

Partiel de mathématiques générales, M1 (3h)

D. Harari, K. Destagnol

21 octobre 2024

Tout énoncé vu en cours (mais pas s'il a été vu seulement en TD) peut être utilisé sans démonstration. On peut dans chaque exercice admettre le résultat d'une question pour résoudre une question ultérieure.

Exercice 1 : Vrai ou faux ? (8 points)

Parmi les énoncés suivants, démontrer ceux qui sont vrais et donner un contre-exemple (en justifiant) pour ceux qui sont faux (on indiquera d'abord si l'énoncé est vrai ou faux).

a) Soit G un groupe de cardinal $n = p^m \alpha$, avec $m \in \mathbf{N}^*$ et α non divisible par p . Alors G admet un élément d'ordre p^m .

b) Soit G un groupe fini. On suppose qu'il existe un nombre premier p et un entier $m > 0$ tel que pour tout $x \in G$, on ait $x^{p^m} = 1$. Alors, G est un p -groupe.

c) Soit G un groupe. Alors, on a l'équivalence : $G = D(G)$ si et seulement si pour tout groupe abélien A et tout morphisme $f : G \rightarrow A$, on a $f(x) = 1$ pour tout $x \in G$.

d) Soient G et G' deux groupes finis. S'il existe un morphisme injectif de G dans G' , alors il existe un morphisme surjectif de G' dans G .

e) Soit G un groupe fini opérant transitivement sur un ensemble X . Alors X est fini et son cardinal divise celui de G .

f) Soit G un groupe fini opérant fidèlement par automorphismes sur $\mathbf{Z}/27\mathbf{Z}$. Alors, G est cyclique.

Exercice 2 : Automorphismes et groupes symétriques (12 points)

Soit G un groupe. On note $\text{Aut}(G)$ le groupe des automorphismes de G (pour la loi \circ). On note $\text{Int}(G)$ l'ensemble des automorphismes intérieurs de G , c'est-à-dire ceux de la forme $x \mapsto axa^{-1}$ pour $a \in G$.

a) Montrer que $\text{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Aut}(G)$.

b) Montrer que $\text{Int}(G)$ est isomorphe à G/Z , où Z est le centre de G .

c) Montrer que si $G = GL_n(\mathbf{C})$ et $n \geq 2$, on n'a pas $\text{Aut}(G) = \text{Int}(G)$ (on pourra faire intervenir l'inverse d'une matrice de $GL_n(\mathbf{C})$).

Dans toute la suite, on prend $G = \mathcal{S}_n$ avec $n \geq 3$ et on considère un automorphisme φ de G . On pose $E = \{1, \dots, n\}$. On suppose que pour toute transposition τ , on a que $\varphi(\tau)$ est aussi une transposition.

d) Montrer que les transpositions de la forme $(1, i)$, avec $2 \leq i \leq n$, engendrent \mathcal{S}_n . On pose $\tau_i = \varphi(1, i)$ pour $2 \leq i \leq n$.

e) Montrer qu'on peut trouver trois éléments distincts $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de E tels que $\tau_2 = (\alpha_1, \alpha_2)$ et $\tau_3 = (\alpha_1, \alpha_3)$ (on pourra observer que $(1, 2)$ et $(1, 3)$ ne commutent pas).

f) Soit $k \geq 4$ dans E . Montrer qu'on a $\tau_k \neq (\alpha_2, \alpha_3)$ (on pourra raisonner par l'absurde et calculer $(\tau_2 \circ \tau_k) \circ (\tau_3 \circ \tau_k)$).

g) En déduire que pour tout $k \geq 4$ dans E , il existe α_k dans E tel que $\tau_k = (\alpha_1, \alpha_k)$; montrer que les α_k pour $k = 1, 2, \dots, n$ sont deux à deux distincts.

h) Montrer que φ est l'automorphisme intérieur $\sigma \mapsto u\sigma u^{-1}$ de G , où u est la permutation $k \mapsto \alpha_k$ de E .

i) Retrouver que le groupe $\text{Aut}(\mathcal{S}_3)$ est isomorphe à \mathcal{S}_3