103. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients : éléments de réponses

1. Comme dans la preuve donnée en cours du premier théorème de Sylow, on fait opérer H sur G/H en posant $h.(aH) := (ha)H$. Le stabilisateur de aH est alors $aHa^{-1} \cap H$. Il s'agit de montrer que pour tout $a \in H$, ce stabilisateur est H tout entier. Si tel n'est pas le cas, l'orbite ω de aH est de cardinal > 1 et son cardinal divise celui de H, donc aussi celui de G; comme p est le plus petit diviseur de $\#G$, cela signifie que ω est de cardinal au moins p. L'équation aux classes dit que $p = \#H$ est la somme des cardinaux des orbites; comme par ailleurs il y a une orbite de cardinal 1 (celle de $1.H$), on obtient une contradiction puisqu'alors la somme des cardinaux des orbites serait au moins $p + 1$.

2. Soit H un groupe simple non abélien, par exemple $H = \mathcal{A}_n$ avec $n \geq 5$. Posons $G = H \times H$. On vérifie immédiatement que le centre de G est le produit du centre de H avec lui-même, donc est trivial. De même, le sous-groupe dérivé $D(G)$ de G est $D(H) \times D(H) = H \times H$. Pourtant G n'est pas simple car $\{1\} \times H$ est un sous-groupe distingué non trivial de G.

3. On peut supposer que K est de cardinal au moins 1, sans quoi la question est triviale. Comme vu dans la leçon, le sous-groupe dérivé de $\mathrm{GL}_n(K)$ est alors $\mathrm{SL}_n(K)$. Comme K^* est un groupe abélien, tout morphisme $f : \mathrm{GL}_n(K) \to K^*$ est trivial sur ce sous-groupe dérivé $\mathrm{SL}_n(K)$, donc se factorise en un morphisme de $\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{SL}_n(K)$ vers K^*. Par ailleurs, $\mathrm{GL}_n(K)/\mathrm{SL}_n(K)$ est isomorphe à K^* via le déterminant. Finalement, f s'écrit $u \circ \det$, où u est un morphisme de K^* dans K^*. Comme de plus K^* est un groupe cyclique, u est de la forme $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ (et il y en a exactement $\#K^* = \#K - 1$). Ainsi les morphismes cherchés sont les $A \mapsto (\det A)^n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$.

4. a) Cas de $G = D$. Ce groupe diédral contient quatre éléments dont le déterminant est 1 (I, $-I$, et les rotations r_1, r_2 d'angles respectifs $\pi/2$ et $-\pi/2$); et quatre éléments de déterminant -1, les réflexions (s_1, s_2 par rapport aux deux diagonales et s'_1, s'_2 par rapport aux deux médiatrices des côtés). On voit facilement que le centre Z est réduit à $\{\pm I\}$ (r_1 ne commute pas avec s_1, et s'_j ne commute pas avec s_i pour tous indices i, j). De plus Z est distingué et le quotient G/Z est abélien (car de cardinal 4, on peut vérifier qu'il est isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$). Par définition, le sous groupe dérivé est inclus dans Z mais ce n'est pas $\{I\}$ car G n'est pas abélien. Ainsi Z est bien le sous-groupe dérivé de G, dont l'abélianisé est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

b) Cas de $G = H$. Ce groupe peut s'écrire $\{\pm 1, \pm I, \pm J, \pm K\}$ avec les relations habituelles. Ces relations indiquent que le centre Z est $\{\pm 1\}$, et le même argument que pour le diédral donne que c'est aussi le sous-groupe dérivé et que l'abélianisé est $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Les deux groupes ne sont pas pour autant isomorphes car ils n'ont pas le même nombre d'éléments d'ordre 2.

5. a) Par définition, on a une telle suite de composition avec des quotients G_i/G_{i+1} abéliens. Quitte à raisonner sur chaque quotient G_i/G_{i+1}, on se ramène au cas d'un groupe G qui est lui-même abélien, via le fait que les sous-groupes de G_i/G_{i+1} sont les N/G_{i+1} avec N sous-groupe distingué de G_i contenant G_{i+1}. Or, pour un groupe abélien le résultat est facile, par exemple par récurrence sur le cardinal en notant que G admet un sous-groupe (cyclique) H autre que G et $\{1\}$ dès qu'il n'est pas lui-même cyclique d'ordre premier (on peut aussi utiliser la classification des groupes abéliens finis); on applique alors l'hypothès de récurrence à H et G/H.

b) Le groupe $\mathcal{A}_4$ est résoluble (son sous-groupe dérivé est le sous-groupe V_4 composé de l'identité et des doubles transpositions, or V_4 est abélien). Il n'est pas hyper-résoluble, car aucun sous-groupe cyclique non réduit au neutre de $\mathcal{A}_4$ n'est distingué dans $\mathcal{A}_4$ (vérification facile en regardant le sous-groupe engendré par une double transposition ou par un 3-cycle). Notons aussi que dans la définition d'hyper-résoluble, il suffit de demander qu'il existe une suite de composition normale dont les quotients successifs sont cycliques (pas forcément cycliques d'ordre premier), par le même type de procédé que dans le a).

c) Soit G un groupe nilpotent. Considérons une suite de composition normale comme dans l'énoncé. Chaque quotient G_i/G_{i-1} est fini abélien. Alors, comme dans a), on peut remplacer chaque couple (G_i, G_{i-1}) par une suite

$$G_i = G_i^0 \supset G_i^1 \supset \dots \supset G_i^r = G_{i-1}, \tag{1}$$

telle que chaque quotient G_i^{j-1}/G_i^j soit cyclique d'ordre premier. Soit $g \in G$, alors int_g induit l'identité sur G_i/G_{i-1} (puisque G_i/G_{i-1} est central dans G/G_{i-1}), donc aussi sur chaque G_i^j/G_{i-1}; ceci implique que int_g laisse stable G_i^j. Ainsi la suite de composition obtenue en remplaçant le morceau $G_i \supset G_{i-1}$ par la suite (1) reste normale. Enfin chaque G_i^{j-1}/G_i^j reste central dans G/G_i^j vu que $G_i^{j-1} \subset G_i$, $G_i^j \supset G_{i-1}$, et G_i/G_{i-1} est central dans G/G_{i-1}.

Pour démontrer qu'un p-groupe est nilpotent, il suffit de voir qu'il se déduit du groupe trivial par une suite finie d'extensions centrales. Comme tout groupe G de centre Z est extension de G/Z par Z, il suffit donc (par récurrence sur $\#G$) de savoir que le centre d'un p-groupe non trivial n'est pas réduit au neutre, ce que l'on a vu en cours.

Une autre caractérisation des groupes finis nilpotents est que ce sont les groupes G qui sont isomorphes au produit (pour p premier divisant G) des G_p, où G_p désigne le p-Sylow de G (pour G nilpotent, il n'y a qu'un p-Sylow, qui est distingué dans G). L'étude des groupes finis nilpotents se ramène donc à celle des p-groupes.