103. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients : questions

1. Soit G un groupe fini. Soit p le plus petit nombre premier divisant $\#G$. Soit H un sous-groupe de G d'indice p. Montrer que H est distingué dans G (faire opérer H sur l'ensemble des classes à gauche G/H).

2. Trouver un groupe fini G non réduit au neutre tel que : le centre de G est 1, le sous-groupe dérivé de G est G, mais G n'est pas simple.

3. Soit K un corps fini. Soit $n \geq 1$ un entier. Trouver tous les morphismes de $\mathrm{GL}_n(K)$ dans K^*.

4. Soit D le groupe diédral de cardinal 8 (groupe des isométries du carré). Calculer le centre, le sous-groupe dérivé, et l'abélianisé de D. Mêmes questions pour le groupe des quaternions H_8 d'ordre 8.

5. Soit G un groupe fini résoluble.

a) Montrer que G admet une suite de composition

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_n = \{1\}$$

telle que tous les quotients G_i/G_{i+1} (pour $i = 0, ..., n-1$) soient cycliques d'ordre premier.

b) On dit que G est *hyper-résoluble* s'il existe une telle suite de composition qui est en plus normale (i.e. G_i distingué dans G pour tout $i \in \{0, ..., n\}$). Donner un exemple de groupe résoluble qui n'est pas hyper-résoluble.

c) On dit qu'un groupe fini G est *nilpotent* s'il admet une suite de composition normale

$$G = G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_n = \{1\}$$

telle que pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, le groupe G_i/G_{i-1} soit inclus dans le centre de G/G_{i-1}. (cela signifie donc que G se déduit de $\{1\}$ par une suite finie d'*extensions centrales*). Montrer que tout groupe fini nilpotent est hyper-résoluble, et que tout p-groupe est nilpotent.