

151. Dimension d'un espace vectoriel : indications de solutions

1. Il est essentiel ici de bien comprendre que prendre une base \mathcal{B} de E et essayer d'obtenir une famille génératrice de F à partir de \mathcal{B} n'a aucune chance de marcher, car la difficulté est qu'on doit fabriquer des éléments qui restent dans F et il n'y a aucune raison que les éléments de \mathcal{B} soient dans F . La méthode correcte est de raisonner avec les familles libres et non pas génératrices. On prend une famille libre \mathcal{F} de F de cardinal $m \in \mathbf{N}$ maximal, ce qui est possible puisque toute famille de vecteurs de E de plus de n éléments est liée vu que E possède une famille génératrice de cardinal n . On sait donc déjà que $m \leq n$, et (comme toute famille libre maximale dans un espace vectoriel) la famille \mathcal{F} est alors une base de F .

2. On obtient immédiatement un isomorphisme de l'espace considéré sur \mathbf{R}^k en associant à une suite ses k premiers termes. Bien entendu, cela marcherait aussi en remplaçant \mathbf{R} par n'importe quel corps.

3. a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathbf{Q}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n est dénombrable, car en bijection avec \mathbf{Q}^{n+1} . L'ensemble Z_n des éléments de $\overline{\mathbf{Q}}$ qui annulent un polynôme non nul de $\mathbf{Q}_n[X]$ est donc dénombrable, puisque chaque polynôme non nul de $\mathbf{Q}_n[X]$ n'a qu'un nombre fini de racines. On en déduit que $\overline{\mathbf{Q}}$, qui est réunion dénombrable des Z_n pour $n \in \mathbf{N}$, est dénombrable.

b) Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ un polynôme unitaire à coefficients dans $\overline{\mathbf{Q}}$. Alors $\mathbf{Q}(a_0)$ est un \mathbf{Q} -ev de dimension finie car a_0 est algébrique sur \mathbf{Q} . Par récurrence, on voit que $K := \mathbf{Q}(a_0, \dots, a_{n-1})$ est de dimension finie sur \mathbf{Q} (car chaque a_i est algébrique sur \mathbf{Q} , donc a fortiori sur $\mathbf{Q}(a_0, \dots, a_{i-1})$). Soit x une racine de P , alors x est algébrique sur K par définition, donc $K(x)$ est de dimension finie sur K , donc finalement aussi sur \mathbf{Q} puisque K est de dimension finie sur \mathbf{Q} . Comme $\mathbf{Q}(x)$ est un sous-espace de $K(x)$, il est également de dimension finie sur \mathbf{Q} , ce qui signifie que x est algébrique sur \mathbf{Q} , i.e. $x \in \overline{\mathbf{Q}}$ comme on voulait.

c) On vient de voir que $\overline{\mathbf{Q}}$ est un sous-corps algébriquement clos de \mathbf{C} qui contient \mathbf{Q} . C'est le plus petit car si L est un tel corps, il contient les racines de tous les polynômes non nuls à coefficients dans \mathbf{Q} , donc il contient $\overline{\mathbf{Q}}$. Plus généralement, si F est un corps inclus dans un corps algébriquement clos F' , on obtient la clôture algébrique de F en prenant l'ensemble des éléments de F' algébriques sur F ; la difficulté pour montrer l'existence de la clôture algébrique est qu'il faut d'abord montrer l'existence d'un tel F' , ce qui nécessite entre autres le lemme de Zorn.

d) Non : il suffit pour voir cela de trouver des polynômes irréductibles de $\mathbf{Q}[X]$ de degré d arbitrairement grand car alors une racine x d'un tel polynôme vérifiera $[\mathbf{Q}[x] : \mathbf{Q}] = d$ arbitrairement grand (alors que ce nombre serait majoré par la dimension $[\overline{\mathbf{Q}} : \mathbf{Q}]$ si celle-ci était finie). Or le polynôme $X^d - p$ pour p premier est irréductible sur \mathbf{Q} via le critère d'Eisenstein.

4. Non, E est isomorphe à $K^{(I)}$ (familles *presque nulles* à coefficients dans K), par contre E^* est bien isomorphe à K^I (se donner une forme linéaire revient à se donner ses valeurs sur une base). Noter qu'on n'a pas de "base duale" en dimension infinie, la famille correspondante n'engendrant pas tout E^* mais seulement les formes linéaires qui s'annulent sur presque tous les vecteurs de la base de départ. Bien que ce ne soit pas évident, K^I n'est jamais isomorphe à $K^{(I)}$ si I est infini (penser au cas $I = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, où le premier a le cardinal de l'ensemble des parties de I et le deuxième celui de l'ensemble des parties finies de I , qui est le même que celui de I si I est infini).

5. On voit tout de suite que l'hypothèse $px = 0$ permet de voir A comme un $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -espace vectoriel. Il est fini, donc de dimension finie $d \in \mathbf{N}$, donc isomorphe à $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^d$ (comme groupe abélien ou comme espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$). Si A est infini, en admettant l'existence d'une base dans tout espace vectoriel, on peut juste dire que A est isomorphe à $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^{(I)}$ pour un certain cardinal I .

6. a) On note $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots)$ etc. Si $a = (a_1, \dots, a_r)$ est dans $(A/I)^r$, posons $\bar{a} = (\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r)$, où \bar{x} désigne la classe dans A/I d'un élément x de A . Définissons $\bar{f} : (A/I)^r \rightarrow (A/I)^s$ par $f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$. Cette application est bien définie via le fait que si $x = (x_1, \dots, x_r)$ avec tous les x_i dans I , alors

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_r e_r) = x_1 f(e_1) + \dots + x_r f(e_r)$$

est dans I^r , ce qui montre que $\overline{f(x)} = 0$. Il est immédiat que f est A/I -linéaire et qu'elle reste surjective car f l'est.

Comme A est non nul, on peut choisir pour I un idéal maximal, ce qui dit que A/I est un corps. Le théorème du rang appliqué à \bar{f} (qui est un morphisme de A/I -espaces vectoriels) donne alors $r \geq s$.

b) Si M admet des bases de cardinal respectifs r et s , alors il est isomorphe à A^r et à A^s , qui sont donc isomorphes comme A -modules. Ainsi $r \geq s$ et $s \geq r$ d'après a), donc $r = s$.

Par contre, le \mathbf{Z} -module $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ n'a pas de base (sinon il serait infini vu que \mathbf{Z} est infini). Le \mathbf{Z} -module \mathbf{Z} est libre de rang 1 (une base en est (1)), tout comme son sous-module strict $2\mathbf{Z}$ (dont une base est (2)). La théorie des modules sur un anneau principal dit quand même que tout sous-module de \mathbf{Z}^r est libre de rang au plus r , mais c'est un résultat plus difficile.