

# FEUILLE TD 3 – EXERCICES ALGÈBRE – MODULES I

**EXERCICE 1.**

Soit  $A$  un anneau commutatif non nul.

1. Soit  $f : A^r \rightarrow A^r$  une application linéaire, de matrice  $P$  dans la base canonique. Montrer que  $f$  est surjective si, et seulement si,  $\det(P)$  est inversible dans  $A$ , et que ceci est équivalent à  $f$  bijective.
2. Montrer que  $f$  est injective si, et seulement si,  $\det P$  est non nul et n'est pas diviseur de zéro dans  $A$ .  
Indication : Si  $\det(P) = a$  est diviseur de zéro, on fixera  $b$  non nul dans  $A$  tel que  $ab = 0$ , et on considérera un mineur  $m$  de taille maximale  $s$  dans  $P$  tel que  $mb \neq 0$ ; puis on construira un vecteur colonne non nul annulé par  $P$  à partir de mineurs de taille  $s$  de  $P$ .

**EXERCICE 2 – EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES.** Soit  $A$  un anneau commutatif non nul. On suppose que  $A$  n'est pas un corps. Donner des exemples :

1. de  $A$ -modules non libres et montrer que si tout  $A$ -module est libre alors  $A$  est un corps;
2. D'une famille libre à  $n$  éléments dans  $A^n$  qui n'est pas une base;
3. D'une partie génératrice minimale qui ne soit pas une base;
4. De sous-modules n'ayant pas de supplémentaire;
5. De module libre ayant un sous-module qui n'est pas libre.
6. Soit  $A$  un anneau intègre et  $K$  son corps de fractions. On suppose que  $K \neq A$  (i.e.  $A$  n'est pas un corps). Montrer que  $K$  n'est pas libre comme  $A$ -module.

**EXERCICE 3.**

Soit  $A$  un anneau commutatif. Soit  $B$  une  $A$ -algèbre. Un élément  $b \in B$  est dit *entier* sur  $A$  s'il existe  $P \in A[X]$  unitaire tel que  $P(b) = 0$ .

1. Montrer que si  $b \in B$  est entier sur  $A$ , alors le  $A$ -module  $A[b]$  est de type fini.

Soit maintenant  $b \in B$ , on suppose qu'il existe un  $A[b]$ -module  $D$  qui est fidèle (i.e. tel que pour tout  $\alpha \in A[b]$  non nul, il existe  $x \in D$  tel que  $\alpha \cdot x \neq 0$ ) et de type fini en tant que  $A$ -module. On choisit une famille génératrice  $(d_1, \dots, d_n)$  du  $A$ -module  $D$  et on écrit pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$  :

$$b \cdot d_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} d_j$$

avec  $a_{ij} \in A$ .

2. Soit  $d \in A[b]$  le déterminant de la matrice  $(\delta_{ij}b - a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Montrer que  $d \cdot d_i = 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
3. En déduire que  $d = 0$ , puis que  $b$  est entier sur  $A$ .
4. Montrer la réciproque de 1. : si  $b \in B$  est tel que le  $A$ -module  $A[b]$  est de type fini, alors  $b$  est entier sur  $A$ . Montrer que cette condition est aussi équivalente à l'existence d'une sous-algèbre de  $B$  contenant  $b$  et de type fini en tant que  $A$ -module.
5. Montrer que si  $b_1, \dots, b_n \in B$  sont entiers sur  $A$ , alors le  $A$ -module  $A[b_1, \dots, b_n]$  est de type fini.
6. On suppose que  $B$  est un  $A$ -module de type fini. Montrer alors que tout élément de  $B$  est entier sur  $A$  (on dit alors que  $B$  est entier sur  $A$ ).
7. Montrer que si  $C$  est une  $A$ -algèbre et  $B$  est entier sur  $A$ , alors  $B \otimes_A C$  est entier sur  $C$ . La  $A[X]$ -algèbre  $B[X]$  est-elle alors entière sur  $A[X]$ ?

**EXERCICE 4.**

Soient  $A$  un anneau commutatif et  $B$  une  $A$ -algèbre. On note  $A_1$  l'ensemble des éléments de  $B$  qui sont entiers sur  $A$ . Cet exercice fait appel aux résultats de l'exercice précédent.

1. Montrer que  $A_1$  est un sous-anneau de  $B$  qui contient l'image de  $A$  dans  $B$ . On dit que  $A_1$  est la *fermeture intégrale* de  $A$  dans  $B$ .
2. Soit  $C$  une  $B$ -algèbre. Montrer que si  $c$  est entier sur  $B$  et  $B$  est entier sur  $A$ , alors  $c$  est entier sur  $A$ .
3. Avec les notations de 1., montrer que la fermeture intégrale de  $A_1$  dans  $B$  est  $A_1$ .
4. On suppose  $A$  intègre, de corps des fractions  $K$ . On dit que  $A$  est *intégralement clos* si la fermeture intégrale de  $A$  dans  $K$  est  $A$ . Montrer que si  $A$  est factoriel, alors  $A$  est intégralement clos, mais que l'anneau  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$  n'est pas intégralement clos.

Soit  $A$  un anneau intègre de corps des fractions  $K$ . Soit  $L$  une extension de  $K$  (i.e. un corps qui contient  $K$ ). Soit  $x \in L$  un élément entier sur  $A$ , on note  $P \in K[X]$  le polynôme minimal de  $x$  sur  $K$ , c'est-à-dire le polynôme unitaire non nul de degré minimal de  $K[X]$  qui annule  $x$ .

5. Montrer qu'il existe un polynôme unitaire  $Q \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $Q(x) = 0$  et  $P$  divise  $Q$  dans  $K[X]$ .
6. Soient  $a_1, \dots, a_r$  les racines de  $P$  (dans un corps de décomposition  $M$  de  $P$  sur  $K$ ). Montrer que les  $a_i$  sont entiers sur  $A$  pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ .

7. En déduire que si  $A$  est intégralement clos, alors  $P \in A[X]$ .
8. On prend  $A = \mathbf{Z}, K = \mathbf{Q}, L = \mathbf{Q}(i\sqrt{5})$ . Montrer que si  $y \in L$  est entier sur  $\mathbf{Z}$ , il est racine d'un polynôme unitaire de  $\mathbf{Z}[X]$  de degré 1 ou 2.
9. Montrer que  $\mathbf{Z}(i\sqrt{5})$  est la fermeture intégrale de  $\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{Q}(i\sqrt{5})$ . En particulier,  $\mathbf{Z}(i\sqrt{5})$  est intégralement clos (mais pas factoriel).

**EXERCICE 5 — MODULES PROJECTIFS.** Soit  $P$  un  $A$ -module. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) pour tout morphisme surjectif de  $A$ -module  $g : E \rightarrow F$  et pour tout  $f \in \text{Hom}_A(P, F)$ , il existe  $h \in \text{Hom}_A(P, E)$  tel que  $f = g \circ h$ ;
- b) pour tout morphisme surjectif  $\pi : M \rightarrow P$ , il existe un morphisme  $s : P \rightarrow M$  tel que  $\pi \circ s = \text{Id}_P$  (un tel morphisme  $s$  est appelé une section de  $\pi$ );
- c) Il existe un  $A$ -module  $M$  tel que  $M \oplus P$  est libre.

Un  $A$ -module  $P$  vérifiant ces propriétés est appelé *module projectif*. Montrer qu'un  $A$ -module libre est projectif et donner un exemple de  $\mathbf{Z}$ -module qui n'est pas projectif.

**EXERCICE 6.** Soit  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module de type fini et  $\phi : M \rightarrow A^n$  un morphisme surjectif de  $A$ -modules.

1. Montrer que  $\phi$  admet un inverse à droite  $\psi$  (i.e. il existe  $\psi : A^n \rightarrow M$  tel que  $\phi \circ \psi = \text{id}_{A^n}$ ).
2. Montrer que  $M \simeq \text{Ker}\phi \oplus \text{Im}\psi$ .
3. Montrer que  $\text{Ker}\phi$  est de type fini.

**EXERCICE 7.** Soit

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{\pi} M'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte de  $A$ -modules. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe  $r \in \text{Hom}_A(M, M')$  tel que  $r \circ i = \text{Id}_{M'}$ ;
- (ii) Il existe  $s \in \text{Hom}_A(M'', M)$  tel que  $\pi \circ s = \text{Id}_{M''}$ ;
- (iii) Il existe  $s \in \text{Hom}_A(M'', M)$  tel que  $M = i(M') \oplus s(M'')$ ;
- (iv) La suite suivante est exacte pour tout  $A$ -module  $N$

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(N, M') \xrightarrow{i_*} \text{Hom}_A(N, M) \xrightarrow{\pi_*} \text{Hom}_A(N, M'') \longrightarrow 0 ;$$

- (v) La suite suivante est exacte pour tout  $A$ -module  $N$

$$0 \longrightarrow \text{Hom}_A(M'', N) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}_A(M, N) \xrightarrow{i^*} \text{Hom}_A(M', N) \longrightarrow 0 .$$

Une suite vérifiant ces propriétés s'appelle une *suite scindée*.

**EXERCICE 8 — CHASSE AU DIAGRAMME.**

1. Soit  $A$  un anneau, et soit

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ & & & & \downarrow v & & \downarrow w \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array}$$

un diagramme de morphismes de  $A$ -modules tel que les deux lignes sont exactes et  $g' \circ v = w \circ g$ .

Montrer qu'il existe un unique morphisme  $u : L \rightarrow L'$  tel que  $f' \circ u = v \circ f$ . Si  $v$  est injective, montrer que  $u$  l'est aussi.

2. Soit  $A$  un anneau, et soit

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & & & \\ L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

un diagramme de morphismes de  $A$ -modules tel que les deux lignes sont exactes et  $f' \circ u = v \circ f$ .

Montrer qu'il existe un unique morphisme  $w : N \rightarrow N'$  tel que  $g' \circ v = w \circ g$ . Si  $v$  est surjective, montrer que  $w$  l'est aussi.

**EXERCICE 9 — LEMME DES 5.** Soit  $A$  un anneau, et soit

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & M_2 & \xrightarrow{f_2} & M_3 & \xrightarrow{f_3} & M_4 & \xrightarrow{f_4} & M_5 \\ \downarrow u_1 & & \downarrow u_2 & & \downarrow u_3 & & \downarrow u_4 & & \downarrow u_5 \\ M'_1 & \xrightarrow{f'_1} & M'_2 & \xrightarrow{f'_2} & M'_3 & \xrightarrow{f'_3} & M'_4 & \xrightarrow{f'_4} & M'_5 \end{array}$$

un diagramme de morphisme de  $A$ -modules tel que les deux lignes sont exactes et chaque carré est commutatif. Montrer les énoncés suivants.

1. Si  $u_2$  et  $u_4$  sont surjectives et si  $u_5$  est injective, alors  $u_3$  est surjective.
2. Si  $u_2$  et  $u_4$  sont injectives et si  $u_1$  est surjective, alors  $u_3$  est injective.
3. Si  $u_1$  est surjective,  $u_5$  est injective et  $u_2$  et  $u_4$  sont des isomorphismes, alors  $u_3$  est un isomorphisme.

**EXERCICE 10 — LEMME DU SERPENT.** Soit  $A$  un anneau, et soit

$$\begin{array}{ccccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array}$$

un diagramme de morphismes de  $A$ -modules tel que les deux lignes sont exactes et  $v \circ f = f' \circ u$  et  $w \circ g = g' \circ v$ .

1. Montrer que la restriction de  $f$  à  $\text{Ker}(u)$  a son image contenue dans  $\text{Ker}(v)$ . Énoncer un résultat analogue pour  $g$ .
2. Montrer que l'application  $\overline{f'} : L'/\text{Im}(u) \rightarrow M'/\text{Im}(v)$  définie<sup>1</sup> par  $\overline{x} \mapsto \overline{f'(x)}$  est bien définie et énoncer un résultat similaire pour  $g'$ .
3. Définir un morphisme  $\delta : \text{Ker}(w) \rightarrow L'/\text{Im}(u)$ .
4. Montrer que la suite

$$\text{Ker}(u) \xrightarrow{f|_{\text{Ker}(u)}} \text{Ker}(v) \xrightarrow{g|_{\text{Ker}(v)}} \text{Ker}(w) \xrightarrow{\delta} L'/\text{Im}(u) \xrightarrow{\overline{f'}} M'/\text{Im}(v) \xrightarrow{\overline{g'}} N'/\text{Im}(w)$$

est exacte.

**EXERCICE 11.**

Soit  $A$  un anneau commutatif. Soit  $I$  un ensemble ordonné filtrant (c'est-à-dire que si  $(i, j)$  sont dans  $I$ , il existe  $k \in I$  tel que  $k \geq i$  et  $k \geq j$ ). Soit  $(M_i)_{i \in I}$  une famille de  $A$ -modules. On suppose donné pour tout  $j \geq i$  un morphisme de  $A$ -modules  $f_{ij} : M_i \rightarrow M_j$  avec  $f_{ii} = \text{Id}$  et  $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$  pour tous  $i, j, k$  de  $I$  vérifiant  $i \leq j \leq k$ .

On considère l'ensemble  $E$  des couples  $(i, x_i)$  avec  $i \in I$  et  $x_i \in M_i$  ( $E$  est l'union disjointe des  $M_i$ ).

1. On définit une relation  $\sim$  sur  $E$  par  $(i, x_i) \sim (j, x_j)$  s'il existe  $k \in I$  vérifiant :  $k \geq i, k \geq j$ , et  $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$ . Montrer que c'est une relation d'équivalence.

On appelle *limite inductive* des  $M_i$  l'ensemble quotient  $M$  de  $E$  par cette relation et  $\varphi_i$  l'application de  $M_i$  dans  $M$  qui envoie  $x_i$  sur la classe de  $(i, x_i)$ .

2. Montrer qu'il existe une unique structure de  $A$ -module sur  $M$  telle que les applications  $\varphi_i$  soient des morphismes de  $A$ -modules. On note

$$M = \varinjlim_{i \in I} M_i.$$

3. Montrer que le  $A$ -module  $\bigoplus_{i \in I} M_i$  est isomorphe à une limite inductive des  $\bigoplus_{i \in J} M_i$ , où  $J$  est une partie finie de  $I$ .
4. Montrer que si  $N$  est un  $A$ -module, alors pour toute famille de morphismes  $u_i : M_i \rightarrow N$  vérifiant  $u_j \circ f_{ij} = u_i$  si  $i \geq j$ , il existe un unique morphisme  $u : M := \varinjlim_{i \in I} M_i \rightarrow N$  tel que  $u_i = u \circ \varphi_i$ .
5. Montrer que

$$N \otimes_A \varinjlim_{i \in I} M_i \simeq \varinjlim_{i \in I} (N \otimes_A M_i).$$

**EXERCICE 12.**

Soient  $A$  un anneau principal et  $B$  un  $A$ -module sans torsion (i.e. l'égalité  $\alpha x = 0$  avec  $\alpha \in A$  et  $x \in B$  implique  $\alpha = 0$  ou  $x = 0$ ). Soient  $u : M \rightarrow N$  un morphisme injectif de  $A$ -modules et  $u_B : M \otimes_A B \rightarrow N \otimes_A B$  le morphisme induit. Cet exercice utilise l'exercice 14.

1. Montrer que si  $B$  est un  $A$ -module de type fini, alors  $u_B$  est injectif.
2. On ne suppose plus que  $B$  est de type fini. Montrer que  $B$  est isomorphe à la limite inductive d'une famille de  $A$ -modules de type fini.
3. En déduire que le résultat de 1. vaut encore sans l'hypothèse que  $B$  est de type fini.
4. Montrer par contre que si  $B$  est de type fini mais n'est plus supposé sans torsion, le résultat de 1. tombe en défaut.

<sup>1</sup> On parle de *conoyaux*.