# Exercices : groupes (I)

D. Harari

Agrégation

**1.** Soit $G$ le groupe abélien $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, muni de la loi $+$, qu'on peut aussi voir comme un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

a) Montrer que si $f : G \to G$ est un morphisme de groupes, alors $f$ est aussi un morphisme de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-espaces vectoriels.

b) En déduire que le groupe $\mathtt{Aut}\, G$ des automorphismes du groupe $G$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ (il est donc non commutatif, bien que $G$ le soit).

**2.** Soit $G$ un groupe. Les applications suivantes de $G$ dans $G$ sont-elles toujours des morphismes ?

a) $x \mapsto ax$, où $a \in G$ est fixé.
b) $x \mapsto x^n$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.
c) $x \mapsto x^{-1}$.

**3.** a) Montrer que l'intersection d'une famille quelconque de sous-groupes d'un groupe $G$ est aussi un sous-groupe.

b) Soient $A$ et $B$ deux sous-groupes d'un groupe $G$. Montrer que $A \cup B$ n'est pas un sous-groupe, sauf si on a $A \subset B$ ou $B \subset A$.

**4.** Soit $K$ un corps. Soit $A$ une partie de $M_n(K)$ telle que $A$ soit un groupe pour la multiplication des matrices. $A$ est-elle toujours un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(K)$ ?

**5.** Soit $(A, +)$ un groupe abélien.

a) Soit $n > 0$. Montrer que l'ensemble $A[n] := \{x \in A, nx = 0\}$ est un sous-groupe de $A$, appelé *sous-groupe de $n$-torsion* de $A$.

b) Montrer que $A_{\mathrm{tors}} := \bigcup_{n>0} A[n]$ est un sous-groupe de $A$, appelé *sous-groupe de torsion* de $A$.

c) Quel est le cardinal de $A_{\mathrm{tors}}$ lorsque $A = \mathbf{R}$ ? Lorsque $A = K$, où $K$ est un corps commutatif quelconque ?

**6.** Montrer que le groupe additif $\mathbf{Q}$ n'est pas engendré par une partie finie.

**7.** Soit $G$ un groupe. Soit $H$ un sous-groupe de $G$. Montrer que $aH \mapsto Ha^{-1}$ est une bijection de l'ensemble $G/H$ des classes à gauche sur l'ensemble $H \setminus G$ des classes à droite. Le cardinal de ces ensembles, s'il est fini, se note $[G : H]$ et s'appelle *l'indice* de $H$ dans $G$ (c'est aussi l'ordre du groupe $G/H$ si $H$ est distingué dans $G$).

**8.** Soit $G$ un groupe.

a) Montrer que si $H$ est distingué dans $G$. alors on a $f(H) = H$ pour tout automorphisme intérieur $f$ de $G$.

b) Montrer qu'une intersection de sous-groupes distingués est encore un sous-groupe distingué.

c) On prend $G = \mathcal{S}_4$. On fixe une double transposition $\tau$ de $G$. Soit $H$ le sous-groupe de $G$ constitué de l'identité et des doubles transpositions. Soit $K$ le sous-groupe $\{\mathrm{id}, \tau\}$ de $G$. Montrer que $K \lhd H$, $H \lhd G$, mais $K$ n'est pas distingué dans $G$.

d) Soient $H$ un sous-groupe de $G$ et $K$ un sous-groupe caractéristique de $H$. Montrer que si $H$ est distingué (resp. caractéristique) dans $G$, alors $K$ est distingué (resp. caractéristique) dans $G$.

**9.** Soient $H$ et $N$ deux groupes. On dit qu'un groupe $E$ est une *extension* de $H$ par $N$ s'il existe un morphisme surjectif $E \to H$ dont le noyau est isomorphe à $N$ (voir aussi l'exercice 3 de la feuille II). Montrer que les groupes $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ sont tous deux des extensions de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

**10.** Soit $n \geq 3$. Montrer que le centre de $\mathcal{S}_n$ est réduit à l'identité (Utiliser la formule $\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(a), \sigma(b))$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\tau = (a, b)$ transposition).