Université Paris Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2003-2004
Mathématiques

Test n°4 - A préparer pour la semaine du 24 novembre 2003

Répondre par OUI ou NON et justifier votre réponse par une démonstration, un résultat du cours énoncé de façon précise, ou un contre-exemple . (Indication pour les questions 1 à 15 : 8 OUI, 7 NON).

Dans toute la suite, E est un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et f est un endomorphisme de E.

1. Soient $u \in E$ et $\lambda \in K$ tels que $f(u) = \lambda u$. Alors λ est une valeur propre de f.

2. L'endomorphisme f a toujours au moins une valeur propre dans K.

3. Si l'endomorphisme f n'est pas surjectif alors f a au moins une valeur propre dans K.

4. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^5$ alors il existe une droite vectorielle de $\mathbb{R}^5$ stable par f.

5. Si l'endomorphisme f a une valeur propre dans K, alors l'endomorphisme $f^2 = f \circ f$ a une valeur propre dans K et si de plus f est un automorphisme, f^{-1} a une valeur propre dans K.

6. Si u_1 et u_2 sont des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement, alors u_1 et u_2 engendrent un plan vectoriel de E.

7. Si la matrice $A = (a_{ij}) \in M_2(\mathbb{R})$ est symétrique ($a_{12} = a_{21}$), alors A est diagonalisable.

8. On suppose qu'il existe une suite libre de $n-1$ vecteurs propres de f. Alors l'endomorphisme f est trigonalisable.

9. La matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 13 \\ 0 & 5 & 19 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

10. La matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

11. Les matrices de $M_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables.

12. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, les matrices suivantes de $M_3(\mathbb{C})$ sont semblables

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dans les trois questions suivantes, a est un paramètre réel et on considère la matrice $A \in M_4(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

13. Le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1 est de dimension un.

14. Toute base de $\mathbb{R}^4$ contient au plus deux vecteurs propres de A.

15. La matrice A est semblable à la matrice A' suivante : $A' = \begin{pmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

16 (Section 2). Si p est une projection de $\mathbb{R}^n$ (c'est-à-dire, $p \in L(\mathbb{R}^n)$ et $p \circ p = p$), alors $\mathbb{R}^n = Ker p \oplus Im p$ et p est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

17 (Section 2). Si s est une symétrie de $\mathbb{C}^n$ (c'est-à-dire, $s \in L(\mathbb{C}^n)$ et $s \circ s = i_E$), alors $\mathbb{C}^n = Ker(s + i_E) \oplus Ker(s - i_E)$ et il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de s est à coefficients réels.

18 (Section 2). Soient f et g deux endomorphismes d'un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une base de E constituée des vecteurs propres à la fois de f et de g. Alors $f \circ g = g \circ f$.