Université Paris Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2002-2003
Mathematiques

Corrrection de l'examen de Mathématiques

QUESTION DE COURS (3 points)

1. C'est **vrai (0,25 points)**. Prouvons-le. Notons p la dimension du sous espace propre E_λ. On a $p \geq 1$. Soir $(b_1, \ldots, b_p)$ une base de E_λ. Complètons cette base en une base $\beta = (b_1, \ldots, b_p, \ldots, b_n)$ de E. La matrice A représentant f dans la base β sera de la forme: $M_\beta(f) = A = \left[\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\qquad\qquad}^{\text{longueur p}}} & \\ \lambda & \ldots & 0 & - \\ \vdots & \ddots & \vdots & - \\ 0 & \ldots & \lambda & - \\ \hline 0 & \ldots & 0 & - \end{array}\right]$. Le polynôme caractéristique de f est $P(X) = \det(A - XI_n)$, où I_n est la matrice identité d'ordre n et il sera donc de la forme $P(X) = (\lambda - X)^p Q(X)$, où $Q(X)$ est un polynôme de degré $n - p$. Donc $(X - \lambda)^p$ divise $P(x)$ et $\dim E_\lambda = p \leq \alpha$ (car α est le plus gand entier q tel que $(X - \lambda)^q$ divise $P(X)$) **(1,5 points)**.

2. C'est **vrai (0,25 points)**. Prouvons-le.
D'après le cours, on sait que la dimension de E_λ est comprise au sens large entre 1 et la multitplicité algébrique qui vaut ici n. Donc $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq n$ **(0,5 points)**.
Maintenant, si $\dim(E_\lambda) = n$, alors $E = E_\lambda = \{X,\ f(X) = \lambda X\}$ et donc $f = \lambda i_E$, ce qui n'est pas le cas, donc $\dim(E_\lambda) \neq n$ **(0,5 points)**.

EXERCICE 1 (3 points)

1a. On définit $f_\gamma(t) = \dfrac{\ln(1 + t\sin t)}{(t|\ln t|)^\gamma}$ pour $t \in]0, 1/2]$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.
La fonction f_γ est continue sur $]0, 1/2]$, donc intégrable sur tout segment $[x, 1/2] \subset]0, 1/2]$ **(0,5 points)**.

Pour t au voisinage de 0, on a : $\ln(1+t\sin t) = t^2 + o(t^2)$ donc $f_\gamma(t) \sim \frac{t^2}{(t|\ln t|)^\gamma} \sim \frac{1}{t^{\gamma-2}|\ln t|^\gamma}$

D'après le théorème des équivalents entre fonctions positives, I_γ converge si et seulement si l'intégrale de Bertrand $\int_0^{1/2} \frac{1}{t^{\gamma-2}|\ln t|^\gamma} dt$ converge, donc si et seulement si $(\gamma - 2 < 1)$ ou $(\gamma - 2 = 1$ et $\gamma > 1)$, donc si et seulement si $\gamma \leq 3$ **(1,5 points)**.

1b. On définit $F_\gamma(x) = \int_x^{1/2} \dfrac{\ln(1 + t\sin t)}{(t|\ln t|)^\gamma}\, dt$ pour $x \in]0, 1/2]$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

- **(0,5 points)** D'après **1a.**, l'intégrale I_2 converge. Cela signifie que la fonction F_2 a une limite finie notée l en 0. Donc $\lim_{x\to 0} F_2(x^2) = l$ et $\lim_{x\to 0} (F_2(x^2) - F_2(x)) = l - l = 0$.

  Or $$F_2(x^2) - F_2(x) = \int_{x^2}^{x} \frac{\ln(1 + t\sin t)}{(t\ln t)^2} dt \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} \int_{x^2}^{x} \frac{\ln(1 + t\sin t)}{(t\ln t)^2}\, dt = 0$$

- **(0,5 points)** D'après **1a.**, l'intégrale I_4 ne converge pas, et la fonction f_4 est positive, donc la fonction F_4 a pour limite $+\infty$ lorsque $x \to 0$.
  Donc $\lim_{x\to 0}(F_4(x^4) - F_4(1/4)) = +\infty$, ($F_4(1/4)$ est un nombre fixé).

  Or $$F_4(x^4) - F_4(\frac{1}{4}) = \int_{x^4}^{\frac{1}{4}} \frac{\ln(1 + t\sin t)}{(t\ln t)^4} dt \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to 0} \int_{x^4}^{\frac{1}{4}} \frac{\ln(1 + t\sin t)}{(t\ln t)^4} dt = +\infty$$

EXERCICE 2 (4 points)

2a. On a : $\dfrac{1}{x^2+4} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+x^2/4}$. Or on sait que la série entière $\sum_{n\geq 0}(-z)^n$ converge pour $|z|<1$ et a pour somme $1/(1+z)$, et diverge pour $|z|>1$. Donc la série $\sum_{n=0}^{\infty}(-z^2/4)^n$ converge pour z tel que $|z^2/4|<1$ et diverge pour z tel que $|z^2/4|\geq 1$. Cette série entière a donc pour rayon de convergence $R=2$ et on a pour $x\in]-2,2[$: **(1 point)**

$$\frac{1}{x^2+4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}(-\frac{1}{4})^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}, \quad \text{où} \quad a_{2p} = \frac{1}{4}(-\frac{1}{4})^p \text{ et } a_{2p+1}=0, p\geq 0$$

Si $|z|=R=2$, alors $|a_{2p}z^{2p}| = \frac{1}{4}$, et donc la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement **(0,5 points)**.

2b. D'après le cours, la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et sa série entière primitive $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ ont même rayon de convergence $R'=R=2$ **(0,5 points)**, et pour $|x|<2$, la fonction somme donnée par $G(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ est la primitive qui s'annule en $x=0$ de la fonction somme donnée par $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$. Pour x tel que $x\neq 0$ et $|x|<2$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n = \frac{1}{x}G(x) = \frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{t^2+4} = \frac{1}{2x}\,\text{Arctan}\,\frac{x}{2}$$

Donc la série entière $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ a pour rayon de convergence $R=R'=2$ et pour somme la fonction f donnée par $f(x)=\frac{1}{2x}\text{Arctan}\,\frac{x}{2}$ si $x\neq 0$ et $|x|<2$ et $f(0)=\frac{1}{4}$ **(1 point)**.

Si $|z|=R'=2$, alors on peut écrire z sous la forme $z=2e^{i\theta}$, et $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}z^n$ devient la série d'Abel : $\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{in(2\theta+\pi)}}{n+1}$. D'après le cours, comme la suite $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et tend vers 0, cette série converge si et seulement si $2\theta+\pi\neq 0 \mod 2\pi$, donc ici si et seulement si $\theta\neq -\pi/2 \mod \pi$, donc si et seulement si ($z\neq -2i$ et $z\neq 2i$) **(1 point)**.

EXERCICE 3 (8 points)

3a. Le polynôme caractéristique de $f_{\alpha,\beta}$ est :

$$P(X) = \begin{vmatrix} \alpha - X & 1 & 0 \\ \alpha+\beta & -X & 1-\beta \\ 2+\alpha & 1 & -2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+1-X & 1 & 0 \\ \alpha+1-X & -X & 1-\beta \\ \alpha+1-X & 1 & -2-X \end{vmatrix}$$

après avoir effectué l'opération $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$. Maintenant, on factorise $\alpha+1-X$ dans la première colonne, puis on effectue l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$:

$$P(X) = (\alpha+1-X)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1-\beta \\ 1 & 1 & -2-X \end{vmatrix} = (\alpha+1-X)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1+X & -X & 1-\beta \\ 0 & 1 & -2-X \end{vmatrix}$$

Après développement suivant la première ligne et simplification, on obtient :

$$P(X) = -(X-(\alpha+1))(X+1)(X+2) \qquad \textbf{(0.75 points)}$$

Le polynôme caractérisique P de $f_{\alpha,\beta}$ est toujours scindé sur $\mathbb{R}$, donc l'endomorphisme $f_{\alpha,\beta}$ est trigonalisable sur $\mathbb{R}$ pour toutes les valeurs des paramètres α et β **(0.25 points)**.

1. Le polynôme P a trois racines distinctes lorsque $\alpha+1 \neq -2$ et $\alpha+1 \neq -1$. donc $f_{\alpha,\beta}$ est diagonalisable lorsque $\alpha \neq -3$ et $\alpha \neq -2$ **(0.25 points)**.
2. Etudions le cas $\alpha = -3$ **(0.5 points)**.

   Dans ce cas, $f_{\alpha,\beta}$ a 2 valeurs propres : $\lambda = -2$ de multiplicité algébrique 2, et $\lambda = -1$ de multiplicité algébrique 1. L'endomorphisme $f_{\alpha,\beta}$ est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-2} = 2$ et $\dim E_{-1} = 1$ (d'après le cours).

   On a : $\dim E_{-2} = 3 - r$ où r est le rang de la matrice $A_{-3,\beta} + 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3+\beta & 2 & 1-\beta \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   Puisque -2 est valeur propre de $f_{-3,\beta}$, on a : $1 \leq r \leq 2$ donc $r = 1$ ou 2.

   Si $1-\beta \neq 0$, alors on peut extraire de la matrice $A_{-3,\beta}+2I$ la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1-\beta \end{bmatrix}$ de déteminant $1-\beta$ non nul, donc $r \geq 2$, puis $r = 2$, d'où $\dim E_{-2} = 1 \neq 2$ et l'endomorphisme $f_{-3,\beta}$ n'est pas diagonalisable.

   Si $1-\beta = 0$, alors la première et la troisième colonnes de la matrice $A_{-3,\beta}+2I$ sont proportionnelles à la deuxième, donc $r = 1$, d'où $\dim E_{-2} = 2$ et l'endomorphisme $f_{-3,\beta}$ est diagonalisable.
3. Etudions le cas $\alpha = -2$ **(0.5 points)**.

   Dans ce cas, $f_{\alpha,\beta}$ a 2 valeurs propres : $\lambda = -2$ de multiplicité algébrique 1, et $\lambda = -1$ de multiplicité algébrique 2. L'endomorphisme $f_{\alpha,\beta}$ est diagonalisable si et seulement si $\dim E_{-1} = 2$.

   On a : $\dim E_{-2} = 3 - r$ où r est le rang de la matrice : $A_{-2,\beta} + I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2+\beta & 1 & 1-\beta \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

   Puisque -1 est valeur propre de $f_{-2,\beta}$, on a : $1 \leq r \leq 2$ donc $r = 1$ ou 2. On peut extraire de la matrice $A_{-2,\beta}+I$: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ de déterminant $1 \neq 0$. Donc $r \geq 2$, puis $r = 2$ d'où $\dim E_{-1} = 1 \neq 2$ et l'endomorphisme $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas diagonalisable.

CONCLUSION **(0.25 points)**: $f_{\alpha,\beta}$ est diagonalisable si et seulement si

$$(\alpha \notin \{-3,-2\} \,\text{et}\, \beta \in \mathbb{R}) \quad \text{ou} \quad (\alpha = -3 \,\text{et}\, \beta = 1).$$

Remarque : une autre méthode consiste à determiner explicitement E_{-2} dans le cas $\alpha = -3$ et E_{-1} dans le cas $\alpha = -2$.

3b. D'après **3a.**, on sait que $A_{0,0}$ est diagonalisable et que ses 3 valeurs propres sont -2,-1,1 toutes de multiplicité 1. Cherchons un vecteur propre pour chacune de ces valeurs propres **(0,75 points)**.

$$(A_{0,0}+2I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2y+z=0 \end{cases} \qquad x=1, y=-2, z=4 \quad \text{est solution}$$

Le vecteur $v_1 = e_1 - 2e_2 + 4e_3$ est vecteur propre de $f_{0,0}$, associé à la valeur propre -2.

$$(A_{0,0}+I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{cases} \iff x=-y=z$$

Le vecteur $v_2 = e_1 - e_2 + e_3$ est vecteur propre de $f_{0,0}$ associé à la valeur propre -1.

$$(A_{0,0} - I)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ -2x + y - 3z = 0 \end{cases} \iff x = y = z$$

Le vecteur $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$ est vecteur propre de $f_{0,0}$ associé à la valeur propre 1.

$$\text{On pose} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a $A_{0,0} = PDP^{-1}$ ou encore $D = P^{-1}AP$ (D est bien diagonale).

On calcule facilement $\det P = 6$ et on obtient **(0,75 points)**:

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 6 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(à l'aide des déterminants ou par Gauss Jordan)}$$

3c. Pour tout $n \geq 0$, on a $X_{n+1} = AX_n$ et donc, par récurence immédiate, $X_n = A^n X_0$ **(0,25 points)**.
Or $A = PDP^{-1}$, donc $A^n = PD^nP^{-1}$ et $X_n = PD^n\,P^{-1}X_0$.

$$\text{Calculons :} \quad PD^n = \begin{bmatrix} (-2)^n & (-1)^n & 1 \\ - & - & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On en déduit que la première coordonnée du vecteur X_n est **(0,75 points)**:

$$u_n \;=\; 2(-2)^n - 4(-1)^n + 1, \quad \text{pour tout}\, n \geq 0$$

3d. Remarque : les solutions des systèmes linéaires seront toujours données sur $\mathbb{R}$.
(i) D'après **3b.**, $A_{0,0}$ est diagonalisable et a pour valeur propre $-2, -1, 1$ avec pour vecteur propre respectivement v_1, v_2, v_3. D'après le cours, l'ensemble des solutions de ce système forme un espace vectoriel avec pour base les 3 fonctions vectorielles données par **(0,5 points)**:

$$X_1(t) = e^{-2t}v_1 \qquad X_2(t) = e^{-t}v_2 \qquad X_3(t) = e^t v_3$$

(ii) Les solutions du système $X' = A_{0,0}X + B$ sont les fonctions de la forme : $X_0 + X_H$ où X_H est solution de l'équation homogène (et donc donnée par la question précédente) et X_0 est une solution particulière que nous allons chercher.

Effectuons le changement de fonction $Y = P^{-1}X$. On a **(0.25 points)**:

$$X' = A_{0,0}X + B \iff Y' = DY + C \quad \text{où} \quad C(t) = P^{-1}B(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\iff (S)\begin{cases} y_1'(t) &=& -2y_1(t) & (S_1) \\ y_2'(t) &=& -y_2(t) + e^{-t} & (S_2) \\ y_3'(t) &=& y_3(t) + e^{-t} & (S_3) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = Y$$

Une solution particulière de (S_1) est $y_1^o = 0$. Cherchons une solution particulière de chaque équation $(S_i), i = 2, 3$ sous la forme $y_i^o(t) = P_i(t)e^{-t}$ où P_3 est une constante réelle et P_2 est polynôme de degré 1 :

$$y_2^o \text{ solution de } (S_2) \Longleftrightarrow e^{-t}(P_2' - P_2) = -e^{-t}P_2 + e^{-t} \Longleftrightarrow P_2' = 1$$

$$y_3^o \text{ solution de } (S_3) \Longleftrightarrow -P_3e^{-t} = P_3e^{-t} + e^{-t} \Longleftrightarrow -2P_3 = 1$$

On déduit que la fonction donnée par $y_2^o(t) = te^{-t}$ est une solution particulière de (S_2), et la fonction donnée par $y_3^o(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}$ est une solution particulière de (S_3).

Une solution particulière de $X' = A_{0,0}X + B$ est

$$X_0 = P \begin{bmatrix} y_1^o \\ y_2^o \\ y_3^o \end{bmatrix} \quad \text{ou encore} \quad X_0(t) = P \begin{bmatrix} 0 \\ te^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^{-t} \end{bmatrix} = e^{-t} \begin{bmatrix} t - \frac{1}{2} \\ -t - \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

CONCLUSION **(0,5 points)**: Les solutions de $X' = A_{0,0}X + B$ sont les fonctions de la forme : $X_0 + X_H$ où X_0 est la fonction vectorielle définie précédemment et X_H une fonction vectorielle de la forme $X_H = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3$, où $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sont des constantes. On peut aussi donner les solutions par le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & (t - \frac{1}{2})e^{-t} + \alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{-t} + \alpha_3 e^t \\ x_2(t) & = & (-t - \frac{1}{2})e^{-t} - 2\alpha_1 e^{-2t} - \alpha_2 e^{-t} + \alpha_3 e^t \\ x_3(t) & = & (t - \frac{1}{2})e^{-t} + 4\alpha_1 e^{-2t} + \alpha_2 e^{-t} + \alpha_3 e^t \end{array} \right. \qquad \text{où} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

3e. On suppose $\alpha = -3$, $\beta = 0$. D'après la question **3b**, la matrice $A_{-3,0}$ n'est pas diagonalisable, et a 2 valeurs propres :

- $\lambda = -1$ de multiplicité algébrique 1. Cherchons un vecteur propre associé :

$$(A_{-3,0} + I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x + y = 0 \\ -3x + y + z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{array} \right. \qquad x = 1, y = 2, z = 1 \text{ est solution}$$

  Le vecteur $e_3' = e_1 + 2e_2 + e_3$ est propre pour $A_{-3,0}$ et la valeur propre -1.

- $\lambda = -2$ de multiplicité algébrique 2, et dont l'espace propre associé est de dimension 1. Cherchons un vecteur propre associé à cette valeur propre :

$$X = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E_{-2} \Longleftrightarrow (f_{-3,0} + 2I)X = 0 \Longleftrightarrow (A_{-3,0} + 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{cccl} -x & +y & & = 0 \\ -3x & +2y & +z & = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow x = y = z$$

  Le vecteur $e_1' = e_1 + e_2 + e_3$ propre pour $A_{-3,0}$ et la valeur propre -1.

Cherchons un vecteur $e_2' = xe_1 + ye_2 + ze_3$ tel que $f_{-3,0}(e_2') = -2e_2' + 2e_1'$:

$$f_{-3,0}(e_2') = -2e_2' + 2e_1' \Longleftrightarrow (A_{-3,0} + 2I) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x + y = 2 \\ -3x + 2y + z = 2 \\ -x + y = 2 \end{array} \right.$$

Prenons le vecteur correspondant à $x = 1$. Le vecteur $e'_2 = e_1 + 3e_2 - e_3$ convient.

CONCLUSION **(1,5 points)**: Les vecteurs e'_1, e'_2, e'_3 donnés ci-dessus forment une nouvelle base dans laquelle l'endomorphisme $f_{-3,0}$ se représente par la matrice

$$M = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } a = -2 \quad \text{et} \quad b = -1$$

Donc la matrice $A_{-3,0}$ est semblable à cette matrice M.

EXERCICE 4 (8 points)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $s \in \mathbb{R}^{*+}$, la fonction u_n est définie sur $\mathbb{R}$, paire et positive.

4a. Comme $s > 0$, on a lorsque $n \to \infty$: $n^s \to \infty$ et pour $x \neq 0$: $u_n(x) \sim \frac{\ln(n^s x^2)}{n^s} \sim \frac{s \ln n}{n^s}$.
Comme $\lim_{n\to\infty} \frac{s\ln n}{n^s} = 0$, on a $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0$.
Pour $x = 0$, $u_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $\lim_{n\to\infty} u_n(0) = 0$.
Donc la suite (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction 0 **(0,5 points)**.

Etudions la convergence uniforme de la suite (u_n) sur $\mathbb{R}$: comme $\lim_{x\to\infty} u_n(x) = \infty$ pour $n \geq 1$, les fonctions u_n ne sont pas bornées. Donc la suite de fonctions (u_n) ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ **(0,5 points)**.

4b. Pour $x \neq 0$, on a $u_n(x) > 0$ et $u_n(x) \sim_{n\to\infty} \sim \frac{s\ln n}{n^s}$. Or $\frac{\ln n}{n^s}$ est le terme d'une série de Bertrand convergente (ici $s > 1$). Donc d'après le théorème des équivalents entre séries positives, la série $\sum u_n(x)$ converge pour $x \neq 0$.
Pour $x = 0$, $u_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la série $\sum u_n(0)$ converge et $\sum u_n(0) = 0$.
Donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers sa somme u **(0,75 points)**.

Comme chaque u_n est paire et croissante, la fonction u l'est aussi **(0,25 points)**.

4c. Comme la suite de fonctions (u_n) ne converge pas uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$, la série $\sum u_n$ ne converge pas uniformément vers u sur $\mathbb{R}$ **(0,5 points)**.

Montrons que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Il suffit de montrer qu'il y a convergence uniforme sur tous les segments $[-a, a]$, $a > 0$.
Fixons $a > 0$. Comme u_n est une fonction positive et croissante, on a l'encadrement

$$\forall x \in [-a, a] \quad |u_n(x)| \leq \frac{\ln(1 + n^s a^2)}{n^s} \quad \text{or} \quad \frac{\ln(1 + n^s a^2)}{n^s} \sim_{n\to\infty} \frac{s \ln n}{n^s}$$

Comme $\frac{\ln n}{n^s}$ est le terme général positif d'une série de Bertrand convergente, la série numérique $\sum \frac{\ln(1+n^s a^2)}{n^s}$ converge et la série de fonction $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $[-a, a]$. On l'a montré pour tout $a > 0$, donc $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ **(0,5 points)**.

Comme chaque u_n est continue sur $\mathbb{R}$, et que $\sum u_n$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers sa somme u, d'après le cours, la fonction u est continue sur $\mathbb{R}$ **(0,5 points)**.

4d. Soit un segement $[a, b]$ de R^{*+}. Chaque fonction u_n est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a, b]$ et on a

$$\forall x \in [a, b] \quad 0 \leq u'_n(x) = \frac{2x}{1 + n^s x^2} \leq \frac{2b}{1 + n^s a^2} \qquad \text{or} \qquad \frac{2b}{1 + n^s a^2} \sim_{n\to\infty} \frac{2b}{n^s a^2}$$

Comme la série de Riemann $\sum 1/(n^s)$ converge ($s > 1$), $\sum u'_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, b]$.

De plus, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a, b]$. On peut donc appliquer le théorème des séries dérivées : la somme u de la série $\sum u_n$ est continûment dérivable sur $[a, b]$. On l'a montré pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}^{*+}$. Donc la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$. De plus, comme elle est paire, elle est aussi dérivable sur $\mathbb{R}^{*-}$, donc sur $\mathbb{R}^*$ **(1 point)**.

4e. On suppose $s > 2$.
Etudions les fonctions u_n' sur $\mathbb{R}$ pour $n \geq 1$. Comme u_n est paire, u_n' est impaire et il suffit de l'étudier sur $[0, \infty[$. u_n' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u_n''(x) = 2(1 - n^s x^2)/(1 + n^s x^2)^2$ pour $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que sur $[0, n^{-\frac{s}{2}}]$, la fonction u_n' est croissante et sur $[n^{-\frac{s}{2}}, \infty[$, la fonction u_n' est décroissante, d'où : $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n'(x)| = u_n'(n^{-\frac{s}{2}}) = n^{-\frac{s}{2}}$. Comme $s > 2$, $n^{-\frac{s}{2}}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente, donc la série $\sum u_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

De plus, la série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On peut donc appliquer le théorème des séries dérivées : la somme u de la série $\sum u_n$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'$ **(1 point)**.

4f. (i) La fonction u est paire et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si elle est dérivable en zéro, alors elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction u' est impaire et $u'(0) = 0$ **(0,25 points)**.
(ii) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons que $u(n^{-s/2}) \geq (\ln 2) \sum_{k=n}^{\infty} k^{-s}$.

Pour tout k, u_k est une fonction positive, donc $u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \geq \sum_{k=n}^{\infty} u_k(x)$.

Pour $x = n^{-s/2}$ et $k \geq n$, on voit que $k^s x^2 \geq 1$ donc $\ln(1 + k^s x^2) \geq \ln 2$ et $u_k(x) \geq (\ln 2)/(k^s)$, donc $u(n^{-s/2}) \geq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\ln 2}{k^s}$ **(0,5 points)**.

Montrons que $\sum_{k=n}^{\infty} k^{-s} \geq ((s-1)n^{s-1})^{-1}$.

La fonction $t \to 1/t^{-s}$ est une fonction positive, décroissante et continue sur $\mathbb{R}^*$. Donc d'après le théorème de comparaison série-intégrale, l'intégrale $\int_1^{\infty} t^{-s} dt$ et la série $\sum_k k^{-s}$ sont de meme nature, c'est-à-dire ici convergente et leurs restes sont comparables; en particulier, on a : $\sum_{k=n}^{\infty} k^{-s} \geq \int_n^{\infty} t^{-s} dt = -(-s+1)^{-1} n^{-s+1}$ **(0.75 points)**.
(iii) Montrons que la suite $\left(n^{s/2} u(n^{-s/2})\right)_{n\geq 1}$ ne converge pas vers zero.

D'après la question précédente, on a la minoration :

$$n^{\frac{s}{2}} u(n^{-\frac{s}{2}}) \geq n^{\frac{s}{2}} (\ln 2) \frac{1}{s-1} n^{-s+1} = \frac{\ln 2}{s-1} n^{-\frac{s}{2}+1} \to_{n\to\infty} +\infty$$

Donc la suite $\left(n^{s/2} u(n^{-s/2})\right)_{n\geq 1}$ tend vers $+\infty$ **(0,5 points)**.

Montrons que la fonction u n'est pas dérivable en zéro.

Le taux de variation de la fonction u en zéro est $T(x) = (u(x) - u(0))/(x - 0)$. Or la suite $(T(n^{-s/2})_{n\in\mathbb{N}^*} = (n^{s/2} u(n^{-s/2}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ d'après la question précédente, donc $T(x)$ n'a pas de limite finie lorsque x tend vers 0. Donc u n'est pas dérivable en 0 **(0,5 points)**.

* * * * * * * * * * * * *

Pensez à rendre le questionnaire d'évaluation de S3MIAS. Votre opinion nous est utile pour améliorer l'organisation du module.