Examen d'algèbre, M1

D. Harari, M. Gomez-Aparicio, K. Destagnol

14 décembre 2020; durée : 3h

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 : Groupes (4 points)

On rappelle que si G est un groupe, un sous-groupe H de G est dit *caractéristique* s'il est stable par tout automorphisme de G.

a) Soit n un entier au moins égal à 5. Montrer que tout sous-groupe distingué de $\mathcal{S}_n$ est un sous-groupe caractéristique de $\mathcal{S}_n$.

b) Soient p un nombre premier et $G = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$ avec $n \geq 2$. Montrer qu'il existe un sous-groupe H de G qui n'est pas caractéristique dans G.

c) Soient p un nombre premier et H un p-Sylow d'un groupe fini G. Est-il possible que H soit distingué dans G et H ne soit pas caractéristique dans G ?

Exercice 2 : Anneaux (4 points)

Soit A un anneau commutatif. On dit que A est *de dimension* 0 si tout idéal premier de A est maximal.

a) Montrer que si A est intègre, alors A est de dimension 0 si et seulement si A est un corps.

b) Donner (en justifiant) un exemple d'anneau commutatif non nul de dimension 0 qui n'est pas un corps.

c) Soient A un anneau commutatif de dimension 0 et I un idéal de A. Montrer que l'anneau quotient A/I est encore de dimension 0.

Exercice 3 : Modules (7 points)

Soient A un anneau commutatif non nul, M un A-module, et N un sous-module de M. On dit que N est un *facteur direct* de M s'il existe un sous-module P de M tel que $M = N \oplus P$.

a) Soit $x \in M$. Montrer que s'il existe un morphisme de A-modules $u : M \to A$ tel que $u(x) = 1$, alors le sous-module $A.x$ est un facteur direct de M.

b) Montrer que si N est un facteur direct de M et N est de plus un A-module libre avec $N \neq \{0\}$, alors il existe un morphisme de A-modules $u : M \to A$ tel que $1 \in u(N)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que l'anneau A est principal et que $M = A^n$ avec $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Soit $a = (a_1, ..., a_n) \in M$, avec $a \neq (0, 0, ..., 0)$. On pose $N = A.a$. Montrer que le sous-module N est un facteur direct de M si et seulement si $\text{pgcd}(a_1, ..., a_n) = 1$.

d) Montrer que $a = (a_1, ..., a_n)$ peut être complété en une base $(a, e_2, ..., e_n)$ de $M = A^n$ si et seulement si $\text{pgcd}(a_1, ..., a_n) = 1$.

e) Soit $(f_1, ..., f_r)$ une famille libre du A-module $M = A^n$. On note B la matrice de $M_{n,r}(A)$ dont les vecteurs colonnes sont $f_1, ..., f_r$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les mineurs de B pour que le sous-module de M engendré par $(f_1, ..., f_r)$ soit un facteur direct de M.

Exercice 4 : Corps et théorie de Galois (6 points+2 pour le bonus)

Soit K un corps. Soit L une extension finie et galoisienne de K, on pose $G = \text{Gal}(L/K)$. Soient F_1 et F_2 deux extensions de K avec $K \subset F_i \subset L$ pour $i \in \{1, 2\}$. On pose $G_i = \text{Gal}(L/F_i)$ pour $i \in \{1, 2\}$. Ainsi, G_1 et G_2 sont des sous-groupes de G.

a) On suppose que $F_1 \cap F_2 = K$. Montrer que la partie $G_1 \cup G_2$ engendre le groupe G.

b) Montrer réciproquement que si $G_1 \cup G_2$ engendre G, alors $F_1 \cap F_2 = K$.

Dans toute la suite, on note F le sous-corps de L engendré par $F_1 \cup F_2$.

c) Montrer que $F = L$ si et seulement si $G_1 \cap G_2$ est le groupe trivial.

d) On suppose que F_1 et F_2 sont des extensions galoisiennes de K qui vérifient $F_1 \cap F_2 = K$ et $F = L$. Montrer que le groupe G est isomorphe au produit direct $G_1 \times G_2$ (on pourra montrer d'abord que c'est un produit semi-direct de G_2 par G_1).

e) Montrer que le résultat de d) ne vaut plus forcément si F_1 et F_2 ne sont pas supposées galoisiennes sur K.

f) (Question bonus) On revient au cas général, où F_1 et F_2 sont des extensions intermédiaires quelconques entre K et L. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif de K-algèbres de $F_1 \otimes_K F_2$ dans F, mais que ces deux K-algèbres peuvent ne pas être isomorphes.