Université Paris Sud
Centre d'Orsay

S3 MIAS 2003-2004
Mathématiques

Corrigé du Premier Partiel de mathématiques - Le 14/11/03 - 3h

Question de cours (4 points)

1. On suppose que f et g vérifient : $0 \leq f(x) \leq g(x),\ x \in [2, +\infty[$. **(0,5 pts)** Montrons que si l'intégrale $J = \int_2^\infty g(t)dt$ est convergente, alors l'intégrale $I = \int_2^\infty f(t)dt$ est convergente.

On pose, pour tout $x \in [2, +\infty[$, $F(x) = \int_2^x f(t)dt$ et $G(x) = \int_2^x g(t)dt$. D'après le premier théorème fondamental sur la convergence des intégrales des fonctions positives, les intégrales I et J sont convergentes si et seulement si les fonctions F et G sont bornées sur $[2, +\infty[$. Comme J converge, il existe $M > 0$ tel que $G(x) \leq M,\ x \in [2, +\infty[$. D'après l'hypothèse $f \leq g$, on a alors $F(x) \leq G(x) \leq M,\ x \in [2, +\infty[$. La fonction F est majorée sur $[2, +\infty[$ et l'intégrale I est convergente. **(1,5 pts)**

2. On a $|f(x)| \leq max(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{x(\ln x)^2}) \leq \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(\ln x)^2} = g(x),\ x \in [2, +\infty[$. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente (l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}dt$ est convergente pour $\alpha > 1$). L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t(\ln x)^2}dt$ est convergente (l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\beta}$ est convergente pour $\beta > 1$). Alors l'intégrale $\int_2^{+\infty} g(t)dt$ est convergente comme somme de deux intégrales convergentes. D'après le résultat démontré dans la question 1., l'intégrale $\int_2^{+\infty} |f(t)|dt$ est convergente. L'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)dt$ est donc absolument convergente. **(2 points)**

EXERCICE 1 (6,5 points)

1a. La fonction $f : t \in]0, +\infty[\mapsto \dfrac{e^{-t^2} \sin(\sqrt{t})}{t}$ est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment $[a, b]$, avec $0 < a < b$. Il faut étudier I pour les bornes zéro et $+\infty$. L'intégrale I converge si et seulement les deux intégrales suivantes sont convergentes,

$$I_1 = \int_0^1 f(t)dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} f(t)dt \quad (\textbf{0,5 points}).$$

Etude de I_1 en zéro. On a $f(t) \geq 0,\ x \in [0, 1]$, on peut donc utiliser un équivalent de f(t) en zéro pour étudier la convergence de I_1. On a $\sin(\sqrt{t}) \sim \sqrt{t}$ et $e^{-t^2} \sim 1$ en zéro, d'où $f(t) \sim \frac{\sqrt{t}}{t} = \frac{1}{\sqrt{t}}$ en zéro. L'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{t}}dt$ est convergente, donc I_1 est convergente (et absolument convergente). **(0,75 pts)**

Etude de I_2 en $+\infty$. On a $|f(t)| \leq \frac{1}{te^{t^2}},\ t \in [1, +\infty[$. On a donc $\lim_{t \to +\infty} t^2|f(t)| = 0$, d'après le théorème de croissances comparées. Alors il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que, si $t \geq t_0,\ |f(t)| \leq \frac{1}{t^2}$. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ est convergente, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f(t)|dt$ est convergente et l'intégrale I_2 est absolument convergente. **(1 point)**

Les intégrales I_1 et I_2 étant absolument convergentes, on conclut que l'intégrale I est absolument convergente. (**(0,25 pts)**

1b. La fonction $f : t \in [3, +\infty[\mapsto \dfrac{\cos t}{t + 2\cos t}$ est continue sur l'intervalle $[3, +\infty[$, donc intégrable sur tout segment $[3, x]$, avec $x \in [3, +\infty[$. Il faut étudier J pour la borne $+\infty$. **(0,25 pts)** Utilisons pour cela une intégration par parties. Pour $x \in [3, +\infty[$,

$$F(x) = \int_3^x f(t)dt = \Big[\frac{\sin t}{t + 2\cos t}\Big]_3^x - \int_3^x \frac{(2\sin t - 1)\sin t}{(t + 2\cos t)^2}dt$$

Le premier terme du second membre a une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$ (égale à $-\frac{\sin 3}{3+2\cos 3}$).

Etudions le second terme. Posons $g(t) = \frac{(2\sin t - 1)\sin t}{(t+2\cos t)^2}$ pour $t \in [3, +\infty[$. On a $|g(t)| \leq \frac{3}{(t-2)^2}$, $t \in [3, +\infty[$, $\frac{1}{(t-2)^2} \sim \frac{1}{t^2}$ à l'infini, l'intégrale de Riemann $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ est convergente, donc l'intégrale $\int_3^{+\infty} |g(t)| dt$ converge, l'intégrale $\int_3^{+\infty} g(t)dt$ converge et $\int_3^x g(t)dt$ a une limite finie lorsque t tend vers l'infini.

Par conséquent, $F(x)$ a une limite finie lorsque t tend vers $+\infty$, donc l'intégrale J est convergente. **(1,25 pts)**

Montrons que J n'est pas absolument convergente. On a $|f(t)| \geq \frac{(\cos t)^2}{t+2\cos t} = \frac{\cos 2t + 1}{2(t+2\cos t)}$. L'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{\cos 2t}{2(t+2\cos t)} dt$ est convergente (par un raisonnement analogue à celui fait pour J). L'intégrale $\int_3^{+\infty} \frac{1}{2(t+2\cos t)} dt$ est divergente (car on intègre une fonction positive, équivalente à l'infini à $\frac{1}{2t}$ et l'intégrale de Riemann $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge). Alors la fonction $x \mapsto |f(t)|$ est somme d'une fonction dont l'intégrale converge et d'une fonction dont l'intégrale diverge, sur $[3, +\infty[$, dont l'intégrale $\int_3^{+\infty} |f(t)| dt$ diverge. **(1 point)**

1c. On pose $a_n = \int_3^{n^2} \frac{|\cos t|}{t+2\cos t} dt, \qquad b_n = \int_0^{n^2} \frac{e^{-t^2} |\sin(\sqrt{t})|}{t} dt, \quad n \geq 2.$

Etudions la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{a_n}$. L'intégrale J n'est pas absolument convergente, donc la fonction $H : x \in [3, +\infty[\mapsto \int_3^x \frac{|\cos t|}{t+2\cos t} dt$ est croissante et non majorée et a limite $+\infty$ lorsque t tend vers $+\infty$. Par conséquent la suite $(a_n)_{n\geq 2}$, où $a_n = H(n^2), n \geq 2$, est décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. D'après le théorème des séries alternées, la série $\sum \frac{(-1)^n}{a_n}$ est convergente. **(1 point)**

Etudions la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{b_n}$. Si cette série converge, la suite $(\frac{1}{b_n})_{n\geq 2}$ tend vers zéro, lorsque n tend vers $+\infty$. Or, l'intégrale I est absolument convergente, donc la suite $(b_n)_{n\geq 2}$ tend vers une limite $b \in \mathbb{R}^*$ (on intègre une fonction continue et positive qui n'est pas la fonction nulle), donc la suite $(\frac{1}{b_n})_{n\geq 2}$ tend vers la limite non nulle $\frac{1}{b}$ et la série $\sum \frac{(-1)^n}{b_n}$ est divergente. **(0,5 pts)**

EXERCICE 2 (7 points)

Soit α un nombre réel positif ou nul. On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha \ln n + (-1)^n}$, $n \geq 2$.

2a. On a $|u_n| \sim \frac{1}{n^\alpha \ln n}$ a l'infini, la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln n}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$, donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente si et seulement si $\alpha > 1$. **(0,5 pts)**.

La série $\sum u_n$ est une série alternée, la condition nécessaire de convergence, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, est satisfaite, mais la suite $(|u_n|)_{n\geq 2}$ n'est pas décroissante si $0 \leq \alpha < 1$, donc le théorème des séries alternées ne s'applique pas. Il pourrait s'appliquer au cas $\alpha = 1$ (quitte à vérifier la décroissance), mais on va plutôt utiliser un développement limité à l'infini, lorsque $0 \leq \alpha \leq 1$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln n}\Big(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln n}\Big)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln n}\Big(1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln n}(1 + o(1)\Big) = v_n - w_n,$$

$$\text{où} \qquad v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha \ln n}, \qquad w_n = \frac{1 + o(1)}{n^{2\alpha}(\ln n)^2}, \qquad n \geq 2 \quad \textbf{(0,5 points)}$$

La série $\sum v_n$ est une série alternée telle que la suite $(|v_n|)_{n\geq 2}$ est décroissante et tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, donc la série $\sum v_n$ est convergente, d'après le théorème des séries alternées. **(0,5 pts)**

Etudions la série $\sum w_n$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $1/2 \leq 1 + o(1) \leq 3/2$ pour $n \geq n_0$ (*), donc pour $n \geq n_0$, $w_n > 0$ et l'on peut utiliser le théorème des équivalents : $w_n \sim \frac{1}{n^{2\alpha}(\ln n)^2}$ à l'infini, donc $\sum w_n$ converge si $\alpha \geq 1/2$ et diverge si $0 \leq \alpha < 1/2$ (la série de Bertrand $\sum \frac{1}{n^\gamma (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\gamma > 1$ ou $\gamma = 1,\ \beta > 1$). Alors la série $\sum u_n$ converge si $\alpha \geq 1/2$, comme somme de deux séries convergentes et diverge si $0 \leq \alpha < 1/2$, comme somme d'une série convergente et d'une série divergente. **(1,25 pt)**

Conclusion. La série $\sum u_n$ est absolument convergente si $\alpha > 1$, semi-convergente si $1/2 \leq \alpha \leq 1$, divergente si $0 \leq \alpha < 1/2$. **(0,25 pts)**

2b. On suppose $\alpha = 1/2$. D'après la question précédente, la série $\sum u_n$ est semi-convergente, donc son reste d'ordre n, $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est bien défini et s'écrit

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k, \quad n \geq 2.$$

D'après le théorème des séries alternées, on a $|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k| \leq \dfrac{1}{(\sqrt{n+1}) \ln (n+1)},\ n \geq 2.$

D'après l'inégalité (*), on a $0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{3}{2n(\ln n)^2}, \quad n \geq n_0.$

La fonction $f : x \in [2, +\infty[\mapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$ est positive et décroissante sur $[2, +\infty[$, le théorème de comparaison série-intégrale dit que

$0 \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} w_k \leq (3/2) \int_n^{+\infty} f(t)dt = \dfrac{3}{2 \ln n},\ n \geq n_0$. On a donc, pour $n \geq max(3, n_0)$,

$$|r_n| \leq \frac{1}{(\sqrt{n+1}) \ln (n+1)} + \frac{3}{2 \ln n} \leq \frac{1}{2 \ln n} + \frac{3}{2 \ln n} \leq \frac{2}{\ln n}.$$

ce qui établit l'inégalité demandée, avec $M = 2$. **(1,5 pts)**

2c. Soit β un nombre réel non nul, on pose, pour tout entier $n \geq 2$, $\quad v_n = \dfrac{\beta^n}{\ln n + (-1)^n}$.

- Si $|\beta| > 1$, $\lim_{n \to +\infty} |v_n| = +\infty$ et la série $\sum v_n$ diverge.
- Si $|\beta| < 1$, $|v_n| \leq |\beta|^n, n \geq 9$, la série géométrique $\sum |\beta|^n$ est convergente, donc la série $\sum v_n$ est absolument convergente.
- Si $\beta = 1$, $v_n > 0$, $n \geq 2$ et $v_n \sim \frac{1}{\ln n}$ à l'infini. On a $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, $n \geq 2$, la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ est divergente, donc la série $\sum v_n$ est divergente.
- Si $\beta = -1$, on retrouve le cas $\alpha = 0$ étudié à la question 2a., la série $\sum v_n$ diverge.

On conclut que si $\beta \in \mathbb{R}^*$, la série $\sum v_n$ est convergente si et seulement si $|\beta| < 1$ et dans ce cas elle est absolument convergente. **(1,5 pts)**

Lorsque $\beta = 1/2$, pour $k \geq 3$, $0 < v_k \leq \dfrac{1}{2^k(\ln k + (-1)^k)} \leq \dfrac{1}{2^k(\ln k - 1)}$.

On a, pour $n \geq 2$ et $k \geq n+1$, $0 < v_k \leq \dfrac{1}{2^k(\ln (n+1) - 1)}$, donc

$$0 < r'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k(\ln (n+1) - 1)} \leq \frac{1}{\ln (n+1) - 1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

or, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1}{2^{n+1}(1 - 1/2)} = \dfrac{1}{2^n}$, d'où $\quad 0 < r'_n \leq \dfrac{1}{2^n(\ln (n+1) - 1)}$. **(1 pt)**

EXERCICE 3 (5 points)

3a. Soient a et x deux nombres nombres réels. Pour calculer $det(M_{a,x})$ on peut additionner toutes les colonnes à la première, pour mettre en facteur $x+a+2$, ensuite soustraire la troisième ligne à la quatrième ligne pour mettre $x-a$ en facteur, on a alors

$$det(M_{a,x}) = \begin{vmatrix} x & a & 1 & 1 \\ 1 & x & a & 1 \\ 1 & 1 & x & a \\ 1 & 1 & a & x \end{vmatrix} = (x+a+2)(x-a) \begin{vmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & x & a & 1 \\ 1 & 1 & x & a \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+2)(x-a) \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & x & a+1 \\ 1 & 1 & x+a \end{vmatrix} = (x+a+2)(x-a) \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & x & a+1 \\ 0 & 1-x & x-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+a+2)(x-a)(x-1) \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & x & a+1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{d'où} \quad P(x) = det(M_{a,x}) = (x+a+2)(x-a)(x-1)^2,$$

est la décomposition de P dans $\mathbb{R}[X]$ **(1,5 pts)**

3b. L'endomorphisme $f_{a,x}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$ si et seulement si $det(f_{a,x}) = det(M_{a,x}) = P(x) \neq 0$, donc si et seulement si $x \neq -a-2$, $x \neq a$ et $x \neq 1$. **(0,5 pts).**

Lorsque $a = 1$ et $x = 2$ les conditions précédentes sont satisfaites, $f_{1,2}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^4$, et $det(f_{1,2}) = 5$. L'équation à résoudre correspond à un système de Cramer, dont la solution peut être obtenue par les formules suivantes :

$$x_1 = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{5}, \; x_2 = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{5}, \text{ de façon analogue, } x_3 = \frac{-1}{5}, \; x_4 = \frac{4}{5}.$$

L'unique solution de l'équation donnée est $(-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, \frac{4}{5})$. **(1,5 pts)**

3c. On suppose $a = 2$ et $x = -4$, alors $det(f_{2,-4}) = det(M_{2,-4}) = 0$, donc $f_{2,-4}$ n'est pas un automorphisme de $\mathbb{R}^4$ et $f_{2,-4}$ n'est pas surjectif, d'où $dim(Im\ f_{2,-4}) \leq 3$. Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a $Im\ f_{2,-4} = Vect(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ ($Im\ f_{2,-4}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs colonnes de la matrice $M_{2,-4}$). Calculons le déterminant de la matrice carrée d'ordre 3, $(M_{2,-4})_{4,4}$, constituée par les trois premières lignes et les trois premières colonnes de $M_{2,-4}$. Ce déterminant vaut -39 (non nul), ce qui prouve que les trois premiers vecteurs colonnes de $M_{2,-4}$ sont linéairement indépendants. Une base de $Im\ f_{2,-4}$ est donc $\big((-4,1,1,1), (2,-4,1,1), (1,2,-4,1)\big)$.

Un vecteur $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ appartient au sous-espace $Im\ f_{2,-4}$ si et seulement si

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 & x_1 \\ 1 & -4 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & -4 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 & x_4 \end{vmatrix} = -30x_1 - 36x_2 - 45x_3 - 39x_4 = 0.$$

Une équation cartesienne de $Im\ f_{2,-4}$ est donc $10x_1 + 12x_2 + 15x_3 + 13x_4 = 0$. **(1,5 points)**

Barème du premier partiel S3 MIAS 2003

QUESTION DE COURS (4 points)

1. Enoncé : 0,5. Preuve : 1,5.

2. Une majoration de $|f(x)|$: 0,5.
CV de $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$ et $\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2}dx$: 0,5 + 0,5. Conclusion : 0,5.

EXERCICE 1. (6,5 points)

1a. Déf du pb : 0,5. CV de I_1 : 0,75. CV de I_2 : 1 Conclusion : 0,25.

1b. Déf du pb : 0,25. Engager une intégration par parties ou DL : 0,5
Prouver la CV : 0,75. Non ACV : 1.

1c. Citer le TSA : 0,25. $\sum a_n$ CV : 0,75. $\sum b_n$ DV : 0,5.

EXERCICE 2. (7 points)

2a. DL : 0,5 (sous toute forme correcte). $\sum v_n$ CV : 0,5.
CV des séries de Bertrand : 0,25. $\sum w_n$ CV : 1. Conclusion : 0,25.

2b. Majorer le reste d'une SA : 0,5. Comparer à une intégrale : 0,75. Conclusion : 0,25.

2c. $|\beta| > 1$: 0,25 $|\beta| < 1$: 0,5. $\beta = 1$: 0,25. $\beta = -1$: 0,25. Conclusion : 0,25.

EXERCICE 3. (5 points)

3a. 1,5 (à moduler suivant les erreurs de calcul).

3b. Automorphisme : 0,5. Solution : 1,5.

3c. Base : 0,5. Equation : 1.

Prochaine réunion d'enseignement :

Mercredi 18/11/03, 12h50, salle 025, Bât. 336.

Harmonisation des notes du partiel : pour les correcteurs, prévoir de corriger environ un tiers des copies. Notes à donner au secrétariat si possible le jeudi 20 novembre.

Différentiation du cours sur les suites et séries de fonctions ? Feuille 6 différenciée ?