fonctions de plusieurs variables : continuité, différentielles, gradient

corrigés des exercices

---

1. L'énoncé est erroné : l'expression $\dfrac{xy}{x+y}$ n'est pas définie, non seulement en $(0,0)$, mais dès que $x+y=0$.

2. *a*) Passons en coordonnées polaires : $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Développons $\sin x$ à l'ordre 3 :

$$\sin x = \sin(r\cos\theta) = r\cos\theta - \frac{1}{6}r^3\cos^3\theta + o(r^3)^{*} \quad (r \to 0),$$

et de même :

$$\sin y = \sin(r\sin\theta) = r\sin\theta - \frac{1}{6}r^3\sin^3\theta + o(r^3)$$

Si l'on se rappelle que $\frac{1}{r^2}o(r^4) = o\left(\frac{r^4}{r^2}\right) = o(r^2)$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2} &= \frac{r^2\cos\theta\sin\theta - \frac{1}{6}r^4\sin^3\theta\cos\theta - r^2\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{6}r^4\cos^3\theta\sin\theta + o(r^4)}{r^2}\\ &= \frac{1}{6}r^2\sin\theta\cos\theta\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + o(r^2)\end{aligned}$$

Ceci montre clairement que $f(x,y)$ tend vers 0 quand r tend vers 0, c'est-à-dire quand $(x,y) \to (0,0)$.

b) La fonction f possède des dérivées partielles en tout point distinct de l'origine, puisqu'elle est quotient de fonctions qui possèdent elles-mêmes des dérivées partielles. On étudie donc l'existence de dérivées partielles à l'origine :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0,$$

et de même, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Ainsi la fonction f admet des dérivées partielles en tout point.

---

* Rappelons qu'une fonction est du type $o(r^3)$ $(r \to 0)$ si on peut l'écrire sous la forme $r^3\varepsilon(r)$, où $\varepsilon(r) \to 0$ quand $r \to 0$.
On remarquera qu'une fonction qui est du type $o(r^3\cos^3\theta)$ ou $o(r^3\sin^3\theta)$ est *a fortiori* du type $o(r^3)$, puisque $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$ sont bornés.

c) Elle est de classe $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles sont continues. En dehors de l'origine, on obtient, tous calculs faits,

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{(y^2-x^2)\sin y - y(x^2+y^2)\cos x + 2xy\sin x}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{(y^2-x^2)\sin x + x(x^2+y^2)\cos y - 2xy\sin y}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}}$$

Ces dérivées partielles sont manifestement continues(somme, produit, quotient de fonctions continues), sauf peut-être à l'origine.

Voyons si les dérivées partielles tendent vers 0 quand (x,y) tend vers $(0,0)$. On commencera par calculer un développement limité du numérateur de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ après être passé en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
&(y^2-x^2)\sin y - y(x^2+y^2)\cos x + 2xy\sin x\\
&= r^2(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\sin(r\sin\theta) - r^3\sin\theta\cos(r\cos\theta) + 2r^2\sin\theta\cos\theta\sin(r\cos\theta)\\
&= -r^2\cos 2\theta\left(r\sin\theta - \tfrac{1}{6}r^3\sin^3\theta + o(r^3)\right) - r^3\sin\theta\left(1-\tfrac{1}{2}r^2\cos^2\theta + o(r^2)\right)\\
&\qquad\qquad + r^2\sin 2\theta\left(r\cos\theta - \tfrac{1}{6}r^3\cos^3\theta + o(r^3)\right)\\
&= r^3(\sin 2\theta\cos\theta - \sin\theta\cos 2\theta - \sin\theta)\\
&\qquad + r^5\left(\tfrac{1}{6}\sin^3\theta\cos 2\theta - \tfrac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta - \tfrac{1}{6}\cos^3\theta\sin 2\theta\right) + o(r^5)\\
&= r^3\left(\sin(2\theta-\theta)-\sin\theta\right) + r^5\left(\tfrac{1}{6}\sin^3\theta\cos 2\theta - \tfrac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta - \tfrac{1}{6}\cos^3\theta\sin 2\theta\right) + o(r^5)\\
&= \boxed{r^5\left(\tfrac{1}{6}\sin^3\theta\cos 2\theta - \tfrac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta - \tfrac{1}{6}\cos^3\theta\sin 2\theta\right) + o(r^5).}
\end{aligned}$$

On obtient alors, en divisant par $(x^2+y^2)^2 = r^4$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r\left(\tfrac{1}{6}\sin^3\theta\cos 2\theta - \tfrac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta - \tfrac{1}{6}\cos^3\theta\sin 2\theta\right) + o(r),$$

Le coefficient de r est borné ; on peut alors conclure que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{r\to 0} r\left(\tfrac{1}{6}\sin^3\theta\cos 2\theta - \tfrac{1}{2}\cos^2\theta\sin\theta - \tfrac{1}{6}\cos^3\theta\sin 2\theta\right) + o(r) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

La dérivée partielle par rapport à x est ainsi continue à l'origine, donc partout. La démonstration serait la même pour la dérivée partielle par rapport à y, ce qui finit de montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

3. *a*) Si l'on fait suivre au point (x,y) l'arc paramétré défini par $x=t^3,\ \ y=t$, on obtient

$$f(t^3,t) = \frac{t^3t^2}{t^6+t^6} = \frac{1}{2t},$$

de sorte que $f(x,y)$, dans ce cas, tend vers $\pm\infty$. La fonction n'est donc pas continue à l'origine.

b) L'application partielle $f(x,y_0) = \frac{xy_0^2}{x^2+y_0^6}$ est définie et continue pour tout x si $y_0\neq 0$ (c'est une fonction rationnelle de x dont le dénominateur ne peut s'annuler). Si $y_0=0$, c'est l'application nulle, qui est parfaitement continue. L'application partielle $f(x, y_0)$ est donc continue quel que soit y_0. L'argumentation est la même pour l'application partielle $f(x_0, y)$.

c) L'application partielle $f(x, y_0)$ possède une dérivée par rapport à x puisque c'est une fonction rationnelle de x partout définie si $y_0 \neq 0$; il en va de même si $y_0 = 0$, puisque l'application partielle est alors l'application nulle. Même argumentation pour l'application partielle $f(x_0, y)$. La fonction $f(x, y)$ possède donc des dérivées partielles en tout point, bien qu'elle ne soit pas continue à l'origine.

4. *a*) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ parce que c'est une fonction rationnelle de x et y définie sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Ces dérivées partielles valent, après simplification :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, && (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}. && (2) \end{aligned}}$$

Si $y = 0$, l'application partielle $f(x, 0)$ est l'application identiquement nulle et sa dérivée partielle est donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0$, y compris à l'origine. De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, y) = 0$.

Reste à voir si les dérivées partielles sont continues à l'origine ; passons encore en coordonnées polaires ; la dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = r^5 \sin\theta \frac{\cos^4\theta - \sin^4\theta + 4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^4} = r\sin\theta(\cos 2\theta + \sin^2 2\theta),$$

tend bien vers 0 avec r puisque $\sin\theta(\cos 2\theta + \sin^2 2\theta)$ est borné. De même,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = r\cos\theta(\cos 2\theta - \sin^2 2\theta),$$

tend vers 0 avec r. Les dérivées partielles sont donc bien continues aussi à l'origine, et la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$.

b) Pour $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, en un point distinct de l'origine, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\left[x^4 - y^4 + 4x^2y^2 + y(-4y^3 + 8x^2y^2)\right](x^2+y^2)^2 - y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)\cdot 4y(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{2}{}_{3}} \\ &= \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3} = \boxed{\frac{(x^2-y^2)(x^4 + 10x^2y^2 + y^4)}{(x^2+y^2)^3}}. \end{aligned}$$

On trouve le même résultat pour $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, ce qui est normal car f est de classe $\mathscr{C}^2$ (en fait de classe $\mathscr{C}^\infty$) sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en tant que fonction rationnelle définie sur cet ouvert.

Calculons maintenant les dérivées secondes croisées à l'origine, en revenant à la définition :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y}.$$

Or, d'après la formule (2)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)=\frac{x^5}{x^4}=x, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\frac{-y^5}{y^4}=-y$$

de sorte que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{y}=-1.$$

Les dérivées secondes croisées à l'origine ne sont pas égales : f n'est donc pas de classe $\mathscr{C}^2$ (cf. théorème de Schwarz).

5. (*i*) Par définition, la dérivée d'une fonction f suivant un vecteur $\vec{V}$ au point M_0 est la dérivée en 0 de la fonction de variable réelle $\varphi(t)=f(M_0+t\vec{V})$. On a, en raison du théorème de dérivation des fonctions composées,

$$D_{\vec{V}}(M_0)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\cdot\vec{V}$$

On a donc dans ce cas :

$$D_{(2,1)}(x,y)=\left(\frac{x}{\ln(x^2+y^2)^{1/2}},\frac{y}{\ln(x^2+y^2)^{1/2}}\right)\cdot(2,1)=\frac{2x+y}{\ln(x^2+y^2)^{1/2}}=\frac{3}{(\ln 2)^{1/2}}.$$

(*ii*) Ici, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f=(y+z,z+x,x+y)=(8,6,0)$ de sorte que

$$D_{(3,4,-12)}(-1,1,7)=(8,6,0)\cdot(3,4,-12)=48.$$

(*iii*) Il s'agit d'une dérivée *directionnelle*, c'est-à-dire qu'on calcule la dérivée suivant un vecteur *unitaire* $\vec{u}$ de direction donnée. Il faut donc trouver la direction d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que le produit scalaire $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f,(2,1)\cdot\vec{u}$ soit maximal ; ceci a lieu, bien évidemment, lorsque $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\,(2,1)$. La direction est donc celle du vecteur

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\,(2,1)=(8x,18y)\Big|_{(2,1)}=(16,18).$$

6. Posons $\varphi(t)=f(tx,ty)$ et calculons $\varphi'(t)$; il vient, d'après la formule de dérivation des fonctions composées :

$$\varphi'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)\frac{\mathrm{d}(tx)}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\frac{\mathrm{d}(ty)}{\mathrm{d}t}=x\frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty)+y\frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty).$$

Mais d'autre part, si l'on dérive le second membre de l'égalité, on obtient

$$\varphi'(t)=mt^{m-1}f(x,y).$$

Il suffit alors de faire $t=1$ et de comparer les deux expressions :

$$\varphi'(1)=x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=mf(x,y).$$