# 151. Dimension d'un espace vectoriel : questions

**1.** Rappeler rapidement comment on montre que si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $K$, alors tout sous-espace vectoriel $F$ de $E$ est également un espace vectoriel de dimension finie avec $\dim F \leq \dim E$.

**2.** Soit $k$ un entier $\geq 1$. Soient $a_0, ..., a_{k-1}$ des réels. L'espace des suites réelles vérifiant une relation de récurrence linéaire du type

$$u_{n+k} = a_0 u_n + ... + a_{k-1} u_{n+k-1}$$

est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Montrer qu'il est de dimension $k$.

**3.** On note $\overline{\mathbf{Q}}$ l'ensemble des nombres complexes qui sont algébriques sur $\mathbf{Q}$. On a vu que c'était un sous-corps de $\mathbf{C}$.

a) Montrer que $\overline{\mathbf{Q}}$ est dénombrable.

b) Montrer que $\overline{\mathbf{Q}}$ est algébriquement clos; on observera que si $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_0$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$, tous les coefficients $a_i$ vérifient que le corps $\mathbf{Q}(a_i)$ est un $\mathbf{Q}$-ev de dimension finie.

c) Montrer que $\overline{\mathbf{Q}}$ est le plus petit corps algébriquement clos (inclus dans $\mathbf{C}$) qui contient $\mathbf{Q}$ ("clôture algébrique de $\mathbf{Q}$"). Étendre cette construction à un sous-corps $K$ quelconque d'un corps algébriquement clos $L$.

d) $\overline{\mathbf{Q}}$ est-il un $\mathbf{Q}$-ev de dimension finie ?

**4.** Soit $I$ un ensemble (pas forcément fini). Soit $E$ un espace vectoriel sur un corps $K$, admettant une base $(e_i)_{i \in I}$. A-t-on $E$ isomorphe à $K^I$ ? Et que dire du dual $E^*$ ?

**5.** Soit $(A, +)$ un groupe abélien. Soit $p$ un nombre premier. On suppose que pour tout $x \in A$, on a $px = 0$. Donner la structure de $A$ si $A$ est fini. Que peut-on dire si $A$ est infini ?

**6.** (À réserver à ceux qui ont déjà entendu parler de modules). Bien qu'à peu près tous les résultats de la théorie de la dimension tombent en défaut si on remplace le corps $K$ par un anneau commutatif $A$ (la notion analogue à celle de $K$-espace vectoriel s'appelle alors $A$-*module*), il subsiste quelques énoncés :

a) Soit $f : A^r \to A^s$ une application linéaire surjective entre les $A$-modules $A^r$ et $A^s$, où $A$ est un anneau commutatif non nul. Alors $r \geq s$. Pour cela, on montrera d'abord que si $I$ est un idéal de $A$, $f$ induit une application linéaire surjective entre les $A/I$-modules $(A/I)^r$ et $(A/I)^s$, puis on choisira bien $I$.

b) En déduire que si $M$ est un module sur un anneau commutatif $A \neq 0$ qui admet une base finie, toutes les bases ont le même cardinal (on dit alors que $M$ est un module *libre* de rang ce cardinal). Donner un exemple avec $A = \mathbf{Z}$ de module qui n'admet pas de base, et aussi de sous-module strict d'un module libre de rang 1 qui est encore libre de rang 1 (remarque : quand $A$ est principal, il reste vrai qu'un sous-module d'un module libre de rang $r$ est libre de rang $\leq r$).