Université Paris Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2003-2004
Mathématiques

Premier Partiel de Mathématiques

Le 14/11/2003 - 10h-13h - Barème indicatif - Documents écrits et calculettes interdits

QUESTION DE COURS (4 points)

Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies sur l'intervalle $[2,+\infty[$ et intégrables sur tout segment $[2,x]$, $x \in [2,+\infty[$.

1. Donner des conditions sur f et g pour que la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} g(t)dt$ implique la convergence de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)dt$. Démontrer votre affirmation.

2. On suppose que, pour $x \in [2,+\infty[$, $\quad -\dfrac{1}{x(\ln x)^2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$. L'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ est-elle absolument convergente ?

EXERCICE 1 (6,5 points)

1a. L'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2} \sin(\sqrt{t})}{t}\, dt$$

est-elle absolument convergente ?

1b. L'intégrale

$$J = \int_3^{+\infty} \frac{\cos t}{t + 2\cos t}\, dt$$

est-elle convergente ? est-elle absolument convergente ?

1c. On pose

$$a_n = \int_3^{n^2} \frac{|\cos t|}{t + 2\cos t}\, dt, \qquad b_n = \int_0^{n^2} \frac{e^{-t^2}|\sin\sqrt{t}|}{t}\, dt, \quad n \geq 2.$$

Etudier la convergence des séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \sum \frac{(-1)^n}{b_n}.$$

EXERCICE 2 (7 points)

Soit α un nombre réel positif ou nul. On pose, pour tout entier $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln n + (-1)^n}.$$

2a. Déterminer les valeurs de α telles que la série $\sum u_n$ soit absolument convergente, semi-convergente ou divergente.

2b. On suppose $\alpha = 1/2$. Pour tout $n \geq 2$, on peut définir $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathbb{R}$ tels que $|r_n| \leq \frac{M}{\ln n}$, si $n \geq n_0$.

2c. Soit β un nombre réel non nul, on pose, pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = \frac{\beta^n}{\ln n + (-1)^n}$. Etudier la convergence de la série $\sum v_n$, suivant les valeurs de $\beta \in \mathbb{R}^*$. Lorsque $\beta = 1/2$, montrer que le reste d'ordre $n \geq 2$, $r'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$, de la série $\sum v_n$, vérifie

$$0 < r'_n \leq \frac{1}{2^n(\ln(n+1) - 1)}.$$

EXERCICE 3 (5 points)

Soient a et x deux nombres réels. On considère la matrice carrée d'ordre quatre à coefficients réels $M_{a,x}$ définie par

$$M_{a,x} = \begin{pmatrix} x & a & 1 & 1 \\ 1 & x & a & 1 \\ 1 & 1 & x & a \\ 1 & 1 & a & x \end{pmatrix}$$

3a. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme P, défini pour $x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = det(M_{a,x})$.

Dans la suite, on note $f_{a,x}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice $M_{a,x}$.

3b. Pour quelles valeurs des nombres réels a et x l'endomorphisme $f_{a,x}$ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^4$? On suppose $a = 1$ et $x = 2$. Résoudre, à l'aide des déterminants, l'équation d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$,

$$f_{1,2}\Big((x_1, x_2, x_3, x_4)\Big) = (0, 0, 0, 1).$$

3c. On suppose $a = 2$ et $x = -4$. Déterminer, à l'aide des déterminants, une base et une équation cartésienne du sous-espace $Im\ f_{2,-4}$ de R^4.