154. Sous-espaces stables : questions

On désigne toujours par K un corps et par E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. On reprend ici partiellement l'exercice 1. de la feuille relative à la leçon "polynômes d'endomorphismes", les sous-espaces cycliques et les invariants de similitude ayant été présentés dans le plan de la leçon "sous-espaces stables".

a) Soit L une extension de corps de K. Soient A et B deux matrices de $M_n(K)$. Montrer que si elles sont semblables dans $M_n(L)$, elles sont semblables sur $M_n(K)$.

b) Montrer que toute matrice de $M_n(K)$ est semblable à sa transposée.

c) Montrer que le commutant de toute matrice de $M_n(K)$ est de dimension $\geq n$.

d) Faire le lien entre la décomposition en sous-espaces cycliques et la réduction de Jordan quand le polynôme caractéristique est scindé; par exemple donner la réduction de Jordan de la matrice $\mathrm{Diag}(C(X^2), C(X^2(X-1)^3)$, où $C(P)$ désigne la matrice compagnon d'un polynôme P. On pourra d'abord comparer les matrices $C(PQ)$ et $\mathrm{Diag}(C(P), C(Q))$ quand P et Q sont deux polynômes premiers entre eux.

2. (cf. aussi les exercices 2 et 4 de la feuille sur la leçon "polynômes d'endomorphismes"). Soit $K = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}(T)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Trouver une matrice $M \in M_2(K)$ qui représente un endomorphisme semi-simple de K^2, mais qui n'est pas diagonalisable en tant que matrice à coefficients dans L, où L est un corps de décomposition de son polynôme caractéristique (ou encore une clôture algébrique de K).

3. Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation d'un groupe fini G, où V est un $\mathbf{C}$-ev de dimension finie. Montrer qu'il existe un produit scalaire hermitien $\langle , \rangle$ sur V vérifiant

$$\langle \rho_g(x), \rho_g(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

pour tout $g \in G$ et tous $x, y \in V$. En déduire une autre preuve du théorème de Maschke.

4. Soit u un endomorphisme diagonalisable de E. Décrire tous les sous-espaces de E stables par u.

5. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 0 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

Combien de solutions possède l'équation $M^2 = A$ dans $M_3(\mathbf{R})$?