Exercices : Anneaux, Polynômes (I)

D. Harari

Agrégation

1. Soit A un anneau commutatif. On pose $R = A[X]$.

a) Montrer que si A est intègre, le groupe R^* des inversibles de R est constitué des polynômes constants de A^*.

b) Donner un exemple d'anneau commutatif A contenant un élément $\varepsilon \neq 0$ avec $\varepsilon^2 = 0$.

c) Montrer que le résultat de a) ne vaut plus pour un tel anneau.

2. Soient A et B des anneaux commutatifs. Soit $R = A[X_1, ..., X_n]$. Montrer que pour tout morphisme d'anneaux $\varphi : A \to B$ et pour toute famille $b_1, .., b_n$ d'éléments de B, il existe un unique morphisme d'anneaux $f : R \to B$ vérifiant : $f(a) = \varphi(a)$ pour tout polynôme constant $a \in A$, et $f(X_i) = b_i$ pour tout $i \in \{1, ...n\}$ ("propriété universelle des anneaux de polynômes").

3. Soit A un anneau commutatif. Soit E une partie de A. Soit I l'ensemble des éléments de A de la forme $a_1x_1 + ... + a_nx_n$ avec $n \in \mathbf{N}$, $x_i \in E$ et $a_i \in A$.

a) Montrer que I est un idéal de A, appelé *idéal engendré* par E.

b) Montrer que I est le plus petit idéal de A contenant E.

c) Soit $A = \mathbf{C}[X, Y]$. Trouver un idéal I de A tel que toute partie E de A qui engendre I est de cardinal au moins 2 (la situation est donc très différente des espaces vectoriels, puisque A lui-même est engendré par $\{1\}$; bien que I soit plus petit, il faut plus d'éléments pour l'engendrer).

4. Soit A un anneau commutatif. Soit I un idéal de A, on note π la surjection canonique $A \to A/I$.

a) Montrer que les idéaux de l'anneau A/I sont les $\pi(J)$, où J est un idéal de A contenant I.

b) Montrer que le quotient de A/I par $\pi(J)$ est isomorphe à l'anneau A/J.

5. a) Donner un exemple de morphisme d'anneaux $f : A \to B$ et d'idéal I de A tel que $f(A)$ ne soit pas un idéal. Montrer que si on suppose de plus f surjectif, alors $f(A)$ est toujours un idéal.

b) Montrer que l'image réciproque d'un idéal premier par un morphisme d'anneaux reste un idéal premier.

c) Un idéal I d'un anneau commutatif A est dit *maximal* si $I \neq A$ et tout idéal de A contenant strictement I est égal à A. Montrer que I est maximal si et seulement si l'anneau quotient A/I est un corps.

d) L'image réciproque d'un idéal maximal par un morphisme d'anneaux est-elle toujours un idéal maximal ?

e) En utilisant le lemme de Zorn, montrer que tout idéal I d'un anneau commutatif A, avec $I \neq A$, est contenu dans un idéal maximal. En particulier tout anneau non nul possède au moins un idéal maximal.

6. (Suite de l'exercice 5, dont on pourra utiliser les questions 5)c) et 5)e). Un anneau commutatif A est dit *local* s'il est non nul et possède un unique idéal maximal.

a) Montrer que A est local si et seulement si l'ensemble $A - A^*$ de ses éléments non inversibles est un idéal de A.

b) Montrer que dans ce cas $A - A^*$ est l'unique idéal maximal de A.

c) Montrer que l'anneau $\mathbf{C}[[X]]$ des séries formelles à coefficients complexes est un anneau local. Quel est son idéal maximal ?