

Représentations linéaires des groupes finis

D. Harari

Agrégation 2015

1. Caractères des groupes abéliens finis

(Référence pour cette section : le chapitre VI. de [2], §1).

Soit G un groupe fini (dont la loi sera noté multiplicativement et le neutre 1). On va considérer dans ce cours les représentations linéaires de G , qui comme on le verra correspondent aux morphismes de groupes de G vers $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Dans le cas le plus simple où $n = 1$, on obtient ce que l'on appelle les caractères de G , qui font l'objet de cette section.

1.1. Définition, premières propriétés

Définition 1.1 Soit G un groupe fini. On appelle *caractère* de G un morphisme de G dans le groupe multiplicatif $\mathbf{C}^*$.

On notera $\widehat{G}$ l'ensemble des caractères de G . C'est de manière immédiate un groupe abélien pour la multiplication, dont le neutre est le morphisme constant égal à 1.

Exemple 1.2 Soit G un groupe cyclique dont on note n le cardinal. Choisissons un générateur s de G . Soit χ un caractère de G . Soit $a := \chi(s)$, alors a est une racine n -ième de l'unité, et on a $\chi(s^m) = a^m$ pour tout $m \in \mathbf{Z}$, ce qui montre que χ est entièrement déterminé par l'image de s . Réciproquement si a est une racine n -ième de l'unité, l'application de G dans $\mathbf{C}^*$ définie par $\chi(s^m) = a^m$ a bien un sens : en effet si $s^m = s^r$, alors $r - m$ est divisible par n puisque s est d'ordre n dans G , et donc $a^m = a^r$ vu que $a^n = 1$. On a ainsi défini un isomorphisme de $\widehat{G}$ sur $\mu_n(\mathbf{C})$, en particulier $\widehat{G}$ est isomorphe à G (mais noter que l'isomorphisme dépend du choix d'un générateur).

Proposition 1.3 Soit $\chi : G \rightarrow \mathbf{C}^*$ un caractère de G . Alors l'image de χ est contenue dans le groupe multiplicatif $\mu(\mathbf{C})$ des racines de l'unité complexes. Plus précisément, si n désigne le cardinal de G , alors $\text{Im } \chi$ est un sous-groupe du groupe $\mu_n(\mathbf{C})$ des racines n -ièmes de l'unité.

Démonstration : D'après le théorème de Lagrange, tout élément x de G vérifie $x^n = 1$. Ainsi, $1 = \chi(x^n) = (\chi(x))^n$, ce qui montre que $\chi(x) \in \mu_n(\mathbf{C})$. $\square$

Ainsi, on aurait pu définir un caractère comme un morphisme de G à valeurs dans $\mu(\mathbf{C})$ (resp. dans le groupe S^1 des complexes de module 1, resp. dans $\mu_n(\mathbf{C})$ où $n := |G|$).

Exercice 1.4 Montrer que le groupe multiplicatif $\mu(\mathbf{C})$ est isomorphe au groupe additif $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Généraliser au groupe multiplicatif $\mu(K)$ des racines de l'unité d'un corps K algébriquement clos de caractéristique zéro (plus difficile).

La proposition suivante montre que pour l'étude des caractères d'un groupe fini G , on peut toujours se ramener au cas où G est abélien.

Proposition 1.5 Soit G un groupe fini. On note $D(G)$ le sous-groupe dérivé de G et $G^{\text{ab}} := G/D(G)$. Soit χ un caractère de G . Alors :

- a) Le noyau $\text{Ker } \chi$ contient $D(G)$.
- b) Soit $\bar{\chi} : G^{\text{ab}} \rightarrow \mathbf{C}^*$ le caractère de G^{ab} induit par G via a). Alors l'application $i : \chi \mapsto \bar{\chi}$ est un isomorphisme de groupes de $\widehat{G}$ sur $\widehat{G^{\text{ab}}}$.

Rappelons que $D(G)$ est par définition le sous-groupe de G engendré par les commutateurs, i.e. par les éléments de la forme $xyx^{-1}y^{-1}$ avec $x, y \in G$. Il est immédiat que $G^{\text{ab}} = G/D(G)$ est abélien (et c'est même le plus grand quotient abélien de G , au sens où tout quotient abélien de G est lui-même un quotient de G^{ab}). On l'appelle l'abélianisé de G .

Démonstration : a) Soient $x, y \in G$. Alors on a

$$\chi(xyx^{-1}y^{-1}) = \chi(x)\chi(y)\chi(x)^{-1}\chi(y)^{-1} = 1$$

car $\mathbf{C}^*$ est abélien. Ainsi $\text{Ker } \chi$ contient l'ensemble des commutateurs, donc il contient aussi le sous-groupe engendré par cet ensemble, à savoir $D(G)$.

b) C'est une conséquence immédiate de la propriété générale : si N est un sous-groupe distingué d'un groupe G et G' est un groupe, alors un morphisme

$\bar{u}$ de G/N vers G' s'identifie à un morphisme u de G vers G' dont le noyau contient N , via la formule

$$u(x) = \bar{u}(\bar{x}), x \in G,$$

où $\bar{x}$ désigne la classe de x dans G/N .

□

On pourra donc, dans la suite de cette section consacrée aux caractères, se limiter au cas où G est abélien.

Exercice 1.6 Déterminer tous les caractères du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ pour $n \geq 3$.

1.2. Dualité

On commence par une proposition (qui serait fausse si le groupe G n'était pas abélien).

Proposition 1.7 *Soit G un groupe abélien fini. Soit H un sous-groupe de G . Alors tout caractère de H peut être prolongé en un caractère de G .*

Démonstration : On raisonne par récurrence sur l'indice $[G : H] = |G/H|$ de H dans G . Si $[G : H] = 1$, le résultat est clair car alors $H = G$. Sinon, choisissons $x \in G$ avec $x \notin H$. Comme x est d'ordre fini, il existe en particulier un plus petit entier $n > 0$ tel que $x^n \in H$. On voit alors immédiatement (via la division euclidienne de m par n) que si $m \in \mathbf{Z}$, on a $x^m \in H$ si et seulement si n divise m . Posons $h_0 = x^n$.

Soit χ un caractère de H , posons $t = \chi(x^n)$. On peut choisir $w \in \mathbf{C}^*$ tel que $w^n = t$. Notons H' le sous-groupe de G engendré par H et x . Tout élément de H' s'écrit alors $h' = hx^a$ avec $h \in H$ et $a \in \mathbf{Z}$. Cette écriture n'est pas unique, mais le point crucial est que le nombre complexe $\chi(h)w^a$ ne dépend pas de l'écriture choisie : en effet, si $h_1x^{a_1} = h_2x^{a_2}$, alors $x^{a_2-a_1} \in H$, ce qui montre que $(a_2 - a_1)$ est divisible par n ; posons alors $a_2 = a_1 + kn$ avec $k \in \mathbf{Z}$, on a $h_1 = h_2 \cdot h_0^k$, d'où

$$\chi(h_1)w^{a_1} = \chi(h_2)t^k w^{a_2} w^{-kn} = \chi(h_2)w^{a_2}$$

comme on voulait.

Il est alors immédiat que la formule $\chi(h') = \chi(h)w^a$ définit un caractère de H' qui prolonge χ . Comme H' contient strictement H puisque $x \notin H$, on a $[G : H'] < [G : H]$ et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à H' , ce qui permet de conclure.

□

Remarque 1.8 La seule propriété du groupe abélien $\mathbf{C}^*$ qu'on utilise ici est que c'est un groupe *divisible*, i.e. $x \mapsto x^n$ est surjective dans $\mathbf{C}^*$ pour tout entier $n > 0$.

Corollaire 1.9 *Soit G un groupe abélien fini. Soit H un sous-groupe de G . Soit $\rho : \widehat{G} \rightarrow \widehat{H}$ le morphisme obtenu en restreignant à H un caractère de G . Alors on a une suite exacte courte :*

$$1 \rightarrow (\widehat{G/H}) \xrightarrow{i} \widehat{G} \xrightarrow{\rho} \widehat{H} \rightarrow 1.$$

Rappelons qu'une telle suite (avec trois termes non égaux au groupe trivial) est exacte si on a : i injective, ρ surjective, et $\text{Ker } \rho = \text{Im } i$. Ici ρ est défini en associant à un caractère χ de G sa restriction à H , et i s'obtient en associant à un caractère $\bar{\chi}$ de G/H le caractère de G défini par $x \mapsto \bar{\chi}(\bar{x})$ (cf. preuve de la Prop. 1.5).

Démonstration : Le noyau de ρ est constitué des caractères de G dont le noyau contient H , qui correspondent exactement à $i(G/H)$ via le théorème de factorisation (cf. preuve de la Prop. 1.5). La surjectivité de ρ est exactement la proposition 1.7. L'injectivité de i est évidente.

□

Exercice 1.10 a) Donner un contre-exemple à la Prop. 1.7 si G n'est plus supposé abélien (on suppose encore H abélien).

b) (difficile) La Prop. 1.7 est-elle valable si G et H sont des groupes abéliens, mais pas forcément finis ?

Théorème 1.11 *Soit G un groupe abélien fini. Le groupe $\widehat{G}$ est un groupe abélien fini, avec $|G| = |\widehat{G}|$.*

Démonstration : On raisonne par récurrence sur $n := |G|$. Le cas $n = 1$ est trivial. Si $n \geq 2$, on peut trouver un sous-groupe cyclique H non trivial de G (prendre le sous-groupe engendré par un élément de G autre que le neutre). Le corollaire 1.9 donne

$$|\widehat{G}| = |(\widehat{G/H})| \cdot |\widehat{H}|.$$

Cette égalité est en effet une propriété générale des suites exactes courtes : observer que ρ est un morphisme surjectif, dont le noyau est isomorphe à $(\widehat{G/H})$ par injectivité de i ; on applique alors la formule $|\text{Ker } f| \cdot |\text{Im } f| = |A|$, valable pour tout morphisme de groupes $f : A \rightarrow B$ avec A fini.

On a aussi $|\widehat{H}| = |H|$ car H est cyclique (cf. exemple 1.2), et l'hypothèse de récurrence donne $|(\widehat{G/H})| = |G/H|$. On conclut avec l'égalité

$$|G| = |G/H| \cdot |H|.$$

□

Par analogie avec la dualité en algèbre linéaire, on dit que $\widehat{G}$ est le groupe *dual* de G .

Proposition 1.12 *Soit G un groupe abélien fini. Soit $\varepsilon : G \rightarrow \widehat{\widehat{G}}$ le morphisme qui envoie $x \in G$ sur le caractère $\chi \mapsto \chi(x)$ de $\widehat{G}$. Alors ε est un isomorphisme.*

Démonstration : D'après le théorème 1.11, il suffit de montrer que ε est injective. Soit $x \neq 1$ dans G . Le groupe cyclique H engendré par x est non trivial, d'où (cf. exemple 1.2) un caractère χ de H avec $\chi(x) \neq 1$. D'après la Prop. 1.7, χ s'étend en un caractère χ_G de G , qui vérifie donc $\chi_G(x) \neq 1$; ceci montre que $\varepsilon(x)$ est non trivial puisque ce caractère de $\widehat{G}$ ne s'annule pas en χ_G .

□

Exercice 1.13 En utilisant le théorème de structure des groupes abéliens finis, montrer que le dual $\widehat{G}$ d'un groupe fini G est isomorphe à G (mais l'isomorphisme, contrairement à celui de la Prop. 1.12, dépend de divers choix, notamment de générateurs de groupes cycliques. La situation est la même que pour la dualité en algèbre linéaire).

Exercice 1.14 (sera généralisé plus tard aux représentations de dimension finie quelconque d'un groupe fini) Soit G un groupe abélien fini de cardinal n . Soit $\chi \in \widehat{G}$ un caractère *non trivial*. Alors on a

$$\sum_{x \in G} \chi(x) = 0$$

(choisir $y \in G$ tel que $\chi(y) \neq 1$ et calculer $\chi(y) \sum_{x \in G} \chi(x)$). En utilisant la Prop. 1.12, montrer que si $x \in G$ est différent de 1, alors

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) = 0.$$

Développement 1.15 (Leçons 102, 104, 107, 110) La Prop. 1.7, avec le Cor 1.9 et le Th. 1.11. S'il reste un peu de temps, on peut ajouter un contre-exemple comme dans l'exercice 1.10, ou encore la Prop. 1.12. Réf : [2], §1.

2. Représentations linéaires, généralités

(Référence pour cette section : le chapitre 1 de [1]).

2.1. Définitions, premiers exemples

Dans toute la suite, G désignera un groupe fini (pas forcément commutatif), noté multiplicativement. Si V est un espace vectoriel de dimension finie n sur le corps des complexes $\mathbf{C}$, on note comme d'habitude $\mathrm{GL}(V)$ le groupe des applications linéaires bijectives de V dans V , muni de la loi $\circ$ (qu'on notera souvent également multiplicativement). Le choix d'une base de V permet alors d'identifier $\mathrm{GL}(V)$ au groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ des matrices inversibles complexes de taille n .

Définition 2.1 Soit G un groupe fini. Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Une *représentation linéaire* (ou simplement représentation) ρ de G dans V est un morphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$. On dit que V est l'*espace* de la représentation ρ et n son *degré*.

Ainsi une représentation est la donnée d'une application $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}(V)$, vérifiant

$$\rho(st) = \rho(s)\rho(t)$$

pour tous $s, t \in G$. En particulier, on a $\rho(1) = 1$ et $\rho(s^{-1}) = \rho(s)^{-1}$ pour tout $s \in G$. On dira parfois par abus que " V est une représentation de G " (le morphisme ρ étant sous-entendu). Si on choisit une base de V , on peut se donner ρ via la matrice M_s de $\rho(s)$ dans cette base pour tout $s \in G$. On notera souvent ρ_s pour $\rho(s)$.

Remarque 2.2 On pourrait définir la notion de représentation linéaire de la même façon sur tout corps commutatif à la place de $\mathbf{C}$. Néanmoins, la plupart des propriétés qui nous intéresseront dans ce cours utilisent fortement le fait qu'on est sur un corps algébriquement clos de caractéristique zéro, d'où le choix de se restreindre aux espaces vectoriels complexes.

Définition 2.3 Deux représentations $\rho : G \rightarrow V$ et $\rho' : G \rightarrow V'$ de G sont dite *isomorphes* (ou semblables) s'il existe un isomorphisme de $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels $u : V \rightarrow V'$ tel que

$$u \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ u$$

pour tout $s \in G$.

Si ρ et ρ' sont données (via le choix de bases de V et V') sous formes matricielles $s \mapsto M_s$ et $s \mapsto M'_s$, cela signifie simplement qu'il existe une matrice inversible P telle que

$$PM_sP^{-1} = M'_s$$

pour tout $s \in G$ (si on préfère, les matrices M_s et M'_s sont semblables, avec une matrice de changement de base qui peut être choisie indépendante de $s \in G$). Deux représentations isomorphes ont bien entendu même degré. Plus généralement, une application linéaire $u : V \rightarrow V'$ (pas forcément un isomorphisme) telle que $u \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ u$ pour tout s de G s'appelle un *opérateur d'entrelacement* entre ρ et ρ' .

Exemple 2.4 a) Une représentation de degré 1 d'un groupe fini G n'est pas autre chose qu'un caractère $\rho : G \rightarrow \mathbf{C}^*$. La *représentation unité*¹ est le caractère constant égal à 1.

b) Soit G un groupe fini de cardinal g . Soit V un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension g , muni d'une base $(e_t)_{t \in G}$ indexée par les éléments de G . On définit alors une représentation $\rho : G \rightarrow V$ par la formule

$$\rho_s(e_t) = e_{st}.$$

On dit que ρ est la *représentation régulière* de G . Elle est de degré g , et caractérisée (à isomorphisme près) par le fait qu'il existe un vecteur (par exemple e_1) dont les transformés par les $\rho_s, s \in G$ forment une base de V .

2.2. Sous-représentations

Définition 2.5 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire. Une *sous-représentation* de ρ est la restriction $\rho^W : G \rightarrow \text{GL}(W)$ de ρ à un sous-espace vectoriel W de V stable par tous les $\rho_s, s \in G$. Ainsi ρ^W est définie par :

$$\rho_s^W = (\rho_s)|_W, \quad \forall s \in G.$$

Noter que si W est un sous-espace vectoriel de V stable par ρ ($:=$ stable par tous les $\rho_s, s \in G$), alors tout ρ_s induit bien un automorphisme de W (car W est de dimension finie), et donc ρ^W est bien un morphisme de G dans $\text{GL}(W)$.

1. Bien que la représentation unité corresponde au morphisme trivial, on réservera le terme *représentation triviale* à celle correspondant à $V = \{0\}$.

Exemple 2.6 Si $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est la représentation régulière de G , et si W est le sous-espace de dimension 1 de V engendré par $x := \sum_{t \in G} e_t$, alors tous les ρ_s induisent l'identité sur W , ce qui fait que W est une sous-représentation de V , qui est d'ailleurs isomorphe à la représentation unité.

Définition 2.7 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation. Soit $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ une décomposition de V en somme directe de sous-espaces stables par ρ . On dit alors que ρ est la *somme directe* des sous-représentations $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(V_i)$ associées à ρ , et on note $\rho = \bigoplus_{i=1}^r \rho_i$.

L'intérêt des notions précédentes tient au théorème suivant et à son corollaire, qui dit en quelque sorte qu'une sous-représentation est toujours un "facteur direct" de la représentation de départ.

Théorème 2.8 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G . Soit W un sous-espace de V stable par ρ . Alors il existe un sous-espace supplémentaire W^0 de W dans V , qui est stable par ρ .

Démonstration : On commence à choisir un supplémentaire quelconque W' de W dans V , et on appelle p le projecteur sur W' parallèlement à W . Soit g le cardinal de G , posons

$$p^0 := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_t p \rho_t^{-1}.$$

On observe que $\text{Im } p^0 \subset W$ (car $\text{Im } p \subset W$ et W est stable par ρ), et d'autre part si $x \in W$, on a $p(\rho_t^{-1}(x)) = \rho_t^{-1}(x)$ (puisque $\rho_t^{-1}(x) \in W$, toujours par stabilité de W pour ρ) d'où $p^0(x) = x$. Il en résulte que p^0 est un projecteur d'image W .

Définissons alors $W^0 := \text{Ker } p^0$. On observe qu'on a l'égalité $\rho_s p^0 = p^0 \rho_s$ pour tout $s \in G$. En effet, on a :

$$\rho_s p^0 \rho_s^{-1} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_{st} p \rho_{t^{-1}s^{-1}} = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \rho_{st} p \rho_{(ts)^{-1}} = p^0,$$

vu que l'application $t \mapsto st$ est une bijection de G dans lui-même. Il en résulte immédiatement que W^0 est stable par ρ , et c'est bien un supplémentaire de W dans V .

□

Corollaire 2.9 Pour toute sous-représentation $\rho^W : G \rightarrow \text{GL}(W)$ de ρ , il existe une sous-représentation $\rho^{W^0} : G \rightarrow \text{GL}(W^0)$ telle que $\rho = \rho^W \oplus \rho^{W^0}$.

Il suffit en effet de prendre un supplémentaire W^0 de W stable par ρ grâce au théorème précédent.

Exercice 2.10 a) Sous les hypothèses du théorème 2.8, montrer qu'il existe un produit scalaire hermitien $\langle, \rangle$ sur V vérifiant :

$$\langle \rho_s(x), \rho_s(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

pour tout $s \in G$ et tous $x, y \in V$ (autrement dit : tous les ρ_s sont des endomorphismes unitaires pour ce produit scalaire). On pourra partir d'un produit scalaire quelconque de V et utiliser un argument de moyenne.

b) Dédurre de a) une autre preuve du théorème 2.8.

c) Le théorème 2.8 est-il encore valable si les espaces vectoriels considérés pour les représentations sont sur un corps de caractéristique zéro quelconque au lieu d'être sur $\mathbf{C}$?

d) Et si on remplace $\mathbf{C}$ par un corps de caractéristique $p > 0$?

2.3. Représentations irréductibles

La notion suivante est fondamentale :

Définition 2.11 Soit G un groupe fini. Une représentation linéaire $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est dite *irréductible* (ou simple) si $V \neq \{0\}$ et V n'admet aucun sous-espace stable par ρ autre que V et $\{0\}$.

D'après le Cor. 2.9, il est équivalent de dire que la seule décomposition en somme directe de ρ correspond à la décomposition triviale $V = V \oplus \{0\}$ de V . Par exemple, toute représentation de degré 1 est de manière évidente irréductible (noter par contre que par convention, la représentation $V = \{0\}$ n'est pas irréductible).

L'intérêt de cette notion réside dans le théorème suivant :

Théorème 2.12 Soit G un groupe fini. Soit V un $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors, toute représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est somme directe d'un nombre fini de représentations irréductibles.

Démonstration : On procède par récurrence sur $\dim V$. Si $\dim V = 1$, toute représentation est irréductible (et noter que pour $V = \{0\}$, le théorème est encore vrai en prenant la somme vide!). Supposons $\dim V \geq 2$. Si ρ est irréductible, il n'y a rien à démontrer. Sinon, le Cor. 2.9 dit qu'il existe une décomposition $V = V_1 \oplus V_2$ en somme directe de sous-espaces stables par ρ et de dimension $< \dim V$. Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence aux sous-représentations de ρ correspondant à V_1 et V_2 .

□

Remarque 2.13 La décomposition $V = \bigoplus V_i$ en somme directe de sous-espaces correspondant à des sous-représentations irréductibles de ρ n'est en général pas unique : prendre par exemple pour ρ la représentation unité, pour laquelle toute décomposition de V en somme directe de droites convient. Nous verrons plus loin que par contre le *nombre* de représentations irréductibles V_i isomorphes à une représentation irréductible donnée ne dépend pas de la décomposition choisie.

Développement 2.14 (Leçons 107, 154) Le Th. 2.8, avec le Cor 2.9 et le Th. 2.12. Réf : [1], chapitre 1.

3. Caractère d'une représentation et applications

Dans cette section, nous allons voir une généralisation de la notion de caractère d'un groupe abélien, qui va s'avérer extrêmement utile dans l'étude des représentations d'un groupe fini. Réf : [1], chapitre 2.

3.1. Définition, propriétés élémentaires

Définition 3.1 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G . Le *caractère* de ρ est la fonction $\chi : G \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $\chi(s) = \text{Tr}(\rho_s)$ pour tout $s \in G$, où Tr désigne la trace.

Dans le cas où le degré de ρ est 1, on retrouve la notion de caractère d'un groupe² (qui, comme on l'a vu, se ramène au cas d'un groupe abélien).

Proposition 3.2 Soit χ le caractère d'une représentation ρ de degré n . Alors, on a :

- a) $\chi(1) = n$.
- b) $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$ pour tout $s \in G$.
- c) $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)$ pour tous $s, t \in G$ (on dit qu'un caractère est une fonction centrale sur G , i.e. il vérifie $\chi(st) = \chi(ts)$ pour tous $s, t \in G$).
- d) Si ρ est somme directe de ρ_1 et ρ_2 , alors son caractère χ est somme des caractères χ_1 et χ_2 de ρ_1 et ρ_2 .

2. Attention, certains spécialistes de groupes finis utilisent l'expression "caractère de G " pour "caractère d'une représentation de G ". On fera bien attention de ne pas confondre avec la notion développée dans la section 1.

Démonstration : a) résulte de ce que $\rho(1)$ est l'identité. Pour b), on observe que les valeurs propres complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $\rho(s)$ sont de module 1, d'où :

$$\overline{\chi(s)} = \sum \bar{\lambda}_i = \sum \lambda_i^{-1} = \text{Tr}(\rho_s^{-1}) = \chi(s^{-1}).$$

L'assertion c) vient de ce que deux matrices semblables ont même trace. L'assertion d) s'obtient en observant que la matrice de $\rho(s)$ (dans une base obtenue en recollant des bases des sous-espaces des deux sous-représentations correspondantes) s'écrit par blocs :

$$\begin{pmatrix} \rho_1(s) & 0 \\ 0 & \rho_2(s) \end{pmatrix}$$

□

Exercice 3.3 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G , dont on note χ le caractère. Soit V^* le dual de V ; pour tous $x \in V$ et $x' \in V^*$, on note $\langle x, x' \rangle$ le nombre complexe $x'(x)$.

a) Montrer qu'il existe une unique représentation ρ^* de ρ vérifiant :

$$\langle \rho_s(x), \rho_s^*(x') \rangle = \langle x, x' \rangle$$

pour tous $s \in G, x \in V, x' \in V^*$. On dit que ρ^* est la représentation *contragrédiente* de ρ .

b) Montrer que le caractère de ρ^* est le conjugué $\bar{\chi}$ de celui de ρ .

3.2. Le lemme de Schur

Le résultat suivant est crucial dans la théorie des représentations.

Lemme 3.4 (Lemme de Schur) Soit G un groupe fini. Soient $\rho^1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G . Soit $f : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire vérifiant $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$ pour tout $s \in G$. Alors :

a) Si f n'est pas bijective (en particulier si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes), alors $f = 0$.

b) Supposons $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$. Alors f est une homothétie.

Démonstration : a) Supposons $f \neq 0$ et posons $W_1 = \text{Ker } f$. Alors on voit tout de suite que $\text{Ker } f$ est stable par ρ^1 , donc par irréductibilité on obtient $\text{Ker } f = \{0\}$ puisqu'on a exclu le cas $\text{Ker } f = V_1$. On démontre de même par irréductibilité de ρ^2 que $\text{Im } f = V_2$, donc f est bijective.

b) Comme on est sur $\mathbf{C}$, l'endomorphisme f possède au moins une valeur propre λ . Posons alors $f' = f - \lambda \text{id}$, alors $\rho_s^2 \circ f' = f' \circ \rho_s^1$ pour tout $s \in G$; comme f' n'est pas bijective, le a) donne que $f' = 0$, i.e. f est une homothétie. $\square$

Remarques : -Il est ici vraiment important d'avoir travaillé sur un corps algébriquement clos. Par exemple sur $\mathbf{R}$, la représentation ρ de degré 2 du groupe $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ qui envoie $\bar{1}$ sur la rotation r d'angle $\pi/2$ est irréductible (r n'a pas de droite stable), et pourtant il y a des f qui vérifient $f \circ r = r \circ f$ sans que f soit une homothétie (par exemple $f = r$). Le point est que si on regarde une écriture matricielle de ρ , la représentation associée est irréductible si on considère les matrices sur $\mathbf{R}$, mais cette propriété ne subsiste pas si on les regarde sur $\mathbf{C}$.

-Dans le cas où les représentations ρ^1 et ρ^2 sont isomorphes, le cas qui est intéressant pour la suite est vraiment celui où $\rho^1 = \rho^2$ comme dans b), le but étant d'obtenir des relations sur les caractères de ρ^1 et ρ^2 (qui coïncident dès que ces représentations sont isomorphes).

Corollaire 3.5 *Soit G un groupe fini de cardinal g . Soient $\rho^1 : G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ et $\rho^2 : G \rightarrow \text{GL}(V_2)$ deux représentations irréductibles de G . Pour tout application linéaire $h : V_1 \rightarrow V_2$, on définit une application linéaire $h^0 : V_1 \rightarrow V_2$ par la formule :*

$$h^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} (\rho_t^2)^{-1} h \rho_t^1.$$

Alors :

- a) Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, on a $h^0 = 0$.
- b) Si $V_1 = V_2$ et $\rho^1 = \rho^2$, on a $h^0 = \frac{\text{Tr } h}{n} \text{id}$, où n est la dimension de V_1 et V_2 .

Démonstration : On observe que $\rho_s^2 h^0 = h^0 \rho_s^1$ (le calcul est le même que dans la preuve du théorème 2.8). Le lemme 3.4 donne alors : dans le cas a), $h^0 = 0$ et dans le cas b), h^0 est une homothétie. Comme par ailleurs on a, dans le cas b), $\text{Tr}(h^0) = \text{Tr } h$ via l'invariance de la trace d'une matrice par conjugaison, on en déduit bien alors que $h^0 = \frac{\text{Tr } h}{n} \text{id}$ vu que la trace de l'identité est n . $\square$

Il est intéressant d'avoir maintenant une traduction matricielle du corollaire précédent. Si φ et ψ sont des fonctions $G \rightarrow \mathbf{C}$, notons

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t^{-1}) \psi(t) = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \varphi(t) \psi(t^{-1}). \quad (1)$$

On obtient ainsi une forme bilinéaire symétrique définie sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$ des fonctions de G dans $\mathbf{C}$.

Proposition 3.6 *Pour $t \in G$, soient $(r_{i_1 j_1}(t))$ et $(u_{i_2 j_2}(t))$ les matrices respectives de $\rho^1(t)$ et $\rho^2(t)$ dans des bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ de V_1, V_2 . Alors :*

a) *Si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, on a $\langle u_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ pour tous indices i_1, j_1, i_2, j_2 .*

b) *Si $V_1 = V_2$ est de dimension n et $\rho^1 = \rho^2$ (auquel cas on prend $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ et on a $r_{ij} = u_{ij}$ pour tous indices i, j), alors $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ si $i_1 \neq i_2$ ou $j_1 \neq j_2$, et $\langle r_{ij}, r_{ji} \rangle = 1/n$ pour tous indices i, j .*

Démonstration : Soit $h : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire quelconque, de matrice $(x_{i_2 i_1})$ dans les bases $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. On peut lui associer l'application linéaire h^0 comme dans le corollaire 3.5, de matrice $(x_{i_2 i_1}^0)$. On a alors

$$x_{i_2 i_1}^0 = \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \sum_{j_1, j_2} u_{i_2 j_2}(t^{-1}) x_{j_2 j_1} r_{j_1 i_1}(t),$$

ce qui dans le cas a) indique que la forme linéaire en les $x_{j_2 j_1}$ définie par le deuxième membre est nulle, ce qui implique que tous ses coefficients sont nuls. Ainsi :

$$\frac{1}{g} \sum_{t \in G} u_{i_2 j_2}(t^{-1}) r_{j_1 i_1}(t) = 0,$$

ce qui s'écrit $\langle u_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$.

Dans le cas b), on sait que h^0 est une homothétie de rapport $\lambda = \frac{\text{Tr } h}{n}$, d'où déjà $x_{i_2 i_1}^0 = 0$ si $i_2 \neq i_1$, ce qui donne $\langle r_{i_2 j_2}, r_{j_1 i_1} \rangle = 0$ si $i_2 \neq i_1$. Si $i_2 = i_1 = i$, alors

$$x_{ii}^0 = \frac{1}{n} \text{Tr } h = \frac{1}{n} \sum_{j_1=j_2} x_{j_2 j_1},$$

ce qui donne $\langle r_{i j_2}, r_{j_1 i} \rangle = 0$ si $j_1 \neq j_2$ et $\langle r_{ij}, r_{ji} \rangle = 1/n$ pour tous i, j . □

3.3. Les relations d'orthogonalité des caractères

C'est dans ce paragraphe que se trouvent les résultats fondamentaux sur les caractères des représentations irréductibles, et leurs conséquences sur la décomposition d'une représentation en somme d'irréductibles.

Soit G un groupe fini de cardinal g . On définit un produit scalaire hermitien sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}(G, \mathbf{C})$ des fonctions de G dans $\mathbf{C}$, par la formule :

$$(\varphi | \psi) := \frac{1}{g} \sum_{t \in G} \overline{\varphi(t)} \psi(t).$$

Noter que cette formule est légèrement différente de celle de la forme bilinéaire symétrique $\langle \varphi, \psi \rangle$ définie par la formule (1). Néanmoins, si φ et ψ sont des caractères, les deux formules coïncident car dans ce cas $\overline{\varphi(t)} = \varphi(t^{-1})$ par la proposition 3.2, (b).

Theorème 3.7 a) Soit χ le caractère d'une représentation irréductible ρ de G . Alors $(\chi|\chi) = 1$.

b) Soit χ_1, χ_2 les caractères de deux représentations irréductibles non isomorphes ρ^1, ρ^2 . Alors $(\chi_1|\chi_2) = 0$.

Observons que a) donne aussi la valeur de $(\chi|\chi')$ lorsque χ, χ' sont les caractères respectifs de deux représentations irréductibles isomorphes, puisqu'alors les fonctions χ et χ' coïncident.

Démonstration : a) Supposons ρ de degré n , donnée sous forme matricielle $\rho_t = (r_{ij}(t))$. Alors $\chi(t) = \sum_i r_{ii}(t)$, d'où

$$(\chi|\chi) = \langle \chi, \chi \rangle = \sum_{i,j} \langle r_{ii}, r_{jj} \rangle.$$

D'après la proposition 3.6, on a $\langle r_{ii}, r_{jj} \rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\langle r_{ii}, r_{jj} \rangle = 1/n$ si $i = j$, ce qui donne finalement $(\chi|\chi) = 1$.

b) Écrivons encore les formes matricielles respectives $r_{ij}(t)$ et $u_{ij}(t)$ de ρ^1, ρ^2 . Alors

$$(\chi_1|\chi_2) = \sum_{i,j} \langle r_{ii}, u_{jj} \rangle,$$

qui est nul d'après la proposition 3.6.

□

Le théorème précédent peut s'interpréter comme l'*orthogonalité* des *caractères irréductibles* de G ($:=$ caractères des représentations irréductibles³ de G , qui sont les caractères irréductibles de degré 1).

Theorème 3.8 Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire, de caractère φ , décomposée en somme directe

$$V = \bigoplus W_i$$

de représentations irréductibles. Alors, si $\rho' : G \rightarrow W$ est une représentation irréductible de caractère χ , le nombre $m_{\rho'}$ de sous-représentations W_i isomorphes à ρ' est $(\varphi|\chi)$. Ce nombre est en particulier indépendant de la décomposition.

3. On fera attention ici à ne pas confondre avec les caractères du groupe G au sens de la section 1.

On a ainsi une sorte d'unicité de la décomposition d'une représentation en somme directe de représentations irréductibles. On dira en abrégé que $m_{\rho'}$ est le *nombre de fois que ρ contient ρ'* .

Démonstration : Si χ_i est le caractère de $\rho_i := \rho|_{W_i}$, on a $\chi = \sum \chi_i$ par la proposition 3.2 d), et $(\chi|\chi_i)$ vaut 1 ou 0 suivant que ρ' est ou non isomorphe à ρ_i . On conclut par linéarité du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

□

Corollaire 3.9 *Soit G un groupe fini. Alors deux représentations de G de même caractère sont isomorphes (en particulier il n'y a qu'un nombre fini de représentations irréductibles de G à isomorphisme près).*

Démonstration : En effet, leurs décompositions respectives en somme de représentations irréductibles contiennent alors le même nombre de fois toute représentation irréductible donnée.

□

Remarque 3.10 Ce corollaire justifie qu'on parle de *caractère irréductible* pour "caractère d'une représentation irréductible". Rappelons que les caractères d'un groupe G au sens de la section 1. sont alors les caractères irréductibles de dimension 1 de G .

Corollaire 3.11 *Soit φ le caractère d'une représentation $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Alors $(\varphi|\varphi)$ est un entier ≥ 0 (et > 0 si $\dim V > 0$), égal à 1 si et seulement si ρ est irréductible.*

Démonstration : Écrivons $V = \oplus m_i W_i$ avec les W_i irréductibles et deux à deux non isomorphes, où $m_i W_i$ désigne la somme directe $W_i \oplus \dots \oplus W_i$ avec m_i termes. Alors $(\varphi|\varphi) = \sum m_i^2$ est un entier, égal à 1 si et seulement s'il y a un seul W_i avec de plus $m_i = 1$, ce qui signifie exactement que ρ est irréductible.

□

Exercice 3.12 Soit ρ une représentation linéaire d'un groupe G , de caractère χ . Montrer que le nombre de fois que ρ contient la représentation unité est $\frac{1}{g} \sum_{s \in G} \chi(s)$, où g est le cardinal de G .

3.4. Compléments

On commence par un énoncé sur la représentation régulière.

Proposition 3.13 *Soit G un groupe fini de cardinal g .*

a) Le caractère r_G de la représentation régulière τ est donné par $r_G(1) = g$ et $r_G(s) = 0$ si $s \neq 1$.

b) Soit ρ une représentation irréductible. Alors ρ est contenue $\deg \rho$ fois dans la représentation régulière.

c) Si $n_1, \dots, n_h$ sont les degrés des représentations irréductibles (à isomorphisme près) $\rho_1, \dots, \rho_h$ de G et $\chi_1, \dots, \chi_h$ leurs caractères, on a $\sum_{i=1}^h n_i^2 = g$ et $\sum_{i=1}^h n_i \chi_i(s) = 0$ pour $s \neq 1$.

Démonstration : a) La représentation régulière $\tau : G \rightarrow \text{GL}(V)$ est donnée par $\rho_s(e_t) = e_{st}$, où $(e_t)_{t \in G}$ est une base de V . On a $r_G(1) = g = \dim V$ car $\tau(1) = \text{id}_V$. Pour $s \neq 1$, la matrice de ρ_s dans la base (e_t) n'a que des zéros sur la diagonale, donc sa trace est nulle.

b) Soit χ le caractère de ρ . D'après le théorème 3.8, le nombre de fois que ρ est contenue dans τ est :

$$(r_G|\chi) = \langle r_G, \chi \rangle = \frac{1}{g} \sum_{s \in G} r_G(s^{-1})\chi(s) = \frac{1}{g} g\chi(1) = \chi(1)$$

d'après a). Or $\chi(1) = \deg \rho$.

c) D'après b), la représentation régulière τ s'écrit $\tau = \bigoplus_{i=1}^h n_i \rho_i$, d'où $r_G = \sum_{i=1}^h n_i \chi_i$. Il suffit alors d'appliquer a).

□

On va en déduire un lien entre caractères et fonctions centrales.

Lemme 3.14 *Soit f une fonction centrale sur G . Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation de G . On définit un endomorphisme ρ_f de V par :*

$$\rho_f = \sum_{t \in G} f(t) \rho(t).$$

Supposons ρ irréductible de degré n et de caractère χ . Alors $\rho_f = \lambda \text{Id}$, avec

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t) \chi(t) = \frac{g}{n} (\bar{\chi}|f).$$

Démonstration : On vérifie facilement que $\rho(s)^{-1}\rho_f\rho(s) = \rho_f$ pour tout $s \in G$, via le fait que $f(s^{-1}ts) = f(t)$ (qui résulte de l'hypothèse f centrale). D'après le lemme 3.4, on obtient que ρ_f est une homothétie. Son rapport est

$$\text{Tr}(\rho_f)/n = \frac{1}{n} \sum_{t \in G} f(t)\chi(t),$$

comme on voulait. □

Théorème 3.15 *Soit H le $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des fonctions centrales sur G . Soient $\chi_1, \dots, \chi_h$ les caractères irréductibles (deux à deux distincts) de H . Alors $(\chi_1, \dots, \chi_h)$ est une base orthonormée de H .*

Démonstration : On sait déjà que la famille $(\chi_1, \dots, \chi_h)$ est orthonormée par le théorème 3.7. Pour montrer qu'elle engendre H , il suffit de montrer que son orthogonal est nul, ou encore que l'orthogonal de la famille conjuguée $(\bar{\chi}_1, \dots, \bar{\chi}_h)$ est nul. Soit donc $f \in H$ une fonction centrale orthogonale à tous les $\bar{\chi}_i$. Si ρ est une représentation irréductible de G , le lemme 3.14 donne $\rho_f = 0$. Ceci reste vrai pour toute représentation ρ (en la décomposant en somme de représentations irréductibles), donc en particulier pour la représentation régulière $\tau : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Pour celle-ci, on a une base $(e_t)_{t \in G}$ de V telle qu'on ait $\tau(t)e_1 = e_t$ pour tout t de G , d'où :

$$0 = \tau_f \cdot e_1 = \sum_{t \in G} f(t)e_t,$$

ce qui donne $f(t) = 0$ pour tout $t \in G$ puisque (e_t) est une base. Ainsi $f = 0$. □

Corollaire 3.16 *Le nombre de représentations irréductibles de G à isomorphisme près est le nombre c de classes de conjugaison de G .*

Démonstration : D'après le corollaire 3.9, le nombre de représentations irréductibles de G à isomorphisme près est l'entier h du théorème 3.15. Or, ce théorème dit qu'il s'agit de la dimension du $\mathbf{C}$ -espace vectoriel H des fonctions centrales, lequel est de dimension c vu que se donner une fonction centrale revient à donner sa valeur sur chaque classe de conjugaison de G . □

Exercice 3.17 Soit G un groupe fini. Montrer que G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

Exercice 3.18 Soit G un groupe fini de cardinal g . Soient $\chi_1, \dots, \chi_h$ les caractères irréductibles de G . Montrer que si t et s sont deux éléments de G qui ne sont pas dans la même classe de conjugaison, alors :

$$\sum_{i=1}^h \bar{\chi}_i(s) \chi_i(t) = 0.$$

(On introduira la fonction centrale qui vaut 1 sur la classe de s et 0 ailleurs). Montrer que

$$\sum_{i=1}^h |\chi_i(s)|^2 = \frac{g}{c(s)},$$

où $c(s)$ est le cardinal de la classe de conjugaison de s .

Exercice 3.19 Soit G un groupe fini de cardinal g . Soit $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ une représentation linéaire de G . Soient $\rho_i : G \rightarrow \text{GL}(W_i)$ (pour $i = 1, \dots, h$) les représentations irréductibles de G (à isomorphisme près), on pose $n_i := \deg \rho_i$. Soit $V = \bigoplus_{i=1}^m U_i$ une décomposition de ρ en somme directe de représentations irréductibles. Pour $i = 1, \dots, h$, on note V_i la somme directe des sous-espaces parmi les $U_1, \dots, U_m$ tels que la sous-représentation de ρ associée soit isomorphe à ρ_i , de sorte que

$$V = \bigoplus_{i=1}^h V_i. \quad (2)$$

a) Soit χ_i le caractère de ρ_i . On pose

$$q_i = \frac{n_i}{g} \sum_{t \in G} \overline{\chi_i(t)} \rho_t.$$

Montrer que si $\tau : G \rightarrow \text{GL}(W)$ est une sous-représentation irréductible de ρ de caractère χ , alors la restriction de q_i à W est 0 si $\chi \neq \chi_i$ et Id si $\chi = \chi_i$.

b) En déduire que q_i est le projecteur sur V_i associé à la décomposition (2).

c) La décomposition (2) est-elle indépendante de la décomposition $V = \bigoplus U_i$ choisie initialement ?

Développement 3.20 (Leçon 107) Le Cor. 3.5 avec la Prop. 3.6 et le Th. 3.7 (faire en plus le lemme de Schur semble un peu long). Réf : [2], chapitre 2.

Développement 3.21 (Leçon 107) La Prop. 3.13 avec le lemme 3.14 et le Th. 3.15 (voire le Cor. 3.16 en plus s'il reste du temps). Réf : [2], chapitre 2.

4. Tables de caractères, exemples

Réf : [1], chapitre 5.

Soit G un groupe fini possédant h classes de conjugaison. D'après le corollaire 3.16, le nombre de caractères irréductibles de G est h . La *table de caractères* de G est le tableau carré possédant h lignes (correspondant aux caractères irréductibles $\chi_1, \dots, \chi_h$) et h colonnes (correspondant aux classes de conjugaison $c_1, \dots, c_h$), l'élément de coordonnées (i, j) du tableau étant $\chi_i(c_j)$ (ceci a un sens puisqu'un caractère est une fonction centrale). Nous allons passer en revue quelques exemples où on peut déterminer la table de caractères et parfois expliciter les différentes représentations irréductibles de G . La table des caractères est une information importante, même si deux groupes peuvent avoir la même table (i.e. le tableau est le même pour un certain choix dans l'ordre des χ_i et des c_i) sans être isomorphes (cf. exercice 4.5).

Avant de rentrer dans les détails, voici quelques observations qui seront souvent utiles pour les groupes de petit cardinal :

Remarque 4.1 a) Si G est abélien de cardinal g , alors ses représentations irréductibles sont de degré 1 (par exemple parce qu'il y a g classes de conjugaison et le résultat découle alors de la Prop. 3.13 c) ; on peut aussi utiliser le lemme de Schur). Elles correspondent simplement aux caractères de G au sens de la section 1.

b) Si N est un sous-groupe distingué de G et $H := G/N$, alors toute représentation ρ de H donne naissance⁴ à une représentation τ de G définie par la formule $\tau(s) = \rho(\pi(s))$ pour tout $s \in G$, où $\pi : G \rightarrow H$ est la surjection canonique. On a clairement : ρ irréductible $\Leftrightarrow \tau$ irréductible.

c) Si la restriction d'une représentation ρ_G de G à un sous-groupe de G est irréductible, il est immédiat que ρ_G elle-même est irréductible.

d) Si $\varepsilon : G \rightarrow \mathbf{C}^*$ est un caractère de G (=caractère irréductible de degré 1), et χ est le caractère d'une représentation irréductible ρ , alors $\varepsilon\chi$ est encore le caractère d'une représentation irréductible, à savoir la représentation $s \mapsto \varepsilon(s)\rho(s)$ (vérification immédiate). Cette remarque est souvent utile pour les groupes symétriques (en prenant pour ε la signature).

4.1. Le groupe $\mathcal{S}_3$

Soit $\mathcal{S}_3$ le groupe des permutations d'un ensemble à 3 éléments, qui possède le groupe alterné $\mathcal{A}_3$ comme sous-groupe distingué d'indice 2. Le

4. En revanche définir une représentation de G à partir d'une représentation d'un sous-groupe n'est pas évident : c'est la notion importante de *représentation induite*, qui n'est pas au programme de l'agrégation.

cardinal de G est $g = 6$, et le nombre de classes de conjugaison est $h = 3$: l'élément 1, la classe d'une transposition t , et la classe d'un 3-cycle c . On a deux représentations irréductibles de degré 1, correspondant au caractère unité χ_1 et à la signature ϵ . On sait qu'il y a un troisième caractère irréductible θ , qui vérifie $(\deg \theta)^2 + 2 = 6$ d'après la Prop. 3.13 c). Ainsi θ est de degré 2. On obtient aussi avec la Prop. 3.13 c), que $\theta(s) = 1/2(-1 - \epsilon(s))$ si $s \neq 1$ et $\theta(1) = 1/2(g - 2) = 2$, d'où la table de caractères :

$$\begin{pmatrix} & 1 & t & c \\ \chi_1 & 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 1 & -1 & 1 \\ \theta & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.2. Le groupe $\mathcal{A}_4$

Soit $G = \mathcal{A}_4$, c'est un groupe de cardinal 12. Le groupe G possède un sous-groupe distingué $N \simeq (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, constitué de l'identité et des doubles transpositions, et $H = G/N$ est de cardinal 3, donc isomorphe à $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$. Par la remarque 4.1 b), on a donc déjà trois caractères irréductibles de degré 1 de G , notés χ_1, χ_2, χ_3 , correspondant aux trois caractères du groupe abélien H . Par ailleurs G possède 4 classes de conjugaison : celle de 1, celle d'une double transposition x , celle du 3-cycle $y = (1, 2, 3)$ et celle du 3-cycle $z = (2, 1, 3)$ (qui est conjugué du précédent dans $\mathcal{S}_4$ mais pas dans $\mathcal{A}_4$). Le dernier caractère irréductible χ' est de degré $\sqrt{12 - (1 + 1 + 1)} = 3$ par la Prop. 3.13 c), et on détermine les valeurs de χ' par cette même proposition, ce qui donne (en appelant j une racine primitive cubique de 1) la table de caractères suivante :

$$\begin{pmatrix} & 1 & x & y & z \\ \chi_1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \chi_2 & 1 & 1 & j & j^2 \\ \chi_3 & 1 & 1 & j^2 & j \\ \chi' & 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 4.2 Dans l'espace euclidien $\mathbf{R}^3$, soit T le tétraèdre régulier de centre 0, de sommets $(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$. Le groupe $\mathcal{S}_4$ peut se réaliser comme le groupe des isométries de $\mathbf{R}^3$ laissant stable T , et son sous-groupe $\mathcal{A}_4$ correspond alors aux isométries positives (les rotations).

On obtient ainsi un morphisme injectif $\mathcal{S}_4 \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$, et donc une représentation $\rho : \mathcal{S}_4 \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$, que l'on peut restreindre à $\mathcal{A}_4$. La trace d'une rotation d'angle $\pm\theta$ est $1 + 2\cos(\theta)$. Ainsi l'image de $x \in \mathcal{A}_4$ par ρ est un renversement (rotation d'ordre 2, d'angle π), dont la trace est -1 ,

tandis que les images de y et z sont des rotations d'ordre 3, d'angle $\pm 2\pi/3$, dont la trace est nulle. Ainsi le caractère de $\rho : \mathcal{A}_4 \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$ est χ' , et cette représentation “géométrique” est donc la représentation irréductible de degré 3 de $\mathcal{A}_4$.

4.3. Le groupe $\mathcal{S}_4$

Le groupe $G = \mathcal{S}_4$ possède encore le sous-groupe N (constitué de l'identité et des doubles transpositions) comme sous-groupe distingué, avec cette fois-ci un quotient $S = \mathcal{S}_4/N$ isomorphe à $\mathcal{S}_3$. Les trois caractères irréductibles χ_1 , ϵ et θ de $\mathcal{S}_3$ vus au paragraphe 4.1. sont de degré respectif 1, 1, et 2, et correspondent via la remarque 4.1 b) à trois caractères irréductibles de ces mêmes degrés de $\mathcal{S}_4$ (on les notera encore χ_1 , ϵ et θ). On a d'autre part la représentation géométrique $\rho : G \rightarrow \mathrm{GL}_3(\mathbf{R}) \subset \mathrm{GL}_3(\mathbf{C})$ de la remarque 4.2. Comme on a vu au paragraphe précédent que la restriction de ρ à $\mathcal{A}_4$ était irréductible, on obtient que ρ est irréductible (remarque 4.1, c)), et de degré 3. Enfin, on obtient (cf. remarque 4.1, d)) une autre représentation irréductible ρ_ϵ de degré 3 de G en posant $\rho_\epsilon(s) = \epsilon(s) \cdot \rho(s)$, où ϵ est la signature. Comme $1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = 24 = |G|$, on a obtenu toutes les représentations irréductibles de G .

Les 5 classes de conjugaison correspondantes dans G sont : celles de 1, celle d'une transposition t , celle d'une double transposition d , celle d'un 3-cycle c , et celle d'un 4-cycle q . Les valeurs des caractères χ_1 , ϵ et θ se déduisent de la table de caractères de $\mathcal{S}_3$. Celles du caractère ψ de ρ en d et c se déduisent de la table de caractère de $\mathcal{A}_4$. Enfin, l'image de t par ρ est une réflexion par rapport à un plan (de trace 1) car c'est une isométrie négative d'ordre 2 autre que $-\mathrm{Id}$; l'image de q par ρ est une isométrie négative d'ordre 4, dont la matrice dans une base adaptée est donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est de trace -1 . On en déduit la table de caractères de $\mathcal{S}_4$:

$$\begin{pmatrix} & 1 & t & d & c & q \\ \chi_1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \epsilon & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ \theta & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ \psi & 3 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ \epsilon\psi & 3 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.4. Quelques exemples de plus (exercices)

Exercice 4.3 (Le groupe du cube) Soit C le cube de $\mathbf{R}^3$ dont les 8 sommets ont pour coordonnées $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Soit G le groupe des isométries de $\mathbf{R}^3$ qui laissent stable le cube, i.e. permutent ses 8 sommets. Soit T le tétraèdre de sommets $(1, 1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1), (-1, -1, 1)$.

- a) Montrer que C est réunion de T et de τT , où $\tau = -\text{Id}$.
- b) Soit $S(T)$ le groupe des isométries de T . Montrer que G est produit direct de $S(T) \simeq \mathcal{S}_4$ et de $\{\text{Id}, \tau\}$.
- c) Montrer que G a deux fois plus de caractères irréductibles que $\mathcal{S}_4$.
- d) En utilisant la remarque 4.1 d), décrire les caractères irréductibles de G et écrire sa table de caractères.

Exercice 4.4 (Groupes diédraux) Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $G = D_n$ le *groupe diédral* des isométries du plan laissant stable un polygone régulier convexe à n côtés. Rappelons que G est de cardinal $2n$, composé :

- des n rotations $r^k, 1 \leq k \leq n-1$ avec r rotation d'angle $2\pi/n$, qui forment un sous-groupe cyclique C_n distingué de cardinal n de G .
- de n réflexions.

Si s est une réflexion dans G , alors G est produit semi-direct de C_n par le groupe de cardinal 2 engendré par s , et on a $srs = s^{-1}$. On fixe une racine primitive n -ième de l'unité ω .

1. On suppose n pair.

a) Montrer que l'abélianisé G^{ab} de G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$, et en déduire que G possède 4 caractères irréductibles de degré 1.

b) Montrer que pour tout entier h avec $0 < h < n/2$, il existe une unique représentation ρ^h de degré 2 qui associe à r la matrice $\text{Diag}(\omega^h, \omega^{-h})$ et à s la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Montrer que les représentations ρ^h définies ci-dessus sont irréductibles, et deux à deux non isomorphes.

d) Montrer que les représentations irréductibles de G à isomorphisme près sont les 4 représentations de degré 1 (cf. a)) et les $n/2 - 1$ représentations ρ^h ci-dessus. Écrire la table de caractères de D_4 .

2. On suppose maintenant n impair. Montrer que G possède (à isomorphisme près) 2 représentations irréductibles de degré 1, et que toutes les autres représentations irréductibles sont les ρ^h définies comme ci-dessus pour $0 < h \leq (n-1)/2$.

Exercice 4.5 (Le groupe des quaternions H_8) Soit $G = H_8$ le groupe constitué des éléments $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$, avec les relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Il peut se réaliser comme le sous-groupe de $M_2(\mathbf{C})$ constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

avec $(a, b) = (\pm 1, 0), (\pm i, 0), (0, \pm 1)$, ou $(0, \pm i)$.

a) Montrer que le centre et le sous-groupe dérivé de G sont tous deux égaux à $\{\pm 1\}$.

b) Montrer que l'abélianisé de G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

c) En déduire que G possède 4 caractères de degré 1, dont on explicitera les valeurs sur les divers éléments de G .

d) Montrer que G possède 5 classes de conjugaison.

e) En déduire la table de caractères de G , et montrer que bien que G et D_4 ne soient pas isomorphes, cette table est la même que celle du groupe diédral D_4 .

Développement 4.6 (Leçons 105, 107, 109) La table des caractères de $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{A}_4$ ($\mathcal{S}_4$ est sans doute un peu long).

Réf : [1], §2.5. et §5.8.

Développement 4.7 (Leçons 104, 107, 109) Représentations du groupe diédral (exercice 4.4).

Réf : [1], §5.3.

Références

- [1] J-P. Serre : *Représentations linéaires des groupes finis*, Hermann, Paris, 1967.
- [2] J-P. Serre : *Cours d'arithmétique*, P.U.F., Paris, 1970.