154. Sous-espaces stables : Indications de solutions

1. La seule question dont la solution n'a pas déjà été donnée dans la feuille sur la leçon "sous-espaces stables" est la c). Pour celle-ci, on observe que le commutant d'une matrice compagnon de taille d est de dimension d. Toute matrice M est semblable à une matrice diagonale par blocs du type $\mathrm{Diag}(C(P_1), ..., C(P_r))$, chaque bloc étant une matrice compagnon de taille d_i (avec $\sum d_i = n$). Le commutant d'une telle matrice contient au moins les matrices diagonales par blocs $\mathrm{Diag}(M_1, ..., M_r)$ où chaque M_i est dans le commutant de $C(P_i)$. Ainsi la dimension du commutant de M est au moins $\sum d_i = n$.

2. Il nous suffit de prendre une matrice compagnon $C(P)$, où P est un polynôme irréductible dans $K[X]$ mais qui acquiert une racine multiple dans un corps de décomposition. Ce phénomène ne se produit pas en caractéristique zéro (car alors P' est non nul, et est donc premier avec P si P est irréductible puisque P' ne peut alors pas être divisible par P), ni d'ailleurs sur un corps parfait de caractéristique p. Mais par exemple sur $K = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}(T)$, le polynôme $P = X^2 - T$ est irréductible alors que sa dérivée est nulle, donc P acquiert une racine double sur son corps de décomposition (de même pour $X^p - T$ sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}(T)$).

3. Soit $(.,.)$ un produit scalaire quelconque sur V. Il suffit alors de poser

$$\langle x, y\rangle := \sum_{s \in G} (\rho_s(x), \rho_s(y)).$$

Maintenant, si W est un sous-espace de V stable par ρ, l'orthogonal de W pour le nouveau produit scalaire $\langle , \rangle$ est aussi stable, puisque tous les endomorphismes $\rho_g, g \in G$ sont alors des isométries pour ce produit scalaire. On termine alors comme dans le cours sur les représentations.

4. Soient $E_1, ..., E_r$ les espaces propres de u. Si F est stable par u, alors comme la restriction de u à F est diagonalisable, on a

$$F = \bigoplus (E_i \cap F),$$

puisque le sous-espace propre de cette restriction associé à une valeur propre λ est $E(\lambda) \cap F$, où $E(\lambda)$ est le sous-espace propre de u associé à λ. Ainsi F est somme directe de sous-espaces des espaces propres $E_1, ..., E_r$; réciproquement une somme directe de sous-espaces des E_i est clairement stable par u.

5. Comme A a trois valeurs propres distinctes 2, 9, et 5, elle est semblable à $B := \mathrm{Diag}(2, 9, 5)$. Pour P inversible, l'application $X \mapsto PXP^{-1}$ est un automorphisme de l'algèbre $M_n(K)$, ce qui permet de ramener la question à l'équation $X^2 = B$. Une telle X commute avec B, donc laisse stable ses sous-espaces propres, donc est elle-même diagonale, ce qui donne $X = \mathrm{Diag}(\pm\sqrt{2}, \pm 3, \pm\sqrt{5})$. Réciproquement, ces X conviennent. Il y a donc 8 solutions.