155. Endomorphismes diagonalisables en dimension finie : indications de solutions

1. Commençons par le cas de $M_n(\mathbf{C})$. Il est classique que l'ensemble $\mathcal{D}_{\mathbf{C}}$ des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbf{C})$, comme cela résulte aisément de ce que toute matrice complexe est trigonalisable. Par ailleurs, si une matrice complexe diagonalisable D a une valeur propre multiple λ, elle n''est pas dans l'intérieur de $\mathcal{D}_{\mathbf{C}}$: on se ramène à D diagonale, et en ajoutant des éléments arbitrairement petits au-dessus de la diagonale, on peut obtenir des matrices non diagonalisables arbitrairement proches de D (par exemple parce que la dimension de l'espace propre associé à λ est plus petite que la multiplicité de λ dans le polynôme caractéristique). Enfin, l'intérieur de D consiste exactement en l'ensemble $\mathcal{D}'_{\mathbf{C}}$ des matrices qui ont des valeurs propres deux à deux distinctes : pour voir cela, il suffit maintenant de montrer que $\mathcal{D}'_{\mathbf{C}}$ est ouvert, or c'est l'ensemble des matrices M qui vérifient $f(M) \neq 0$, où $f(M)$ est le résultant de χ_M et χ'_M (ici χ_M désigne le polynôme caractéristique de M). On conclut car f est une fonction continue (polynomiale en les coefficients de M).

Dans le cas de $M_n(\mathbf{R})$, on voit facilement (comme dans le cas complexe) que toute matrice trigonalisable est dans l'adhérence de l'ensemble $\mathcal{D}_{\mathbf{R}}$ des matrices diagonalisables réelles. Ce qui est plus difficile est que l'ensemble des matrices trigonalisables est bien fermé (et donc c'est l'adhérence de $\mathcal{D}_{\mathbf{R}}$) : pour montrer qu'une limite de matrices trigonalisables réelles reste trigonalisable, on peut remarquer que (via Gram-Schmidt), une matrice trigonalisable est trigonalisable *en base orthonormée*. On conclut alors facilement avec la compacité du groupe orthogonal $O_n(\mathbf{R})$. Le même argument que dans le cas complexe donne qu'une matrice diagonalisable avec une racine multiple n'est pas dans l'intérieur de $\mathcal{D}_{\mathbf{R}}$.

Il est plus difficile de montrer que l'ensemble $\mathcal{D}'_{\mathbf{R}}$ des matrices diagonalisables à valeurs propres deux à deux distinctes est bien un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$. Soit $A \in \mathcal{D}'_{\mathbf{R}}$ et soit (M_k) une suite de matrices réelles tendant vers A; notons $\alpha_1(k), ..., \alpha_n(k)$ les valeurs propres complexes de M_k (pas forcément deux à deux distinctes). Il est facile de voir que chaque suite $(\alpha_i(k))$ est bornée, vu que la suite des polynômes unitaires (χ_{M_k}) (qui sont tous de degré n) est bornée; quitte à extraire, on peut donc supposer que chaque suite $(\alpha_i(k))$ converge vers un nombre complexe α_i. Soit λ_i une valeur propre de A. Comme

$$\chi_{M_k}(\lambda_i) = \prod_{r=1}^{n}(\lambda_i - \alpha_r(k))$$

tend vers $\chi_A(\lambda_i) = 0$, on en déduit que $\prod_{r=1}^{n}(\lambda_i - \alpha_r) = 0$, autrement dit chaque λ_i est limite d'une suite $(\alpha_r(k))$. Ceci impose qu'à partir d'un certain rang $(\alpha_r(k))$ soit réel, sinon on pourrait supposer (quitte à réextraire) que par exemple pour tout k, $\alpha_1(k)$ et $\alpha_2(k)$ soient complexes conjugués, donc leur limite (qui est réelle) serait la même et tous les λ_i (qui sont deux à deux distincts) ne pourraient pas être limite d'une des suites $(\alpha_r(k))$; le même argument donne qu'à partir d'un certain rang, les $\alpha_r(k))$ sont deux à deux distincts. Finalement, on a montré : si $A \in \mathcal{D}'_{\mathbf{R}}$, toute suite de matrices réelles qui converge vers A est dans $\mathcal{D}'_{\mathbf{R}}$ à partir d'un certain rang, ce qui suffit pour conclure que le complémentaire de $\mathcal{D}'_{\mathbf{R}}$ est fermé; c'est ce qu'on voulait.

2. a) Non (dès que $n \geq 1$): comme les matrices diagonalisables sont denses dans $M_n(\mathbf{C})$, cela impliquerait que f (qui envoie toute matrice diagonalisable D sur $(D, 0)$) enverrait toute matrice M sur $(M, 0)$, ce qui n'est pas le cas si M n'est pas diagonalisable.

b) Oui : en effet en prenant les conjugués on obtient $A = \overline{A} = \overline{D} + \overline{N}$ avec $\overline{D}$ diagonalisable et $\overline{N}$ nilpotente qui commutent, donc l'unicité dans Dunford dit que $N = \overline{N}$ et $D = \overline{D}$, ou encore que D et N sont réelles. Le même argument marche en fait sur $\mathbf{Q}$ à condition de connaître la théorie de Galois : soit K un corps de décomposition du polynôme caractéristique P de A, c'est une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$. Comme P est scindé sur K, on sait qu'on peut faire la décomposition de Dunford $A = D + N$ avec D, N dans $M_n(K)$. Maintenant, pour tout $g \in \mathrm{Gal}\,(K/\mathbf{Q})$, on a $A = g.A = g.D + g.N$, et l'unicité de Dunford dit que $g.D = D$, $g.N = N$. Comme c'est vrai pour tout g dans le groupe de Galois $\mathrm{Gal}\,(K/\mathbf{Q})$, les matrices D et N restent à coefficients dans $\mathbf{Q}$ via la théorie de Galois (dans le cas réel, on avait utilisé la conjugaison qui est l'élément non trivial du groupe de Galois $\mathrm{Gal}\,(\mathbf{C}/\mathbf{R})$).

3. a) En général non. Il suffit de poser

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

et de calculer le polynôme caractéristique

$$\chi_M = (X - a)(X - c) - b^2 = x^2 - (a + c)X + (ac - b^2),$$

dont le discriminant est

$$(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2.$$

On prend alors $b \neq 0$ quelconque, $c = 0$ et a racine carrée complexe de $4b^2$, ce qui donne une matrice $(2,2)$ possédant une valeur propre double mais non scalaire, donc non diagonalisable.

b) La traduction matricielle du théorème de réduction simultanée donne l'existence d'une matrice inversible P telle que

$$A =^t PP \quad B = t^P DP,$$

avec D diagonale. On en déduit que $A^{-1}B = P^{-1}DP$ est diagonalisable. Il suffit alors d'appliquer le résultat à A^{-1}, qui reste symétrique définie positive.

4. a) On sait que G est commutatif car tout élément x de G vérifie $x = x^{-1}$, d'où $xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$. De plus, toutes les matrices de G sont diagonalisables (ce sont des symétries), donc co-diagonalisables puisqu'elles commutent deux à deux. Ainsi il existe P inversible tel que tout élément de G s'écrive $P\mathrm{Diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P^{-1}$ avec $\lambda_i \in \pm 1$. On en déduit immédiatement que le cardinal cherché est 2^n.

b) S'ils étaient isomorphes, le cardinal maximal d'un sous-groupe dont tous les éléments g vérifient $g^2 = I$ serait le même, ce qui n'est pas le cas d'après a).

c) Il suffit de prendre le sous-groupe engendré par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est fini car $A^p = I$, et A n'est pas diagonalisable. Le point est qu'en caractéristique p, le polynôme $X^p - 1$ n'est pas à racines simples.