# Université Paris Sud — Année 2009-2010

# M2 — Géométrie Algébrique

# TD n$^\circ$ V

**Le but des exercices qui suivent est détablir le résultat de la question 2 de l'exercice V.E. On peut commencer par résoudre ce dernier exercice en admettant les résultats des exercices précédents dont certains sont relativement techniques. Notations et définitions :**

**i) Sauf mention du contraire, pour $u : A \to B$ une $A$-algèbre $A$ sera supposé noethérien et $B$ de type fini ; de même pour $f : X \to S$ un morphisme de schémas, la base $S$ sera supposée noethérienne et le morphisme $f$ de type fini.**
**ii) Pour $u : A \to B$ un morphisme d'anneaux (une $A$-algèbre) on notera**

$$\mathrm{Spec}(u) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$$

**le morphisme de schémas affines qui s'en déduit naturellement.**
**iii) Pour $A$ un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$, on notera**

$$\hat{A} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} A/\mathfrak{p}^n$$

**le *séparé complété $\mathfrak{p}$-adique de* $A$. Pour tout $A$-module $M$, on notera**

$$\hat{M} := \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M/\mathfrak{p}^n M = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} M \otimes_A A/\mathfrak{p}^n .$$

**iv) On dira qu'un morphisme de type fini entre schémas $f : X \to S$ est *quasi-fini en un point* $x \in X$ si la fibre $X_{f(x)}$ est ensemblistement finie. On dira que $f$ est *quasi-fini* s'il l'est en tout point $x \in X$.**

**Exercice A.** $-$**Morphismes quasi-finis**

**1)** Montrer que si $k$ est un corps et $A$ une $k$-algèbre, le morphisme $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(k)$ est quasi-fini si et seulement si $A$ est une $k$-algèbre finie.

**2)** Montrer que la classe des morphismes quasi-finis est stable par changement de base et par composition.

**3)** Montrer que si l'on a une suite de morphismes de schémas

$$Y \xrightarrow{g} X \longrightarrow \xrightarrow{f} S,$$

$y$ un point de $Y$, $f \circ g$ quasi-fini en $y$ implique $g$ quasi-fini en $y$.

**Exercice B.** $-$**Rappels sur les extensions entières**

Soit $A \hookrightarrow B$ une $A$-algèbre entière. Montrer que :
**1)** Le morphisme correspondant $\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est surjectif.

**2)** Si $\mathfrak{q}$ et $\mathfrak{r}$ sont des idéaux premiers de $B$ au-dessus de $\mathfrak{p} \subset A$, tels que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{r}$ alors $\mathfrak{q} = \mathfrak{r}$.

**3)** Si $B$ est intègre, $B$ est un corps si et seulement si $A$ en est un.

**4)** Si $\mathfrak{J} \subset B$ est un idéal et $\mathfrak{I} := A \cap \mathfrak{J}$, $B/\mathfrak{J}$ est entière sur $A/\mathfrak{I}$.

**5)** Si $A$ est local didéal maximal $\mathfrak{m}$, alors les idéaux premiers de $B$ au-dessus de $\mathfrak{m}$ sont exactement les idéaux maximaux de $B$.

**6)** Pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \subset A$, $B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}$ est entière sur $A_{\mathfrak{p}}$.

**7)** Pour $A \subset B$ une $A$-algèbre, si $A$ est intégralement clos dans $B$, pour toute partie multiplicative $S \subset A$, $S^{-1}A$ est intégralement clos dans $S^{-1}B$.

**Exercice C.** $-$**Complété d'un anneau et fidèle platitude**

**Dans cet exercice on fixe un anneau $A$. On rappelle qu'un $A$-module $M$ est *plat* si pour tout morphisme injectif de $A$ modules $P \to Q$, le morphisme $P \otimes_A M \to Q \otimes_A M$ qui s'en déduit naturellement est encore injectif. Cela équivaut au fait que pour toute suite exacte de $A$-modules**

$$0 \to P \longrightarrow Q \longrightarrow R \to 0$$

**la suite**

$$0 \to P \otimes_A M \longrightarrow Q \otimes_A M \longrightarrow R \otimes_A M \to 0$$

**est encore exacte. Une $A$-algèbre $B$ est *plate* si elle l'est en tant que $A$-module.**

**On dira qu'un $A$-module $M$ est *fidèlement plat* s'il est plat et si de plus, pour tout $A$-module $P$, $P \otimes_A M = 0$ implique $P = 0$. on dira également qu'une $A$-algèbre $B$ est *fidèlement plate* si elle l'est en tant que $A$-module.**

**1)** Montrer qu'un $A$-module $M$ est fidèlement plat si et seulement si, pour toute suite de morphismes

$$P \longrightarrow Q \longrightarrow R,$$

la suite

$$0 \to P \longrightarrow Q \longrightarrow R \to 0$$

est exacte équivaut au fait que la suite

$$0 \to P \otimes_A M \longrightarrow Q \otimes_A M \longrightarrow R \otimes_A M \to 0$$

est exacte.

**2)** Soit $B$ une $A$-algèbre fidèlement plate et $M$ un $A$-module. Montrer que si $M \otimes_A B$ est un $B$-module de type fini alors $M$ est un $A$-module de type fini.

**3)** Montrer que si $A$ est un anneau local, son séparé complété $\hat{A}$ est fidèlement plat sur $A$.

**Exercice D.** $-$**Morphismes locaux quasi-fini**

**Soit $A$ un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$ et de corps résiduel $k$ et $u : A \to B$ un morphisme injectif local de type fini. Rappelons que cela signfie en particulier que $B$ est un anneau local dont on notera $\mathfrak{q}$ l'idéal maximal et que**

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap A\,.$$

**1)** Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Le quotient

$$B/B\mathfrak{p} \;=\; B \otimes_A k$$

est une $k$-algèbre finie.

b) L'idéal $B\mathfrak{p}$ de $B$ est un *idéal de définition de* $B$ c'est-à-dire qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathfrak{q}^n \;\subset\; B\mathfrak{p}\;.$$

c) Le complété $\hat{B}$ de $B$ est une $\hat{A}$-algèbre finie.

**2)** Montrer que si $A$ est complet, c'est-à-dire $A \;=\; \hat{A}$ le morphisme

$$\mathrm{Spec}(u) \;:\; \mathrm{Spec}(B) \;\to\; \mathrm{Spec}(A)$$

est quasi-fini si et seulement s'il est fini.

**Exercice E.** $-$**Le théorème principal de Zariski**

**Soient** $A$ **un anneau noethérien et** $u \;:\; A \;\to\; B$ **un morphisme d'anneaux faisant de** $b$ **une** $A$**-algèbre de type fini. On suppose de plus que le morphisme induit** $\mathrm{Spec}(B) \;\to\; \mathrm{Spec}(A)$ **est quasi-fini en tout idéal premier** $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$.

**1) On suppose dans cette question que** $u$ **est injectif et on note** $\overline{A}$ **la fermeture intégrale de** $A$ **dans** $B$.

**a)** Montrer que le morphisme naturel $\mathrm{Spec}(B) \;\to\; \mathrm{Spec}(\overline{A})$ est encore quasi-fini en tout idéal premier $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$.

**b)** Montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$, si l'on note $\mathfrak{p} \;=\; \overline{A} \cap \mathfrak{q}$, l'inclusion naturelle

$$\overline{A}_{\mathfrak{p}} \;\hookrightarrow\; B_{\mathfrak{q}}$$

est un isomorphisme.

**c)** Déduire de la question précédente, que pour tout $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$, il existe $f \in \overline{a}$, $f \notin \mathfrak{q}$ tel que l'inclusion naturelle

$$f^{-1}B \;\hookrightarrow\; f^{-1}\overline{A}$$

est un isomorphisme.

**d)** Déduire des questions précédentes qu'il existe une $A$-algèbre finie $\tilde{A} \subset B$ et une famille finie $\mathbf{F} \subset \tilde{A}$ telle que

$$\{D(f) \;:=\; \mathrm{Spec}(f^{-1}B)\}_{f\in\mathbf{F}}$$

recouvre $\mathrm{Spec}(B)$ et pour tout $f \in \mathbf{F}$, l'inclusion naturelle

$$f^{-1}\tilde{A} \;\hookrightarrow\; F^{-1}B$$

est un isomorphisme.

**2)** Montrer qu'il existe une $A$-algèbre $v \;:\; A \;\to\; A_0$, un morphisme naturel $w \;:\; A_0 \;\to\; B$ tels que :

i) Le morphisme

$$\mathrm{Spec}(v) \;:\; \mathrm{Spec}(A_0) \;\to\; \mathrm{Spec}(A)$$

est fini.

ii) Le morphisme

$$\mathrm{Spec}(w) \;:\; \mathrm{Spec}(B) \;\to\; \mathrm{Spec}(A_0)$$

est une immersion ouverte.

iii) On a

$$u = w \circ v$$

ou encore

$$\mathrm{Spec}(u) = \mathrm{Spec}(v) \circ \mathrm{Spec}(w) .$$

**Exercice F**

**1)** Étant donné un morphisme d'anneaux $A \to B$, montrer que si le morphisme induit

$$\mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$$

est propre alors $B$ est une $A$-algèbre finie.

**2)** En déduire que si $X \to \mathrm{Spec}(A)$ est un morphisme propre alors $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une $A$-algèbre finie.

**3)** En déduire que, si $k$ et un corps et $X \to \mathrm{Spec}(k)$ une variété propre et réduite, alors $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est de dimension finie sur $k$.