Université Paris Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2001-2002
Mathématiques

Premier Partiel de Mathématiques

Le 05/11/2001 - 12h-15h - Barème indicatif - Documents écrits et calculettes interdits

QUESTION DE COURS (4,5 points)

1. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et intégrables sur tout intervalle $[1, x]$, $x \in [1, +\infty[$, telles que $f \sim g$ en $+\infty$. Donner une condition sur f et g pour que les intégrales $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ soient de même nature et démontrer votre affirmation.

2. Pour quelles valeurs du nombre réel α l'intégrale $\int_1^{+\infty} \dfrac{\cos t}{t^\alpha}\, dt$ est-elle convergente ? (on ne demande pas de justifier votre réponse). Etudier la convergence de l'intégrale :

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}(1 + \frac{\cos t}{\sqrt{t}})\ dt$$

Que peut-on en déduire sur le résultat démontré dans la question précédente ?

EXERCICE 1 (6 points)

1a. Etudier la convergence de l'intégrale :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t} + t} \sin(\frac{1}{t})\ dt$$

Cette intégrale est-elle absolument convergente ?

1b. Soit γ un nombre réel strictement positif. Etudier la convergence de l'intégrale :

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln t)(\cos t)}{t^\gamma}\ dt$$

EXERCICE 2 (6 points)

2a. Etudier, suivant les valeurs du nombre réel α, la convergence de la série de terme général :

$$u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}} - 1, \quad n \geq 1.$$

2b. Soit z un nombre complexe.

(i) Etudier la convergence de la série de terme général suivant et préciser pour quelles valeurs de z la série est absolument convergente :

$$v_n = \frac{z^n}{n+3}, \quad n \geq 0.$$

(ii) Lorsque $|z| = 1/2$, montrer que le reste $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ de la série vérifie $|r_n| \leq \dfrac{1}{n2^n}$, pour $n \geq 1$.

(iii) Lorsque $z = -1$, déterminer un entier n_0 tel que $v_0 + v_1 + \cdots + v_{n_0}$ représente la somme de la série à 10^{-5} près.

EXERCICE 3 (4,5 points)

Soient n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et β un nombre réel. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels $A_n(\beta)$ définie par :

$$A_n(\beta) = \begin{pmatrix} \beta & 1 & . & . & . & 1 \\ 1 & \beta & . & . & . & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 1 & . & . & . & \beta & 1 \\ 1 & . & . & . & 1 & \beta \end{pmatrix}$$

C'est-à-dire : $A_n(\beta) = (a_{ij}),\ \ a_{ii} = \beta,\ \ a_{ij} = 1,\ i \neq j,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n.$

(a) Calculer $det(A_n(\beta))$ pour $n \geq 2$.

(b) On prend $n = 3$. Déterminer les valeurs de β telles que $A_3(\beta)$ soit inversible et dans ce cas calculer, à l'aide des déterminants, la matrice $(A_3(\beta))^{-1}$.

(c) On considère le sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs :

$$u_1 = (-3, 1, 1, 1),\ u_2 = (1, -3, 1, 1),\ u_3 = (1, 1, -3, 1),\ u_4 = (1, 1, 1, -3).$$

Déterminer une base et un système d'équations cartésiennes du sous-espace vectoriel V.