

Exercices : groupes (II)

D. Harari

Agrégation

1. a) Soit $f : G \rightarrow A$ un morphisme de groupes. Soit H un sous-groupe distingué de G tel que $H \subset \ker f$. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\bar{f} : G/H \rightarrow A$ tel que $f = p \circ \bar{f}$, où $p : G \rightarrow G/H$ est la surjection canonique.

b) On suppose de plus que A est abélien. Montrer que $D(G) \subset \ker f$, et en déduire que f induit un morphisme de groupes $G^{\text{ab}} \rightarrow A$.

2. On rappelle que dans le groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \dots, \overline{n-1}\}$, les éléments x qui vérifient $\langle x \rangle = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont les \bar{m} tels que m et n soient premiers entre eux. Un tel élément sera appelé *générateur* de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Il y a donc $\varphi(n)$ générateurs dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler.

a) Soit d un diviseur de n . Soit C_d le sous-groupe d'ordre d de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Montrer qu'un élément x de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est d'ordre d si et seulement si c'est un générateur de C_d .

b) En déduire que $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

c) Soit K un corps fini. Soit G un sous-groupe du groupe multiplicatif K^* , on note n l'ordre de G . Soit d un diviseur de n . Montrer que G possède au plus $\varphi(d)$ éléments d'ordre d (on observera que si x est un tel élément, alors tous les éléments de $\langle x \rangle$ vérifient $x^d = 1$, et que cette équation a au plus d solutions dans K).

d) En déduire que G est cyclique. En particulier K^* est cyclique.

3. On dit qu'une suite (finie ou infinie)

$$\dots \rightarrow G_i \rightarrow G_{i+1} \rightarrow G_{i+2} \rightarrow \dots$$

est *exacte* (les G_i étant des groupes et les f_i des morphismes) si pour tout i , on a $\text{Im } f_i = \ker f_{i+1}$.

a) Montrer que

$$1 \rightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \rightarrow 1$$

est une suite exacte (dite courte) si et seulement si on a les trois propriétés : i injective, p surjective, $\text{Im } i = \ker p$.

b) Montrer que dans ce cas, on a $G/i(N) \simeq H$ (on notera souvent par abus de langage N pour $i(N)$, qui lui est isomorphe, d'où l'écriture $G/N \simeq H$). On dit alors que G est une *extension* de H par N .¹ (quand tous les groupes sont abéliens et notés additivement, on écrira 0 au lieu de 1 dans une suite exacte courte).

c) Soit K un corps. Montrer qu'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow \text{SL}_n(K) \rightarrow \text{GL}_n(K) \rightarrow K^* \rightarrow 1.$$

d) Montrer qu'on a des suites exactes

$$1 \rightarrow \text{SO}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \text{O}_n(\mathbf{R}) \rightarrow \{\pm 1\} \rightarrow 1$$

et

$$1 \rightarrow \text{SU}_n(\mathbf{C}) \rightarrow \text{U}_n(\mathbf{C}) \rightarrow S^1 \rightarrow 1,$$

où S^1 désigne le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1.

e) Soit G un groupe de centre Z . Soit $(\text{Int } G, \circ)$ le groupe des automorphismes intérieurs de G . Montrer qu'on a une suite exacte

$$1 \rightarrow Z \rightarrow G \rightarrow \text{Int } G \rightarrow 1.$$

4. On note H l'ensemble des matrices de la forme

$$M_{a,b} := \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

avec $(a, b) \in \mathbf{C} \times \mathbf{C}$. On pose $H^* = H - \{0\}$.

a) Montrer que H^* est un sous-groupe non commutatif de $\text{GL}_2(\mathbf{C})$.

b) On note 1 la matrice identité, et on pose $I := M_{i,0}$, $J = M_{0,1}$, $K = M_{0,i}$. Soit $H_8 = \{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$. Montrer que H_8 est un sous-groupe non commutatif de cardinal 8 de H^* (on observera que $IJ = K = -IJ$, avec des relations analogues par permutations circulaires de I, J, K).

c) Montrer que le centre et le sous-groupe dérivé de H_8 sont tous deux égaux à $\{\pm 1\}$.

d) Montrer que l'abélianisé de H_8 est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

5. Faire la liste, à isomorphisme près, des groupes de cardinal ≤ 7 .

1. Certains auteurs, par exemple D. Perrin, disent plutôt extension de N par H .