Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2002-2003
Mathématiques

Corrigé du 1er partiel de mathématiques

Le 14/11/2002, 14h00 – 17h00

QUESTION DE COURS (5 points)

1. Théorème (des séries alternées). Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle positive décroissante qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Alors la série $\sum(-1)^n a_n$ converge. De plus, en posant pour $k \geq 0$, $r_k = \sum_{n=k+1}^{+\infty} (-1)^n a_n$, on a $|r_k| \leq a_{k+1}$. [1 point]

Démonstration de la convergence. Soit $(S_k)_{k\geq 0}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum(-1)^n a_n$. Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $A_k = \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n a_n = S_{2k}$, $B_k = \sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n a_n = S_{2k+1}$.

Alors la suite $(A_k)_{k\geq 0}$ est décroissante, car $A_{k+1} - A_k = -a_{2k+1} + a_{2k+2} \leq 0$. De même, $(B_k)_{k\geq 0}$ est croissante. De plus, la différence $A_k - B_k = a_{2k+1}$ est positive et tend vers 0 quand $k \to +\infty$. Donc les suites $(A_k)_{k\geq 0}$ et $(B_k)_{k\geq 0}$ sont adjacentes et ont une limite commune $l \in \mathbb{R}$. Donc l est également la limite de la suite $(S_k)_{k\geq 0}$, vu que $(S_{2k})_{k\geq 0}$ et $(S_{2k+1})_{k\geq 0}$ convergent vers l. Ainsi l est la somme de la série alternée. [2 points]

2. Posons, pour $n \geq 3$, $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n \ln n}}$, $w_n = \dfrac{1}{n \ln n}$.

Alors pour $n \geq 3$, on a $u_n = v_n + w_n$. La série $\sum v_n$ converge (d'après le théorème ci-dessus), alors que $\sum w_n$ diverge (série de Bertrand). Donc $\sum u_n$ diverge. [1 point]

(a) La série $\sum u_n$ est une série alternée divergente. Le théorème de (1) ne s'applique pas parce que la suite de terme général

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n \ln n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n \ln n}}\right), \qquad n \geq 3$$

n'est pas décroissante. (N.B. La condition que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ soit décroissante n'est cependant pas une condition nécessaire : la série $\sum(-1)^n a_n$ peut aussi bien converger que diverger si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ n'est pas décroissante.) [0,5 points]

(b) Deux séries à termes positifs équivalents sont de même nature. Mais ce n'est plus forcément vrai si on enlève la condition "à termes positifs". En effet, dans notre exemple $u_n \sim v_n$, or $\sum u_n$ diverge, alors que $\sum v_n$ converge. [0,5 points]

EXERCICE 1 [7 points]

1a. La fonction à intégrer est continue sur $[0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment $[0, x], x > 0$. Donc le seul problème est la convergence en $+\infty$. [0,5 points]

Pour $t \in [0, +\infty[$,

$$|t^2 \cos t e^{-\sqrt{t}}| \leq |t^2 e^{-\sqrt{t}}| = o\left(\frac{1}{t^{17}}\right)$$

d'après le théorème de croissances comparées. Donc $|t^2 \cos t e^{-\sqrt{t}}| < t^{-17}$ pour t assez grand. Or $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^{17}}$ est une intégrale de Riemann convergente. Donc l'intégrale I est absolument convergente, donc convergente. (Évidemment, on peut remplacer 17 par n'importe quel nombre réel strictement supérieur à 1.) [1 point]

Posons, pour $x \geq 0$,

$$F(x) = \int_0^x t^2 \cos t e^{-\sqrt{t}} dt.$$

Dire que l'intégrale I converge c'est dire que F tend vers une limite finie l quand x tend vers $+\infty$. Alors

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x} t^2\cos t e^{-\sqrt{t}}dt = \lim_{x\to+\infty}(F(2x)-F(x)) = l-l=0. \qquad \text{[1 point]}$$

1b. (i) La fonction à intégrer, $f : t \mapsto \dfrac{\sqrt{\ln t}\sin t}{(t-1)^\beta}$, est continue sur $]1,+\infty[$, donc intégrable sur tout segment $[a,b]\subset]1,+\infty[$. L'intégrale I_β est convergente si et seulement si les intégrales $I'_\beta = \int_1^{17} f(t)dt$ et $I''_\beta = \int_{17}^{+\infty} f(t)dt$ (où 17 peut être remplacé par tout $a\in]1,+\infty[$) sont convergentes toutes les deux. [0,5 points]

Convergence de I'_β en 1.

$$\frac{\sqrt{\ln t}\sin t}{(t-1)^\beta} \sim \frac{\sin(1)}{(t-1)^{\beta-1/2}}$$

en 1. De plus les deux fonctions sont positives au voisinage de 1. La comparaison avec une intégrale de Riemann montre que I'_β est absolument convergente si $\beta<3/2$ et divergente sinon. [1 point]

Convergence de I''_β en $+\infty$.

Faisons une intégration par parties avec $u'(t)=\sin t$, $v(t)=\sqrt{\ln t}/(t-1)^\beta$.

$$\int_{17}^{x}\sin t\frac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)^\beta}dt = \left[-\cos t\frac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)^\beta}\right]_{17}^{x} + \int_{17}^{x}\cos t\frac{\frac{t-1}{2t\sqrt{\ln t}}-\beta\sqrt{\ln t}}{(t-1)^{\beta+1}}dt.$$

Le premier terme de cette somme a une limite finie quand x tend vers $+\infty$, car $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos t\dfrac{\sqrt{\ln t}}{(t-1)^\beta}=0$.

Posons $g(t)=\cos t\dfrac{\frac{t-1}{2t\sqrt{\ln t}}-\beta\sqrt{\ln t}}{(t-1)^{\beta+1}}$, pour $t\in[17,+\infty[$, et montrons que le deuxième terme de la somme précédente a aussi une limite finie quand x tend vers $+\infty$, car l'intégrale $\int_{17}^{+\infty}g(t)dt$ est absolument convergente. En effet, d'après le théorème de croissances comparées,

$$\lim_{t\to+\infty}t^{1+(\beta/2)}g(t)=0, \quad \text{donc pour } t \text{ assez grand,} \quad |g(t)|\le\frac{1}{t^{1+(\beta/2)}}$$

La comparaison avec une intégrale de Riemann convergente $(1+(\beta/2)>1)$ montre que l'intégrale $\int_{17}^{+\infty}g(t)dt$ est bien absolument convergente (On peut utiliser d'autres majorations et la comparaison à des intégrales de Bertrand). On conclut que l'intégrale $\int_{17}^{x}f(t)dt$ a une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Ainsi I''_β est convergente pour tout $\beta>0$.

Donc I_β est convergente si et seulement si $\beta<3/2$. [1,5 points]

(ii) **Étude de J_α.** D'après le cours, l'intégrale J_α est absolument convergente si $\alpha>1$, semi-convergente si $0<\alpha\le1$ et divergente si $\alpha\le0$. [0,5 points]

Absolue convergence de I_β. On a vu que pour $\beta<3/2$, I'_β est toujours absolument convergente. Étudions I''_β.

Si $1<\beta<3/2$, alors I''_β est absolument convergente. En effet, il suffit de majorer $|\sin t|$ par 1 pour se ramener à une intégrale de Bertrand absolument convergente.

Si $\beta\le1$, alors I_β n'est pas absolument convergente. En effet, pour $t\ge e$,

$$\left|\frac{\sqrt{\ln t}\sin t}{(t-1)^\beta}\right| \ge \left|\frac{\sin t}{(t-1)^\beta}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\sin t}{(t-1)^\beta}\right| \sim \left|\frac{\sin t}{t^\beta}\right| \quad \text{en} + \infty.$$

Donc I''_β n'est pas absolument convergente, car J_β n'est pas absolument convergente si $\beta\le1$. Ainsi I_β est absolument convergente si et seulement si $1<\beta<3/2$. [1 point]

EXERCICE 2 [6,5 points]

2a. On a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n}(1+o(1))$. [0,5 points]

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ est une série alternée convergente, car $(\dfrac{1}{2\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ est une suite positive décroissante qui tend vers 0.

La série $\sum \dfrac{1}{8n}(1+o(1))$ diverge car $\dfrac{1}{8n}(1+o(1)) \sim \dfrac{1}{8n}$ et $\sum \dfrac{1}{8n}$ est une série divergente à termes positifs.

Donc $\sum u_n$ diverge en tant que somme d'une série convergente et une série divergente. [1 point]

2b. On a $\arctan\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \dfrac{1}{8n} + \dfrac{(-1)^n}{16n^{3/2}}(1+o(1))$. D'où

$$v_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + \left(\gamma - \frac{1}{8}\right)\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{16n^{3/2}}(1+o(1)). \qquad \text{[1 point]}$$

On a déjà vu que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}$ converge.

La série de Riemann $\sum \left(\gamma - \dfrac{1}{8}\right)\dfrac{1}{n}$ est convergente si et seulement si $\gamma = 1/8$.

La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{16n^{3/2}}(1+o(1))$ est une série absolument convergente, donc convergente. En effet,

$$\left|\frac{(-1)^n}{16n^{3/2}}(1+o(1))\right| \sim \frac{1}{16n^{3/2}},$$

et la série $\sum \dfrac{1}{16n^{3/2}}$ est une série de Riemann absolument convergente.

Ainsi $\sum v_n$ converge si et seulement si $\gamma = 1/8$. [1,5 points]

2c. $\sum w_n$ est une série de Riemann convergente. La fonction $t \mapsto t^{-3/2}$ est positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. On a donc, d'après le théorème de comparaison série–intégrale,

$$r_n \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n}}. \quad \text{[1 point]}$$

Soit $\gamma = 1/8$. On a alors

$$v_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{16n^{3/2}}(1+o(1)).$$

Notons

$$R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}}, \qquad R''_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{16n^{3/2}}(1+o(1)).$$

On a alors $R_n = R'_n + R''_n$. La suite $(1/2\sqrt{n})_{n\geq 1}$ est positive décroissante et tend vers 0. D'après le théorème de majoration du reste d'une série alternée on a donc

$$|R'_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

Pour n assez grand, $|1+o(1)| \leq 2$. Donc d'après la question précédente

$$|R''_n| \leq 2\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{16n^{3/2}} \leq \frac{1}{4\sqrt{n}}.$$

Ainsi
$$|R_n| = |R'_n + R''_n| \leq |R'_n| + |R''_n| \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{4\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad \text{[1,5 points]}$$

EXERCICE 3 [5 points]

3a. Réponse : $P(x) = x^2(x-2)(x+2)$. Il y a beaucoup de manières de calculer ce déterminant. En voilà une.

$$P(x) = \begin{vmatrix} x & 2 & 0 & 1 \\ 3 & x & 1 & 0 \\ 0 & -2 & x & -3 \\ 3 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-2 & 2 & 0 & 1 \\ 2-x & x & 1 & 0 \\ 2-x & -2 & x & -3 \\ 0 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & x & 1 & 0 \\ -1 & -2 & x & -3 \\ 0 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & x+2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x & -2 \\ 0 & 2 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 1 \\ 0 & x & -2 \\ 2 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -2x & x & -2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= x(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & x & -2 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x(x-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x+2 & 0 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x(x-2)\begin{vmatrix} x+2 & 0 \\ 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$= x^2(x-2)(x+2).$$

[2 points]

3b. Les quatre vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si le déterminant $P(x)$ trouvé dans (3a) est non nul, soit si et seulement si $x \notin \{-2, 0, 2\}$. [0,5 points]

Cette base a la même orientation que la base canonique de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si $P(x)$ est strictement positif, soit si et seulement si
$$x \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[\,.$$

[0,5 points]

3c (i). $\det A = 4$. A est inversible car $\det A \neq 0$.

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\[2ex] -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\[2ex] \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

[1 point]

3c (ii). Si $x = 2$, alors A est une sous-matrice de la matrice (c_1, c_2, c_3, c_4). Comme le déterminant de cette dernière matrice est nul ($P(2) = 0$), tandis que le déterminant de A est non nul, on conclut que $\dim F = 3$.

Comme A est en fait une sous-matrice de (c_2, c_3, c_4), on en déduit que (c_2, c_3, c_4) est une base de F.

Soit (u, v, w, z) un vecteur de $\mathbb{R}^4$. Alors

$$(u,v,w,z) \in F \iff \begin{vmatrix} u & 2 & 0 & 1 \\ v & 2 & 1 & 0 \\ w & -2 & 2 & -3 \\ z & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff 12u - 8v + 4w = 0$$

$$\iff 3u - 2v + w = 0.$$

Une équation cartésienne de F est donc $3u - 2v + w = 0$. [1 point]