Université Paris Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2003-2004
Mathématiques

Test n°3 - A préparer pour la semaine du 27 octobre

Répondre par OUI ou NON et justifier votre réponse par une démonstration, un résultat du cours énoncé de façon précise, ou un contre-exemple . (Indication pour les questions 1 à 15 : 9 OUI, 6 NON).

Dans toute la suite, $n \in \mathbb{N}$ et n est suffisamment grand pour que l'expression où il figure soit définie.

1. La série $\sum \dfrac{(-1)^n(\ln n)^2}{n}$ est convergente.

2. Pour $n \in \mathbb{N},\ n \geq 10,\ |\sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^k(\ln k)^2}{k}| \leq \dfrac{(\ln n)^2}{n}$.

3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}$ est convergente.

4. Si $\theta \in]0, \pi[,\ |\sum_{n=4}^{\infty} \dfrac{\sin n\theta}{\sqrt{n}}| \leq \dfrac{\pi}{2\theta}$ (on rappelle que $\sin x \geq \dfrac{2x}{\pi},\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$).

5. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série de terme général $u_n = \dfrac{(\sin n\theta)^2}{\sqrt{n}}$ est convergente.

6. La série de terme général $u_n = \dfrac{e^{i5n}}{n + (-1)^n}$ est convergente.

7. $\dfrac{1}{4} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{(n^3+1)^2} \leq \dfrac{5}{12}$.

8. On a $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + 2n - 3} = \dfrac{25}{12}$.

9. $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n+1}{2^n n!} = \dfrac{3\sqrt{e}}{2}$.

10. Une série $\sum u_n$ telle que $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ est convergente.

Dans les trois questions suivantes, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ est une base de E.

11. On a $det_{\mathcal{B}}(-2b_1, b_1 - b_2, \dfrac{b_3}{2}) = 1$.

12. On a $det_{\mathcal{B}}(b_1 + b_2, b_1 + b_2 + b_3, b_2 + b_3) = 1$.

13. On a $det_{\mathcal{B}}(b_1 + b_2, b_2 + b_3, b_3 + b_1) = 1$.

14. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ inversible. On a $det\Big((5A)^{-1}\Big) = (det(A))^{-1}/5$.

15. Soient f et g dans $L(E)$ tels que $det(f \circ g) = 0$. Si $det(f) \neq 0$, alors il existe $x \in E,\ x \neq 0$, tel que $g(x) = 0$.

16. **(Section 2)** Si les séries $\sum max(u_n, 0)$ et $\sum max(-u_n, 0$ sont divergentes, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

17. (Section 2) Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n(\sum_{k=1}^{k=n} u_k) = 1$. Alors la série $\sum u_n$ est divergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

18. (Section 2) Soit $\sum u_n$ une série à termes réels ou complexes. Alors la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la série $\sum \dfrac{n^2}{n^2+1}\, u_n$ est convergente.

19. (Section 2) Si $\sum u_n$ est une série semi-convergente, alors pour tout $\alpha > 1$, la série $\sum n^\alpha u_n$ est divergente.

20. (Section 2) On a $|\sum_{n=4}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n \sin(n\pi/3)}{\sqrt{n}}| \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Programme pour le Premier Partiel de Mathématiques

Le 14 novembre 2003, 10h-13h

L'épreuve comporte une question de cours et 3 ou 4 exercices. La question de cours, qui compte pour 4 à 5 points, comprend des énoncés et les preuves de ces énoncés (parmi la liste donnée ci-dessous) et peut aussi comporter des questions comme celles des tests 1, 2 et 3, ou la construction de contre-exemples.

Programme. Compléments d'analyse. Intégrales généralisées. Séries. Déterminants (résumés de cours 1 à 4). Feuilles d'exercices 1 à 4. Devoirs 1 et 2. Tests 1, 2 et 3.

Questions de cours

Résumé de cours n°1, partie II : Axiome de la borne supérieure et Théorème d'existence de limite pour les fonctions croissantes.

Résumé de cours n°2 : Théorèmes 1, 2 et 4.

Résumé de cours n°3 : Proposition 1, Théorèmes 3 et 6, Corollaire du Théorème 7.

Résumé de cours n°4 : Corollaire 1 du Théorème 1, Théorème 2, Proposition 3.