159. Formes linéaires et dualité en dimension finie : questions

1. Soit K un corps. Soit I un ensemble. Soit $(f_1, ..., f_n)$ une famille libre dans le K-espace vectoriel $\mathcal{F}(I, K)$ des fonctions de I dans K. On pose $F = \mathrm{Vect}(f_1, ..., f_n)$. Pour tout $x \in I$, on note φ_x la forme linéaire $f \mapsto f(x)$ sur F.

a) En utilisant la dualité, montrer que la famille $(\varphi_x)_{x\in I}$ engendre F^*.

b) En déduire qu'il existe $x_1, ..., x_n$ dans I tel que la matrice $(f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq n}$ soit inversible.

c) On suppose que $K = \mathbf{R}$. Montrer que si E est un sous-espace de dimension finie de l'espace $\mathcal{B}(I, \mathbf{R})$ des fonctions bornées de I dans $\mathbf{R}$, alors toute suite de fonctions (g_k), avec $g_k \in E$, qui converge simplement sur I converge uniformément sur I.

2. Soit K un corps. On note $E = M_n(K)$ le K-espace vectoriel des matrices (n, n) à coefficients dans K.

a) Montrer que l'application u de E dans E^* qui associe à toute matrice A la forme linéaire $X \mapsto \mathrm{Tr}\,(AX)$ est un isomorphisme.

b) Montrer que si un élément φ de E^* vérifie $\varphi(XY) = \varphi(YX)$ pour tous X, Y de E, alors il existe $\lambda \in K$ tel que $\varphi(M) = \lambda M$ pour tout $M \in E$.

c) En déduire que le sous-espace de E constitué des matrices de trace nulle est l'espace F engendré par les matrices de la forme $(XY - YX)$ avec $X, Y \in E$.

d) On suppose K de caractéristique nulle. En utilisant le fait (qu'on pourra redémontrer) que toute matrice A de trace nulle est semblable à une matrice B de diagonale nulle, montrer qu'une telle matrice s'écrit exactement $A = XY - YX$ avec $X, Y \in E$ (on montrera d'abord que si D est une matrice diagonale à valeurs propres distinctes, alors B s'écrit $B = DY - YD$ avec $Y \in E$).

3. Soit V un $\mathbf{R}$-espace vectoriel (ou un $\mathbf{C}$-espace vectoriel) de dimension finie n. On suppose V muni d'une norme et on munit V^* de la norme associée. On se propose de montrer que V admet une base $(e_1, ..., e_n)$ avec $||e_i|| = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, et telle que la base duale $(e_i^*, ..., e_n^*)$ vérifie également : $||e_i^*|| = 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

a) Traiter le cas particulier où V est un espace euclidien ou hermitien.

b) On fixe une base $\mathcal{B}$ de V. Soit S la sphère unité de V. Montrer que l'application

$$u : S^n \to \mathbf{R}_+, \quad (x_1, ..., x_n) \mapsto |\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)|$$

admet un maximum M. On note $(e_1, ..., e_n)$ un n-uplet réalisant ce maximum. Montrer que c'est une base de V, et que la base duale $(e_1^*, ..., e_n^*)$ vérifie : $||e_i^*|| \geq 1$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

c) Soit v un vecteur unitaire de V. Calculer $\det_{\mathcal{B}}(v, e_2, ..., e_n)$ en fonction de $e_1^*(v)$ et de $\det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_n)$; en déduire le résultat (lemme d'Auerbach).

d) Soit E un espace vectoriel normé. Soit V un sous-espace de dimension n de E. Montrer qu'il existe un projecteur $p : E \to V$ tel que $||p|| \leq n$ (on utilisera le lemme d'Auerbach et le théorème de Hahn-Banach).