Université Paris Sud — S3 MIAS 2003-2004

Centre d'Orsay — Mathématiques

Test n°1 - A préparer pour la semaine du 29/09 au 03/10

Répondre par OUI ou NON et justifier votre réponse par une démonstration, un résultat du cours énoncé de façon précise, ou un contre-exemple . (Indication pour les questions 1 à 15 : 7 OUI, 8 NON)

Dans les quatre premières questions, g et h sont deux fonctions à valeurs réelles définies dans un voisinage de a, $a = 0$, $a = 1$ ou $a = +\infty$, sauf peut-être en a.

1. Si $g(x) \sim \sin x$ et $h(x) \sim \sqrt{x}$ en zéro, alors $(gh)(x) \sim x^{3/2}$ en zéro.

2. Si $g \sim \sin x$ et $h \sim x$ en zéro, alors $(gh)(x) \sim -x^3/6$ en zéro.

3. Si $g \sim h$ en $+\infty$, alors $e^g \sim e^h$ en $+\infty$.

4. Si $g \sim h$ en 1, alors $\ln|g| \sim \ln|h|$ en 1.

5. Le sous-ensemble $\{\frac{1}{2n-1},\ n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{R}$ admet un minimum et une borne inférieure.

Dans toute la suite, $I = [1, +\infty[\subset \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction réelle définie sur l'intervalle I.

6. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors la fonction f est croissante au voisinage de $+\infty$.

7. Si la fonction f est croissante et non majorée sur I, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

8. Si la fonction f est continue et bornée sur I, ou bien il existe $a \in I$ tel que $f(a) = \inf_{x\in I} f(x)$, ou bien il existe $b \in I$ tel que $f(b) = \sup_{x\in I} f(x)$.

9. Si la fonction f est continue sur I et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$, alors f est bornée sur I.

10. Si f est continue sur I et si la fonction $x \mapsto \int_1^x f(t)dt$ est bornée sur I, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

11. Si f est une fonction bornée et décroissante sur I telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

12. Si la fonction f est continue sur I et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est divergente.

13. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4+1}dt$ est convergente.

14. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{t^3+2}{t^4+1}dt$ est convergente.

15. L'intégrale $\int_1^{3} \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt$ est convergente.

16. (Section 2) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{(t^2-5t-2)\cos t}{t^4+1}dt$ est convergente.

17. (Section 2) Si la fonction f est bornée sur l'intervalle I, alors la fonction f admet une primitive sur l'intervalle I.

18. (Section 2) Si f est une fonction bornée et décroissante sur I telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.