Université Paris Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2001-2002
Mathématiques

Corrigé du Premier Partiel de mathématiques - Le 05/11/01 - 3h

Question de cours (4,5 points).

1. Une condition suffisante est que f et g soient positives ou nulles (**0,5 points**).

Nous avons $f(x) = g(x)(1 + \ (x))$, où est une fonction qui admet 0 comme limite quand x tend vers l'infini. Pour x suffisament grand on a alors $\frac{1}{2} \leq 1 + \ (x) \leq \frac{3}{2}$ et comme $g \geq 0$, ceci implique que pour x suffisament grand $\frac{1}{2}g(x) \leq f(x) \leq \frac{3}{2}g(x)$. Le théorème de comparaison implique alors que les intégrales $\int_1^\infty f(t)dt$ et $\int_1^\infty g(t)dt$ sont de même nature (**1,5 points**).

2. L'intégrale $\int_1^\infty \dfrac{\cos t}{t^\alpha}dt$ converge si le paramètre réel α est strictement positif (**0,5 points**). Pour $t \geq 1$ on a :

$$\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\left(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{\cos^2 t}{t} = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{1 + \cos 2t}{2t} = \frac{\cos t}{\sqrt{t}} + \frac{1}{2}\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\frac{\cos 2t}{t}.$$

Les intégrales $\int_1^\infty \dfrac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ et $\int_1^\infty \dfrac{\cos 2t}{2t}dt$ convergent et $\int_1^\infty \dfrac{1}{2t}dt$ est une intégrale de Riemann divergente. Par conséquent, la somme I diverge comme somme de deux intégrales convergentes et une divergente (**1,5 points**).

Le résultat démontré dans la question précédente n'est pas nécessairement valable pour des fonctions f et g qui ne sont pas de signe constant. Les fonctions définies pour $t \in [1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}$ et $g(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t}}(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}})$ sont équivalentes au voisinage de l'infini, mais on vient de voir que leurs intégrales sont de nature différente (**0,5 points**).

EXERCICE 1 (6 points)

1.a La fonction $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t+t}} sin(\frac{1}{t})$ est continue sur l'intervalle $]0, \infty[$ et donc intégrable sur tout intervalle $[a, b]$, avec $0 < a < b$. On étudie

$$I_1' = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t} + t} sin(\frac{1}{t})dt \quad \text{et} \quad I_1'' = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{t} + t} sin(\frac{1}{t})dt \quad (\textbf{0,5 points}).$$

Intéressons-nous d'abord à I_1'. Pour tout $0 < t \leq 1$, $|\frac{1}{\sqrt{t+t}} sin(\frac{1}{t})| \leq \frac{1}{\sqrt{t+t}}$ (ceci est possible car le sinus est inférieur ou égal à 1). Or, en 0, $\frac{1}{\sqrt{t+t}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}}$ qui est intégrable d'après le critère de Riemann. L'intégrale I_1' est absolument convergente (**1 point**).

Sur l'intervalle $[1, \infty[$ notre fonction est positive. Elle est équivalente à l'infini à $\frac{1}{t\sqrt{t}}$ qui est intégrable d'après le critère de Riemann. On a donc la convergence absolue de I_1'' (**1 point**).

Par conséquent, l'intégrale I_1 est absolument convergente (**0,5 points**).

1.b La fonction $f : t \rightarrow \frac{ln(t)(\cos t)}{t^\gamma}$ est continue sur l'intervalle $]0, \infty[$ et donc intégrable sur tout intervalle $[a, b]$, avec $0 < a < b$. On étudie

$$I_2' = \int_0^1 \frac{ln(t)(\cos t)}{t^\gamma}dt \quad \text{et} \quad I_2'' = \int_1^\infty \frac{ln(t)(\cos t)}{t^\gamma}dt \quad (\textbf{0,5 points}).$$

Étudions l'intégrale $I_2^{'}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $0 < t < 1$, $f(t) < 0$, et $f(t) \sim \frac{lnt}{t^\gamma}$ en 0. L'intégrale de Bertrand $\int_0^1 \frac{lnt}{t^\gamma} dt$ est convergente si et seulement si $\gamma < 1$. D'après le théorème sur les équivalents, $I_2^{'}$ converge également si $\gamma < 1$ et diverge si $\gamma \geq 1$ (**1 point**).

Pour étudier $I_2^{''}$ on peut intégrer par parties en utilisant les fonctions $F(t) = \frac{lnt}{t^\gamma}$ et $G(t) = sint$. Il vient

$$\int_1^x f(t)dt = [\frac{sin(t)ln(t)}{t^\gamma}]_1^x - \int_1^x \frac{sint - \gamma sin(t)ln(t)}{t^{\gamma+1}} dt \quad (\textbf{0,5 points}).$$

On fait tendre x vers l'infini et on remarque que $lim_{x\to\infty} \frac{sin(x)ln(x)}{x^\gamma} = 0$. Alors l'intégrale $I_2^{''}$ converge si et seulement si l'intégrale $I_2^{'''} = \int_1^\infty (\frac{sint}{t^{\gamma+1}} - \gamma \frac{sint \cdot lnt}{t^{\gamma+1}})\, dt$ est convergente. On a $\frac{|\sin t|}{t^{\gamma+1}} \leq \frac{1}{t^{\gamma+1}}$ et $\frac{|\sin t| \ln t}{t^{\gamma+1}} \leq \frac{\ln t}{t^{\gamma+1}}$, pour $t \in [1, +\infty[$. Les intégrale de Riemann $\int_1^\infty \frac{1}{t^{\gamma+1}} dt$ et de Bertrand $\int_1^\infty \frac{lnt}{t^{\gamma+1}} dt$ sont convergentes (car $\gamma + 1 > 1$), donc l'intégrale $I_2^{'''}$ est absolument convergente comme somme de deux intégrales absolument convergentes. En particulier, $I_2^{'''}$ est convergente, donc l'intégrale $I_2^{''}$ est convergente, pour tout $\gamma > 0$ (**1 point**).

En conclusion, I_2 converge pour $\gamma < 1$ et diverge pour $\gamma \geq 1$.

EXERCICE 2 (6 points)

2.a Pour $\alpha \leq 0$ la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers 0 et, par conséquent, la série diverge (**0,5 points**).

Pour $\alpha > 0$ la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 car $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = 0$ (**0,5 points**).

Considérons un développement limité de u_n à l'ordre 2 :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}}(1 + \ (n)), \quad \text{où} \lim_{n\to\infty} \ (n) = 0.$$

La série de terme général $v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente d'après le théorème des séries alternées car $\frac{1}{n^\alpha}$ tend vers 0 en décroissant (**0,5 points**).

Étudions la série de terme général $w_n = \frac{1}{n^{2\alpha}}(1 + \ (n))$. On a $w_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}}$ et donc w_n est positif pour n assez grand. La série de Riemann de terme général $\frac{1}{n^{2\alpha}}$ converge si et seulement si $2\alpha > 1$. D'après le théorème sur les séries équivalentes la série de terme général w_n converge si et seulement si $2\alpha > 1$.

Conclusion la série de terme général u_n converge si et seulement si $2\alpha > 1$ (**1,5 points**).

2.b (i) On vérifie que $\lim_{n\to\infty} \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = |z|$. Selon le critère de d'Alembert la série est absolument convergente, donc convergente, pour tout nombre complexe z de module strictement inférieur à 1 (**0,5 points**). Pour $|z| > 1$, le terme général de la série ne tend pas vers 0, ce qui implique la divergence de la série (en particulier, elle n'est pas absolument convergente). Lorsque $|z| = 1$, la série de teme général $|v_n| = \frac{1}{n+3}$ diverge car elle a la même nature que la série de Riemann de terme général $\frac{1}{n}$. Pour $z = 1$, on a également $v_n = \frac{1}{n+3}$, donc la série $\sum v_n$ diverge (**0,5 points**). Il reste à régler le cas des points z qui se trouvent sur le cercle unité, $|z| = 1, z \neq 1$. Pour tout z de module 1, différent de 1, la série est semi-convergente par le critère d'Abel appliqué aux séries trigonométriques (car la suite $\frac{1}{n+3}$ tend vers 0 en décroissant quand n tend vers l'infini) (**0,5 points**).

En résumé, la série converge pour tous les nombres complexes $|z| \leq 1$, sauf pour $z = 1$. La série est absolument convergente pour tous les nombres complexes z de module strictement inférieur à 1 (**0,5 points**).

(ii) On utilise les majorations suivantes :

$$|r_n| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |v_k| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{k+3} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n2^n} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-n}} = \frac{1}{n2^n} \quad (\textbf{0,5 points}).$$

(iii). Nous sommes en présence d'une série alternée : $v_n = \frac{(-1)^n}{n+3}$. Dans ce cas $|S - S_{n_0}| < |v_{n_0+1}|$, où S désigne la somme de la série et S_{n_0} la somme partielle d'ordre n_0. Pour approcher la somme de la série à 10^{-5}, on peut prendre $n_0 = 10^5$ (**0,5 points**).

EXERCICE 3 (4,5 points)

(a) On observe que la somme des éléments d'une colonne est la même pour chaque colonne et vaut $\beta + n - 1$. On aditionne à la première colonne toutes les autres colonnes et on sort $\beta + n - 1$ en facteur. À présent, la première colonne ne contient que des 1. On soustrait cette colonne à toutes les autres et on obtient un déterminant triangulaire supérieur qui se calcule facilement. Le résultat est $(\beta + n - 1)(\beta - 1)^{n-1}$ (**1,5 points**).

(b) $A_3(\beta)$ est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Pour $n = 3$ ce déterminant s'annule quand β vaut 1 ou -2. Pour toutes les autres valeurs de β la matrice $A_3(\beta)$ est inversible. La matrice inverse est

$$(A_3(\beta))^{-1} = \frac{1}{(\beta - 1)(\beta + 2)} \cdot \begin{pmatrix} \beta + 1 & -1 & -1 \\ -1 & \beta + 1 & -1 \\ -1 & -1 & \beta + 1 \end{pmatrix} \quad (\textbf{1,5 points}).$$

(c) On forme la matrice d'ordre 4 dont les colonnes sont les vecteurs donnés. On tombe sur la matrice $A_4(3)$ dont le déterminant est nul (calculé au point (a)). Les 4 vecteurs sont donc linéairement dépendants. La matrice d'ordre 3 obtenue avec les 3 premières lignes et les 3 premières colonnes de notre matrice est $A_3(3)$ dont le déterminant est non nul (d'après le point (b)). Les 4 vecteurs donnés engendrent donc un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

Son équation est donnée par :

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & -3 & 1 & x_2 \\ 1 & 1 & -3 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & x_4 \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation est : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ (**1,5 points**).