108. Exemples de parties génératrices d'un groupe : questions

1. On rappelle (théorème présenté dans la leçon) que tout sous-groupe de $\mathbf{Z}^n$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^r$ pour un certain $r \leq n$.

a) L'entier r est-il unique ?

b) Soit A un groupe abélien admettant une partie génératrice finie. Montrer que tout sous-groupe de A admet également une partie génératrice finie (on pourra écrire A comme le quotient d'un groupe bien choisi).

c) Soit $a = (a_1, ..., a_n)$ un élément de $\mathbf{Z}^n$. Montrer que s'il existe une base de $\mathbf{Z}^n$ dont le premier vecteur est a, alors on a $\mathrm{pgcd}(a_1, ..., a_n) = 1$.

d) On se propose de montrer la réciproque de b). Pour cela, montrer que si $\mathrm{pgcd}(a_1, ..., a_n) = 1$, alors il existe un morphisme de groupes $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}$ qui envoie a sur 1; puis, montrer que si $(b_1, ..., b_r)$ est une base du noyau N de f, alors $(a, b_1, ..., b_r)$ est une base de $\mathbf{Z}^n$.

2. Soit G un groupe admettant une partie génératrice finie. Montrer que G est fini ou dénombrable. Est-il vrai réciproquement que tout groupe dénombrable admet une partie génératrice finie ?

3. Soit G un groupe. Soit H un sous-groupe de G. On considère un système de représentants $T \subset G$ de l'ensemble des classes à droite $H \setminus G$, avec $1 \in T$. Pour tout $g \in G$, on note $\tilde{g}$ l'unique élément de T tel que $\tilde{g}g^{-1} \in H$ (i.e. l'élément de T dont la classe dans $H \setminus G$ coïncide avec celle de g). Soit enfin S une partie génératrice de G, on note S^{-1} l'ensemble des s^{-1} avec $s \in S$.

a) Soit $h \in H$, on écrit $h = a_1 a_2 ... a_n$ avec $a_i \in S \cup S^{-1}$. On pose $t_0 = 1$ et $t_k = \widetilde{a_1 ... a_k}$ pour $k = 1, ..., n$. Montrer que

$$h = (t_0 a_1 t_1^{-1})(t_1 a_2 t_2^{-1}) ... (t_{n-1} a_n t_n^{-1}).$$

b) Montrer qu'on a pour tout $k \in \{1, ..., n\}$: $\widetilde{t_{k-1} a_k} = t_k$; en déduire que h s'écrit comme produit d'éléments de la forme $ta(\widetilde{ta})^{-1}$ avec $t \in T$ et $a \in S \cup S^{-1}$.

c) Montrer que si $t \in T$ et $a = s^{-1}$ avec $s \in S$, alors $t' = \widetilde{ta}$ vérifie

$$ta(\widetilde{ta})^{-1} = (t's(\widetilde{t's})^{-1})^{-1}.$$

d) En déduire que H est engendré par la partie

$$\{ts(\widetilde{ts})^{-1}, t \in T, s \in S.\}$$

e) Montrer que si G est engendré par une partie finie, tout sous-groupe d'indice fini de G est engendré par une partie finie (lemme de Schreier).

4. Déduire de l'engendrement de $\mathrm{SL_n}(K)$ par les transvections (pour tout corps K) que les groupes $\mathrm{SL_n}(\mathbf{C})$ et $\mathrm{SL_n}(\mathbf{R})$ sont connexes. Qu'en est-il de $\mathrm{GL_n}(\mathbf{R})$ et $\mathrm{GL_n}(\mathbf{C})$? Et de $SO_n(\mathbf{R})$?