153. Polynômes d'endomorphismes : questions

On désigne toujours par K un corps et par E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. (Autour des invariants de similitude). On rappelle que sur un corps K quelconque, tout endomorphisme u peut se mettre dans une base bien choisie $\mathcal{B}$ sous la forme $\text{Diag}(C(P_1), ..., C(P_r))$, où : $C(P)$ désigne la matrice compagnon d'un polynôme P et les polynômes P_i vérifient les relations de divisibilité $P_1|P_2|...|P_r$. De plus, les polynômes P_i ne dépendent pas de la base $\mathcal{B}$, on les appelle les *invariants de similitude* de u (ou de toute matrice représentant u). Ainsi deux matrices sont semblables si et seulement si elles ont les mêmes invariants de similitude. Une matrice compagnon $C(P)$ a P à la fois pour polynôme minimal et pour polynôme caractéristique, et cette propriété caractérise les endomorphismes (dit *cycliques*) dont la matrice est de la forme $C(P)$ dans une certaine base. En particulier, dans la décomposition ci-dessus, P_r est le polynôme minimal de u et $P_1...P_r$ son polynôme caractéristique.

a) Soit u un endomorphisme de l'espace vectoriel E. Montrer que le polynôme caractéristique χ_u de u et le polynôme minimal π_u de u ont les mêmes facteurs irréductibles dans $K[X]$.

b) Soit L une extension de corps de K. Soient A et B deux matrices de $M_n(K)$. Montrer que si elles sont semblables dans $M_n(L)$, elles sont semblables sur $M_n(K)$.

c) Montrer que toute matrice de $M_n(K)$ est semblable à sa transposée.

d) Faire le lien entre la décomposition en sous-espaces cycliques et la réduction de Jordan quand le polynôme caractéristique est scindé; par exemple donner la réduction de Jordan de la matrice $\text{Diag}(C(X^2), C(X^2(X-1)^3)$, où $C(P)$ désigne la matrice compagnon d'un polynôme P. On pourra d'abord comparer les matrices $C(PQ)$ et $\text{Diag}(C(P), C(Q))$ quand P et Q sont deux polynômes premiers entre eux.

2. a) Soit $M \in M_n(K)$ une matrice dont le polynôme minimal π_M est irréductible. Soit L une extension de corps de K tel que π_M soit scindé sur L (par exemple le corps de décomposition de π_M, ou encore une clôture algébrique de K). Montrer que si K est de caractéristique zéro, alors M est diagonalisable en tant que matrice de $M_n(L)$.

b) Montrer que le résultat de a) vaut encore sur un corps K de caractéristique $p > 0$ *parfait* (i.e. tout élément de K est une puissance p-ième dans K), par exemple un corps fini; mais qu'il ne vaut pas sur un corps de caractéristique p imparfait comme $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(T)$.

3. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. Soit $k > 0$ un entier. Montrer que l'équation $A^k = M$ admet au moins une solution.

4. (Difficile) On dit qu'un endomorphisme u de E est *semi-simple* si tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable.

a) Montrer que si u est semi-simple, il n'y a pas de facteur multiple dans la décomposition du polynôme minimal π_u en produit de facteurs irréductibles dans $K[X]$.

Dans toute la suite, on désigne par u un endomorphisme dont le polynôme minimal π_u s'écrit $\pi_u = P_1 ... P_r$, avec les P_i irréductibles deux à deux premiers entre eux. On se propose de montrer que u est semi-simple (réciproque de a).

b) Se ramener au cas où $\pi_u = P_1$ est irréductible.

c) On considère alors un sous-espace F stable par u. Soit $x \notin F$. En considérant l'idéal I de $K[X]$ constitué des P tels que $P(u)(x) \in F$, montrer que le sous-espace G constitué des $P(u)(x)$, $P \in K[X]$, est en somme directe avec F.

d) Conclure.

e) Quels sont les endomorphismes semi-simples dont le polynôme caractéristique (ou le polynôme minimal) est scindé ?

f) Soit $M \in M_n(K)$ la matrice de u. Soit L une extension de K sur laquelle π_u est scindé. Comparer les propriétés u semi-simple et M diagonalisable dans $M_n(L)$, en commençant par le cas où K est de caractéristique zéro (cf. aussi exercice 2).