# 155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie

**1.** Déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbf{C})$. Mêmes questions dans $M_n(\mathbf{R})$ (plus difficile !).

**2.** a) La décomposition de Dunford peut se voir comme une application $f$ de $M_n(\mathbf{C})$ dans $M_n(\mathbf{C}) \times M_n(\mathbf{C})$, qui à $M$ associe le couple $(D, N)$ avec $D$ diagonalisable, $N$ nilpotente , $M = D + N$, et $DN = ND$. L'application $f$ est-elle continue ?

b) Si $A \in M_n(\mathbf{R})$, on peut effectuer sa décomposition de Dunford $A = D + N$ dans $M_n(\mathbf{C})$. Les matrices $D$ et $N$ restent-elles dans $M_n(\mathbf{R})$ ? (plus difficile : remplacer $\mathbf{R}$ par $\mathbf{Q}$).

**3.** a) Soit $A$ matrice symétrique complexe. Est-elle diagonalisable ?

b) Soient $A$ et $B$ deux matrices symétriques réelles avec $A$ définie positive. Montrer que $AB$ est diagonalisable.

**4.** a) Soit $G$ un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{C})$ dont tous les éléments $g$ vérifient $g^2 = I$. Quel est le cardinal maximal de $G$ ?

b) Montrer que si $m \neq n$, les groupes $GL_n(\mathbf{C})$ et $GL_m(\mathbf{C})$ ne sont pas isomorphes.

c) Trouver un sous-groupe fini de $GL_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ comportant des matrices non diagonalisables.