Université Paris Sud S3 MIAS 2001-2002
Centre d'Orsay Mathématiques

Deuxième session d'examen de Mathématiques

Le 9 Septembre 2002, 9h-13h - Barème indicatif - Documents écrits et calculettes interdits

QUESTION DE COURS et APPLICATIONS (4 points)

1. Enoncer et démontrer le théorème qui permet de définir le rayon de convergence d'une série entière.

2. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière telle que $n^{-1} \leq a_n \leq n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum n 5^n z^n$. On pose, pour $x \in]-R, R[$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n 5^n x^n$. Ecrire la fonction g sous la forme d'une fraction rationnelle.

EXERCICE 1 (4 points)

Soit β un nombre réel strictement positif. On considère l'intégrale :

$$I = \int_1^{+\infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\sin t}{t^2}} - 1 \right) \frac{1}{(\ln t)^\beta} \, dt$$

Pour quelles valeurs de β l'intégrale I est-elle convergente ?

EXERCICE 2 (8 points)

Soit α un paramètre réel. Soit f_α l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice, dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$, est :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -4 & 2\alpha & 6 & \alpha \\ 0 & 5 & 0 & 3 \\ -3 & 2\alpha & 5 & \alpha \\ 0 & -6 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

2a. Pour quelles valeurs du paramètre réel α l'endomorphisme f_α est-il trigonalisable ? est-il diagonalisable ?

Dans toute la suite, on suppose $\alpha = 3$.

2b. Montrer qu'il existe des nombres réels a, b, c et d, que l'on déterminera, tels que la matrice A_3 soit semblable à la matrice C suivante :

$$C = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}$$

Calculer la matrice A_3^n pour tout entier $n \geq 1$.

2c. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définies par récurrence par :

$$a_0 = 1,\ b_0 = 1,\ c_0 = 1,\ d_0 = -2,\ \text{ et pour } n \geq 1,\ \begin{cases} a_{n+1} = -4a_n + 6b_n + 6c_n + 3d_n \\ b_{n+1} = \qquad\quad 5b_n \qquad\quad + 3d_n \\ c_{n+1} = -3a_n + 6b_n + 5c_n + 3d_n \\ d_{n+1} = \qquad -6b_n \qquad\quad - 4d_n \end{cases}$$

Calculer les termes généraux de ces suites en fonction de $n \in \mathbb{N}$. En déduire que la série $\sum \dfrac{b_n}{a_n}$ est convergente et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{2}{3}$.

2d. Résoudre le système différentiel linéaire :

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1' = -4x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 3x_4 \\ x_2' = \qquad\quad 5x_2 \qquad\quad + 3x_4 \\ x_3' = -3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 3x_4 \\ x_4' = \qquad -6x_2 \qquad\quad - 4x_4 \end{cases}$$

où $x_1,\ x_2,\ x_3$ et x_4 sont des fonctions réelles, définies et continuement dérivables sur $\mathbb{R}$. Donner une base de l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des solutions de ce système différentiel.

EXERCICE 3 (7 points)

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad u_n(x) = (-1)^n(e^{x/n} - 1)$.

3a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum u_n(x)$ est convergente et donner une majoration de son reste d'ordre n, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

3b. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum u_n(x)$ n'est pas absolument convergente.

3c. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$. On note u sa somme, définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $u(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

3d. La série de fonctions $\sum u_n$ est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}$? est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}$?

3e. Montrer que la fonction u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ $\Big($on peut écrire, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n'(x) = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{u_n(x)}{n}$ $\Big)$.

3f. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n(x) = ne^{x/n} - n - x$. Montrer que la série $\sum(-1)^n v_n(x)$ est convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que l'on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n v_n(x) = \int_0^x u(t)dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.