preuve. Soient φ et ψ deux formes quadratiques en 6 variables qui définissent V. On peut supposer que toute forme du pinceau est de rang au moins 4 et que le polynôme homogène $\det(\lambda\varphi + \mu\psi)$ n'est pas identiquement nul (sinon V est k-rationnelle, voir le paragraphe 3 de [12]). Soit H un hyperplan passant par P, alors dès que H n'est pas tangent à V, le lemme 1.16 de [12] nous dit que les formes φ_H, ψ_H induites par φ et ψ sur H sont telles que $\det(\lambda\varphi + \mu\psi)$ n'est pas identiquement nul; en particulier, l'intersection des deux quadriques définies par φ_H et ψ_H n'est pas conique. D'autre part, comme V est géométriquement intègre et de dimension au moins 3, un théorème de Bertini prouvé par Coray ([15], théorème 1) dit qu'il existe un ouvert non vide U de la variété des hyperplans de

$\mathbf{P}_k^5$ passant par P tel que pour H dans U, l'intersection $V \cap H$ reste géométriquement intègre. Ainsi, on peut trouver un hyperplan H_1 dans U qui n'est pas tangent à la variété V. Alors, la variété $V \cap H_1$ est une intersection complète, géométriquement intègre, non conique, de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^4$, contenant le point rationnel *lisse* P (puisque H_1 n'est pas tangent à V en P).

De ce fait, nous pouvons encore fibrer V par un système linéaire d'hyperplans passant par M, de sorte que la fibre générique soit une intersection complète, géométriquement intègre, non conique de deux quadriques dans $\mathbf{P}^4$ contenant le point rationnel lisse M et on applique le théorème 4.3.1 pour conclure.

5.3. *Approximation faible pour les groupes algébriques linéaires.* Dans ce paragraphe, nous nous servons de l'approche utilisée par Kunyavskiĭ et Skorobogatov dans l'appendice de [48] pour retrouver dans toute sa généralité le résultat de Sansuc ([42], corollaire 8.13) qui concerne l'approximation faible pour un groupe algébrique linéaire, en n'utilisant que le résultat analogue pour les tores (qui était dejà esquissé dans [49]).

THÉORÈME 5.3.1. *Soit $\mathscr{G}$ un groupe linéaire connexe sur un corps de nombres k. Alors, l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les modèles projectifs lisses de $\mathscr{G}$.*

Preuve. Soient $\mathscr{G}_r$ le groupe réductif quotient de $\mathscr{G}$ par son radical unipotent et $\phi: \mathscr{G} \to \mathscr{G}_r$ la projection associée. Il existe un ouvert de Zariski $\mathscr{G}_0$ de $\mathscr{G}_r$, une variété k-rationnelle Y, et un morphisme surjectif $p: \mathscr{G}_0 \to Y$ dont les fibres sont des ouverts denses des tores maximaux de $\mathscr{G}_r$ (on prend pour $\mathscr{G}_0$ le sous-ensemble de $\mathscr{G}_r$ constitué des éléments réguliers semi-simples et pour Y la variété quotient de $\mathscr{G}_r$ par le normalisateur dans $\mathscr{G}_r$ de l'image par ϕ d'un tore maximal de $\mathscr{G}$. La k-rationalité de Y vient du théorème de Chevalley-Grothendieck; cf. [23], XIV.6.1). Soit T_η le tore associé à la fibre générique de p, les $k(\eta)$-points sont Zariski-denses sur T_η car d'après [23], XIII.3.4, le tore T_η est $k(\eta)$-unirationnel. Comme T_η est $\overline{k(\eta)}$-rationnel, nous sommes dans les conditions d'application du théorème 4.3.1. Or, du fait que l'obstruction de Manin à l'approximation faible est la seule pour les compactifications lisses d'un k-tore (cf. [49], 6.38), on déduit immédiatement qu'il en va de même pour les modèles projectifs lisses des fibres de p. Ainsi, avec le théorème 4.3.1, on en déduit le résultat pour les modèles projectifs lisses de $\mathscr{G}_0$ (ou $\mathscr{G}$).

6. Familles de contre-exemples non explicites à l'approximation faible.

6.1. *Un résultat général.* Le théorème 2.1.1 et les méthodes employée pour prouver le lemme 4.1.1, ainsi que les théorémes 4.2.1 et 4.3.1 permettent également de trouver très simplement des familles de contre-exemples à l'approximation faible; plus précisément, on a l'énoncé suivant.

PROPOSITION 6.1.1. *Soient V une k-variété géométriquement intègre et p: $V \to \mathbf{A}_k^1$ un morphisme projectif, surjectif, à fibres géométriquement intègres. On note*

$K = k(T)$ le corps des fonctions de $\mathbf{A}_k^1$ et on suppose que la fibre générique V_η admet un $\bar{k}(T)$-point lisse.

On suppose que V a des points lisses dans tous les complétés de k et que le groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)/k)/\mathrm{Br}\, k$ est nul (ces deux hypothèses sont par exemple vérifiées si V est k-rationnelle) mais que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\mathrm{Br}\, K$ n'est pas nul.

Alors, il existe une infinité de points rationnels θ de $\mathbf{A}_k^1$ tels qu'un modèle projectif lisse de la fibre V_θ soit un contre-exemple à l'approximation faible.

Remarque. On notera les similitudes et les différences avec les hypothèses du théorème 4.2.1.

Preuve. Choisissons A dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$ mais non dans $\mathrm{Br}\, K$, et notons U un ouvert de Zariski non vide et lisse de V tel que A soit dans $\mathrm{Br}\, U$. Il existe un ouvert de Zariski non vide W de $\mathbf{A}_k^1$ tel que pour θ dans $W(k)$, l'algèbre A induise un élément A_θ de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ (voir les rappels de 3.3.). Comme dans la preuve du lemme 4.1.1, on note $V_{m_1}, \ldots, V_{m_l}$ les fibres au point générique desquelles A est ramifiée (et on peut supposer que ces fibres ne rencontrent pas U) et K_i le corps des fonctions de V_{m_i} (qui est géométriquement intègre). Deux cas peuvent alors se présenter:

1. Supposons que pour tout i de $\{1, \ldots, l\}$, le résidu de A au point générique de V_{m_i} soit un générateur de $H^1(\mathrm{Gal}(L_iK_i/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, où L_i est une extension finie du corps résiduel k_i de $\mathbf{A}_k^1$ en m_i. Dans ce cas, on peut trouver un élément A_0 de $\mathrm{Br}\, K \cap \mathrm{Br}\, U$ tel que (pour tout i de $\{1, \ldots, l\}$) l'algèbre $B = A - A_0$ ne soit plus ramifiée aux points génériques des fibres de p (en effet, comme $H^1(\mathrm{Gal}(L_iK_i/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \simeq H^1(\mathrm{Gal}(L_i/k_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, la suite exacte de Faddeev permet de trouver un élément A_0 de $\mathrm{Br}\, K$, non ramifié sur $\mathbf{A}_k^1$ en dehors des m_i, et dont le résidu au point m_i de $\mathbf{A}_k^1$ correspond exactement au résidu de A au point générique de V_{m_i} pour $1 \leqslant i \leqslant l$). Alors, il existe un ensemble fini S de places de k tel que pour tout ensemble fini $S' \supset S$ de places de k et tout S'-entier θ de k, la fibre $V_\theta \cap U$ a, pour tout $v \notin S'$, un k_v-points lisse P_v tel que $j_v(B(P_v)) = 0$ dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ (l'argument étant exactement le même que dans la preuve du lemme 4.1.1). D'autre part, l'ouvert U a des k_v-points dans tous les complétés de k. Comme B n'est pas dans $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)/k)$ (qui est réduit à $\mathrm{Br}\, k$ alors que B n'est même pas dans $\mathrm{Br}\, K$), on peut supposer, quitte à agrandir S, qu'il existe des points $P'_v \in U(k_v)$ pour v dans S tels que $\sum_{v \in S} j_v(B(P'_v)) \neq 0$: cela résulte du théorème 2.1.1.

Comme V_η possède un $\bar{k}(T)$-point lisse, il existe une place w de k non dans S telle que pour tout point rationnel θ d'un ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{A}_k^1$ (que nous supposerons, quitte à réduire, égal à W), la fibre en θ ait un k_w-point lisse P_w vérifiant $B(P_w) = 0$ (l'argument est exactement le même que celui de la preuve du théorème 4.2.1). Par approximation forte, on trouve alors un θ dans $W(k)$, entier en dehors de $S' = S \cup \{w\}$, et arbitrairement proche de $p(P'_v)$ pour v dans S. Alors, la fibre V_θ possède pour v dans S des points lisses P_v arbitrairement proches des P'_v donc tels que $\sum_{v \in S} j_v(B(P_v)) \neq 0$. Pour v non dans $S \cup \{w\}$, on choisit un point lisse P_v dans $(V_\theta \cap U)(k_v)$ tel que $B(P_v) = 0$. Ainsi, on a finalement:

$$\sum_{v \in \Omega_k} j_v(B(P_v)) \neq 0.$$

Comme A_0 est dans $\operatorname{Br} K \cap \operatorname{Br} U$, on a $\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A_0(P_v)) = 0$ et on a finalement trouvé un élément A_θ de $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V_\theta)/k)$ et des k_v-points lisses P_v sur V_θ tels que

$$\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A_\theta(P_v)) \neq 0$$

ce qui prouve bien qu'il y a obstruction de Manin à l'approximation faible pour les modèles projectifs lisses de la fibre V_θ. Comme on peut restreindre l'ouvert W, on peut trouver un tel point θ dans tout ouvert de Zariski non vide de $\mathbf{A}^1_k$ c'est-à-dire qu'il en existe une infinité.

2. Supposons que l'on n'est pas dans le cas précédent; cela signifie qu'il existe i dans $\{1, \ldots, l\}$ tel que le résidu $\partial_{A,i}$ de A au point générique de V_{m_i} soit un générateur de $H^1(\mathrm{Gal}(K'_i/K_i), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, où K'_i est une extension non triviale de K_iL_i (on note ici L_i la fermeture intégrale de k_i dans K'_i). On peut alors appliquer la remarque qui suit la preuve du lemme 4.1.1 pour conclure: en effet, en utilisant exactement la même méthode que dans la preuve du théorème 4.2.1, on arrive bien cette fois-ci à trouver un point rationnel θ dans $W(k)$ et des points locaux lisses P_v sur $V_\theta \cap U$ tels que

$$\sum_{v \in \Omega_k} j_v(A_\theta(P_v)) \neq 0.$$

Cas où il y a une section. Si la fibre générique admet un K-point lisse, on peut alléger les hypothèses comme dans le théorème 4.3.1 et on obtient l'énoncé suivant.

PROPOSITION 6.1.2. *Soient V et B deux k-variétés géométriquement intègres, avec B_{lisse} satisfaisant l'approximation faible et $p\colon V \to B$ un morphisme dominant.*

Soit K le corps des fonctions de B, on suppose que la fibre générique V_η de p est géométriquement intègre et possède un K-point lisse.

On suppose enfin que V a des points lisses dans tous les complétés de k et que $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)/k)/\operatorname{Br} k$ *est nul mais que* $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)/\operatorname{Br} K$ *n'est pas nul.*

Alors, il existe un ensemble Zariski-dense de points rationnels θ de B tels qu'un modèle projectif lisse de la fibre V_θ soit un contre-exemple à l'approximation faible.

Preuve. On procède exactement comme dans le théorème 4.3.1 à part qu'une fois qu'on a trouvé un élément A de $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}(K(V_\eta)/K)$ qui n'est pas dans $\operatorname{Br} K$ et un point lisse $P(\eta)$ de la fibre générique V_η tel que $A(P(\eta)) = 0$, on utilise le fait que A n'est pas dans $\operatorname{Br}_{\mathrm{nr}}(k(V)/k)$ pour trouver un ensemble fini S de places de k et des points lisses P_v de $U(k_v)$ (où U est un ouvert de Zariski non vide de V tel que $A \in \operatorname{Br} U$) tels que $\sum_{v \in S} j_v(A(P_v)) \neq 0$ et non plus tels que $\sum_{v \in S} j_v(A(P_v)) = 0$.

6.2. Un exemple d'application. Soient a un élément de k^* qui n'est pas un carré et b, c, d, e des éléments de k^*. Considérons la k-hypersurface V de $\mathbf{A}_k^4$ définie par:

$$y^2 - az^2 = (tx^2 + bx + c)(x^2 + dx + e).$$

La variété V est fibrée (via t) au-dessus de $\mathbf{A}_k^1$ et toutes les fibres sont géométriquement intègres. La fibre générique est une variété $k(\sqrt{a})$-rationnelle: c'est une surface de Châtelet dont le groupe de Brauer non ramifié est (modulo $\mathrm{Br}(k(T))$) isomorphe à $\mathbf{Z}/2$ ([4], proposition 5.1). D'autre part, la variété V est k-rationnelle (t s'exprime en fonction des autres variables). Le morphisme p n'est pas projectif mais nous pouvons (comme dans la preuve de la proposition 5.1.1) compactifier ce morphisme, c'est-à-dire trouver un modèle V' de V, fibré au-dessus de $\mathbf{A}_k^1$ et dont les fibres sont des modèles projectifs de celles de p. Nous pouvons alors appliquer la proposition 6.1.1 pour en déduire qu'il existe une infinité de valeurs rationnelles de t telles que la surface de Châtelet

$$y^2 - az^2 = (tx^2 + bx + c)(x^2 + dx + e)$$

ait ses modèles lisses qui soient des contre-exemples à l'approximation faible.

Remarque. Les propositions 6.1.1 et 6.1.2 expliquent pourquoi en pratique, quand on a une famille de k-variétés dont le groupe de Brauer non ramifié est non trivial, on arrive assez facilement à trouver parmi les variétés de cette famille des contre-exemples à l'approximation faible (alors que pour le principe de Hasse, il faut en général plus d'efforts). Il serait intéressant de trouver un énoncé analogue pour le principe de Hasse mais cela semble nettement plus difficile (ne serait-ce que parce que le principe de Hasse est automatiquement vérifié si la fibre générique du morphisme p admet un K-point).

Références

[1] J. W. S. Cassels et A. Fröhlich, *Algebraic Number Theory*, Academic Press, London, 1967.

[2] J.-L. Colliot-Thélène, "Surfaces rationnelles fibrées en coniques" dans *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988–1989*, éd. C. Goldstein, Progr. Math. **91**, Birkhäuser, Boston, 1990, 43–55.

[3] ———, *L'arithmétique des variétés rationnelles*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5) **1** (1992), 295–336.

[4] J.-L. Colliot-Thélène, D. Coray, et J.-J. Sansuc, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles*, J. Reine Angew. Math. **320** (1980), 150–191.

[5] J.-L. Colliot-Thélène, D. Kanevsky, et J.-J. Sansuc, "Arithmétique des surfaces cubiques diagonales" dans *Diophantine Approximation and Transcendence Theory*, Lecture Notes in Math. **1290**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 1–108.

[6] J.-L. Colliot-Thélène et M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles: au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. Math. **97** (1989), 141–158.

[7] J.-L. Colliot-Thélène et W. Raskind, *$\mathcal{K}_2$-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.

[8] ———, *Groupe de Chow de codimension deux des variété définies sur un corps de nombres: un théorème de finitude pour la torsion*, Invent. Math. **105** (1991), 221–245.

[9] J.-L. Colliot-Thélène et P. Salberger, *Arithmetic on singular cubic hypersurfaces*, Proc. London Math. Soc. (3) **58** (1989), 519–549.

[10] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *Torseurs sous des groupes de type multiplicatif; applications à l'étude des points rationnels de certaines variétés algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. **282** (1976), 1113–1116; *Variétés de premiere descente attachées aux variétés rationelles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. **284** (1977), 967–970; *La descente sur une variété rationnelle définie sur un corps de nombres*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. **284** (1977), 1215–1218.

[11] ———, *La descente sur les variétés rationnelles II*, Duke Math. J. **54** (1987), 375–492.

[12] J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, et Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Intersection of two quadrics and Châtelet surfaces, I*, J. Reine Angew. Math. **373** (1987), 37–107; *II*, **374** (1987), 72–168.

[13] J.-L. Colliot-Thélène et A. N. Skorobogatov, *Approximation faible pour les intersections de deux quadriques en dimension 3*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. **314** (1992), 127–132.

[14] D. Coray et M. A. Tsfasman, *Arithmetic on singular Del Pezzo surfaces*, Proc. London Math. Soc. **57** (1988), 25–87.

[15] D. Coray, *Two remarks on the Bertini theorems*, non publié, 1980.

[16] A. Debbache, *Principe de Hasse pour certaines intersections de deux quadriques*, prépublication, 1990.

[17] T. Ekedahl, "An effective version of Hilbert's irreducibility theorem" dans *Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988–1989*, éd. C. Goldstein, Progr. Math. **91**, Birkhäuser, Boston, 1990, 241–248.

[18] W. Fulton, *Intersection Theory*, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3) **2**, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[19] W. Fulton et R. Lazarsfeld, "Connectivity and its applications in algebraic geometry" dans *Algebraic Geometry*, Lecture Notes in Math. **862**, Springer-Verlag, Berlin, 1981, 26–92.

[20] P. Griffiths et J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, New York, 1978.

[21] A. Grothendieck, *Géométrie algébrique et géométrie formelle*, exposé Bourbaki **182** (1958/1959), reproduit dans *Fondements de la géométrie algébrique*, Secrétariat Mathématique, Paris, 1962.

[22] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Éléments de géométrie algébrique, IV, Étude locale des schémas et des morphismes de schémas*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **28** (1966).

[23] A. Grothendieck et M. Demazure, *Séminaire de géométrie algébrique, schémas en groupes (SGA 3), II*, Lecture Notes in Math. **152**, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[24] A. Grothendieck, "Le groupe de Brauer, II" dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson-North-Holland, Amsterdam, 1968.

[25] ———, "Le groupe de Brauer, III: exemples et compléments" dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson-North-Holland, Amsterdam, 1968.

[26] D. Harari, 'Groupe de Brauer de certaines hypersurfaces" dans *Journées arithmétiques de Genève 1991*, Astérisque **209**, Soc. Math. France, Paris, 1992, 203–214.

[27] ———, *Principe de Hasse et approximation faible sur certaines hypersurfaces*, prépublication, 1993.

[28] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[29] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, I, II*, Ann. of Math. **79** (1964), 109–326.

[30] D. Kanevsky, "Application of the conjecture on the Manin obstruction to various Diophantine problem" dans *Journées arithmétiques de Besançon 1985*, Astérisque **147–148**, Soc. Math. France, Paris, 1987, 307–314.

[31] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1986.

[32] ———, *Fundamentals of Diophantine Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[33] S. Lang et A. Weil, *Number of points of varieties in finite fields*, Amer. J. Math. **76** (1954), 819–827.

[34] YU. I. MANIN, "Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne" dans *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice 1970), Tome 1*, Gauthiers-Villars, Paris, 1971, 401–411.

[35] ———, *Cubic Forms*, North-Holland, Amsterdam, 1974.

[36] H. MATSUMURA, *Commutative Algebra*, Benjamin, New York, 1980.

[37] J.-S. MILNE, *Étale Cohomology*, Princeton Math. Ser. **33**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.

[38] Y. MORITA, *A note on the Hilbert Irreducibility Theorem*, Proc. Japan acad. **66** (1990), 101–104.

[39] H. NISHIMURA, *Some remarks on rational points*, Mem. Coll. Sci. Kyoto **29** (1955), 189–192.

[40] D. MUMFORD, *Abelian Varieties*, Tata Inst. of Fundamental Research, Bombay, 1970.

[41] P. SALBERGER ET A. N. SKOROBOGATOV, *Weak approximation for surfaces defined by two quadratic forms*, Duke Math. J. **63** (1991), 517–536.

[42] J.-J. SANSUC, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. Reine Angew. Math. **327** (1981), 12–80.

[43] P. SCHNEIDER, *Über gewisse Galoiscohomologiegruppen*, Math. Z. **168**, (1979), 180–205.

[44] J.-P. SERRE, *Corps Locaux*, Hermann, Paris, 1968.

[45] ———, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[46] ———, *Spécialisation des éléments de* $\mathrm{Br}_2(\mathbf{Q}(T_1, \ldots, T_n))$, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311** (1990), 397–402.

[47] A. N. SKOROBOGATOV, *Arithmetic on certain quadric bundles of relative dimension 2*, J. Reine Angew. Math. **407** (1990), 55–74.

[48] A. N. SKOROBOGATOV, avec B. Kunyavskiĭ pour l'appendice, "On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation" dans *Séminaire de théorie des nombre de Paris 1988–1989*, éd. C. Goldstein, Progr. Math. **91**, Birkhäuser, Boston, 1990, 205–219.

[49] V. E. VOSKRESENSKIĬ, *Tores algébriques*, en russe, Nauka, Moscou, 1977.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE, 45 RUE D'ULM, 75005 PARIS, FRANCE