Exercices : groupes (V)

D. Harari

Agrégation

1. Soit G un groupe fini. On note $\widehat{G}$ le groupe des morphismes de G dans $\mathbf{C}^*$ (la loi étant la multiplication des fonctions). Autrement dit les éléments de $\widehat{G}$ sont les représentations de G de degré 1.

a) Montrer que si G est d'ordre n, alors tout élément de $\chi : G \to \mathbf{C}^*$ de $\widehat{G}$ est à valeurs dans le groupe μ_n des racines n-ièmes de l'unité.

b) Montrer que tout élément $\chi : G \to \mathbf{C}^*$ de $\widehat{G}$ induit l'identité sur le sous-groupe dérivé $D(G)$ de G. En déduire que $\widehat{G}$ est isomorphe à $\widehat{G^{\mathrm{ab}}}$.

c) Montrer que si G est cyclique d'ordre n, il en va de même de $\widehat{G}$

d) Montrer que si $G = \mathcal{S}_n$ avec $n \geq 2$, alors $\widehat{G}$ est de cardinal 2.

2. (Suite de l'exercice 1). Soit G un groupe *abélien* fini, noté multiplicativement. Soit H un sous-groupe de G. On se propose de montrer que tout morphisme χ de H dans $\mathbf{C}^*$ peut être prolongé en un morphisme de G dans $\mathbf{C}^*$. On raisonne par récurrence sur l'indice $d = [G : H]$ de H dans G ; le cas $[G : H] = 1$ étant clair, on suppose le résultat vrai pour $[G : H] < d$.

a) On choisit $x \in G$ avec $x \notin H$. Soit n le plus petit entier > 0 tel que $x^n \in H$ (n existe car x est d'ordre fini). Montrer que si $m \in \mathbf{Z}$, alors on a $x^m \in H$ si et seulement si n divise m.

b) On pose $h_0 = x^n$ et $t = \chi(x^n)$ et on choisit $w \in \mathbf{C}^*$ tel que $w^n = t$. Soit H' le sous-groupe de G engendré par H et x. Montrer que tout élément de H' s'écrit $h' = hx^a$ avec $h \in H$ et $a \in \mathbf{Z}$, et que le nombre complexe $\chi(h)w^a$ ne dépend pas de l'écriture choisie.

c) En déduire qu'il existe un morphisme de H' dans $\mathbf{C}^*$ qui prolonge χ, et conclure.

d) Montrer que si G n'est plus supposé abélien, alors le résultat peut tomber en défaut même si H est abélien (on pourra utiliser l'exercice 1).

3. (Suite des exercices 1 et 2) Soit G un groupe abélien fini.

a) Montrer que si H est un sous-groupe de G, alors il existe un morphisme surjectif $\widehat{G} \to \widehat{H}$ dont le noyau est isomorphe à $\widehat{G/H}$ (on utilisera l'exercice 2).

b) En déduire, par récurrence sur l'ordre de G, que $\widehat{G}$ et G ont même ordre.

c) Soit $\varepsilon : G \to \widehat{\widehat{G}}$ le morphisme qui envoie $x \in G$ sur le morphisme $\widehat{G} \to \mathbf{C}^*$ défini par $\chi \mapsto \chi(x)$. Montrer que ε est un isomorphisme.

On dit parfois que $\widehat{G}$ est le *dual* du groupe abélien G.

4. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation linéaire d'un groupe fini G, dont on note χ le caractère. Soit V^* le dual de V ; pour tous $x \in V$ et $x' \in V^*$, on note $\langle x, x' \rangle$ le nombre complexe $x'(x)$.

a) Montrer qu'il existe une unique représentation ρ^* de ρ vérifiant :

$$\langle \rho_s(x), \rho^*_s(x') \rangle = \langle x, x' \rangle$$

pour tous $s \in G, x \in V, x' \in V^*$. On dit que ρ^* est la représentation *contragrédiente* de ρ.

b) Montrer que le caractère de ρ^* est le conjugué $\bar{\chi}$ de celui de ρ.

5. Soit G un groupe fini. Montrer que G est abélien si et seulement si toutes ses représentations irréductibles sont de degré 1.

6. Soit $G = H_8$ le groupe des quaternions d'ordre 8 (voir l'exercice 4 de la feuille II). Rappelons qu'on peut le voir comme constitué de 8 éléments $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$, qui vérifient les relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Son centre et son sous-groupe dérivé sont tous deux égaux à $\{\pm 1\}$, et son abélianisé est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$.

a) Montrer que G possède 4 caractères de degré 1, dont on explicitera les valeurs sur les divers éléments de G.

b) Montrer que G possède 5 classes de conjugaison.

c) En déduire la table de caractères de G.

On peut montrer que cette table de caractères est la même que celle du groupe diédral d'ordre 8*, bien que les deux groupes ne soient pas isomorphes.*