Université Paris-Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2002-2003
Mathématiques

Corrigé de l'examen de mathématiques de septembre

Le 08/09/2003, 8h30 – 12h30

QUESTION DE COURS (3 points)

1. Notons $A = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, où $c_1, \ldots, c_n$ sont les vecteurs colonnes de A et $n \geq 2$ (pour $n = 1$, il n'y a rien à démontrer). Soit $A' = (c_2, c_1, \ldots, c_n)$ la matrice obtenue en permutant les deux premières colonnes de A, montrons que $detA' = -detA$ (la preuve serait similaire en permutant deux colonnes quelconques de A, mais avec des notations plus lourdes). On sait que l'application $A \mapsto detA$, considerée comme une fonction des colonnes de A, est une forme multilinéaire alternée. Utilisons d'abord la multilinéarité pour développer

$$det(c_1 + c_2, c_1 + c_2, c_3, \ldots, c_n) = det(c_1, c_1 + c_2, c_3, \ldots, c_n) + det(c_2, c_1 + c_2, c_3, \ldots, c_n) =$$

$$= det(c_1, c_1, c_3, \ldots, c_n) + det(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) + det(c_2, c_1, c_3, \ldots, c_n) + det(c_2, c_2, c_3, \ldots, c_n).$$

Puisque toute matrice ayant deux colonnes égales a un déterminant nul, on obtient

$$det(c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n) + det(c_2, c_1, c_3, \ldots, c_n) = 0, \quad \text{d'où} \quad detA' = -detA. \quad \text{(2 points)}$$

2. Utilisons la propriété précédente et le fait que pour toute base $\mathcal{B}$ de E, $det_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = 1$. En permutant b_1 et b_4, puis b_3 et b_2, on obtient

$$det_{\mathcal{B}}(b_4, b_3, b_2, b_1) = -det_{\mathcal{B}}(b_1, b_3, b_2, b_4) = det_{\mathcal{B}}(b_1, b_2, b_3, b_4) = det_{\mathcal{B}}\mathcal{B} = 1. \quad \text{(1 point)}$$

EXERCICE 1 (6 points)

1a. La série $\sum u_n$ est une série alternée qui vérifie les deux conditions suivantes :

- $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, car $|u_n| \leq \dfrac{1}{2n+1}$, $n \geq 1$;
- la suite $(|u_n|)_n \geq 0$ est décroissante, car $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \dfrac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} < 1$, $n \geq 1$.

Les hypothèses du théorème des séries alternées sont satisfaites, donc la série $\sum u_n$ est convergente. (1 point)

1b. La fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $y \mapsto (1+y)^{-1/2}$ est développable en série entière au voisinage de zéro et on a

$$(1+y)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n \; n!} y^n, \quad |y| < 1$$

Le rayon de convergence de la série entière précédente est 1. Par conséquent la fonction composée $g : x \mapsto 2^{-1/2}\Big(1 + (x/\sqrt{2})^2\Big)^{-1/2}$ est développable en série entière au voisinage de l'origine, la série entière correspondante a rayon de convergence $R = \sqrt{2}$ et s'écrit

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{4^n \; n!} x^{2n}\Big), \quad |x| < \sqrt{2}. \quad \text{(1 point)}$$

1c. On a $f'(x) = \dfrac{1 + x/\sqrt{2+x^2}}{x + \sqrt{2+x^2}} = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. La fonction f est donc développable en série entière au voisinage de l'origine, le rayon de convergence de la série correspondante est $R' = \sqrt{2}$, et on a

$$f(x) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{4^n \; n!(2n+1)} x^{2n+1}, \quad |x| < \sqrt{2}. \quad \text{(1 point)}$$

1d. On sait que si $|x| > \sqrt{2}$, la série $\sum a_n x^n$ est divergente. Pour $x = \sqrt{2}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sqrt{2})^n = \frac{\ln 2}{2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n \; n!(2n+1)} = \frac{\ln 2}{2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

D'après la question 1a., la série est convergente. De façon analogue, pour $x = -\sqrt{2}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\sqrt{2})^n = \frac{\ln 2}{2} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n\ n!(2n+1)} = \frac{\ln 2}{2} - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

On conclut que la série $\sum a_n x^n$ est convergente pour $|x| \leq 2$, donc $\Delta = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. (0,5 points)

Pour $0 < |x| \leq \sqrt{2}$, $\sum u_n \dfrac{x^{2n+1}}{2^n}$ est une série alternée satisfaisant les conditions du théorème des séries alternées ($\lim\limits_{n\to\infty} u_n\ \dfrac{x^{2n+1}}{2^n} = 0$ et $(|u_n\ \dfrac{x^{2n+1}}{2^n}|)_{n\geq 1}$ est décroissante), donc son reste d'ordre n vérifie

$$|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_n x^{2n+1}/2^n| \leq |u_{n+1}\frac{x^{2n+3}}{2^{n+1}}| \leq \sqrt{2}|u_{n+1}|,\ n \geq 1.$$

Cette dernière inégalité est satisfaite aussi, de façon évidente, par $x = 0$. Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, la série $\sum a_n x^n$ est bien uniformement convergente sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. (1 point) Par conséquent la somme de cette série de fonctions continues est une fonction continue sur $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Or, pour $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, la somme de la série est $f(x)$, donc

$$f(\sqrt{2}) = \lim_{x\to\sqrt{2}} f(x) = \frac{\ln 2}{2} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ \text{d'où}\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \ln(2+\sqrt{2}) - \frac{\ln 2}{2} - 1 = \ln(1+\sqrt{2}) - 1. \quad \text{(1,5 points)}$$

EXERCICE 2 (10 points)

2a. Calculons le polynôme caractéristique de $M_{a,b}$.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -6 & 3-2a \\ 3 & 5-\lambda & -3+a \\ b & b & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 & 3-2a \\ -2+\lambda & 5-\lambda & -3+a \\ 0 & b & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)) \begin{vmatrix} 1 & -6 & 3-2a \\ 0 & -1-\lambda & -a \\ 0 & b & -1-\lambda \end{vmatrix},$$

soit,

$$P(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda + 1 + ab). \quad \text{(1 point)}$$

L'endomorphisme $h_{a,b}$ est trigonalisable si et seulement si le polynôme P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$, c'est-à-dire si et seulement si le trinôme du second degré ci-dessus a deux racines réelles, soit, si et seulement si $ab \leq 0$ (0,5 points).

Supposons $ab \leq 0$, les racines de P sont alors $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1 + \sqrt{-ab}$, $\lambda_3 = -1 - \sqrt{-ab}$.

Si $ab < 0$ et $ab \neq -9$, les trois racines de P sont distinctes et $h_{a,b}$ est diagonalisable (0,5 points).

Si $ab = -9$, alors 2 est racine double de P, l'endomorphisme $h_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 est de dimension 2, c'est-à-dire, si et seulement si la matrice $M_{a,b} - 2I_3$ (où I_3 est la matrice identité d'ordre 3) a rang 1. Or, la première et la troisième colonnes de $M_{a,b} - 2I_3$ ne sont pas colinéaires $(3(-3) - b(-3+a) = 3b \neq 0)$, donc $M_{a,b} - 2I_3$ a rang 2 et $h_{a,b}$ n'est pas diagonalisable (0,5 points).

Supposons $ab = 0$, alors -1 est racine double de P, l'endomorphisme $h_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 est de dimension 2, c'est-à-dire, si et seulement si la matrice $M_{a,b} + I_3$ a rang 1. Si $b \neq 0$ les deux premières colonnes de $M_{a,b} + I_3$ ne sont pas colinéaires et si $a \neq 0$, la première et la troisime colonnes de $M_{a,b} + I_3$ ne sont pas colinéaires, donc $M_{a,b} + I_3$ a rang 2 et $h_{a,b}$ n'est pas diagonalisable. Si $a = b = 0$, alors $M_{0,0} + I_3$ a rang 1 et $h_{0,0}$ est diagonalisable (0,5 points).

On conclut que $h_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $ab < 0$ et $ab \neq -9$ ou alors si $a = b = 0$.

2b. (i) Lorsque $ab = -9$, $h_{a,b}$ est trigonalisable, il n'est pas diagonalisable et ses valeurs propres sont $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -4$. Le polynôme caractéristique étant invariant par changement de base, si la base $\mathcal{B}$ existe, on a forcément $c = -4$, $d = 2$, b_1 (resp. b_2) est un vecteur propre associé à la valeur propre -4 (resp. 2).

Un vecteur propre b_1 (resp. b_2) associé à la valeur propre -4 (resp. 2) est une solution non nulle du système linéaire

$$\begin{cases} -6y + (3-2a)z = 0 \\ 3x + 9y + (-3+a)z = 0 \\ bx + by + \ 3z = 0 \end{cases}, \quad \left(\text{resp.} \quad \begin{cases} -6x - 6y + (3-2a)z = 0 \\ 3x + 3y + (-3+a)z = 0 \\ bx + by - \ 3z = 0 \end{cases}\right),$$

par exemple, $\quad b_1=(4a-3,3-2a,6)$ (0,5 points), resp. $b_2=(1,-1,0)$ (0,5 points).

Pour finir, on doit avoir $h_{a,b}(b_3)=bb_2+2b_3$, donc b_3 doit être une solution non nulle du système linéaire

$$\begin{cases} -6x-6y+(3-2a)z=b \\ 3x+3y+(-3+a)z=-b \\ bx+by-\ 3z=0 \end{cases}, \quad \text{par exemple,} \quad b_3=(0,1,\frac{b}{3}). \quad \text{(0,5 points)}$$

Soit P la matrice carrée d'ordre trois, $P=(b_1,b_2,b_3)$. On a $det\ P=12$, donc $\mathcal{B}=\{b_1,b_2,b_3\}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ et P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$. La matrice de $h_{a,b}$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice N_b, où $c=-4, d=2$. (0,5 points)

(ii) On a

$$N_b=D+E, \quad D=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad DE=ED=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E^2=0.$$

On a toutes les conditions pour calculer N_b^n par la formule du binôme, d'où

$$N_b^n=D^n+nD^{n-1}E=\begin{pmatrix} (-4)^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & nb2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}, \quad n\geq 1. \quad \text{(1 point)}$$

2c. Prenons $a=1$ et $b=-9$, alors pour $n\geq 0$, d'après un raisonnement par récurrence facile, on a

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix}=M_{1,-9}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}=(M_{1,-9})^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}=P(N_{-9})^nP^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}. \quad \text{(0,5 points)}$$

Le calcul de P^{-1} (méthode des déterminants ou de Gauss-Jordan) donne ($a=1,\ b=-9$),

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/12 \\ 3/4 & -1/4 & -1/12 \\ 1/2 & 1/2 & -1/6 \end{pmatrix}, \quad \text{(1 point),} \quad \text{d'où}$$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (N_{-9})^nP^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}=(N_{-9})^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-4)^n \\ -9n2^{n-1} \\ 2^n \end{pmatrix},$$

$$P(N_{-9})^nP^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-4)^n-9n2^{n-1} \\ (-4)^n+9n2^{n-1}+2^n \\ 6(-4)^n-3\times 2^n \end{pmatrix}, \text{ donc } \begin{cases} u_n=(-4)^n-9n2^{n-1} \\ v_n=(-4)^n+(9n+2)2^{n-1} \\ w_n=6(-4)^n-3\times 2^n \end{cases}, \ n\geq 0. \text{ (0,5 points)}$$

2d. Le système différentiel donné s'écrit $X'=(M_{1,-9})X+B$ ou encore $Y'=N_{-9}Y+P^{-1}B$, où

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B=e^{-3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad Y=P^{-1}X, \text{ d'où le système } \begin{cases} y_1'=-4y_1+e^{-3t} \\ y_2'=2y_2-9y_3 \\ y_3'=2y_3 \end{cases} \quad \text{(0,5 points)}$$

Résolvons ce dernier système différentiel. On a $y_3(t)=\gamma e^{2t}$, où $t\in\mathbb{R},\ \gamma\in\mathbb{R}$. Alors $y_2'=2y_2-9\gamma e^{2t}$. L'équation homogène associée à cette équation a pour solution $y_2(t)=\beta e^{2t}, \beta\in\mathbb{R}$. La méthode de variation de la constante (en posant $y_2(t)=\beta(t)e^{2t}$, où β devient une fonction continûment dérivable sur $\mathbb{R}$) nous permet de trouver la solution générale de l'équation non homogème, $y_2(t)=(\beta-9\gamma t)e^{2t}$. De faqn analogue, on obtient $y_1(t)=\alpha e^{-4t}+e^{-3t},\ \alpha\in\mathbb{R}$. Puisque $X=PY$, on a la solution générale, définie sur $\mathbb{R}$, où α,β,γ sont des constantes arbitraires dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x_1(t)=\alpha e^{-4t}+(\beta-9\gamma t)e^{2t}+e^{-3t} \\ x_2(t)=\alpha e^{-4t}+(\gamma-\beta+9\gamma t)e^{2t}+e^{-3t} \\ x_3(t)=6\alpha e^{-4t}-3\gamma e^{2t}+6e^{-3t} \end{cases}, \text{ qui s'écrit aussi } X(t)=(\alpha e^{-4t}+e^{-3t})b_1+(\beta-9\gamma t)e^{2t}b_2+\gamma e^{2t}b_3.$$

EXERCICE 3 (6 points)

3a. On a, pour $t \in [0,1]$ et $n \geq 1$, $|h_n(t)| \leq \dfrac{1}{n}$. La suite numérique $(1/n)_{n\geq 1}$ converge vers zéro, donc la suite de fonctions $(h_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément, à fortiori simplement, vers la fonction nulle sur $[0,1]$. (1 point)

3b. Pour $x \in [0,\pi]$, $0 \leq \sin x \leq x$, d'où pour $t \in [0,1]$ et $n \geq 1$, $0 \leq h_n(t) \leq \dfrac{\pi t^n}{n}$. Si $t \in [0,1[$, la série numérique $\sum \dfrac{\pi t^n}{n}$ est convergente (car la série géométrique $\sum t^n$ converge), donc la série numérique $\sum h_n(t)$ converge. Si $t = 1$, la série numérique $\sum h_n(1)$ converge et a somme nulle (car $h_n(1) = 0, n \geq 1$). La série de fonctions $\sum h_n$ est donc simplement convergente sur $[0,1]$ vers une fonction h. Puisque $h_n(t) \geq 0$, $t \in [0,1]$, $n \geq 1$, la fonction h est positive. (0,5 points).

La série $\sum h_n$ converge normalement sur $[0,1]$ si et seulement si la série numérique $\sum max_{t\in[0,1]} h_n(t)$ converge. On calcule facilement $max_{t\in[0,1]} h_n(t) = h_n((1/2)^{1/n}) = 1/n, n \geq 1$. La série harmonique $\sum 1/n$ est divergente, donc la série de fonctions $\sum h_n$ n'est pas normalement convergente sur $[0,1]$. (0,5 points)

Tout segment de $[0,1[$ est inclus dans un segment $[0,a]$, où $0 < a < 1$. On a, pour $t \in [0,a]$, $n \geq 1, 0 \leq h_n(t) \leq \dfrac{\pi a^n}{n}$. Puisque la série numérique $\sum \dfrac{\pi a^n}{n}$ converge, la série de fonctions $\sum h_n$ converge normalement sur $[0,a]$, donc sur tout segment de $[0,1[$. (0,5 points)

3c. Pour tous $0 < a < 1$, $0 \leq t \leq a$, $n \geq 1$, $|h'_n(t)| \leq |\dfrac{\pi n t^{n-1}\cos(\pi t^n)}{n}| \leq \pi t^{n-1} \leq \pi a^{n-1}$. La série numérique géométrique $\sum a^n$ converge, donc la série de fonctions continues $\sum h'_n$ converge normalement sur chaque segment de $[0,1[$ vers une fonction définie et continue sur $[0,1[$. Comme, de plus, la série de fonctions $\sum h_n$ converge simplement sur $[0,1[$, le théorème de dérivation pour les séries de fonctions nous permet d'affirmer que la fonction h est continûment dérivable sur $[0,1[$ et que $h'(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} h'_n$. (1 point)

3d. La continuité de h_n, pour $n \geq 1$ et la convergence uniforme de $\sum h_n$ sur tout intervalle $[0,x]$, $0 < x < 1$ (question 4b.) impliquent, d'après le théorème d'intégration pour les séries de fonctions, que h est intégrable sur $[0,x]$, et que $\int_0^x h(t)dt = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x h_n(t)dt$. (0,5 points).

3e. (i) Puisque la fonction h est positive, l'intégrale $\int_0^1 h(t)dt$ converge si et seulement si la fonction H est majorée sur $[0,1[$. (0,5 points)

(ii) On a, pour $n \geq 1$, $0 \leq a_n \leq \int_0^1 \dfrac{\pi t^n}{n} dt = \dfrac{\pi}{n(n+1)} = \dfrac{\pi}{n} - \dfrac{\pi}{n+1}$. La série numérique $\sum \dfrac{\pi}{n(n+1)}$ converge (série de terme général équivalent à $1/n^2$ ou série "téléscopique"), d'où la série $\sum a_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \pi$. Donc $H(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x h_n(t)dt \ \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \pi$. La fonction H est donc bornée sur $[0,1[$, d'après la question (i), la fonction h est intégrable sur $[0,1]$ et on a $0 \leq \int_0^1 h(t)dt \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \pi$. (1 point)

(iii) Soit $N \geq 1$, puisque les fonctions h_n sont positives, on a $h(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} h_n(t) \geq \sum_{n=1}^{N} h_n(t)$, $t \in [0,1]$, donc pour $0 < x < 1$, $\int_0^x h(t)dt \geq \displaystyle\int_0^x \sum_{n=1}^{N} h_n(t)dt = \sum_{n=1}^{N} \int_0^x h_n(t)dt$. Par définition de l'intégrale généralisée, on a donc

$$\int_0^1 h(t)dt = \lim_{x\to 1} \int_0^x h(t)dt \geq \lim_{x\to 1} \Big(\sum_{n=1}^{N} \int_0^x h_n(t)dt \Big) = \sum_{n=1}^{N} \lim_{x\to 1} \Big(\int_0^x h_n(t)dt \Big) = \sum_{n=1}^{N} \int_0^1 h_n(t)dt = \sum_{n=1}^{N} a_n \ .$$

Ceci étant vrai pour tout $N \geq 1$, on a $\int_0^1 h(t)dt \geq \displaystyle\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Comme dans (ii) nous avions prouvé l'inégalité $\int_0^1 h(t)dt \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, on conclut que $\int_0^1 h(t)dt = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. (0,5 points)