159. Formes linéaires et dualité en dimension finie : éléments de réponses

1. a) Par dualité, il suffit de montrer que l'orthogonal de la famille $(\varphi_x)_{x\in I}$ dans F est réduit à $\{0\}$. Or, dire que f est dans cet orthogonal c'est dire que $\varphi_x(f)=0$ pour tout $x\in I$, ou encore $f(x)=0$ pour tout $x\in I$, ce qui signifie exactement que la fonction f est nulle.

b) La famille des $(\varphi_x)_{x\in I}$ étant génératrice dans F^* (qui est de dimension n), on en extrait une base $(\varphi_{x_1},...,\varphi_{x_n})$. Soit $(f_1^*,...,f_n^*)$ la base duale de la base $(f_1,...,f_n)$ de F. On voit immédiatement que la matrice de passage de $(f_1^*,...,f_n^*)$ à $(\varphi_{x_1},...,\varphi_{x_n})$ est la matrice $(\varphi_{x_j}(f_i))$, i.e. la matrice $(f_i(x_j))$, celle-ci est donc inversible.

c) On choisit une base $(f_1,...,f_n)$ de E, puis des $x_1,...,x_n$ dans I tel que la matrice $A=(f_i(x_j))$ soit inversible. On décompose ensuite chaque g_k sur la base $(f_1,...,f_n)$, soit

$$g_k=a_{1,k}f_1+...+a_{n,k}f_n,$$

et il suffit de montrer que pour chaque indice i, la suite réelle $(a_{i,k})$ converge (vérification directe, ou parce que la norme de la convergence uniforme est équivalente à la norme "sup des valeurs absolues des coordonnées" dans une base fixée). Or, chaque $g_k(x_j)$ converge, et on obtient immédiatement le résultat en résolvant le système linéaire (qui est de Cramer puisque A est inversible) en les inconnues $a_{1,k},...,a_{n,k}$ donné par les équations

$$g_k(x_j)=a_{1,k}f_1(x_j)+...+a_{n,k}f_n(x_j)$$

pour $1\leq j\leq n$.

2. a) L'application u est clairement linéaire, et son noyau est trivial (immédiat en écrivant que si $A\in\ker u$, alors $\mathrm{Tr}\,(AE_{ij})=0$ pour chaque matrice élémentaire E_{ij} dont le seul terme non nul est 1 en position (i,j)). Par égalité des dimensions, u est un isomorphisme.

b) Avec a), il existe une matrice A telle qu'on ait $\varphi(X) = \mathrm{Tr}\,(AX)$ pour toute matrice X. On a alors $\mathrm{Tr}\,((AX)Y) = \mathrm{Tr}\,(AYX)$ pour toutes matrices X, Y, ou encore $\mathrm{Tr}\,(YAX) = \mathrm{Tr}\,(AYX)$, soit

$$\mathrm{Tr}\,(YA - AY)X = 0$$

pour toutes X, Y. En appliquant encore a), on obtient $YA - AY = 0$ pour toute matrice Y, donc A est une matrice scalaire (elle commute avec toutes les matrices), ce qui donne le résultat.

c) Soit G le sous-espace de E constitué des matrices de trace nulle. On sait que G est un hyperplan de E, car la trace est une forme linéaire non nulle, et $F \subset G$ est clair puisque toute matrice de la forme $(XY - YX)$ a une trace nulle. Il suffit donc de montrer que F est un hyperplan, ou encore que son orthogonal dans E^* est une droite. Or, cet orthogonal est engendré par la forme linéaire trace d'après b), il est donc bien de dimension 1.

d) Le fait qu'une matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle se montre aisément par récurrence sur la dimension en utilisant le produit par blocs, en commençant par montrer qu'une telle matrice est semblable à une matrice dont le terme $(1, 1)$ est nul (c'est ici qu'on doit utiliser la caractéristique zéro pour dire qu'une matrice non nulle de trace nulle n'est pas scalaire). On est donc ramené à traiter le cas d'une matrice B de diagonale nulle. Fixons une matrice diagonale à valeurs propres distinctes D. Alors le noyau de l'application linéaire $Y \mapsto DY - YD$ est de dimension n (il est constitué des matrices diagonales), donc son image est de codimension n et est inclus (via un calcul immédiat) dans l'espace des matrices de diagonale nulle, lequel est de codimension n. Ainsi l'image est exactement l'espace des matrices de diagonale nulle et on peut bien écrire $B = DY - YD$.

3. a) Il suffit dans ce cas de choisir pour $\mathcal{B}$ une base orthonormée $(e_1, ..., e_n)$. Sa base duale est alors constituée des formes linéaires $\langle e_i, .\rangle$, dont il est immédiat qu'elles restent de norme 1 (pour la norme subordonnée à la norme euclidienne ou hermitienne) via l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

b) L'existence du maximum vient de ce que S est compacte et l'application u continue. L'application u n'est pas identiquement nulle car elle est non nulle sur toute base de vecteurs normés, le maximum est donc atteint en une base $(e_1, ..., e_n)$. Comme de plus $e_i^*(e_i) = 1$ avec e_i de norme 1, chaque e_i^* est de norme (d'opérateur) au moins 1.

c) Décomposons v sur la base $(e_1, ..., e_n)$. Par définition de la base duale, on a :

$$v = e_1^*(v)e_1 + ... + e_n^*(v)e_n.$$

Comme le déterminant est une forme n-linéaire alternée, on obtient

$$\det_{\mathcal{B}}(v, e_2, ..., e_n) = e_1^*(v)\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, ..., e_n) = e_1^*(v)M.$$

Mais comme M est le maximum de u, on a

$$|\det_{\mathcal{B}}(v, e_2, ..., e_n)| \leq M,$$

d'où finalement $|e_1^*(v)| \leq 1$. Comme ceci est vrai pour tout vecteur unitaire v, cela signifie bien que $||e_1^*|| \leq 1$, et donc avec b) on conclut que $||e_1^*|| = 1$. On procède de même avec chaque e_i^*.

d) D'après c), on peut trouver une base $(e_1, ..., e_n)$ de V, de base duale $(e_1^*, ..., e_n^*)$, et telle que

$$||e_i|| = ||e_i^*|| = 1$$

pour tout indice i. D'après le théorème de Hahn-Banach, les formes linéaires $e_1^*, ...e_n^*$ se prolongent en des formes linéaires continues (que l'on note encore $e_1^*, ..., e_n^*$) sur E, dont la norme d'opérateur reste 1. Posons alors, pour tout $x \in E$:

$$p(x) = e_1^*(x)e_1 + ... + e_n^*(x)e_n.$$

Il est clair que $\operatorname{Im} p \subset V$ et que la restriction de p à V est l'identité, ce qui montre que p est un projecteur d'image V. Par ailleurs, si $||x|| = 1$, on a $|e_i^*(x)| \leq 1$ pour tout i puisque $||e_i|| \leq 1$, ce qui donne

$$||p(x)|| \leq ||e_1|| + ... + ||e_i|| = n.$$

Finalement $||p|| \leq n$.